

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Mémoire de Master

Présenté à l'Université 8 Mai 1945 GUELMA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de : Génie Civil & Hydraulique

Spécialité : Hydraulique

Option : HYDRAULIQUE URBAINE

Présenté par : Seridi Hani

**Thème : Résolution des équations de l'écoulement
transitoire par la méthode des différences finies**

Sous la Direction de : Dr Toumi Abdelouaheb

Jun 2023

Remerciement

Je remercie en premier lieu Allah, le seigneur de tous les temps qui m'a fournis de la patience au moment de besoin, de la force au moment de la faiblesse et de la volonté contre le désespoir, pour son aide et sa grande miséricorde, car c'est grâce à lui que je suis arrivée à accomplir et à présenter ce modeste travail.

Je tiens à remercier mes très chers parents pour leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.

Je saisis l'occasion pour remercier mes frères Merouane, Zaky ainsi que mes sœurs : Manel, Wissem pour leur assistance matérielle, financière et scientifique, assistance sans laquelle je ne pourrai arriver au bout de ce travail scientifique.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers ma famille, mes amis et mes collègues d'Hydraulique urbaine. Qui m'ont soutenu durant les moments de doute et d'abandon, qui ont plus cru en moi.

Mes sincères remerciements à tous les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'examiner ce travail.

Un remerciement spécial à mon encadreur Dr. TOUMI Abdelouaheb pour la clarté de ses enseignements, son soutien indéfectible, sa patience et ses conseils judicieux à toute épreuve afin que cette thèse soit menée à bien. J'ai eu le plaisir de travailler sous votre direction.

Je remercie tous les enseignants du département d'hydraulique qui ont donné de leur savoir.

Et Grand merci à toute personne ayant aidé de près ou de loin à l'accomplissement de ce modeste travail

DEDICACE

Je dédie ce travail à :

A mes chers parents...

Ma mère qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que dieu la garde,

Mon père qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui. Qui n'a pas pu voir mon travail Que Dieu lui fasse miséricorde,

Quoi que je dise ou que je fasse, je n'arrivai jamais à vous remercier comme il se doit. C'est grâce à vos encouragements, vos bienveillances et votre présence à mes côtés, que j'ai réussi ce respectueux parcours. Je souhaite que vous soyez fière de moi, et que j'ai pu répondre aux espoirs que vous avez fondé en moi.

A mes chers frères et sœurs...

Merci pour vos soutiens moral, vos confiances et vos conseils précieux, qui m'ont aidé dans les moments difficiles. Je vous souhaite le bonheur et la réussite dans vos vies.

A toute ma famille et mes amis...

À travers ses lignes je ne peux pas vous décrire tous mes sentiments d'amour, le seul mot que je peux dire est merci, vraiment merci beaucoup à toute personne qui a contribué à la réalisation de ce mémoire.

Listes des figures

Figure	Page
Fig. (1.1) : Déplacement d'un élément liquide	2
Fig. (1.2) : Façons d'assemblage et d'encrage d'une conduite	4
Fig. (1.3) : Les forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite sous pression	5
Fig. (2.1) : Diagramme de la méthode d'interpolation de Hartree	13
Fig. (2.2) : Diagramme (x,t) de la méthode algébrique	14
Fig. (2.3) : Maillage orthogonal en fonction de la direction x et du temps de la méthode des différences finies	16
Fig. (2.4) : Maillage d'un schéma explicite en différences finies	17
Fig. (2.5) : Maillage d'un schéma implicite en différences finies	17
Fig. (3.1) : Maillage en temps et en espace de la méthode explicite en différences finies	35
Figure(5.1) :Schéma du système hydraulique 'une vanne motorisée alimentée en eau à partir d'un réservoir	62
Figure (5.2) : Sortie de l'eau à partir d'un réservoir à charge constante	63
Figure (5.3) : Fonctions de fermeture pour différentes valeurs de l'exposant m	65
Figure (5.4) : Représentation schématique du robinet d'arrêt sphérique	66
Figure (5.5) : Représentation schématique du robinet-vanne carré	67
Figure (5.6) : Représentation schématique du robinet à tournant sphérique	67
Figure (5.7) : Représentation schématique de la vanne papillon	68
Figure (5.8) : Représentation schématique de la vanne à pointeau	69
Figure (5.9) : Représentation schématique du robinet-vanne circulaire	70
Figure (5.10) : Vanne à clapet simple	70
Figure (5.11) : Vanne à clapet double	71
Figure (5.12) : Vanne à cage	71
Figure (5.13) : Vanne à clapet rotatif excentré	72
Figure (5.14) : Coupe transversale de la conduite	74
Figure (5.15) : Organigramme de calcul des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire	75
Figure(5.16) :Variation de la hauteur manométrique totale à la vanne	76
Figure (5.17) : Variation de la surpression à la vanne pour une loi de fermeture linéaire	77
Figure (5.18) : Variation de la dépression à la vanne pour une loi de fermeture linéaire	78
Figure (5.19) : Variation de la hauteur manométrique totale à la vanne	78
Figure(5.20) : Variation de la surpression à la vanne pour une loi de fermeture quadratique	79
Figure (5.21) : Variation de la dépression à la vanne pour une loi de fermeture quadratique	80
Figure (5.23) : variation au fil du temps de la surpression et de la loi optimale	81

Liste des tableau

Tableau	Page
Tableau 1: Caractéristiques des matériaux utilisés	74
Tableau 2: Caractéristiques du réservoir, du débit et du fluide	74

Sommaire

Titre	Page
Remerciement	
Dédicace	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Sommaire	
Résumé	
Introduction générale	I
Chapitre I : Equations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous-pression	
1.1 Introduction	2
1.2 Modèle mathématique de l'écoulement transitoire	2
1.2.1 Equation de continuité	2
1.2.2 Equation dynamique	5
1.3 Conclusion	9
Chapitre II : Méthodes de résolution des équations de l'écoulement transitoire	
2.1 Introduction	11
2.2 Méthode de résolution des équations de l'écoulement transitoire	11
2.2.1 Méthode arithmétique	11
2.2.2 Méthode d'interpolation de Hartree	13
2.2.3 Méthode algébrique	14
2.2.4 La méthode des différences finies	15
2.2.4.1 Approximation en différences finies	15
2.2.4.2 Schéma explicite	16
2.2.4.3 Schéma implicite	17
2.2.4.4 Schéma mixte ou schéma de Crank-Nicolson	17
2.2.4.5 Schéma de Lax-Friedrichs	18
2.2.4.6 Analyse de l'approximation par la méthode des différences finies	18
2.2.4.6.1 Erreur de troncature	18
2.2.4.6.2 Erreur d'arrondi	18
2.2.4.6.3 Consistance d'un schéma aux différences finies	19
2.2.4.6.4 Stabilité du schéma explicite	19
2.2.4.6.5 Critère de stabilité et choix des pas d'espace et de temps	19
2.2.4.6.6 Convergence du schéma explicite	20
2.2.5 Méthode des caractéristiques ou (MDC)	20
2.2.6 Méthode des Eléments Finis (MEF)	25
2.2.7 Méthode des Volumes Finis (MVF)	25
2.3 Conclusion	26
Chapitre III : Résolution des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des différences finies	
3.1 Introduction	28
3.2 Transformation des équations de l'écoulement transitoire	28
3.3 Application de la méthode des différences finies	31
3.3.1 Application du schéma explicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire	31
3.3.2 Application du schéma implicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire	33
3.3.3 Application du schéma de (Crank-Nicolson) ou mixte en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire	34
3.3.4 Application du schéma de Lax-Friedrichs aux équations de l'écoulement	35

Sommaire

transitoire	
3.3.5 Les nœuds aux limites (frontières)	37
a) Au niveau du réservoir	37
b) Au niveau de la vanne	37
3.4 Conclusion	38
Chapitre IV : Méthodes de résolution des systèmes d'équations	
4.1 Introduction	40
4.2 Méthodes directes	40
4.2.1 Méthode de Cramer	40
4.2.2 Méthode d'inversion de la matrice	41
4.2.3 Méthodes de diagonalisation	41
a) Rappel sur les valeurs et les vecteurs propres	41
4.2.4 Méthode d'orthogonalisation ou méthode de factorisation QR	42
a) Méthode de Householder	42
b) Méthode de Schmit	43
c) Méthode de Givens	44
4.2.5 Méthode de pivot de Gauss ou de Gauss-Jordan	44
a) Algorithme de la méthode du pivot de Gauss : Triangularisation	45
b) Algorithme de la méthode du pivot de Gauss : Remontée et résolution	45
4.1.6 Méthode de factorisation LU	45
a) Résolution de système la méthode de factorisation	46
b) Théorèmes	46
c) Algorithme générale de la décomposition LU	47
d) Calcul de déterminant	47
4.2.7 Méthode de factorisation Cholevsky	47
a) Principe de la méthode de Cholevsky	47
b) Algorithme de la méthode de Cholevsky	48
c) Résolution de système d'équations par la méthode de Cholevsky	48
d) Calcul de déterminant par la méthode de Cholevsky	49
4.3 Méthodes indirectes	49
4.3.1 Méthode de Jacobi	49
a) Principe de construction	49
b) Algorithme	49
c) Erreur	49
d) Convergence	49
e) Décomposition par la méthode de Jacobi	50
f) Résidu	50
g) Test d'arrêt	50
4.3.2 Méthode du point fixe (SNL)	51
4.3.3 Méthode de Newton-Raphson (S.N.L)	51
4.3.4 Méthode de Newton modifiée (Système Non Linéaire)	52
a) Algorithme de la méthode de Newton modifiée	53
b) Comment tester la précision du vecteur solution (étape 6 de l'algorithme) ?	53
4.3.5 Méthode du gradient conjugué	53
a) Description du problème	54
b) Directions conjuguées	54
c) Construction des directions conjuguées	54
d) Algorithme du gradient conjugué	54
4.3.6 Méthode de Gauss Seidel	55
a) Principe de construction	55

Sommaire

b) Algorithme de la méthode de G-S	55
c) Erreur de la méthode de G-S	55
d) Convergence de la méthode de G-S	55
e) Décomposition de la méthode de G-S	56
f) Résidu	56
g) Test d'arrêt de la méthode de G-S	56
4.3.7 Méthode de Gauss Seidel accélérée (Successive Over Relaxation)	57
4.3.8 Méthode de Gauss-Seidel Accélérée-Newton ou Lieberstein	57
4.3.9 Méthode de Broyden	58
4.3.10 Méthode d'approximations successives	58
4.3.11 Résolution du système tri-diagonal	59
4.4 Conclusion	60
Chapitre V : Application, résultats et discussion	
5.1 Introduction	62
5.2 Modèle physique et conditions aux limites	62
5.2.1 Modèle physique	62
5.2.2 Conditions aux limites	63
5.2.2.1 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'alimentation à niveau constant	63
5.2.2.2 Conditions aux limites au niveau de la vanne	63
5.3 Types de vannes	65
5.3.1 Vanne sphérique	66
5.3.2 Vanne carrée	66
5.3.3 Vanne à bille	67
5.3.4 Vanne à papillon	68
5.3.5 Vanne à pointeau	68
5.3.6 Vanne circulaire	69
5.3.7 Vanne à clapet simple	70
5.3.8 Vanne à clapet double	70
5.3.9 Vanne à cage	71
5.3.10 Vanne à clapet rotatif excentré	71
5.4 Equations de l'écoulement transitoire	72
a) cas d'une conduite libre	72
b) cas d'une conduite enterrée	73
5.5 Cas des fermetures lentes	76
5.5.1 Cas de fermeture linéaire	76
5.5.1.1 Variation de la surpression	77
5.5.1.2 Variation de la dépression	77
5.5.2 Cas de fermeture quadratique	78
5.5.2.1 Variation de la surpression	79
5.5.2.2 Variation de la dépression	79
5.6 Recherche de la loi optimale	80
5.7 Conclusion	81
Conclusion générale	83
Références bibliographiques	

Résumé

Résumé :

Le présent travail consiste à donner une idée sur les écoulements transitoires dans les réseaux sous pression, il met en évidence les équations régissant ces écoulements, les méthodes utilisées pour les résoudre, et enfin la mise en implémentation de tous les expressions et modèles obtenus. Le schéma en différences finies de Peter Lax et Kurt Friedrichs est utilisé pour résoudre les équations de type hyperbolique obtenues. Un système hydraulique, composé d'un grand réservoir, une conduite et une vanne automatisable (R – C –V), est adopté pour réaliser le calcul des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire.

Les résultats obtenus montrent que les paramètres hydrauliques, en écoulement transitoire, changent brusquement en un laps de temps, et peuvent engendrer des effets sur le système adopté d'une part, et d'autre part les courbes donnant la variation au fil du temps de la surpression et de la dépression ont été tracées pour les lois linéaire, quadratique et optimale. Ces courbes sont de très grande utilité lors du choix du bon temps de fermeture en évitant les surpressions et les risques dues à cavitation.

Mots clés : Ecoulement transitoire – modèle mathématique – méthodes de résolution - Méthode de Lax-Friedrichs – Surpression et dépression – temps optimaux de fermeture.

Abstract :

The present work consists in giving an idea on the transitory flows in the networks under pressure, it highlights the equations governing these flows, the methods used to solve them, and finally the setting in implementation of all the expressions and models obtained. The finite difference scheme of Peter Lax and Kurt Friedrichs is used to solve the obtained hyperbolic type equations. A hydraulic system, composed of a large reservoir, a pipe and an automatable valve (R – C –V), is adopted to calculate the hydraulic parameters in transient flow.

The results obtained show that the hydraulic parameters, in transient flow, change abruptly in a period of time, and can generate effects on the system adopted on the one hand, and on the other hand the curves giving the variation over time of overpressure and depression were plotted for linear, quadratic and optimal laws. These curves are very useful when choosing the right closing time to avoid overpressure and the risks due to cavitation.

Keywords: Transient flow – mathematical model – resolution methods - Lax-Friedrichs method – Overpressure and depression – optimal closing times.

Résumé

الملخص :

تمثل العمل الحالي في إعطاء فكرة عن التدفقات العابرة في شبكات الضغط، ويسلط الضوء على المعادلات التي تحكم هذه التدفقات، والطرق المستخدمة لحلها، وأخيراً تنفيذ جميع التعبيرات والنماذج الناتجة. يُستخدم مخطط الاختلاف المحدود لبيتر لأكس وكورت فريديش لحل المعادلات الزائدية التي تم الحصول عليها. يعتمد نظام هيدروليكي، يتكون من خزان كبير وخط وصمام ألي (R-C-V) ، لإجراء حساب البارامترات الهيدروليكية في التدفق العابر.

تظهر النتائج التي تم الحصول عليها أن المعلمات الهيدروليكية، في التدفق العابر، تتغير فجأة في غضون فترة زمنية، ويمكن أن يكون لها تأثيرات على النظام المعتمد من ناحية، ومن ناحية أخرى، فإن المنحنيات التي تعطي الاختلاف بمرور الوقت من الضغط الزائد والاكنتاب تم رسمها للقوانين الخطية والتربعية والأفضل. هذه المنحنيات مفيدة جداً عند اختيار وقت الإغلاق المناسب لتجنب الضغط الزائد ومخاطر التجويف.

كلمات مفتاحية: التدفق العابر-نموذج رياضي-طرق الحل-طريقة لأكس-فريديشس-ضغط زائد وانخفاض - أوقات الإغلاق المثلى

Introduction Générale

Introduction générale

La modélisation et la simulation des phénomènes hydrauliques ont connu un développement imaginaire avec l'essor des techniques de calcul et des outils informatiques assez sophistiqués. Les équations de l'écoulement transitoire dans les réseaux sous pression font partie de ces phénomènes, une raison qui nous a poussé à aborder ce genre de sujet dans un objectif à trouver des solutions aux problèmes d'ordre pratique.

Nous allons aborder ce travail, par la démonstration détaillée des équations de l'écoulement transitoire dans les réseaux sous pression.

Dans un second chapitre, les méthodes utilisées pour résoudre ces équations seront notre cible afin de mettre en évidence chaque méthode, et par la suite choisir l'une pour entreprendre la suite du travail.

Le troisième chapitre s'étale sur la mise en pratique de méthode choisie pour résoudre les équations de l'écoulement transitoire.

Le quatrième traitera les méthodes de résolutions des systèmes d'équations linéaire et non linéaire alors que le cinquième chapitre, qui est le vifs de ce travail, est consacré à la mise en pratique de tous les modèles mathématiques obtenus et méthodes de résolutions adoptées.

Chapitre I

Equations de l'écoulement
transitoire dans les conduites
sous pression

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la démonstration des équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression tout en détaillant les paramètres de base de ces équations.

1.2 Modèle mathématique de l'écoulement transitoire

Il est primordial lors de l'étude des écoulements transitoires de présenter les modèles mathématiques pouvant aider le concepteur des systèmes d'adduction à fournir les moyens optimaux de protection contre les effets nocifs de l'augmentation brutale des paramètres de cet écoulement. Ces modèles sont décrites fidèlement par les équations de base établies par Saint-Venant démontrées successivement à partir des équations de la continuité et de la dynamique.

1.2.1 Equation de continuité

L'expression de l'équation de continuité sera examinée en analysant les déformations de masse d'un volume de liquide entre les instants t et $t+\Delta t$. Comme l'indique la figure (1.1), considérons comme constante cette masse exprimée par, $\rho.V = \rho.S \Delta x$, reste constante (Munier 1980 ; Ouragh 1971). [1] [2]

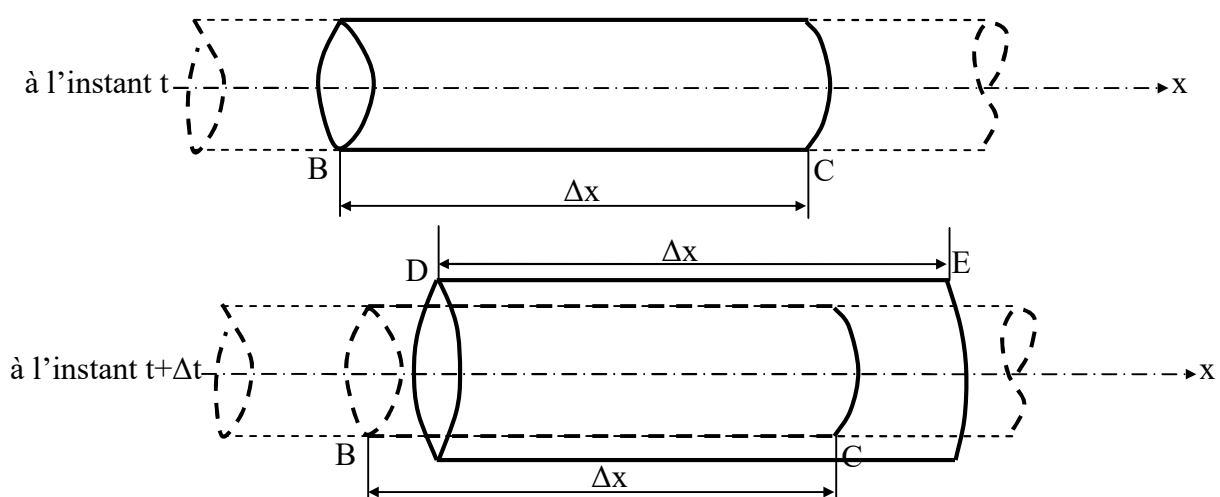


Fig. (1.1): Déplacement d'un élément liquide

La variation de la masse au cours du temps est nulle, ce qui permet d'écrire.

$$dM = 0 \Rightarrow d(\rho.S.\Delta x) = 0$$

Avec :

- ρ : la masse volumique du liquide.
- S : la section radiale.
- Δx : la variation de longueur de l'élément liquide.

D'où

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{ds}{s} + \frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad (1.1)$$

Variation de longueur de l'élément liquide

$$\frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt \quad (1.2)$$

Où u est la vitesse d'écoulement sans la direction x.

Variation de la masse volumique de l'élément liquide

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K} \quad (1.3)$$

où : K est la compressibilité du liquide et dp la variation de la pression

Variation de section de l'élément liquide

$$\frac{dS}{S} = \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \cdot dP \quad (1.4)$$

avec :

D : diamètre intérieur de la conduite;

e : Epaisseur de la conduite;

C : coefficient d'ancrage

E : Module de Young du matériau.

Il suffit de remplacer chaque terme de l'équation (1.1) par les expressions données dans les équations (1.2), (1.3) et (1.4) pour obtenir l'expression de l'équation de continuité en régime transitoire.

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \cdot dP + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dt = 0 &\Rightarrow \left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right) \cdot dP + \frac{\partial u}{\partial x} dt = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right) \cdot \frac{dP}{dt} = 0 &\quad (1.5) \end{aligned}$$

On voit que le coefficient de déformabilité $\left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right)$ dépend d'une part de la compressibilité du liquide, K, et d'autre part des caractéristiques du tuyau $\frac{D}{E \cdot e}$ (mince ou épais) et de la façon dont il est assemblé et ancré représenté par le coefficient C (Munier 1980; Ouragh 1971. [1] [2])

Le coefficient C qui dépend de la façon d'assemblage et d'ancrage de la conduite s'écrit comme suit :

$$C = \left(1 - \frac{\nu K'}{2}\right) \frac{d}{d+e} + 2(1+\nu) \frac{e}{d} \quad (1.6)$$

Où : ν est le coefficient de Poisson et K' dépend de l'ancrage. Si $C=1$, l'expression de la célérité devient celle obtenue par Allievi.

trois cas d'assemblage et d'ancrage sont illustrés dans la figure (1.2)

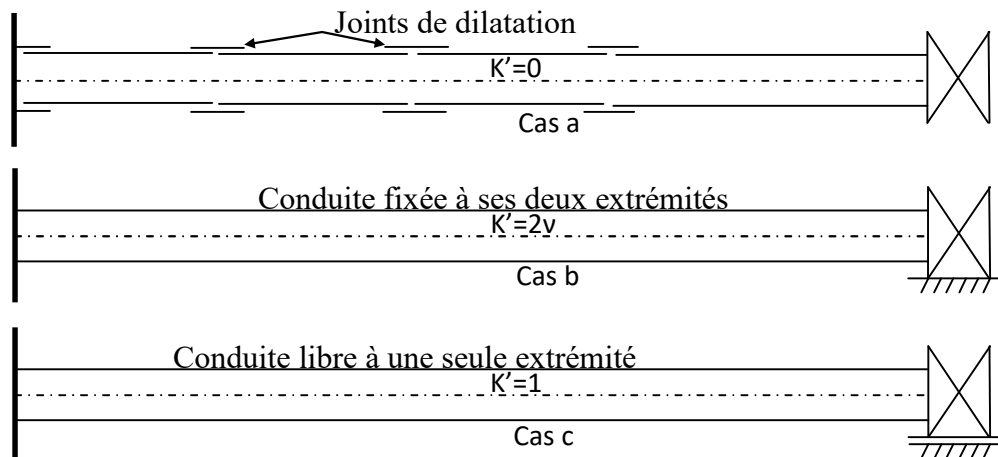


Fig. (1.2) : Façons d'assemblage et d'encrage d'une conduite

L'application de cette expression pour différents cas d'ancrage permet d'écrire :

- a) $K'=0$ pour le cas d'une conduite équipée de joints de dilatation.
- b) $K'=2\nu$ pour le cas d'une conduite fixée à ses deux extrémités empêchant tout déplacement longitudinal.
- c) $K'=1$ pour une conduite libre à une seule extrémité.

Ce terme est donc une caractéristique de l'installation sur laquelle repose le phénomène du coup de bélier, par conséquent on pose :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{E \cdot e} \cdot C \right) \quad (1.7)$$

La constante « a » représente la vitesse de propagation de l'onde dans le liquide en régime transitoire.

Comme la dérivée totale de la pression dans une seule dimension, dans ce cas la direction x, s'écrit :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1.8)$$

L'équation (1.5) devient:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D \cdot C}{E \cdot e} \right) \cdot \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0$$

$$\rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.9)$$

L'expression (1.8) est la première équation de Saint Venant.

1.2.2 Equation dynamique

La deuxième équation de Saint Venant peut être obtenue en appliquant le théorème des quantités de mouvement sur un élément de petit volume se déplaçant à l'intérieur du tube pendant la propagation de l'onde [2]. La figure (1.3) montre les différentes forces exercées sur un élément liquide en mouvement dans une conduite forcée.

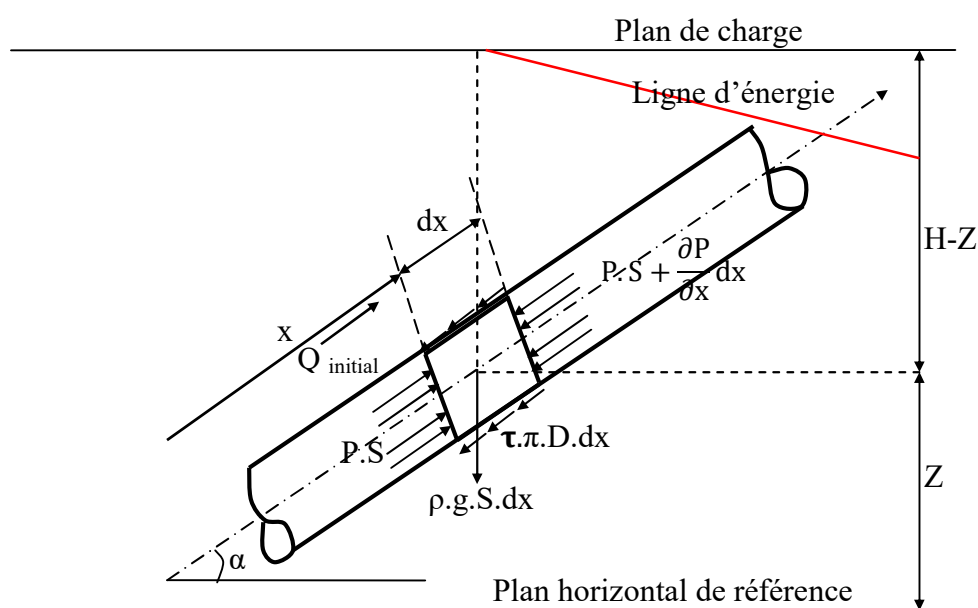


Fig. (1.3) : Les forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite sous pression

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = \sum F_{\text{extérieures}} \quad (1.10)$$

Avec :

$\sum F_{\text{extérieures}}$: La somme des forces extérieures,

M : La masse de l'élément liquide,

U : La vitesse moyenne d'écoulement.

Ce qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = u \frac{dM}{dt} + M \cdot \frac{du}{dt} \quad (1.11)$$

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement, on a donc $\frac{dM}{dt} = 0$, ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = M \frac{du}{dt} = \rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{du}{dt} \quad (1.12)$$

Notons tout d'abord :

$$\frac{dZ}{dX} = \sin(\alpha) \text{ et } P = \rho g(H - Z) \text{ en négligeant les termes en } \frac{u^2}{2g}$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite en prenant la direction de l'écoulement comme sens positif sont :

Les forces de pression hydrostatique

$$F_P = P \cdot S - \left(P \cdot S + \frac{\partial P}{\partial x} S \cdot dx \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} S \cdot dx$$

La force de gravité qui est représentée par le poids de l'élément liquide.

$$F_{\text{Poids}} = -\rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha)$$

La force de frottement :

$$F_{\text{frottement}} = -\tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx$$

Où : τ est la contrainte tangentielle visqueuse (N/m^2).

Déterminons $\Sigma F_{\text{extérieures}}$ tout en se basant sur la figure 2.

$$\Sigma F_{\text{extérieures}} = -\frac{\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx \quad (1.13)$$

Dans cette dernière expression on a négligé le terme contenant la variation de la section le long de l'élément.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Déterminons l'expression $\tau \cdot \pi \cdot D$, si les pertes de charge sont représentées par la formule de Darcy-Weisbach.

$$\Delta H = \frac{\lambda L u^2}{D 2g}$$

La variation de la pression s'écrit :

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot \Delta H = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D 2g}$$

On peut écrire alors les forces de frottement F_r , sur un tronçon de longueur L , par l'une des deux formules suivantes :

$$F_{\text{frottement}} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L \text{ ou } F_{\text{frottement}} = \Delta P \frac{\pi D^2}{4}$$

D'où l'on déduit facilement

$$\tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D 2g} \frac{\pi D^2}{4}$$

Le gradient hydraulique qui est le rapport entre la perte de charge et la longueur s'écrit :

$$I_{\text{Hydraulique}} = \frac{\Delta H}{L} = \frac{\frac{\lambda L u^2}{D 2g}}{L} = \frac{\lambda u^2}{D 2g}$$

Posons $j = I_{\text{Hydraulique}}$, nous aurons :

$$j = \frac{\lambda u^2}{D 2g}$$

$$\tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D 2g} \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \tau \cdot \pi \cdot D = \rho \cdot g \cdot j \cdot S \quad (1.14)$$

Où :

τ : la tension unitaire de frottement à la paroi en (N/m^2);

λ : coefficient de résistance ou de Darcy ;

D : diamètre intérieur de la conduite ;

U : Vitesse moyenne d'écoulement.

Portons l'expression de $\tau \cdot \pi \cdot D$ dans l'équation (1.14) on obtient :

$$\sum F_{\text{extérieures}} = \frac{-\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \rho \cdot g \cdot j \cdot S \cdot dx \quad (1.15)$$

En portant l'équation (1.15) dans l'équation (1.13) on aura :

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = \sum F_{\text{extérieures}}$$

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{du}{dt} = \frac{-\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \rho \cdot g \cdot j \cdot S \cdot dx$$

Simplifions par $\rho.S.dx$, nous obtenons :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin(\alpha) - j \cdot g \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g(\sin(\alpha) + j)$$

Où autrement écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \quad (1.16)$$

L'expression (1.16) est la seconde équation de Saint Venant.

Comme la pression appliquée sur l'élément liquide s'écrit :

$$P = \rho g(H - Z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

Puisque

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \sin(\alpha)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \left(\rho \cdot g \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \sin(\alpha) \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j)$$

$$\frac{du}{dt} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - g \cdot \sin(\alpha) = -g \cdot (\sin(\alpha) + j) \Rightarrow \frac{du}{dt} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j$$

Ecrivons la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse en fonction des dérivées partielles sans oublier que :

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Portons cette dernière dans la précédente on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j \quad (1.17)$$

Nous pouvons également remplacer, la dérivée totale de la vitesse, dans la seconde équation de Saint Venant, nous aurons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \quad (1.18)$$

L'équation (1.17) est la deuxième équation de Saint Venant.

Donc, les équations qui décrivent les phénomènes des écoulements transitoires en charge dans les réseaux d'adduction hydrauliques, sont les équations (1.9) et (1.18) formant le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (1.19)$$

Ces deux équations expriment la variation de deux paramètres à savoir : la vitesse et la pression dans le temps, t, et dans la direction de l'écoulement, x.[2] [1]

1.3 Conclusion

Les deux équations de Saint- Venant sont obtenues, en appliquant les équations de la continuité et de la quantité de mouvement, permettent de traduire tous les mouvements transitoires dans les conduites sous pression. Elles permettent également de fournir certaines grandeurs physiques, tels que les relations de la célérité d'onde de la vitesse et de la pression en fonction du temps.

Chapitre II

Méthodes de résolution des
équations de l'écoulement
transitoire

2.1 Introduction

La modélisation mathématique de l'écoulement transitoire repose sur la résolution d'équations différentielles qui décrivent les mouvements et les interactions du fluide. Cependant, ces équations sont souvent complexes et ne peuvent être résolues analytiquement. C'est pourquoi nous avons recours à des méthodes numériques pour obtenir des solutions approchées.

Dans ce chapitre, nous explorerons les différentes méthodes de résolution utilisées pour modéliser l'écoulement transitoire. Nous examinerons les méthodes classiques telles que les différences finies, les éléments finis et les volumes finis, ainsi que d'autres approches numériques avancées.

L'objectif principal de ce chapitre est de fournir une compréhension approfondie des méthodes de résolution utilisées pour étudier l'écoulement transitoire. Nous discuterons des principes fondamentaux de chaque méthode.

En comprenant les différentes méthodes de résolution et en acquérant les compétences nécessaires pour les mettre en œuvre, nous serons en mesure de modéliser et de simuler avec précision l'écoulement transitoire dans des systèmes complexes.

2.2 Méthode de résolution des équations de l'écoulement transitoire

2.2.1 Méthode arithmétique

La méthode arithmétique, utilisée pour analyser l'écoulement transitoire, est basée sur deux hypothèses qui sont[3] :

- a) Pertes de charge négligeable
- b) La conduite est supposée horizontale.

L'équation de la dynamique appliquée à une portion de conduite horizontale de longueur L et d'extrémité A et B en tenant compte des hypothèses précédentes devient :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{\gamma}$$

Force de frottement :

$$\vec{F}_{\text{friction}} = \vec{\tau} \cdot \vec{S}$$

Dans notre cas, la force de frottement est négligeable d'où :

$$F_{\text{friction}} = -\tau \cdot \pi \cdot D \cdot dx = 0$$

Force de gravité qui est représentée par le poids de l'élément liquide :

$$\vec{F}_{\text{weight}} = m \cdot \vec{g} \Rightarrow F_{\text{weight}} = -\rho \cdot S \cdot dx \cdot g_x = -\rho \cdot S \cdot dx \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

La conduite est horizontale, l'angle $\alpha=0$ et par conséquent la projection de g selon x est égale à $g.\sin(0)=0$.

Forces de pression hydrostatique :

$$F_p = P.S - \left(P.S + \frac{\partial P}{\partial x} S. dx \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} S. dx \quad (2.1)$$

Selon la direction x la projection de l'accélération s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= \gamma_x = \frac{du}{dt} \\ m\vec{\gamma} &= m \frac{du}{dt} = \frac{d(m.u)}{dt} = \frac{d(\rho.S. dx. u)}{dt} = \frac{du(\rho.S. dx)}{dt} \\ \frac{-\partial P}{\partial x} S. dx &= \frac{du. (\rho.S. dx)}{dt} \\ \frac{du. (\rho.S. dx)}{dt} &= \frac{-\partial P}{\partial x} S. dx \end{aligned}$$

Divisons les deux membres par $(\rho.s.dx)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{-\partial P}{\rho. \partial x} \\ P &= \rho g(H - Z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial Z}{\partial x} &= \sin(\alpha) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \rho g. \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= \frac{dH}{dx} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g. \frac{dH}{dx} \\ \frac{du}{dt} &= \frac{-1}{\rho} (\rho g) \frac{dH}{dx} \\ \frac{du}{dt} + g \frac{dH}{dx} &= 0 \Rightarrow \frac{dH}{dx} + \frac{1}{g} \frac{du}{dt} = 0 \\ dH + \frac{1}{g} \frac{dx}{dt} du &= 0 \quad (2.2) \end{aligned}$$

Le rapport (dx/dt) représente la vitesse de l'onde dans la conduite, elle étant positive si l'écoulement a lieu dans le sens de l'écoulement permanent et elle négative dans le sens inverse, ce qui permet d'écrire l'équation précédente comme suit :

$$dH \pm a \frac{1}{g} du = 0 \Rightarrow d\left(H \pm a \frac{1}{g} u\right) = 0 \quad (2.3)$$

$$H \pm a \frac{1}{g} u = \text{constante} \quad (2.4)$$

La méthode arithmétique est une méthode simple et classique basée sur le principe de la conservation d'énergie. Le terme à gauche représente la charge en régime transitoire.

$$H_A \pm a \frac{1}{g} u_A = H_B \pm a \frac{1}{g} u_B \quad (2.5)$$

Où les inconnues (H_B, u_B) au point B peuvent être déterminées à partir des valeurs (H_A, u_A) déjà connues au point A.

Cette méthode a été utilisée dans le temps vu le manque de moyens informatiques. Actuellement elle n'est plus applicable car elle ne représente pas la réalité des écoulements (conduites généralement inclinées, pertes de charge souvent importantes).

2.2.2 Méthode d'interpolation de Hartree

La méthode des caractéristiques telle quelle a été présentée peut s'avérer très mal aisée dans le cas des réseaux de conduites ayant des caractéristiques très différentes. En effet, par exemple le fait que cette méthode impose de choisir des points de discrétisation aux diverses jonctions peut conduire à des pas de temps extrêmement petits d'où des temps de calculs très grands.

La méthode de Hartree consiste à discrétiser l'ensemble des tronçons avec un maillage constant où le pas de temps Δt et le pas d'espace Δx sont constants.[3]

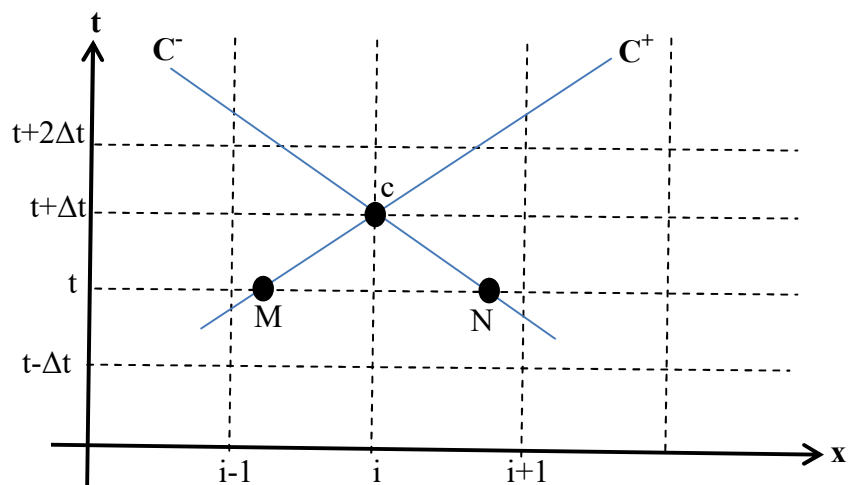


Fig. (2.1): Diagramme de la méthode d'interpolation de Hartree

Les inconnus débits et hauteurs au temps $t+\Delta t$ au point i seront non pas calculés à partir des points $(i-1)$ et $(i+1)$ au temps t mais à partir des points M et N au temps t , et où les caractéristiques C^+ et C^- passant par c au temps $t+\Delta t$ sont issues justement de ces points M et N . Une seule condition, dite de courant, doit être satisfaite :

$$\Delta t \leq \Delta x / |u \pm a| \quad (2.6)$$

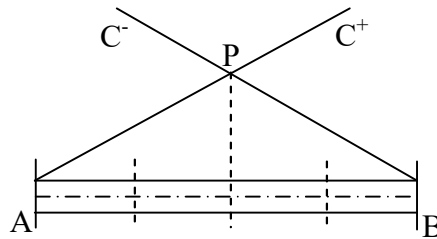
C'est-à-dire que M et N doivent être situés entre les points $(i-1)$ et $(i+1)$.

2.2.3 Méthode algébrique

Les équations caractéristiques C^+ et C^- ont été développées pour donner naissance à une nouvelle méthode appelée méthode algébrique. La nouvelle formulation est caractérisée par une adaptation facile aux conditions pratiques.

$$C^+ : H(P) = H(A) - R[Q(P) - Q(A) - T \cdot Q(A)|Q(A)|] \quad (2.7)$$

$$C^- : H(P) = H(B) + R[Q(P) - Q(A) + T \cdot Q(A)|Q(A)|] \quad (2.8)$$



Ainsi donc les inconnus hauteurs/débits au point extrême B au temps $(t+\Delta t)$ peuvent être déterminés à partir du point A . De même les inconnues hauteurs / débits au point A peuvent être également déterminés à partir du point B .

$$C^+ : H_B(J) = H_A(J - P) - R[Q_B(J) - Q_A(J - P)] - T \cdot Q_A(J - P)|Q_A(J - P)| \quad (2.10)$$

$$C^- : H_A(J) = H_B(J - P) - R[Q_A(J) - Q_B(J - P)] - T \cdot Q_B(J - P)|Q_B(J - P)| \quad (2.11)$$

Avec $T'=T.P$

P indique le nombre de petits tronçons, résultant de la discrétisation de la conduite.

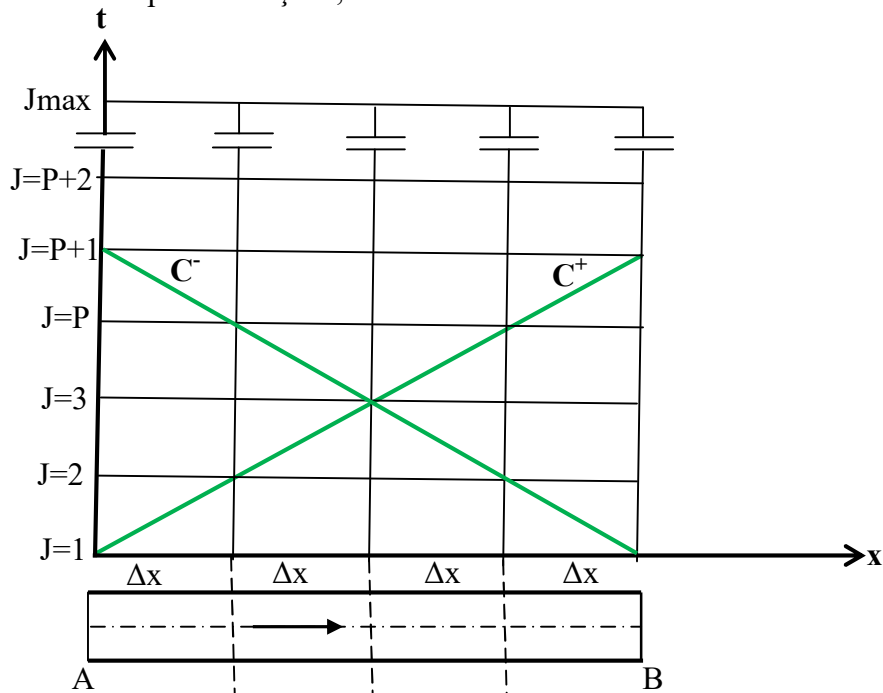


Fig (2.2): Diagramme (x,t) de la méthode algébrique

Le temps $t=(J-P).\Delta t$ correspond au régime transitoire où $J=P, \dots, J_{max}$.

$$J_{max}=(t_{max}/\Delta t)+P+1 \quad (2.12)$$

Avec :

t_{max} : temps maximal correspondant au régime transitoire.

Les valeurs $H_A(1), \dots, H_A(P), Q_A(1), \dots, Q_A(P)$ et $H_B(1), \dots, H_B(P), Q_B(1), \dots, Q_B(B)$ sont celles du régime permanent.

L'utilisation de la méthode algébrique nous permettra de connaître et de suivre l'évolution des paramètres (Q,H) aux points critiques du système d'adduction sans faire passer par les points intermédiaires résultants de la discrétisation tout en conservant un pas de temps Δt petit.[3]

2.2.4 La méthode des différences finies

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des opérateurs de différences finies basés sur des intervalles de temps et d'espace finis Δt et Δx , puis à résoudre les équations algébriques obtenues en tenant compte des conditions initiales et aux limites. Ainsi, le domaine de variation continu du problème se trouve transformé en un ensemble finis de points (nœuds) où la solution sera recherchée. Ce domaine discret est alors délimité par des frontières formant par conséquent un réseau de points de calcul, appelé aussi grille de calcul

2.2.4.1 Approximation en différences finies

La méthode des différences finies consiste à remplacer les dérivées partielles aux points du maillage par des développements de séries de Taylor comme suit : Soit $f(x)$ une fonction quelconque, le développement en série de Taylor de cette fonction aux voisinages $(i+1)$ et $(i-1)$ s'écrit :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} + \varepsilon(\Delta x^{n+1}) \quad (2.13)$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - \Delta x \frac{\partial f(x_i)}{\partial x} + \dots + (-1)^n \frac{(\Delta x)^n}{n!} \frac{\partial^n f(x_i)}{\partial x^n} + \varepsilon(\Delta x^{n+1}) \quad (2.14)$$

Où, $\varepsilon(\Delta x^{n+1})$ est l'erreur de troncature d'ordre $n+1$

Pour l'approximation des dérivées spatiales premières, et en négligeant l'erreur de troncature, le développement en série de Taylor permet de formuler les possibilités suivantes :

- Schéma directe de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} \quad (2.15)$$

-Schéma inverse de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2.16)$$

- Schéma central de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (2.17)$$

Pour les dérivées spatiales secondes de la fonction $f(x,t)$, elles s'obtiennent de façon similaire. Le schéma central de dérivée seconde s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} \quad (2.18)$$

Où, f_{i-1}^n , f_i^n et f_{i+1}^n représentent les valeurs de la fonction aux points (x_{i-1}, t_n) , (x_i, t_n) et (x_{i+1}, t_n) .

Les problèmes des écoulements transitoires étant gouvernés par des équations aux dérivées partielles, on peut appliquer aisément ce développement pour une fonction à deux variables ou plus. Ayant $f(x, t)$ comme fonction de l'espace et du temps, on procédera à la discrétisation du plan x,t en un réseau (maillage) orthogonal, formant ainsi une grille de nœuds de calcul comme il est indiqué sur la figure (3.6).

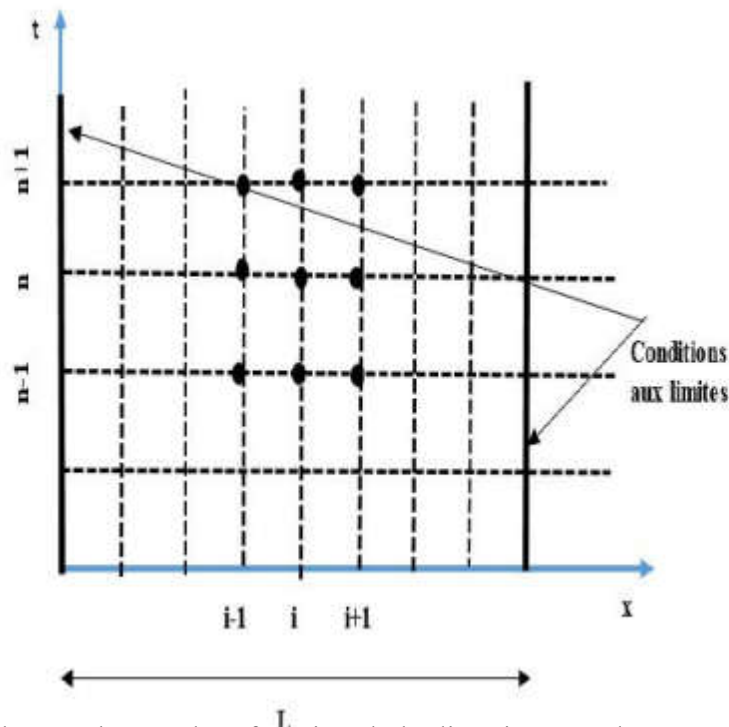


Fig. (2.3): Maillage orthogonal en fonction de la direction x et du temps de la méthode des différences finies

En ce qui est de la dérivée première par rapport au temps, on adopte en général un schéma décentré en avant, et un schéma centré quant à la dérivée seconde :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)_i = \frac{f_i^{n+1} - 2f_i^n + 2f_i^{n-1}}{\Delta t^2} \quad (2.20)$$

2.2.4.2 Schéma explicite

Le schéma est dit alors explicite. C'est-à-dire, les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné sont exprimées en fonction des caractéristiques de celui-ci supposées connues à l'instant précédent, de ce fait, ce qui se passe au temps $t + \Delta t$ ne dépend que du passé au temps t (Figure (3.7)).

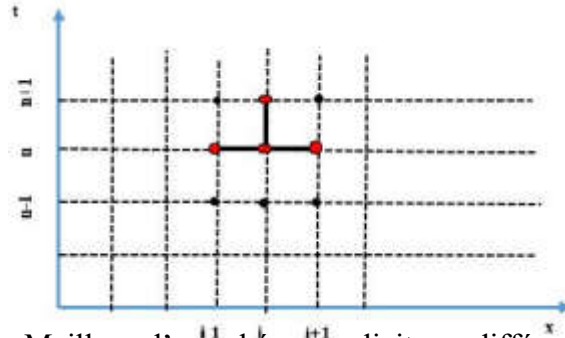


Fig. (2.4) : Maillage d'un schéma explicite en différences finies

2.2.4.3 Schéma implicite A l'opposé, si les caractéristiques de l'écoulement à un temps donné $t + \Delta t$ sont approchées en fonction de la solution précédente trouvée au temps t , et des valeurs recherchées au temps même du calcul $t + \Delta t$, la liaison est implicite, et le schéma est dit par conséquent implicite, comme il est indiqué dans le maillage de la figure (3.8).

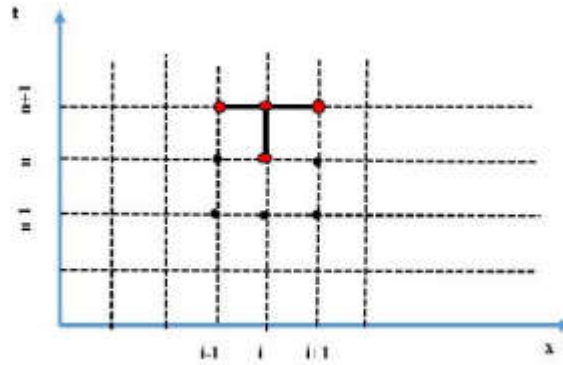


Fig. (2.5) : Maillage d'un schéma implicite en différences finies

- Schéma directe de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} \quad (2.21)$$

-Schéma inverse de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \quad (2.22)$$

- Schéma central de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.23)$$

Pour les dérivées spatiales secondes de la fonction $f(x,t)$, elles s'obtiennent de façon similaire. Le schéma central de dérivée seconde s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2}\right)_i = \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.24)$$

2.2.4.4 Schéma mixte ou schéma de Crank-Nicolson

- Schéma directe de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2} \frac{f_{i+1}^n - f_i^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}}{\Delta x} \quad (3.36)$$

-Schéma inverse de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2} \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \quad (2.25)$$

- Schéma central de la dérivée première

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2} \frac{f_{i+1}^n - f_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.26)$$

Pour les dérivées spatiales secondes de la fonction $f(x,t)$, elles s'obtiennent de façon similaire. Le schéma central de dérivée seconde s'écrit :

$$\left(\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{2} \frac{f_{i-1}^n - 2f_i^n + f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{1}{2} \frac{f_{i-1}^{n+1} - 2f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \quad (2.27)$$

Les deux schémas mixte et implicite sont inconditionnellement stables alors que le schéma explicite est conditionnellement stable, c'est-à-dire il oblige l'utilisateur de ce schéma, de rechercher le critère de stabilité de son problème.

2.2.4.5 Schéma de Lax-Friedrichs

C'est une technique de résolution numérique des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, basée sur la méthode des différences finies. Cette technique repose sur l'utilisation de différence finie décentrée en temps et centrée en espace.

- Schéma de différence finie décentrée en temps

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_i = \frac{f_i^{n+1} - \frac{1}{2}(f_{i+1}^n + f_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (2.28)$$

- Schéma central de la dérivée première en espace (1D)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1}^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (2.28)$$

2.2.4.6 Analyse de l'approximation par la méthode des différences finies

2.2.4.6.1 Erreur de troncature

L'erreur de troncature est l'erreur commise lors de la troncation de la fonction lors du développement en série de Taylor, c'est-à-dire du terme à partir duquel nous négligeons le reste du développement limité. Cette erreur est la différence entre la valeur exacte et celle calculée.

2.2.4.6.2 Erreur d'arrondi

Une erreur d'arrondi est la différence entre la valeur approchée calculée d'un nombre et sa valeur mathématique exacte.

L'erreur d'arrondi est la différence entre le résultat calculé et la valeur réelle d'un calcul ou d'une opération mathématique. Elle se produit lorsqu'un nombre est arrondi vers le haut ou vers le bas à une certaine décimale ou unité. Les erreurs d'arrondi sont inévitables en raison de la précision finie.

Les erreurs d'arrondi peuvent provenir de différentes sources, par exemple lorsque les nombres sont convertis d'une forme à une autre, lorsque les calculs sont effectués avec une précision limitée ou lorsque des approximations sont utilisées.

2.2.4.6.3 Consistance d'un schéma aux différences finies

Un schéma aux différences finies est consistant à l'équation exacte si l'EDF tends vers l'EDP lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace tendent vers zéro indépendamment.

Pour formaliser cette approche, notons $u(x,t)$ la solution de l'EDP, i.e $u(x,t)$ vérifie exactement l'équation: $EDP[u]=0$, et u_i^n la solution de l'EDF, i.e. $EDF[u]=0$. Nous allons calculer la différence E_t entre l'EDP et l'EDF aux nœuds du maillage et pour la solution exacte u :

$$E_t = EDF[u(i\Delta x, n\Delta t)] - EDP[u]_{(i\Delta x, n\Delta t)} \quad (2.30)$$

Ce qui donne, compte tenu du fait que $EDP[u]=0$

$$E_t = EDF[u(i\Delta x, n\Delta t)] \quad (2.31)$$

Cette différence est l'erreur de troncature du schéma aux différences finies, et correspond donc à l'erreur commise lorsque l'on remplace la solution approchée u_i^n par la solution exacte aux nœuds du maillage $u(i\Delta x, n\Delta t)$ dans l'équation aux différences EDF.

Le schéma EDF est dit consistant à l'équation EDP si cette erreur de troncature tends vers zéro lorsque le pas de discrétisation en temps Δt et le pas de discrétisation en espace Δx tendent vers zéro indépendamment.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0} E_t = EDF[u(i\Delta x, n\Delta t)] = 0 \quad (2.32)$$

2.2.4.6.4 Stabilité du schéma explicite

La notion de stabilité s'applique à des schémas, pour lesquels on calcule des solutions de façon itérative. Les calculs s'effectuent sur des ordinateurs avec une précision finie, et donc ils sont sujet à des erreurs d'arrondis. Lors d'un calcul itératif, ces erreurs peuvent être amplifiées par le schéma numérique. Le but de l'étude de stabilité est donc de déterminer quelle est l'amplification des erreurs par le schéma.

2.2.4.6.5 Critère de stabilité et choix des pas d'espace et de temps

Théoriquement les critères de stabilité numérique pour les schémas de résolution des équations différentielles aux dérivées partielles ne peuvent être déterminés que pour des équations linéaires.

Pour des équations non linéaires, des critères peuvent être déterminés en résolvant ces équations pour différentes valeurs de $(\Delta x/\Delta t)$ et en faisant une analyse des résultats obtenus.

Le critère de stabilité du schéma de résolution par la méthode des différences finies exposée précédemment est déterminé analytiquement en utilisant le critère de stabilité de John Von Neumann. Ce critère est le respect de l'inégalité

$$\Delta x \geq a \Delta t \quad (2.29)$$

Où Δx : pas d'espace
 Δt : pas de temps
 a : célérité de l'onde

Ainsi le choix du pas d'espace et du pas de temps devrait être fait en respectant le critère de stabilité.

2.2.4.6.6 Convergence du schéma explicite

Pour le schéma explicite, il est possible d'étudier directement la convergence de la solution numérique vers la solution exacte. Pour cela nous allons déterminer la solution exacte de l'équation aux différences finies

2.2.5 Méthode des caractéristiques ou (MDC)

Pour obtenir des équations plus faciles à gérer et dont la signification physique est plus évidente, nous allons transformer les équations de l'écoulement transitoire. Partons donc des 2 équations de Saint Venant et effectuons les opérations suivantes :

En multipliant la première équation par (a/ρ) , puis ajoutons et retranchons membre à membre les deux équations précédentes, on aura le système suivant :

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} (u + a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u}{\rho \cdot a} + \frac{1}{\rho} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ (u - a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{u}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} (u + a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ (u - a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.35)$$

À ce système, on peut rajouter le système (3.20), on aura le système suivant :

$$\begin{cases} (u + a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ (u - a) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} - \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a} \right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + 0 + 0 = du \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt = dP \end{cases} \quad (2.36)$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (u+a) & 1 & \frac{(u+a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ (u-a) & 1 & \frac{-(u-a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) \\ -g(\sin(\alpha) + j) \\ du \\ dP \end{pmatrix}$$

$$T.X=R$$

La méthode des caractéristiques s'écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 C_1 & D_1 \\ A_1 & B_1 C_1 & D_1 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \\ du \\ dP \end{pmatrix}$$

$$T_1.X=R_1$$

Les coefficients $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1$ et D_2 sont des fonctions de $(x, t), u(x, t)$ et $P(x, t)$ et F et G sont aussi des fonctions de $(x, t), u(x, t)$ et $P(x, t)$.

Pour connaître le type de la solution de ce système, le calcul du déterminant de T_1 s'avère d'une grande utilité et son calcul donne:

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0$$

Par analogie avec le système développé précédemment on aura :

$$A_1 = (u+a); B_1 = B_2 = 1; C_1 = \left(\frac{u+a}{\rho \cdot a} \right); D_1 = -D_2 = \frac{1}{\rho \cdot a}$$

$$A_2 = (u-a); C_2 = \left(\frac{u-a}{\rho \cdot a} \right); F = G = -g(\sin(\alpha) + j)$$

En reportant ces valeurs dans l'équation précédente du second degré, on obtient l'équation sous la forme :

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0$$

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) = \left(1 \cdot \frac{1}{\rho \cdot a} - 1 \cdot \frac{-1}{\rho \cdot a} \right) = \frac{2}{\rho \cdot a}$$

$$(D_2A_1 + B_1C_2 - B_2C_1 - D_1A_2) = \left(\frac{-1}{\rho \cdot a} (u + a) + 1 \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a} \right) - 1 \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a} \right) - \frac{1}{\rho \cdot a} (u - a) \right)$$

$$(D_2A_1 + B_1C_2 - B_2C_1 - D_1A_2) = -2 \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a} \right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 2u \frac{dx}{dt} + (u^2 - a^2) = 0$$

Le discriminant de cette équation au second degré est égal à :

$$\text{delta} = (-2u)^2 - 4 * 1 * (u^2 - a^2) = 4a^2$$

Le delta étant positif, alors le système (3. 47 4) est de type hyperbolique et l'équation admet deux racines distinctes.

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = \frac{-b + \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{2u + 2a}{2} = u + a \\ \left(\frac{dx}{dt} \right)_2 = \frac{-b - \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{2u - 2a}{2} = u - a \end{cases} \quad (2.37)$$

La condition de compatibilité s'écrit à partir de l'équation $D_x(u)=0$, donc :

$$\det \begin{bmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{(u + a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{-(u - a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ du & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0$$

$$D_x(u) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{(u + a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{-(u - a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ du & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0$$

Après développement de ce déterminant, on obtiendra l'équation suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - u \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{dx}{dt} - u \right) + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

On a obtenu précédemment que :

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a$$

1° Pour le signe positif de $(dx/dt)=u+a$, l'équation de compatibilité devient :

$$\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \quad (2.38)$$

2° Pour le signe négatif de $(dx/dt) = u - a$, l'équation de compatibilité s'écrit :

$$-\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \quad (2.39)$$

Ecrivons les équations (3.49) et (3.50) sous une autre forme, on pourra négliger la vitesse d'écoulement (u) par rapport à la vitesse d'onde (a) car u est très petite ce qui permet d'écrire $u \pm a \approx \pm a$

La pression (P) en point s s'exprime par l'expression suivante :

$$P = \rho \cdot g \cdot (H - z) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.40)$$

La référence étant horizontale d'où :

$$\sin(\alpha) = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \quad (2.41)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \quad (2.42)$$

En remplaçant l'expression dP/dt dans les équations (3.49) et (3.60) on aboutira aux équations suivantes :

1° Pour $(dx/dt) = u + a$

$$\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho \cdot a} \left(\rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\frac{g}{a} \left(\left(\frac{dH}{dt} - a \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} - g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot j = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + g \cdot j = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot j$$

2° Pour $(dx/dt) = u - a$

$$-\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\rho \cdot a} \left(\rho \cdot g \cdot \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{g}{a} \left(\frac{dH}{dt} - (-a) \cdot \sin(\alpha) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) &= 0 \\
 \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} - g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot j &= 0 \\
 \frac{du}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + g \cdot j = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} &= -g \cdot j
 \end{aligned}$$

Les deux équations rassemblées en une seule s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot j \quad (2.43)$$

Multiplions les deux membres par a/g nous aurons :

$$\frac{a}{g} \frac{du}{dt} \pm \frac{dH}{dt} = -a \cdot j$$

* Le signe positif intervient lorsque $dx/dt = u + a \approx a \Rightarrow dx = a \cdot dt$.

* Le signe négatif intervient lorsque $dx/dt = u - a \approx -a \Rightarrow dx = -a \cdot dt$

En faisant intervenir le débit Q, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{g} \frac{d\left(\frac{Q}{S}\right)}{dt} \pm \frac{dH}{dt} = -a \cdot j \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{a \cdot Q}{g \cdot S} \pm H \right) &= -a \cdot j \\
 \frac{d}{dt} \left(\frac{a \cdot Q}{g \cdot S} \pm H \right) + a \cdot j &= 0 \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

La méthode des caractéristiques transforme les deux équations de Saint Venant aux dérivées partielles en quatre équations différentielles totales, celles-ci sont exprimées sous forme de différences finies.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{a \cdot Q}{g \cdot S} \pm H \right) + a \cdot j = 0 \end{cases} \quad (2.45)$$

Donc, la méthode des caractéristiques transforme les deux équations aux dérivées partielles de l'écoulement non permanent en quatre équations différentielles totales. Ces quatre équations peuvent être intégrées, sur le domaine d'intérêt, en se basant sur la méthode des différences finies pour obtenir des expressions algébriques faciles à manipuler numériquement.

Le signe positif intervient lorsque $dx/dt = u + a \approx a \Rightarrow dx = a \cdot dt$ alors que le signe négatif intervient lorsque $dx/dt = u - a \approx -a \Rightarrow dx = -a \cdot dt$.

2.2.6 Méthode des Eléments Finis (MEF)

La MEF est une approche utilisée pour résoudre les équations différentielles en transformant ces équations en formes intégrales basées sur le concept de minimisation d'une quantité, telle que l'énergie. Cela permet d'obtenir une solution exacte du problème. En d'autres termes, l'objectif est de trouver une fonction globale qui représente le modèle mathématique dans le domaine étudié.

Le principe fondamental de la méthode des éléments finis repose sur les étapes suivantes :

- * Définir une partition du domaine d'étude c'est-à-dire subdivisé le domaine d'étude en régions élémentaires (Eléments Finis).
- * Représenter la fonction inconnue sur chacun de ces éléments par une approximation polynomiale.
- * Construire les formes intégrales.
- * Minimiser l'intégrale.
- * Une organisation matricielle des calculs.
- * Une résolution du système algébrique.

La méthode des éléments finis est particulièrement puissante pour résoudre les équations aux dérivées partielles, notamment dans les cas où la géométrie du domaine d'étude est complexe.[4]

2.2.7 Méthode des Volumes Finis (MVF)

La méthode des volumes finis est une technique spéciale de résolution utilisée pour les équations différentielles. Elle implique la subdivision du domaine d'étude en petits volumes élémentaires, chacun entourant un nœud principal. Les volumes sont délimités par des interfaces, qui peuvent être deux, quatre ou six selon la dimension du problème. L'équation différentielle est intégrée dans chaque volume élémentaire, en utilisant une fonction d'approximation pour représenter l'inconnue entre les nœuds voisins. Cette intégration permet de discrétiser la forme intégrale de l'équation dans tout le domaine d'étude. Le résultat de cette discrétisation est une équation algébrique qui est composée des valeurs des nœuds principaux. Ainsi, la méthode des volumes finis permet de résoudre les équations en divisant le domaine en petits volumes et en utilisant des approximations pour calculer les intégrales.[5]

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré différentes méthodes de résolution utilisées pour modéliser et étudier l'écoulement transitoire dans les systèmes fluides. Chacune de ces méthodes offre des approches uniques pour résoudre les équations différentielles complexes qui décrivent le comportement du fluide au fil du temps.

Nous avons examiné la méthode arithmétique, la méthode d'interpolation de Hartree, la méthode algébrique, la méthode des différences finies, la méthode des caractéristiques, la méthode des éléments finis et la méthode des volumes finis. Chacune de ces méthodes présente des avantages et des limitations, et il est important de choisir la méthode appropriée en fonction des caractéristiques du problème étudié, de la géométrie du système, et des ressources disponibles.

Ces méthodes numériques nous permettent de discrétiser le domaine d'étude en éléments ou volumes, d'approximer les inconnues à l'aide de fonctions d'interpolation, et de résoudre les équations algébriques résultantes. En utilisant ces approches, nous sommes en mesure d'obtenir des solutions approchées du modèle mathématique de l'écoulement transitoire, de modéliser avec précision des phénomènes complexes, de réaliser des simulations numériques efficaces et de prendre des décisions éclairées en matière de conception et d'optimisation des systèmes fluides. Nous avons choisi la méthode des différences finies pour entamer la résolution des équations de l'écoulement transitoire démontrées au chapitre I.

Chapitre III

Résolution des équations de
l'écoulement transitoire par la
méthode des différences finies

3.1 Introduction

Ce chapitre aura pour objectif de réaliser la transformation des équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression, écrites en fonction de la vitesse et de la pression, à des équations écrites en fonction de la charge piézométrique (charge de pression) et du débit sans négliger aucun terme d'une part et d'autre part d'utiliser la méthode des différences finies pour résoudre les équations du système obtenu.

3.2 Transformation des équations de l'écoulement transitoire

Les équations gouvernant les écoulements transitoires dans les conduites sous pression sont données par les deux équations représentées par le système suivant:

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.1)$$

Dans un objectif de réécrire le système précédent en fonction du débit et de la charge de pression, on ne néglige pas les termes $u(\partial u/\partial x)$ et $u(\partial P/\partial x)$ devant les termes $\partial u/\partial t$ et $\partial P/\partial t$ et la conduite est considérée inclinée c'est-à-dire $\sin(\alpha) \neq 0$, les opérations suivantes seront effectuées.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial t} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (3.3)$$

$$u \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.4)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{g}{a} \cdot \left(\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + g \left(\left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.8)$$

Multiplions la première équation par a/g et la deuxième par S, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = -gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.10)$$

$\partial Z/\partial t=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} + gS \frac{\partial Z}{\partial x} - gS \sin(\alpha) - gSj \end{cases} \quad (3.11)$$

$\partial Z/\partial X=\sin(\alpha)$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} - gSj \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.13)$$

Dans notre cas, on néglige pas les termes $u(\partial u/\partial x)$ et $u(\partial P/\partial x)$ devant les termes $\partial u/\partial t$ et $\partial P/\partial t$. ainsi que la conduite est considéré incliné c'est-à-dire $\sin(\alpha) \neq 0$.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial t} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\rho g(H - Z))}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

$$u \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (3.17)$$

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{Q}{S} \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \left(\frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \rho g \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{g}{a} \cdot \left(\left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right) = 0 \\ \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S^2} \frac{\partial Q}{\partial x} + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.21)$$

Multiplions la première équation par a/g et la deuxième par S, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) + \frac{Q}{S} \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} + gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = -gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.22)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \left(\frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - gS \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) - gS(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (3.23)$$

$\partial Z/\partial t=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} + gS \frac{\partial Z}{\partial x} - gS \sin(\alpha) - gSj \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\partial Z / \partial X = \sin(\alpha)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} \pm gSj \end{cases} \quad (3.25)$$

3.3 Application de la méthode des différences finies

3.3.1 Application du schéma explicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire

L'utilisation du schéma explicite en différences finies permet d'écrire les schémas suivants.

Schéma de la dérivée première de la charge para rapport au temps

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \quad (3.26)$$

Schéma de la dérivée première du débit par rapport au temps

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (3.54)$$

Schéma central de la dérivée première de la charge dans la direction x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.27)$$

Schéma central de la dérivée première du débit dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.28)$$

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2} (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)$$

$$j = \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2gdS^2} \quad (3.29)$$

Où : (n) correspond à t=t et (n+1) correspond à (t+Δt).

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (3.30)$$

Multiplions les deux équations par Δt , nous aurons :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} - H_i^n = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ Q_i^{n+1} - Q_i^n = -\frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \Delta t \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x g S} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{gS\Delta t}{2\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (3.32)$$

Posons :

$$\frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i = C_1; \quad \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x g S} = C_2; \quad \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} = C_3$$

$$\frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S} = d_1; \quad \frac{gS\Delta t}{2\Delta x} = d_2; \quad \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - C_1 - C_2(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_3(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \end{cases} \quad (3.33)$$

Où

$$x_i = i \Delta x \quad (3.34)$$

$$t_i = n \Delta t \quad (3.35)$$

L'utilisation de la méthode des différences pour la résolution du système d'équation régissant l'écoulement transitoire permettent de soulever les remarques suivantes :

- Méthode des différences finies simple à mettre en œuvre (développement limité en série de Taylor);
- Convergence quadratique si les solutions sont régulières;
- Permet de traiter la plupart des conditions limites;
- Mais limitée à des géométries rectangulaires.

C'est pourquoi, il est important d'être vigilant lors de l'utilisation de cette technique.

Si la conduite est horizontale $\sin \alpha = \sin 0^\circ = 0$, $C_1=0$ et le système précédent devient :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - C_2(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_3(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \end{cases} \quad (3.36)$$

3.3.2 Application du schéma implicite en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire

L'utilisation du schéma implicite en différences finies permet d'écrire.

Schéma de la dérivée première de la charge para rapport au temps

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \quad (3.37)$$

Schéma de la dérivée première du débit par rapport au temps

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (3.38)$$

Schéma implicite central de la dérivée première de la charge dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (3.39)$$

Schéma implicite central de la dérivée première du débit dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \quad (3.40)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (3.41)$$

Multiplions les deux équations par Δt , nous aurons :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} - H_i^n = \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \\ Q_i^{n+1} - Q_i^n = -\Delta t \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - gS \Delta t \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2Sd} \end{cases} \quad (3.42)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - \frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i - \frac{\Delta t a^2}{2\Delta x gS} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2S\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2\Delta x S} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - \frac{gS \Delta t}{2\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) - \frac{\Delta t \lambda}{2Sd} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (3.43)$$

Posons :

$$\frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) \bar{Q}_i = C_1; \frac{\Delta t a^2}{2 \Delta x g S} = C_2; \frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2 S \Delta x} = C_3$$

$$\frac{\Delta t \bar{Q}_i}{2 \Delta x S} = d_1; \frac{g S \Delta t}{2 \Delta x} = d_2; \frac{\Delta t \lambda}{2 S d} \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = H_i^n - C_1 - C_2 (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - C_3 (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^n - d_1 (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) - d_2 (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) - d_3 \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\begin{cases} -C_3 H_{i-1}^{n+1} + H_i^{n+1} + C_3 H_{i+1}^{n+1} = C_2 Q_{i-1}^{n+1} - C_2 Q_{i+1}^{n+1} + H_i^n - C_1 \\ -d_1 Q_{i-1}^{n+1} + Q_i^{n+1} + d_1 Q_{i+1}^{n+1} = Q_i^n + d_2 H_{i-1}^{n+1} - d_2 H_{i+1}^{n+1} - d_3 \end{cases} \quad (3.45)$$

3.3.3 Application du schéma de (Crank-Nicolson) ou mixte en différences finies aux équations de l'écoulement transitoire

L'utilisation du schéma mixte en différences finies de John-Crank et PhyllisNicolson permet d'écrire :

Schéma de la dérivée première de la charge para rapport au temps

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} \quad (3.46)$$

Schéma de la dérivée première du débit par rapport au temps

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} \quad (3.47)$$

Schéma mixte central de la dérivée première de la charge dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \quad (3.48)$$

Schéma mixte central de la dérivée première du débit dans la direction du mouvement x

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = \frac{Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{g S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) - \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) \\ \frac{Q_i^{n+1} - Q_i^n}{\Delta t} = -\frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) - g S \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) - \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2 S d} \end{cases} \quad (3.50)$$

Multiplions les deux équations par Δt , nous aurons :

$$\begin{cases} H_i^{n+1} - H_i^n = \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{g S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) - \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) \\ Q_i^{n+1} - Q_i^n = -\Delta t \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) - g S \Delta t \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2 \Delta x} + \frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2 \Delta x} \right) - \Delta t \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2 S d} \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} + \frac{\Delta t a^2}{gS} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = H_i^n + \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{gS} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) \\ Q_i^{n+1} + \Delta t \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + gS\Delta t \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) = Q_i^n - \Delta t \frac{Q_i^n}{S} \left(\frac{1}{2} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - gS\Delta t \left(\frac{1}{2} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) - \Delta t \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} + \frac{\Delta t a^2}{4gS\Delta x} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + \frac{\Delta t Q_i^n}{4S\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = H_i^n + \frac{\Delta t Q_i^n}{S} \sin(\alpha) - \frac{\Delta t a^2}{4gS\Delta x} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{\Delta t Q_i^n}{4S\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{Q_i^n}{S} (Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + \frac{gS\Delta t}{4\Delta x} (H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = Q_i^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{Q_i^n}{S} (Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - \frac{gS\Delta t}{4\Delta x} (H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - \Delta t \frac{\lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} \end{cases} \quad (3.53)$$

Posons

$$\frac{\Delta t a^2}{4gS\Delta x} = C_1; \quad \frac{\Delta t Q_i^n}{4S\Delta x} = C_2; \quad \frac{\Delta t}{S} \sin(\alpha) = C_3$$

$$\frac{\Delta t}{4\Delta x} \frac{Q_i^n}{S} = d_1; \quad \frac{gS\Delta t}{4\Delta x} = d_2; \quad \frac{\Delta t \lambda Q_i^n |Q_i^n|}{2Sd} = d_3$$

$$\begin{cases} H_i^{n+1} + C_1(Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + C_2(H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = H_i^n + C_3 - C_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} + d_1(Q_{i+1}^{n+1} - Q_{i-1}^{n+1}) + d_2(H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}) = Q_i^n - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \end{cases} \quad (3.54)$$

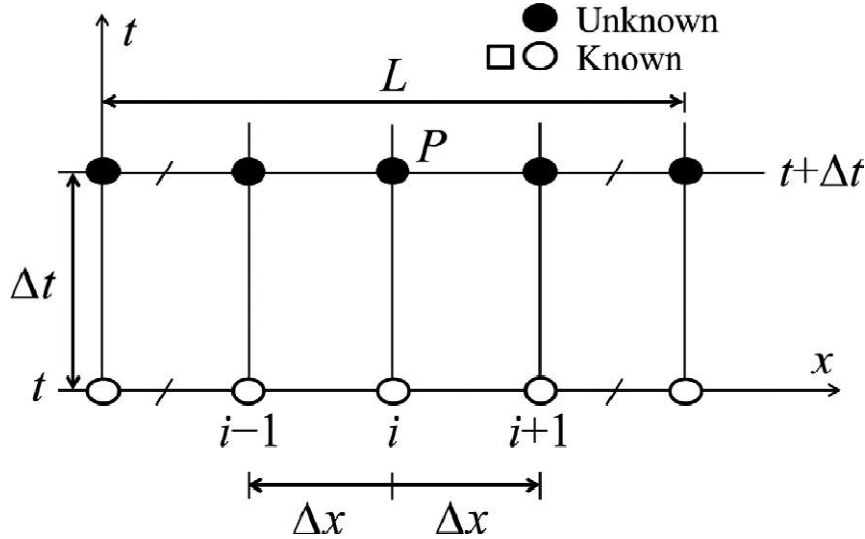


Fig. (3.1) : Maillage en temps et en espace de la méthode explicite en différences finies

3.3.4 Application du schéma de Lax–Friedrichs aux équations de l'écoulement transitoire

Les équations de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression s'écrivent en fonction du débit et de la charge totale en une dimension s'écrivent comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} - gSj \end{cases}$$

L'application des schémas de Lax sur les équations de l'écoulement transitoire donne ce qui suit :

- Schéma de différence finie décentrée en temps

La charge totale et le débit s'écrivent successivement:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_i = \frac{H_i^{n+1} - \frac{1}{2}(H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_i = \frac{Q_i^{n+1} - \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)}{\Delta t} \quad (3.56)$$

- Schéma central de la dérivée première en espace (1D)

La charge totale et le débit s'écrivent successivement :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_i = \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.57)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_i = \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} \quad (3.58)$$

L'indice i se réfère à l'espace et k au temps.

En remplaçant ces expressions dans les équations du système des équations de l'écoulement transitoire, on obtient les expressions de Calcul suivantes:

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - (H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - gSj \end{cases} \quad (3.59)$$

Où

$$\bar{Q}_i = \frac{1}{2}(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n) \quad (3.50)$$

$$j = \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2gdS^2} \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - (H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = \frac{\bar{Q}_i}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ \frac{Q_i^{n+1} - (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)/2}{\Delta t} = -\frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2dS} \end{cases} \quad (3.52)$$

Multiplications les deux membres par Δt

$$\begin{cases} H_i^{n+1} = \frac{(H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)}{2} + \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2 \Delta t}{gS} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{S} \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} \\ Q_i^{n+1} = \frac{(Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)}{2} - \Delta t \frac{\bar{Q}_i}{S} \frac{Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t gS \frac{H_{i+1}^n - H_{i-1}^n}{2\Delta x} - \Delta t \frac{\lambda \bar{Q}_i |\bar{Q}_i|}{2dS} \end{cases} \quad (3.53)$$

Posons

$$\frac{\bar{Q}_i \Delta t \sin(\alpha)}{S} = C_1; \frac{a^2 \Delta t}{2gS\Delta x} = C_2; \frac{\bar{Q}_i \Delta t}{2S\Delta x} = C_3$$

$$\begin{cases} \frac{\Delta t}{2\Delta x} \frac{\bar{Q}_i}{S} = d_1; \frac{\Delta t gS}{2\Delta x} = d_2; \Delta t \frac{\lambda}{2dS} = d_3 \\ H_i^{n+1} = (H_{i+1}^n + H_{i-1}^n)/2 + C_1 - C_2(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - C_3(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) \\ Q_i^{n+1} = (Q_{i+1}^n + Q_{i-1}^n)/2 - d_1(Q_{i+1}^n - Q_{i-1}^n) - d_2(H_{i+1}^n - H_{i-1}^n) - d_3 \bar{Q}_i |\bar{Q}_i| \end{cases} \quad (3.54)$$

Le schéma de Lax-Friedrichs, doit être complété par la condition initiale et les conditions aux limites.

3.3.5 Les nœuds aux limites (frontières)

Lors de l'application de la méthode des différences finies apparaît, aux limites (à gauche et à droite), toujours des variables indéfinies dans le domaine d'intérêt, c'est pour cela on fait appel à la méthode des caractéristiques pour en se débarrasser.

a) Au niveau du réservoir

$H = H_r$

Q à chercher

Au nœud $i=1$ (au réservoir)

$$Q_1^{k+1} = d_1 Q_0^k + Q_1^k (1 - d_3 |Q_1^k|) - d_1 Q_2^k + d_2 H_0^k - d_2 H_2^k \quad (3.55)$$

A cet endroit apparaît des nœuds fictifs H_0 et Q_0 et pour en éliminer en utilisant les équations aux caractéristiques à gauche.

$$CN = H(2) - Q(2)(R - T \cdot |Q(2)|) \quad (3.56)$$

$H(2)$ et $Q(2)$ sont des quantités calculées au temps (t) donc :

$$Q(1) = (H_R - CN)/R \quad (3.57)$$

Avec

$$T = B \cdot (x(i+2) - x(i+1)) = B \cdot \Delta x$$

$$B = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} \quad \text{et} \quad R = \frac{a}{g \cdot S}$$

b) Au niveau de la vanne

Le débit est en fonction des paramètres suivants : $Q = f(Q_0, \Delta t, C_t, m)$ et s'écrit par l'expression suivante :

$$Q_n^{k+1} = \left(1 - \left(\frac{i \Delta t}{C_t} \right)^m \right) Q_n^k \quad (3.58)$$

H à chercher

Au nœud $i=n$ (à la vanne)

$$H_n^{k+1} = C_3 Q_n^k H_{n-1}^k + H_n^k - C_3 Q_n^k H_{n+1}^k + C_2 Q_{n-1}^k - C_1 Q_n^k - C_2 Q_{n+1}^k \quad (3.59)$$

Deux nœuds fictifs apparaissent, il s'agit des nœuds H_{n+1}^k et Q_{n+1}^k , qu'on doit en se débarrasser par l'utilisation également de la méthode des caractéristiques à droite.

$$\begin{cases} H(n) + R \cdot Q(n) = CP \\ CP = H(n-1) + Q(n-1)(R - T \cdot |Q(n-1)|) \\ Q(n) = (CP - H(n))/R \end{cases} \quad (3.60)$$

Toutefois, dans le cas où la fermeture est commandée le débit à la vanne suit, au fil du temps, une fonction dépendant de la loi de fermeture choisie et dans ce cas la charge totale à la vanne prend la relation suivante :

$$H(n) = CP - R \cdot Q(n) \quad (3.61)$$

3.4 Conclusion

Après avoir transformé les équations hyperboliques régissant les écoulements transitoires dans les conduites sous pressions, appliquer les schémas explicite, implicite, de Crank-Nicolson et de Lax-Friedrichset l'utilisation des conditions initiales et aux limites en arrivant à des systèmes d'équations algébriques, Nous avons choisi le schéma de Lax-Friedrichs pour la suite de notre travail vue qu'elle est plus utilisée pour la résolution des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique.

Chapitre IV

Méthodes de résolutions des
systèmes d'équations

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous explorerons deux approches principales pour résoudre les systèmes d'équations : les méthodes directes et les méthodes indirectes (ou itératives). Ces deux approches offrent des avantages et des limitations différentes, et le choix de la méthode dépendra de la nature du système d'équations et des contraintes du problème.

Les méthodes directes visent à obtenir une solution exacte du système en un nombre fini d'étapes. Elles sont souvent basées sur des manipulations algébriques et des opérations sur les coefficients des équations. Parmi les méthodes directes les plus couramment utilisées, nous étudierons l'élimination de Gauss, la factorisation LU et la méthode de la matrice inverse. Nous examinerons en détail leur principe de fonctionnement, leur complexité algorithmique et leur stabilité numérique.

En revanche, les méthodes indirectes (ou itératives) recherchent une solution approximative du système en utilisant des itérations successives. Ces méthodes sont particulièrement utiles pour les systèmes de grande taille ou lorsque la matrice du système est creuse. Nous étudierons des méthodes itératives populaires telles que la méthode de Jacobi, la méthode de Gauss-Seidel et la méthode de relaxation. Nous discuterons de leur convergence, de leur précision et de leur efficacité en termes de ressources computationnelles.

4.2 Méthodes directes

4.2.1 Méthode de Cramer

La méthode Cramer est une méthode basée sur les déterminants pour résoudre un système de n équations linéaires à n inconnues de types $Ax=b$, elle est utilisée surtout pour les systèmes de faible taille et valable pour le $\det A \neq 0$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cramer donne le procédé suivant pour obtenir les solutions x_i .

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A} \quad (4.1)$$

Pour les systèmes de taille importante la résolution du système nous conduit à la recherche à chaque fois le déterminant au lieu de chercher la solution. [6]

4.2.2 Méthode d'inversion de la matrice

La méthode d'inversion de la matrice est apparue simple mais la recherche de l'inverse de A qui est un travail supplémentaire. $[A]\{x\} = \{b\} \Rightarrow \{x\} = [A]^{-1}\{b\}$

Mais l'inconvénient majeur de cette méthode est la recherche de l'inverse de A qui est délicate c'est-à-dire au lieu de chercher directement la solution on se trouve devant la recherche de l'inverse de A surtout pour les systèmes d'équations de grande taille.

On appelle inverse d'une matrice A d'ordre n, la matrice B, si elle existe, telle que $BA=AB=I_n$. Où I_n la matrice unité d'ordre n.

Une matrice est dite inversible (régulière) si, et seulement si, son déterminant est différent de zéro ; l'inverse de A, noté A^{-1} , est unique.

Pour obtenir l'inverse de A on doit passer par les étapes suivantes :

- On prend la transposée de A notée \tilde{A} .
- On en déduit l'ajointe de \tilde{A} notée $\text{adj}(\tilde{A})$.
- On divise l'ajointe par le déterminant de A noté $(\det A)$ [6]

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(\tilde{A})}{\det(A)} \quad (4.2)$$

4.2.3 Méthodes de diagonalisation

C'est une méthode directe de résolution du système d'équations, elle consiste à transformer le système en un système diagonal ayant les mêmes solutions qui est facile à résoudre.

La diagonalisation d'une matrice A est de transformer cette dernière pour quelle devient diagonale où la solution des systèmes d'équations liés à elle est directe. Il est clair que la solution d'un tel système est triviale. En pratique, la recherche des vecteurs propres peut s'avérer plus chère que la solution directe. Soit $[x]$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres de $[A]$ [6]

$$[x] = [\{v\}_1, \{v\}_2, \dots, \{v\}_n]$$

La matrice $[x]$ des vecteurs propres est orthogonale :

$$[x]^{-1} = [x]^T$$

Si nous prémultiplions le système $[A]\{x\} = \{b\}$ par $[x]^T$, nous avons :

$$[x]^T[A]\{x\} = [x]^T\{b\}$$

Que nous pouvons le transformer de la manière suivante :

$$[x]^T[A][x][x]^T\{x\} = [x]^T\{b\}$$

$$[c]\{y\} = \{d\} \quad (4.3)$$

$$[c] = [x]^T[A][x], \{y\} = [x]^T\{x\} \text{ et } \{d\} = [x]^T\{b\}$$

Pour trouver la matrice des valeurs propres $[c]$ qui est diagonale à partir de l'équation précédente, nous avons :

$$y_i = c_i/\lambda_i \text{ et } \{x\} = [x]\{y\} \quad (4.4)$$

a) Rappel sur les valeurs et les vecteurs propres

Recherche des vecteurs propres de $[A]$

a) Recherche des valeurs propres de $[A]$

Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, un scalaire λ d'un espace vectoriel est appelé valeur propre de l'endomorphisme (soit une matrice par exemple) f s'il existe un vecteur u non nul de l'espace vectoriel tel que $f(u)=\lambda u \Rightarrow f(u)-\lambda u=0$.

Les valeurs propres de f sont appelées spectres de f et la plus grande valeur s'appelle le rayon spectrale.

Un vecteur u de l'espace vectoriel est appelé vecteur propre de l'endomorphisme f s'il existe une valeur propre λ tel que $f(u)=\lambda u$. Un tel vecteur est dit vecteur propre de f associé à λ .

L'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre λ est un sous espace vectoriel de E , on l'appelle sous-espace propre associé à λ . On le note E_λ .

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , f un endomorphisme de E , A la matrice carrée associée à f suivant une base B_E , et λ un élément de K . λ est valeur propre de f si et seulement si $\det(A-\lambda I_n)=0$, où I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

Soit A une matrice carrée d'ordre n , à coefficients dans K . On désigne par f l'endomorphisme de K^n tel que A soit la matrice de f suivant la base canonique K^n . On dit qu'un scalaire λ est valeur propre de A si et seulement si $\det(A-\lambda I_n)=0$.

Soit X une indéterminée, $\det(A-XI_n)$ est un polynôme de degré n , appelé polynôme caractéristique de A . On le note $P_A=\det(A-XI_n)$ (4.5).

$$P_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}(\text{tr}A)X^{n-1} + \dots + \det A$$

Un vecteur u de K^n est vecteur propre de A si et seulement si $(A-\lambda I_n)U=0$ ou $AU=0U$ où U est le vecteur colonne associé à u .

4.2.4 Méthode d'orthogonalisation ou méthode de factorisation QR

La décomposition QR (ou QU) d'une matrice A est une décomposition de type $A=QR$. Où Q est une matrice orthogonale ($Q \cdot Q^T=I$), et R une matrice triangulaire supérieure. Ce type de décomposition est souvent utilisé pour le calcul de solutions de systèmes linéaires non carrés, notamment pour déterminer le pseudo-inverse d'une matrice.

Il est possible de calculer une décomposition RQ d'une matrice, ou même des décompositions QL et LQ, où la matrice L est triangulaire inférieure.

Il existe plusieurs méthodes pour réaliser cette décomposition :

- La méthode de Householder où Q la matrice est obtenue par produits successifs de matrices orthogonales élémentaires.
- La méthode de Givens où la matrice Q est obtenue par produits successifs de matrices de rotation plane.
- La méthode de Schmidt. [6]

a) Méthode de Householder

Soit x un vecteur colonne arbitraire de dimension m et $\alpha=\pm\|x\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne, pour des raisons de stabilité du calcul, α doit de plus être du signe du premier élément de x .

Si e_1 le vecteur $(1, 0, 0, 0, \dots, 0)^T$, et définissons, si x n'est pas colinéaire à e_1 :

$$u = x - \alpha e_1 \quad (4.6)$$

$$v = \frac{u}{\|u\|} \quad (4.7)$$

$$Q = I - 2 \cdot v \cdot v^T \quad (4.8)$$

Q est la matrice de Householder ou matrice orthogonale élémentaire et $Qx = (\alpha, 0, \dots, 0)^T$.

Si x est colinéaire à e_1 , on a le même résultat en prenant pour Q la matrice identité.

Nous pouvons utiliser ces propriétés pour transformer une matrice A de dimension $m.n$ en une matrice triangulaire supérieure. Tout d'abord, on multiplie A par la matrice de Householder Q_1 en ayant pris le soin de choisir pour x la première colonne de A . le résultat est une matrice QA avec des zéros dans la première colonne excepté du premier élément qui vaudra α .

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & * & * \dots * \\ 0 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & A' \\ \cdot & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

Ceci doit être réitéré pour A' qui va être multiplié par Q'_2 (Q'_2 est plus petite que Q'_1). Si toutefois, vous souhaitez utiliser $Q'_1 A$ plutôt que A , vous deviez remplir la matrice de Householder avec des 1 dans le coin supérieur gauche :

$$Q_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & Q'_k \end{pmatrix}$$

Après t itérations, $t = \min(m-1, n)$, $R = Q_1 \dots Q_t Q_{t+1} A$ est une matrice triangulaire supérieure. Si $R = Q_1^T Q_2^T \dots Q_t^T$ alors $A = QR$ est la décomposition QR de A . De plus, par construction les matrices Q_k sont non seulement orthogonales mais aussi symétriques, donc $Q = Q_1 Q_2 \dots Q_t$. [6]

b) Méthode de Schmit

La méthode de Schmidt appliquée aux colonnes de la matrice $A = [a_1, \dots, a_n]$, muni du produit scalaire $\langle v, w \rangle = v^T w$ ou $\langle v, w \rangle = v^* w$ pour le cas complexe.

On définit la projection : [6]

$$\prod e a = \frac{\langle e, a \rangle}{\langle e, e \rangle} e \quad (4.9)$$

Puis les vecteurs :

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1, e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_2 &= a_2 - \prod e_1 a_2, e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ u_3 &= a_3 - \prod e_1 a_3 - \prod e_2 a_3, e_3 = \frac{u_3}{\|u_3\|} \end{aligned} \quad (4.10)$$

·
·
·

$$u_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \prod e_j a_k, e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

On réarrange ensuite les équations de sorte que les a_i soient à gauche, en utilisant le fait que les e_i sont des vecteurs unitaires.

$$\begin{aligned} a_1 &= \langle e_1, a_1 \rangle e_1 \\ a_2 &= \langle e_1, a_2 \rangle e_1 + \langle e_2, a_2 \rangle e_2 \\ a_3 &= \langle e_1, a_3 \rangle e_1 + \langle e_2, a_3 \rangle e_2 + \langle e_3, a_3 \rangle e_3 \end{aligned}$$

·
·

$$a_k = \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_j, a_k \rangle e_j \quad (4.11)$$

Où $\langle e_i, a_i \rangle = \|u_i\|$. ceci s'écrit matriciellement : $A = QR$

$$Q = [e_1, \dots, e_n] \text{ et } R = \begin{pmatrix} \langle e_1, a_1 \rangle & \langle e_1, a_2 \rangle & \langle e_1, a_3 \rangle & \dots \\ 0 & \langle e_2, a_2 \rangle & \langle e_2, a_3 \rangle & \dots \\ 0 & 0 & \langle e_3, a_3 \rangle & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \cdot & & & \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

c) Méthode de Givens

Dans la décomposition de Givens, la matrice Q utilise des rotations de Givens. Chaque rotation annule un élément de la partie triangulaire inférieure stricte de la matrice, construisant la matrice R, tandis que la concaténation des rotations engendre la matrice Q.

Dans la pratique, les rotations de Givens ne sont pas effectivement assurées par la construction d'une matrice pleine et une multiplication matricielle. Une procédure de rotation de Givens est utilisée à la place qui est l'équivalent de la multiplication par une matrice de Givens creuse, sans efforts supplémentaires de la manipulation des éléments non nuls. La procédure de rotation de Givens est utile dans des situations où seul un nombre relativement restreint hors éléments diagonaux doivent être remis à zéro, et est plus facilement parallélisée que les transformations de Householder.[6]

4.2.5 Méthode de pivot de Gauss ou de Gauss-Jordan

La méthode de **Gauss-Jordan**, aussi appelée **pivot de Gauss**, nommée en hommage des mathématiciens Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan, est une méthode directe de résolution des systèmes linéaires qui permet de transformer un système en un système équivalent échelonné, par la suite en résout le système ainsi obtenu à l'aide d'un algorithme de remonté. Elle permet de déterminer le rang d'une matrice et de calculer l'inverse d'une matrice carrée inversible. Lorsqu'on applique l'élimination de Gauss sur une matrice, on obtient sa forme échelonnée réduite.[6]

La méthode de pivot de Gauss permet de transformer un système en un système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire. On résout le système ainsi obtenu à l'aide d'un algorithme de remontée.

Les opérations autorisées pour transformer le système sont :

- *Echanger deux lignes.
- *Multiplication d'une ligne par un nombre non nul.
- * Addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

On cherche à résoudre le système suivant de n équations à n inconnues x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Du point de vue matriciel, on a

$$Ax = b$$

avec

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{Bmatrix}$$

a) Algorithme de la méthode du pivot de Gauss : Triangularisation

$$k = 1, \dots, n - 1 \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^k \quad i = 1, \dots, k \quad j = 1, \dots, n \\ a_{ij}^{(k+1)} = 0 \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, k \\ a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^k - \frac{a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k)}}{a_{kk}^k} \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = k + 1, \dots, n \quad (4.13) \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} \quad i = 1, \dots, k \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)} b_k^{(k)}}{a_{kk}^k} \quad i = k + 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Soit U la matrice échelonnée du système, on a alors

$$U = (u_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n = (a_{ij}^{(n)}) \quad 1 \leq i, j \leq n$$

b) Algorithme de la méthode du pivot de Gauss : Remontée et résolution

À présent la matrice [A] du système linéaire est échelonnée, on doit alors résoudre le système triangulaire : $Ux=b^{(n)}$

Puisque $b^{(n)}$ rappelle le, est le second membre échelonné, il a subi les mêmes opérations que la matrice échelonnée U.

On utilise alors un algorithme de remontée pour le système $Ux=b^{(n)}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \frac{y_n}{u_{nn}} = \frac{y_n}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right) = \frac{1}{a_{ii}^{(n)}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(n)} x_j \right) \quad \forall i = n - 1, n - 2, \dots, 1. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Le programme ci-après met en détaille la méthode de Gauss –Jordan

4.1.6 Méthode de factorisation LU

Lorsque il n'est y a pas de changement de ligne la méthode du pivot de Gauss est équivalente à une factorisation LU

L'objectif de la décomposition LU est de mettre A sous la forme d'un produit d'une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité par une matrice triangulaire supérieure U.[6]

Soit A une matrice de taille nxn. La factorisation LU, consiste, pour une matrice A, à déterminer une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité et une matrice triangulaire supérieure U tel que A=LU avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

et

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

a) Résolution de système la méthode de factorisation LU

Pour la résolution de système linéaire de la forme :Ax=b, le système devient :

$$LUX = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1), \\ UX = y & (2). \end{cases}$$

On résout le système (1) pour trouver le vecteur y, puis le système (2) pour trouver le vecteur x. La résolution est facile par la forme triangulaire des matrices.

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1/l_{11} \\ y_i = \frac{1}{l_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j \right) \quad \forall i = 2,3, \dots, n. \end{cases} \quad (4.17)$$

$$UX = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = y_n/u_{nn} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j \right) \quad \forall i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

b) Théorèmes

- Si A admet une décomposition LU, alors celle-ci est unique.
- A admet une décomposition LU si, et seulement si, ses mineurs principaux sont non nuls (le mineur principal d'ordre k de A désigne le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en extrayant les k premières lignes et colonnes).
- Si A est simplement supposée inversible, alors A peut s'écrire A=PLU où P est une matrice de permutation.

c) Algorithme général de la décomposition LU

On suppose que A admet une décomposition LU, on a alors l'algorithme de décomposition LU suivant :

$$\begin{cases}
 k = 1, \dots, n - 1 \left\{ \begin{array}{l}
 l_{ik} = 0 \quad i = 1, \dots, k - 1 \\
 l_{kk} = 1 \\
 l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^k} \quad i = k + 1, \dots, n \\
 a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^k \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n \\
 a_{ij}^{(k+1)} = 0 \quad i = k + 1, \dots, n, j = 1, \dots, k \\
 a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^k - l_{ik} a_{kj}^k \quad i = k + 1, \dots, n, j = k + 1, \dots, n
 \end{array} \right. \quad (4.19) \\
 \\
 l_{in} = 0 \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad l_{nn} = 1 \\
 U = \left(a_{ij}^{(n)} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \quad L = \left(l_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n}
 \end{cases}$$

d) Calcul de déterminant

La décomposition LU permet aussi de calculer le déterminant de A, qui est égal au produit des éléments diagonaux de la matrice U si A admet une décomposition LU.

$$\det(A) = \det(L) \times \det(U) = 1 \times \det(U) = \det(U)$$

4.2.7 Méthode de factorisation Cholevsky

a) Principe de la méthode de Cholevsky

La méthode de Cholevsky consiste, pour une matrice symétrique définie positive A, à déterminer une matrice triangulaire inférieure L tel que $A=LL^T$. Une matrice symétrique A est dite définie positive si, pour tout vecteur x, le produit $x^T A.x$ est positif. La matrice L est en quelque sorte une racine carrée de A. Cette décomposition permet notamment de calculer la matrice inverse A-1 et de calculer le déterminant de A (égal au carré du produit des éléments diagonaux de L).

Une matrice symétrique A est dite définie positive si, pour tout vecteur x, le produit $x^T Ax$ est positive.

Pour la résolution de système linéaire de la forme $Ax=b$, le système devient $LL^T x=b \rightarrow Ly=b$ sachant que $L^T x=y$

Si A une matrice symétrique définie positive, il existe au moins une matrice réelle triangulaire inférieure L telle que : $A=LL^T$ (4.20).

On peut également imposer que les éléments diagonaux de la matrice L soient tous positifs, et la factorisation correspondante est alors unique.

b) Algorithme de la méthode de Cholevsky

On cherche la matrice :

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & l_{33} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

De l'égalité $A=LL^T$ on déduit :

$$a_{ij} = (LL^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} l_{jk} = \sum_{k=1}^{\min\{i,j\}} l_{ik} l_{jk}, \quad 1 \leq i, j \leq n \quad (4.21)$$

Puisque $l_{ij}=0$ si $1 \leq i < j \leq n$.

La matrice A étant symétrique, il suffit que les relations ci-dessus soient vérifiées pour $i \leq j$, c'est-à-dire que les éléments l_{ij} de la matrice doivent satisfaire :

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} l_{jk} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

Pour $j=1$, on détermine la première colonne de L :

- (i=1) $a_{11}=l_{11}l_{11}$ d'où $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
- (i=2) $a_{12}=l_{11}l_{21}$ d'où $l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$
- ...
- (i=n) $a_{1n}=l_{11}l_{n1}$ d'où $l_{n1} = \frac{a_{1n}}{l_{11}}$

On détermine la j-ème colonne de L, après avoir calculé les (j-1) premières colonnes :

* $i=j$ $a_{ii} = l_{i1}l_{i1} + \dots + l_{ii}l_{ii}$ d'où

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}$$

* $i=j+1$ $a_{i,i+1} = l_{i1}l_{i+1,1} + \dots + l_{ii}l_{i+1,i}$ d'où $l_{i+1,i} = \frac{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{i+1,k}}{l_{ii}}$

* $i=n$ $a_{i,n} = l_{i1}l_{n1} + \dots + l_{ii}l_{n,i}$ d'où $l_{n,i} = \frac{a_{in} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{n,k}}{l_{ii}}$

c) Résolution de système d'équations par la méthode de Cholevsky

Pour la résolution de système linéaire de la forme : $Ax=b$, le système devient

$$LL^T x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b & (1), \\ L^T x = y & (2). \end{cases}$$

On résout le système (1) pour trouver le vecteur y , puis le système (2) pour trouver le vecteur x . La résolution est facile par la forme triangulaire des matrices.

d) Calcul de déterminant par la méthode de Cholevsky

La méthode de Cholesky permet aussi de calculer le déterminant de A , qui est égal au carré du produit des éléments diagonaux de la matrice L , puisque[6]

$$\det(A) = \det(L) \times \det(L^T) = \det(L)^2$$

4.3 Méthodes indirectes

4.3.1 Méthode de Jacobi

La méthode de Jacobi, due au mathématicien allemand Karl Jacobi, est une méthode itérative de résolution d'un système matriciel de forme. Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires.[6]

a) Principe de construction

La méthode de Jacobi est une méthode itérative de résolution de système linéaire de la forme

$$Ax=b$$

Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires. On cherche à construire l'algorithme pour $x^{(0)}$ donné, la suite

$$x^{(k+1)}=F(x^{(k)}) \text{ avec } k \in \mathbb{N}.$$

$A=M-N$ Où M est une matrice inversible.

$$Ax=b \Leftrightarrow Mx=Nx+b \Leftrightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b \quad (4.22)$$

$$x=F(x)$$

où F est une fonction affine.

b) Algorithme :

$$\begin{cases} \text{donne } x^{(0)}, \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \text{ si non.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Si x est solution de $Ax=b$ alors $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

c) Erreur :

Soit $e^{(k)}$ le vecteur erreur

$$e^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = M^{-1}N(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = M^{-1}N e^{(k)} \quad (4.24)$$

on pose $B = M^{-1}N$, ce qui donne
 $e^{(k+1)} = B e^{(k)} = B^{(k+1)} e^{(0)}$

d) Convergence :

L'algorithme converge si $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ (matrice nulle).(matrice nulle).

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ est que le rayon spectral de B vérifie

$$\rho(B) < 1,$$

on rappelle que $\rho(B) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B.

Théorème : si A est à diagonale strictement dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i = 1, \dots, n$$

Alors pour tout x_0 la méthode de Jacobi converge vers la solution x du système $Ax=b$

e) Décomposition par la méthode de Jacobi

On décompose la matrice A de la façon suivante : $A=D-E-F$

avec

- ▀ D la diagonale
- ▀ -E la partie en dessous de la diagonale
- ▀ -F la partie au dessus.

Dans la méthode de Jacobi, on choisit $M=D$ et $N=E+F$ (dans la méthode de Gauss-Seidel, $M=D-E$ et $N=F$).

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b \quad (4.25)$$

avec pour la ligne i de $D^{-1}(E + F)$: $-\left(\frac{a_{i,1}}{a_{i,i}}, \dots, \frac{a_{i,i-1}}{a_{i,i}}, 0, \frac{a_{i,i+1}}{a_{i,i}}, \dots, \frac{a_{i,n}}{a_{i,i}}\right)$

on a alors :

$$x_i^{(k+1)} = -\frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (4.26)$$

f) Résidu :

Soit $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ le vecteur résidu. On peut écrire $x_i^{(k+1)} = \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} + x_i^{(k)}$ avec $r_i^{(k)}$ que l'on calcule de la manière suivante :

$$r_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \frac{r_i^{(k)}}{a_{jj}} \quad (4.27)$$

g) Test d'arrêt :

Pour le test d'arrêt, on utilise le vecteur résidu, ce qui donne, pour une précision donnée ε :

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} = \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} < \varepsilon \quad (4.28)$$

4.3.2 Méthode du point fixe (SNL)

Soit le problème non linéaire défini par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.29)$$

Imaginer une itération par la méthode du point fixe, réécrire le système (4.29) sous la forme équivalente:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.30)$$

Donc le vecteur solution du système (4.29) et solution du système (4.30) et inversement.

Algorithme de la méthode du point fixe

Soit $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ la solution du système (4.29) et soit $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ une approximation de la solution $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ générer les approximations par la récurrence ainsi écrite :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(\mathbf{i} + 1) = \mathbf{G}_1(\mathbf{x}_1(\mathbf{i}), \mathbf{x}_2(\mathbf{i}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{i})) = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2(\mathbf{i} + 1) = \mathbf{G}_2(\mathbf{x}_1(\mathbf{i}), \mathbf{x}_2(\mathbf{i}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{i})) = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(\mathbf{i} + 1) = \mathbf{G}_n(\mathbf{x}_1(\mathbf{i}), \mathbf{x}_2(\mathbf{i}), \dots, \mathbf{x}_n(\mathbf{i})) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.31)$$

Il peut être démontré en analyse (4.31) converge sous les conditions suffisantes suivantes (mais pas nécessaires)

1- G_1, G_2, \dots, G_n et leurs premières dérivées continues au voisinage R de la racine $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ où $R = \{ (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k)) / |x_1 - x_1(\mathbf{k})| \leq \epsilon, |x_2 - x_2(\mathbf{k})| \leq \epsilon, \dots, |x_n - x_n(\mathbf{k})| \leq \epsilon \}$ pour tout $\epsilon > 0$

2. Les inégalités suivantes satisfaites

$$\begin{cases} |f_{1x_1}| + |f_{1x_2}| + \dots + |f_{1x_n}| \leq K \\ |f_{2x_1}| + |f_{2x_2}| + \dots + |f_{2x_n}| \leq K \\ \vdots \\ |f_{nx_1}| + |f_{nx_2}| + \dots + |f_{nx_n}| \leq K \end{cases} \quad \text{pour } (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \text{ dans } R \text{ et } K > 1$$

3. Approximations $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ initiales choisies dans R

Quand l'itération converge elle est linéaire.[6]

4.3.3 Méthode de Newton-Raphson (S.N.L)

La méthode d'Issac Newton et Joseph Raphson est une méthode itérative de résolution des systèmes d'équations linéaires au non linéaires.

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

soit $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ un vecteur d'approximation du système précédent.

Supposons que f_1, f_2, \dots, f_n suffisamment différentiables, le développement de f_1, f_2, \dots et f_n autour de $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ en utilisant les séries de Taylor :

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{1x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{1x_2} + \dots$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_2(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{2x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{2x_2} + \dots$$

.

.

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_n(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{nx_1} + (x_2 - x_2(0))f_{nx_2} + \dots$$

supposons que $(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$ sont suffisamment proche de la solution $(x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ de manière à négliger les termes d'ordre supérieur à 1.

$$f_1(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{1x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{1x_2} + \dots = 0$$

$$f_2(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{2x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{2x_2} + \dots = 0$$

.

.

.

$$f_n(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)) + (x_1 - x_1(0))f_{nx_1} + (x_2 - x_2(0))f_{nx_2} + \dots = 0$$

Ce qui permet d'écrire

$$(x_1 - x_1(0))f_{1x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{1x_2} + \dots = -f_1(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

$$(x_1 - x_1(0))f_{2x_1} + (x_2 - x_2(0))f_{2x_2} + \dots = -f_2(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

.

.

.

$$(x_1 - x_1(0))f_{nx_1} + (x_2 - x_2(0))f_{nx_2} + \dots = -f_n(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0))$$

On a obtenu n équations à n inconnues

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J(x^{(k)})^{-1} f(x^{(k)}) \quad (4.33)$$

Sachant que $f_{1x_1}, f_{1x_2}, \dots$ et f_{1x_n} sont les dérivées premières de f_1 par rapport x_1, x_2, \dots, x_n , $f_{2x_1}, f_{2x_2}, \dots$ et f_{2x_n} sont les dérivées premières de f_2 par rapport x_1, x_2, \dots, x_n jusqu'au

$f_{nx_1}, f_{nx_2}, \dots$ et f_{nx_n} sont les dérivées premières de f_n par rapport x_1, x_2, \dots, x_n [6]

4.3.4 Méthode de Newton modifiée (Système Non Linéaire)

Pour éviter le calcul de $J^{-1}(x(k))$, la méthode de Newton améliorée (modifiée) a été développée pour faire l'objet. [6]

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - J^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)})$$

$$y^{(k)} = J^{-1}(x^{(k)}) f(x^{(k)})$$

multiplions par $J(x^{(k)})$ à gauche et à droite on aura :

$$y^{(k)} J(x^{(k)}) = J^{-1}(x^{(k)}) J(x^{(k)}) f(x^{(k)})$$

$$y^{(k)} J(x^{(k)}) = f(x^{(k)}) \quad (4.34)$$

données:

$$x^{(k)}: (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$$

$$f: (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

chercher $y(k)$: $(y_1(k), y_2(k), \dots, y_n(k))$ en résolvant $y(k)J(x(k)) = f(x(k))$ qui est un système algébrique linéaire, utiliser à cette fin une méthode itérative tel que G-S, G-S accélérée ou SOR (successive over relaxation).

Par la suite la calculer $x(k+1)$ en se basant sur l'expression initiale.

$$x(k+1) = x(k) - y(k) \quad (4.35)$$

a) Algorithme de la méthode de Newton modifiée

$$\bar{F}(\bar{x}) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_{1n}) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_{1n}) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_{1n}) = 0 \end{cases}$$

1- Sélectionner $\bar{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ comme valeurs solutions initiales

2- $k=0$

3- Calculer les résiduels $\bar{F}(\bar{x}^{(k)})$

$$J(\bar{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})}$$

4- Résoudre le système linéaire $n \times n$ pour l'inconnue $\bar{y}^{(k)}$ par la méthode S.O.R par exemple.

$$J(\bar{x}^{(k)})\bar{y}^{(k)} = -\bar{F}(\bar{x}^{(k)})$$

5- $\bar{x}^{(k+1)} = \bar{x}^{(k)} + \bar{y}^{(k)}$

6- si $\bar{x}^{(k+1)}$ est suffisamment précis aller à 7.

$k=k+1$

7- Procédure complétée

Ecrire les solutions obtenues \bar{x}^{k+1}

b) Comment tester la précision du vecteur solution (étape 6 de l'algorithme) ? :

$\bar{x}^{(k+1)} = (x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_n^{(k+1)})$ solution de l'itération actuelle

$\bar{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ solution de l'itération précédente donc connue.

Tolérance: $Tol = \left| \frac{x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}}{x_1^{(k+1)}} \right|$ Erreur relative sur la première composante.

Calculer $ER_i = \left| \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{x_i^{(k+1)}} \right|$ $i=2, \dots, n$

Calculer $Tol = \max(Tol, ER_i)$ (4.36) $i=2, \dots, n$

Si $Tol < \epsilon$ sortir (allez à l'étape 7)

Sinon $x_i^{(k)} \leftarrow x_i^{(k+1)}$ refaire l'itération en prenant $k=k+1$. [6]

4.3.5 Méthode du gradient conjugué

Cette méthode numérique permet de résoudre de grands systèmes linéaires dont la matrice est symétrique définie positive. Elle repose sur la recherche de directions successives permettant d'atteindre la solution exacte du système étudié. [6]

a) Description du problème :

Considérons le système suivant : $Ax=b$, où A est une matrice de taille $n \times n$ symétrique définie positive ($A^T=A$ et $x^T Ax > 0$, pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ non nul). Soit x^* la solution exacte de ce système.

b) Directions conjuguées :

Comme la matrice A est symétrique définie positive, on peut définir le produit scalaire suivant sur \mathbf{R}^n : $\langle u, v \rangle_A = u^T Av$. Deux éléments $u, v \in \mathbf{R}^n$ sont dit A -conjugués si :

$$u^T Av = 0$$

La méthode du gradient conjugué consiste à construire une suite (p_k) $k \in \mathbf{N}$ de n vecteurs A -conjugués. Dès lors, la suite p_1, p_2, \dots, p_n forme une base de \mathbf{R}^n . La solution exacte x^* peut donc se décomposer comme suit :

$$x_* = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n \quad (4.37)$$

$$\text{Où } \alpha_k = \frac{p_k^T b}{p_k^T A p_k}, k = 1, \dots, n. \quad (4.38)$$

c) Construction des directions conjuguées :

La solution exacte x^* peut-être également vu comme l'unique minimisant de la fonctionnelle

$$J(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x, x \in \mathbf{R}^n \text{ On a donc clairement } \nabla J(x) = Ax - b, x \in \mathbf{R}^n \text{ d'où}$$

$$\nabla J(x_*) = 0$$

On définit le résidu du système d'équation comme suit $r_x = b - Ax_k = -\nabla J(x_k)$

r_k représente donc la direction du gradient de la fonctionnelle J en x_k (à un signe près).

La nouvelle direction de descente p_{k+1} suit donc celle du résidu modulo, sa A -conjugaison avec p_k , on a alors :

$$p_{k+1} = r_k - \frac{p_k^T A r_k}{p_k^T A p_k} p_k \quad (4.39)$$

C'est le choix du coefficient $\frac{p_k^T A r_k}{p_k^T A p_k}$ qui assure la A -conjugaison des directions p_k . Pour vous en assurez calculer $(A p_{k+1}, p_k)$, cette quantité est nulle.

d) Algorithme du gradient conjugué :

Calcul du résidu $r_0 = b - Ax_0$ pour un vecteur x_0 quelconque. On fixe $p_0 = r_0$.

Pour $k=1, 2, \dots$

$$q_k = A p_k$$

If $k=1$ $p_1 = r_0$

Else

$$\beta_{k-1} = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{r_{k-2}^T r_{k-2}}$$

$$p_k = r_{k-1} + \beta_{k-1} p_{k-1}$$

EndIf

$$\alpha_k = \frac{r_{k-1}^T r_{k-1}}{p_k^T q_k}$$

$$x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k$$

$$r_k = r_{k-1} + \alpha_k q_k$$

FinPour

4.3.6 Méthode de Gauss Seidel

La méthode de Gauss – Seidel, due aux Carl Gauss et Gabriel Seidel, est une méthode itérative de résolution d'un système matriciel de la forme $Ax=b$. Elle consiste à construire une suite vectorielle convergente vers la solution du système linéaire. [6]

a) Principe de construction

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode itérative de résolution de système linéaire de la forme $Ax=b$

Pour cela, on utilise une suite $x^{(k)}$ qui converge vers un point fixe x , solution du système d'équations linéaires. On cherche à construire l'algorithme pour $x^{(0)}$ donné, la suite $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ avec $k \in \mathbf{N}$.

$A=M-N$ où M est une matrice inversible.

$$Ax = b \Leftrightarrow Mx = Nx + b \Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b = F(x) \quad (4.40)$$

où F est une fonction affine.

b) Algorithme de la méthode de G-S

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donne,} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \text{ si non.} \end{cases}$$

Si x est solution de $Ax=b$ alors $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

c) Erreur de la méthode de G-S

Soit $e^{(k)}$ le vecteur erreur

$$e^{(k+1)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = M^{-1}N(x^{(k)} - x^{(k-1)}) = M^{-1}Ne^{(k)}$$

on pose $B=M^{-1}N$, ce qui donne :

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)} = B^{(k+1)}e^{(0)} \quad (4.41)$$

d) Convergence de la méthode de G-S

L'algorithme converge si $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{(k)}\| = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ (matrice nulle).

Théorème : Une condition nécessaire et suffisante pour que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|B^{(k)}\| = 0$ est que le rayon spectral de B vérifie

$$\rho(B) < 1,$$

on rappelle que $\rho(B) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B.

Théorème : si A est à diagonale strictement dominante

$$|a_{ii}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|, \forall i = 1, \dots, n$$

Alors pour tout x_0 la méthode de Jacobi converge vers la solution x du système $Ax=b$

e) Décomposition de la méthode de G-S

On décompose la matrice A de la façon suivante : $A=D-E-F$

avec

- ▀ D la diagonale
- ▀ -E la partie en dessous de la diagonale
- ▀ -F la partie au dessus.

Dans la méthode de Gauss-Seidel, on choisit $M=D-E$ et $N=F$ (dans la méthode de Jacobi, $M=Det$ $N=E+F$).

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} F x^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

On a alors :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad (4.42)$$

f) Résidu :

Soit $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ le vecteur résidu. On peut écrire $x_i^{(k+1)} = \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}} + x_i^{(k)}$ avec $r_i^{(k)}$ que l'on calcule de la manière suivante :

$$r_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \frac{r_i^{(k)}}{a_{jj}} \quad (4.43)$$

g) Test d'arrêt de la méthode de G-S

Pour le test d'arrêt, on utilise le vecteur résidu $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, ce qui donne, pour une précision donnée ε :

$$\frac{\|r^{(k)}\|}{\|b\|} = \frac{\|b - Ax^{(k)}\|}{\|b\|} < \varepsilon \quad (4.44)$$

On peut synthétiser la méthode de Gauss –Seidel aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 i = 1 \quad x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^k \right] \\
 i = 2, \dots, n-1 \quad x_i^{k+1} &= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j^k \right] \\
 i = n \quad x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{k+1} \right]
 \end{aligned}$$

4.3.7 Méthode de Gauss Seidel accélérée (Successive Over Relaxation)

C'est une méthode itérative de résolution du système d'équations, elle est similaire à celle de Gauss- Seidel seulement dans cette méthode on introduit un coefficient $0 < \omega < 2$ optimal qui accélère la convergence de manière que la méthode S.O.R soit plus rapide que la méthode de Gauss- Seidel. Donc il $\exists \omega_{opt}$ tel que le nombre d'itérations soit minimum, ω est appelé paramètre de sur-relaxation (accélération de la convergence), il est obtenu d'une manière expérimentale en traçant le nombre d'itérations en fonction de ω . [6]

$$i = 1 \quad x_1^{k+1} = \frac{\omega}{a_{11}} \left[b_1 - \sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^k \right] + (1 - \omega) x_1^k \quad (4.45)$$

$$i = 2, \dots, n-1 \quad x_i^{k+1} = \frac{\omega}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j^k \right] + (1 - \omega) x_i^k \quad (4.46)$$

$$i = n \quad x_n^{k+1} = \frac{\omega}{a_{nn}} \left[b_n - \sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{k+1} \right] + (1 - \omega) x_n^k \quad (4.47)$$

4.3.8 Méthode de Gauss-Seidel Accélérée-Newton ou Lieberstein

La méthode Lieberstein est une méthode itérative de résolution du système d'équations non linéaires, elle est plus facile que la méthode de Newton c'est-à-dire sans calculer des matrices ou retour aux théories des graphes. [6]

Soit le système donné par l'équation suivante :

$$\bar{\phi}(\bar{u}) = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(u_1, u_2, \dots, u_{1n}) = 0 \\ \phi_2(u_1, u_2, \dots, u_{1n}) = 0 \\ \vdots \\ \phi_n(u_1, u_2, \dots, u_{1n}) = 0 \end{cases} \quad (4.48)$$

Soit $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \varepsilon^{(n)}$

Supposer ϕ et ses premières dérivées du $\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}$ bornées.

Développer en série de Taylor $\phi(u^{(n+1)})$ aux allons tour de $u^{(n)}$

$$\phi(u^{(n+1)}) = \phi(u^{(n)}) + \frac{\partial \phi}{\partial u}(u^{(n)}) \varepsilon^{(n)} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u_A) \frac{(\varepsilon^{(n)})^2}{2!}$$

$u^{(n)} < u_A < u^{(n+1)}$ et $E = O(\varepsilon^{(n)})^2 = \frac{K'(\varepsilon^{(n)})^2}{K'}$ = et $K = \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2}(u_A)$

Exiger que $\phi(u^{(n+1)}) = 0$ pour que $u^{(n+1)}$ soit solution.

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} &= -\frac{\phi(u^{(n)})}{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u^{(n)})} + O\{(\varepsilon^{(n)})^2\} \\ u^{(n+1)} &= u^{(n)} + \varepsilon^{(n)} \\ u^{(n+1)} &= u^{(n)} - \frac{\phi(u^{(n)})}{\frac{\partial \phi}{\partial u}(u^{(n)})} + O\{(\varepsilon^{(n)})^2\} \end{aligned}$$

Cette dernière expression est le processus de Newton.

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\phi(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+1}, \dots, u_N^{n+1})}$$

Posons k indice caractérisant l'itération au lieu de n.

$$\left\{ \begin{aligned} u_1^{k+1} &= u_1^k - \frac{\phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \\ u_2^{k+1} &= u_2^k - \frac{\phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_2}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \\ &\vdots \\ u_N^{k+1} &= u_N^k - \frac{\phi(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\frac{\partial \phi}{\partial u_N}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \end{aligned} \right. \quad (4.49)$$

Ceci est le processus de Newton répété N fois.

$$\left\{ \begin{aligned} u_i^{k+1} &= u_i^k - \omega \frac{\phi_i(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})}{\phi_{ii}(u_1^{k+1}, u_2^{k+1}, \dots, u_{i-1}^{k+1}, u_i^{k+1}, \dots, u_N^{k+1})} \\ &\text{où } \phi_{ii} = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_i} \text{ et } 0 < \omega < 2 \text{ paramètre de relaxation} \end{aligned} \right. \quad (4.50)$$

ω doit être obtenu expérimentalement.

Lors de l'introduction de ω dans formule la méthode est dite Lieberstein et sans le paramètre de relaxation ω la méthode est dite de Gauss-Seidel-Newton.

4.3.9 Méthode de Broyden

Ici la mise à jour de la matrice B_k s'écrit :

$$B_{k+1} = B_k + \frac{s_k - B_k y_k}{t_{s_k} B_k y_k} (t_{s_k} B_k) \quad (4.51)$$

avec $s_k = x_{k+1} - x_k$, $y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$. Cette méthode s'applique au cas général où le jacobien n'a pas de raison d'être symétrique.[6]

4.3.10 Méthode d'approximations successives

C'est une méthode itérative utilisée pour résoudre les systèmes non linéaires.

Soit le problème suivant :

$$LU=f(u) \quad (4.52)$$

L est un opérateur linéaire différentiel

Linéariser l'équation (4.52) par la méthode de Picard qui introduit une suite de fonctions $\{u^{(n)}\}$ qui satisfait les conditions aux limites spécifiées et l'équation différentielle partielle.

$$Lu^{(n+1)} = f(u^n) \quad (4.53)$$

Quant la suite $\{u^{(n)}\}$ converge, la convergence est linéaire c'est-à-dire $u^{(n+1)} - u = O(u^{(n)} - u) = O(h)$ avec u la solution exacte et $u^{(n+1)}$ la solution en discret à n+1 et $u^{(n)}$ la solution en discret à n.

C'est-à-dire $\exists k = \text{constante}/E = kh$ convergence linéaire. En effet quand il y a convergence

$$\begin{aligned} Lu^{(n+1)} &= f(u^{(n+1)}) = f(u^{(n)}) + (u^{(n+1)} - u^{(n)})f'(u^{(n)}) \\ Lu^{(n+1)} &= f(u^{(n)}) + O(h) \end{aligned}$$

$O(h)$ vitesse linéaire de convergence.

(1) Ou si f différentielle (linéarisation de Newton) (4.52) ou Bellman-Juncosa et Kalanba suggèrent une linéarisation différentes (4.53) ou (aussi utilisée par Deuglas)(3)

$$Lu^{(n+1)} = f(u^{(n+1)}) = f(u^{(n)}) + (u^{(n+1)} - u^{(n)})f'(u^{(n)}) + O(h^2)$$

$O(h^2)$ une vitesse quadratique de convergence.

n: indice indiquant l'itération

n+1 : actuelle (inconnue à trouver)

$$Lu^{(n+1)} - u^{(n+1)}f'(u^{(n)}) = f(u^{(n)}) - u^{(n)}f'(u^{(n)}) \quad (4.54)$$

4.3.11 Résolution du système tri-diagonal

Il existe deux algorithmes permettant de résoudre un système tri-diagonal à savoir l'algorithme de THOMAS et celui de CROUT (CROUT-THOMAS).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{1,n+1} \\ a_{2,n+1} \\ a_{3,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{Bmatrix}$$

Dans ce qui suit l'algorithme de THOMAS.

1- $l_{11} = a_{11}$

$$u_{12} = a_{12}/l_{11}$$

2- $i=2$

3- $l_{i,i-1} = a_{i,i-1}$

$$\begin{aligned} l_{i,i} &= a_{i,i} - l_{i,i-1}u_{i-1,i} \\ u_{i,i+1} &= a_{i,i+1}/l_{ii} \end{aligned}$$

4- $i=i+1$

5- si $i < n$ aller à 3

Si non aller à 6

6- $l_{n,n-1} = a_{n,n-1}/l_{11}$

$$l_{n,n} = a_{n,n} - l_{n,n-1}u_{n-1,n}$$

7- $z_1 = a_{1,n+1}/l_{11}$

$$z_i = \frac{1}{l_{ii}}(a_{i,n+1} - l_{i,i-1}z_{i-1})$$

Pour $i=2,3,\dots, n$

8- $x_n = z_n$

$$x_i = z_i - u_{i,i+1}x_{i+1}$$

Pour $i=n-1, n-2,\dots, 1$

9- La procédure est complétée (afficher les x_i pour $i=1, 2, 3,\dots, n$)[6]

4.4 Conclusion

En conclusion, il est essentiel de choisir judicieusement la méthode de résolution adaptée lors de la recherche de solutions pour les équations non linéaires et les systèmes d'équations linéaires ou non linéaires. Une sélection inappropriée peut entraîner des erreurs de troncature et d'arrondi, compromettant ainsi la précision des résultats. De plus, certaines méthodes peuvent introduire des problèmes supplémentaires qui peuvent être plus complexes que le problème initial lui-même.

Il est donc important de prendre en compte divers facteurs tels que la nature du problème, la taille du système d'équations, la structure de la matrice, la précision requise et les ressources computationnelles disponibles. Pour les équations non linéaires, les méthodes itératives peuvent être préférables, offrant des solutions approximatives successives tout en contrôlant les erreurs. Pour les systèmes d'équations linéaires, les méthodes directes peuvent fournir des solutions exactes, mais il faut être conscient des limitations liées à la taille du système.

En fin de compte, la maîtrise des différentes méthodes de résolution des équations et des systèmes d'équations est essentielle pour choisir la méthode la plus appropriée et atteindre des résultats précis et efficaces.

Chapitre V

Application, résultats et
discussion

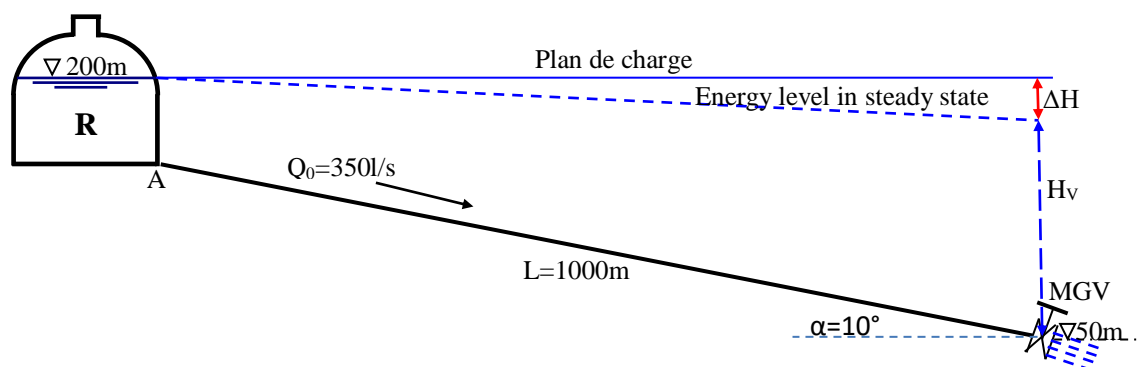
5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons essayer d'appliquer sur le modèle mathématique de l'écoulement transitoire la méthode de **Lax–Friedrichs** [7] en prenant, comme modèle physique, un système hydraulique gravitaire composé d'un réservoir, d'une conduite et d'une vanne (R-C –V) Nous élaborerons par la suite, un code permettant de calculer tous les paramètres hydrauliques en écoulement transitoire. Puis, nous réaliserons les courbes de surpressions et de dépressions pour les cas des fermetures linéaire et quadratique et nous terminerons par la recherche des lois optimales de fermeture d'une vanne.

5.2 Modèle physique et conditions aux limites

5.2.1 Modèle physique

Afin de concrétiser les modèles mathématiques obtenus et de conférer un intérêt pratique à notre travail, le modèle suivant sera adopté. Il s'agit d'un grand réservoir R de cote du trop-plein de 200 m assure un débit de 350 l/s à un robinet vanne motorisé par le biais d'une conduite gravitaire inclinée de 10° et de longueur $L=1000$ m. Le robinet vanne à fermeture commandée est placé à l'autre extrémité de la conduite à une cote égale à 50 m. En effet, l'écoulement transitoire pourra lieu à l'échelle du système (Réservoir – Conduite- Vanne) suite à une perturbation des conditions initiales d'écoulement, comme une fermeture rapide ou lente d'une vanne qu'elle soit volontaire ou non. La figure (5.1) montre un schéma approximatif de l'exemple adopté.



Figure(5.1):Schéma du système hydraulique 'une vanne motorisée alimentée en eau à partir d'un réservoir

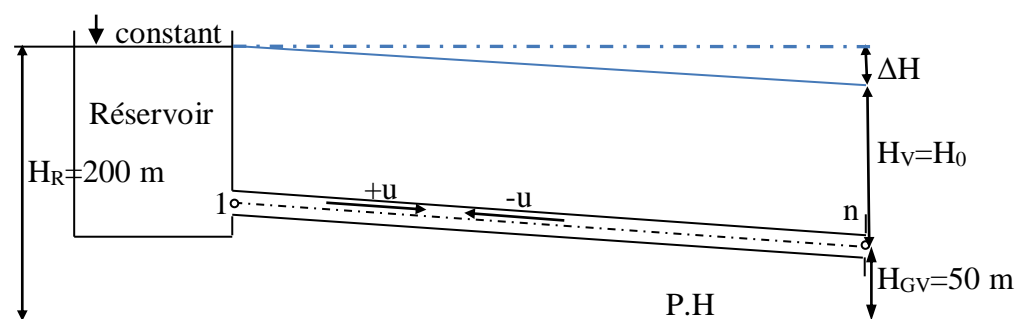
Dans ce travail, nous nous attacherons à mettre en exergue ce modèle et fournir toutes les informations nécessaires pour faire bon usage des modèles mathématiques obtenus. Les conditions initiales et aux limites du modèle physique aident également davantage à entamer plus facilement les calculs, surtout aux nœuds limites, dans l'écoulement transitoire.

5.2.2 Conditions aux limites

Les équations aux caractéristiques sont insuffisantes pour décrire l'écoulement non permanent, ce qui explique pourquoi nous allons définir ci-après les conditions limites dont nous aurons besoin pour le reste du travail.

5.2.2.1 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'alimentation à niveau constant

Pour mettre en évidence les bonnes conditions aux limites à la sortie d'un réservoir, il faut d'abord supposer que le réservoir est de grandes dimensions afin de négliger la variation du plan d'eau à l'intérieur de celui-ci lors de la génération de l'écoulement transitoire et la hauteur due à l'énergie cinétique.



Figure(5.2) : Sortie de l'eau à partir d'un réservoir à charge constante

$$H(1) = H_R = 200 \text{ m} ; \frac{u_0^2}{2g} \approx 0$$

Où : H_R est le niveau du plan d'eau dans le réservoir et $H(1)$ est la charge relative au premier nœud situé juste à l'orifice du réservoir.

Lorsque une vanne est placée à l'extrémité aval de la conduite et elle est fermée, une onde de surpression est générée pour se propager vers le réservoir où elle sera réfléchiée en une onde de dépression. L'équation du débit au premier nœud s'écrit :

$$Q(1) = (H_R - CN)/R \quad (5.1)$$

$$CN = H(2) - Q(2)(R - T \cdot |Q(2)|) \quad (5.2)$$

Où : $H(2)$ et $Q(2)$ sont des quantités calculées au temps (t) [2].

5.2.2.2 Conditions aux limites au niveau de la vanne

Les systèmes hydrauliques sont équipés de vannes qui contribuent à une bonne gestion. Cependant, la manière dont ils sont manipulés peut conduire à des perturbations indésirables affectant tous les paramètres hydrauliques. A cet effet, et du fait de sa présence en bout de canalisation ou à des endroits particuliers, le calcul de la

pression et du débit à ce nœud se fait en fonction de la caractéristique positive du nœud précédent et Ainsi, les équations de ce nœud s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} H(n) + R. Q(n) = CP \\ CP = H(n - 1) + Q(n - 1)(R - T. |Q(n - 1)|) \\ Q(n) = (CP - H(n))/R \end{cases} \quad (5.3)$$

Toutefois, dans le cas où la fermeture est commandée le débit à la vanne suit, au fil du temps, une fonction dépendant de la loi de fermeture choisie et dans ce cas la charge totale à la vanne prend la relation suivante :

$$H(n) = CP - R. Q(n) \quad (5.4)$$

Le débit au nœud N est étroitement lié à la vitesse moyenne d'écoulement à travers la vanne. Cette vitesse peut prendre des lois concave, linéaire ou convexe. Pour cela, il primordial de la clarifier en donnant sa relation.

$$u_f = (u_0 - u_\tau) \left[1 - \left(\frac{i. \Delta t}{Ct} \right)^m \right] + u_\tau \quad (5.5)$$

Où $0 \leq i \leq N$, $Ct = N. \Delta t$, $0 \leq m < \infty$, u_0 est la vitesse initiale du fluide, u_τ est la vitesse du fluide à la fin de l'opération de fermeture, Δt est le pas du temps et m est un exposant déterminant le type de la loi de fermeture de la vanne.

- $m = 0$, la loi de fermeture est instantanée et la vitesse passé instantanément de la valeur en écoulement permanent à une valeur finale égale à zero en écoulement transitoire ($Ct = 0$, $Q(n) = 0$ et $H(n) = CP$).

- $-1 < m < \infty$, les lois de fermeture sont de types convexes où la vitesse moyenne se caractérise par une faible diminution du débit au début du temps de fermeture (Ct) et une augmentation rapide au dernier temps de fermeture.

- $0 < m < 1$, les lois de fermeture suivent des fonctions concaves où la vitesse moyenne d'écoulement se caractérise par une forte décroissance initiale au premier temps de fermeture (Ct), suivie d'une décroissance lente la plupart du reste temps.

- $m = 1$, la loi de fermeture suit une loi linéaire dans laquelle la vitesse d'écoulement moyenne entre en réduction uniforme pendant toute la durée de la fermeture [8,9].

si la vitesse du fluide à la fin de l'opération de fermeturees $tnulleu_\tau=0$ la relation précédente s'écrit comme suit:

$$u_f = u_0 \left[1 - \left(\frac{i. \Delta t}{Ct} \right)^m \right] \quad (5.6)$$

Le débit volumique à travers une vanne en fermeture s'écrit :

$$Q = u. S_C = u. \epsilon_1. S \quad (5.7)$$

Où, S_C est la section contractée et ϵ_1 est le coefficient de contraction de la section.

$$Q(t) = u_0 \left[1 - \left(\frac{i \cdot \Delta t}{Ct} \right)^m \right] \cdot \epsilon_1 \cdot S \quad (5.8)$$

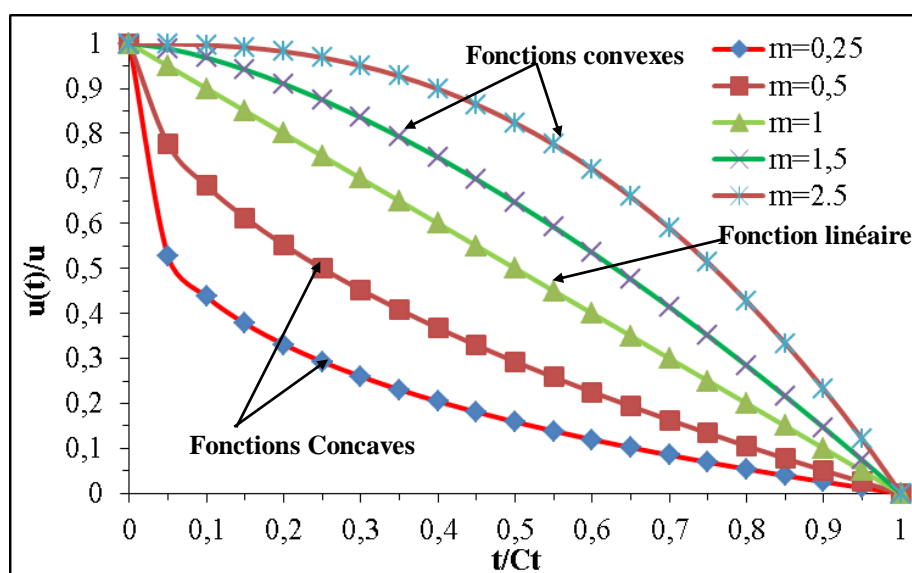
En écoulement permanent le débit volumique s'écrit comme suit:

$$Q_0 = u_0 \cdot S \quad (5.9)$$

Ce qui permettra d'écrire l'expression du débit au nœud n comme suit :

$$Q_n(t) = \epsilon_1 \cdot Q_0 \left[1 - \left(\frac{i \cdot \Delta t}{Ct} \right)^m \right] \quad (5.10)$$

La figure (5.3) montre les courbes enveloppes des lois possibles pour la fermeture d'une vanne dans un système hydraulique.



Figure(5.3): Fonctions de fermeture pour différentes valeurs de l'exposant m

L'exposant m , de l'expression de Q au nœud n, génère l'infini de fonctions de Q et par conséquent la recherche de la valeur optimale de cet exposant s'avère une priorité majeure pour une gestion optimale.

5.3 Type de vannes

Il existe de nombreux types de vannes qui ont été développés en fonction de différents types de fluides et le fonctionnement des vannes. Chaque vanne a des caractéristiques différentes de l'autre vanne, et chaque vanne présente des avantages et des inconvénients, de sorte que les vannes sont conçues en fonction du travail qu'elles contiennent, de sorte que certaines d'entre elles leur travail est capable d'étrangler le débit, d'autres types de vannes ne peuvent qu'arrêter le débit. Parmi les vannes les plus utilisées, nous allons citer les suivantes :

5.3.1 Vanne sphérique

Elle fonctionne en répondant à l'action du disque. Le disque se déplace vers ou loin du siège, arrêtant ainsi l'écoulement du fluide ou permettant au fluide de s'écouler. Le disque est usiné de clapet sur le siège de soupape. Ce type de vannes peut être actionnée manuellement ou actionnée électriquement ou automatique.

La fonction d'actionnement :

$$\eta = 1 - \frac{t}{T_V} \quad (5.11)$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2$$

$$\eta = \theta_m \left(\frac{t}{T_V}\right)$$

$$\eta = \left(\theta_m - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2\right) \quad (5.12)$$

Où t est le temps d'actionnement de la vanne et θ_m l'angle d'actionnement complet.

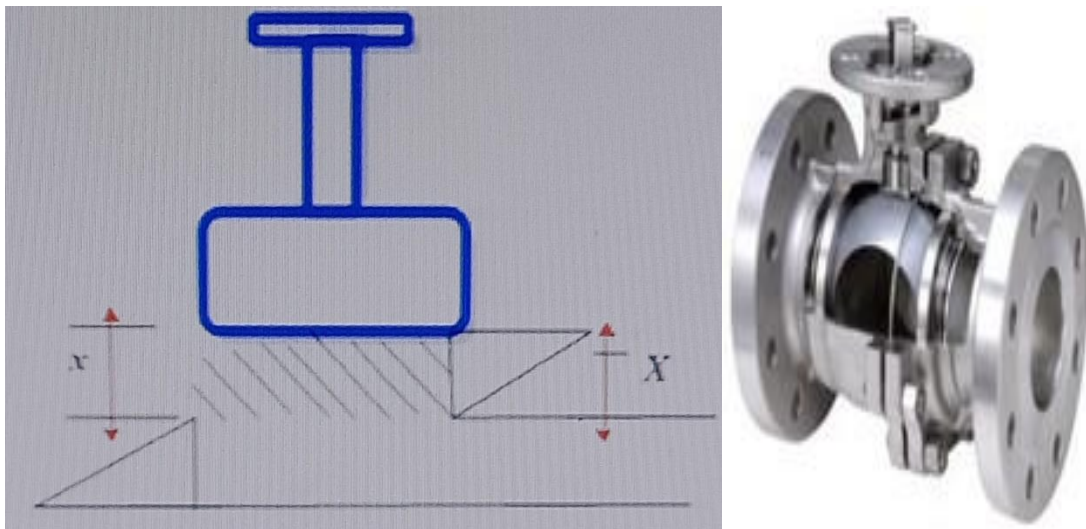


Figure (5.4) : Représentation schématique du robinet d'arrêt sphérique [10,11]

5.3.2 Vanne carrée

La vanne a un disque, la porte a un mouvement transversal dans le sens de l'écoulement du fluide, ainsi cet agencement s'arrête complètement ou s'ouvre le passage du fluide. La vanne utilise des pressions et des températures élevées et elle est utilisée pour une large gamme de fluides.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne carrée} = 1 - \frac{1}{\pi} \left(\arccos(2\eta - 1) - (2\eta - 1)\sqrt{1 - (2\eta - 1)^2} \right) \quad (5.13)$$

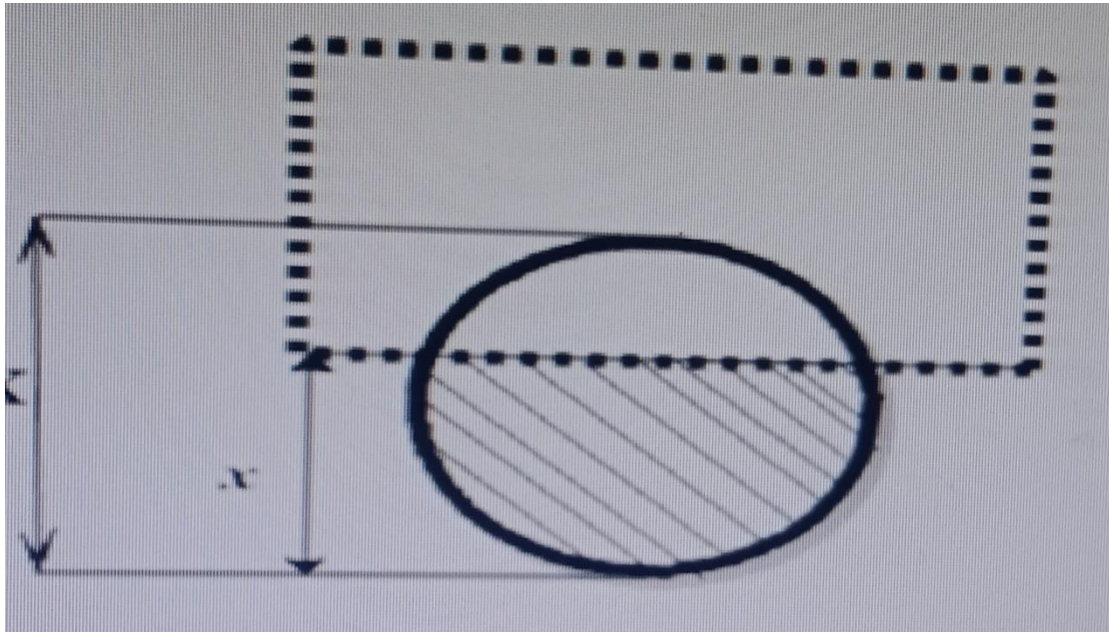


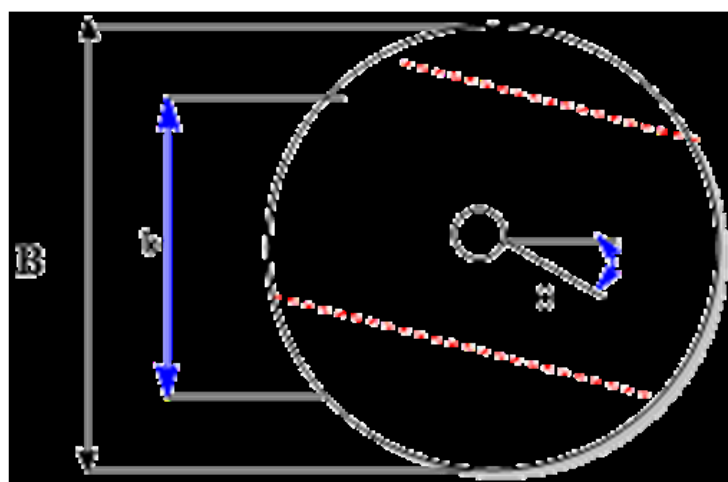
Figure (5.5) : Représentation schématique du robinet-vanne carré [10]

5.3.3 Vanne à bille

La vanne à bille a un bouchon sphérique qui est l'élément de contrôle. Il est utilisé lorsqu'une combinaison d'étranglement et d'arrêt est requise. Il offre de bonnes caractéristiques d'écoulement. Le robinet à tournant sphérique se compose d'un globe à deux voies et la boule tourne entre des sièges élastiques.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne à bille} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right) \quad (5.14)$$



Figure(5.6) : Représentation schématique du robinet à tournant sphérique [10]

5.3.4 Vanne papillon

Dans la vanne papillon, l'élément de contrôle est un disque appelé lame, ailette ou clapet, qui tourne dans le sens horizontal ou vertical et permet au fluide de s'écouler. La vanne papillon convient à l'étranglement ou au fonctionnement marche-arrêt à faible chute de pression. Il est économique, facile à installer et ne laisse pas les solides s'accumuler.

La fonction d'actionnement :

$$\begin{aligned} \text{Vanne papillon} = & \frac{1 + \cos(\eta)}{2} + \frac{\cos(\eta)}{\pi} \left(\arcsin(-x) + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(-x)) \right) \\ & - \frac{1}{\pi} \left(\arcsin(x) + \frac{1}{2} \sin(2 \arcsin(x)) \right) \quad (5.15) \end{aligned}$$

Où :

$$x = \frac{\sin(\eta) \sqrt{\left(\frac{B}{b}\right)^2 - 1}}{1 + \cos(\eta)}; \quad \eta = \theta_m - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2$$

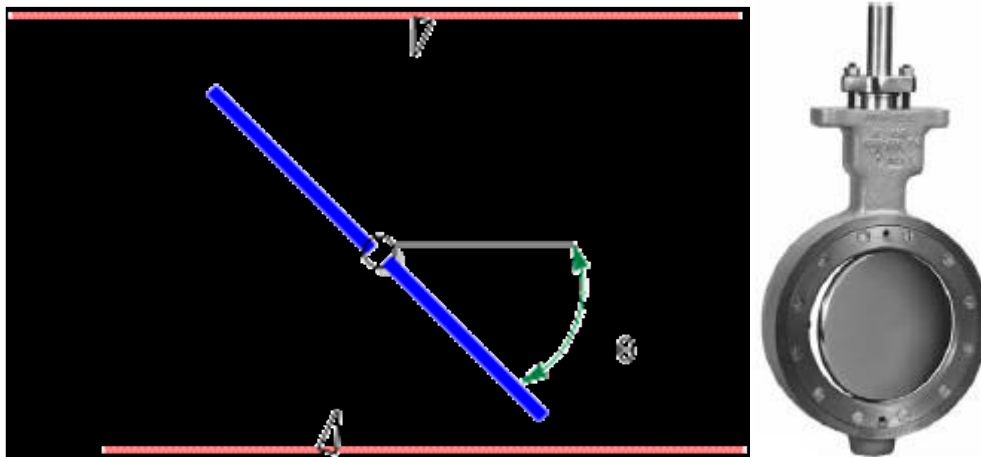


Figure (5.7): Représentation schématique de la vanne papillon [10,11]

5.3.5 Vanne à pointeau

Les vannes à pointeau sont utilisées pour mesurer le débit de fluide à travers des tubes ou des orifices. Le débit est réglé en insérant ou en retirant une tige conique dans ou hors d'un orifice conique similaire, créant une manière très précise d'ajuster le débit de fluide à travers l'orifice. Les principales caractéristiques comprennent le type de vanne, les connexions d'orifice, la taille de la vanne et les matériaux qui composent le corps de la vanne, notamment son siège, son joint, sa garniture et sa garniture de tige. Les vannes à pointeau sont utilisées dans les systèmes de vide et pour les systèmes de mesure où une régulation précise du débit est requise. En raison du nombre élevé de tours requis pour fermer une vanne à pointeau, ils ne sont pas parfaitement adaptés pour une utilisation dans les applications de service d'arrêt.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne à pointe} = 2\eta - \eta^2 \quad (5.16)$$

Où :

$$\eta = \theta - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2 \quad (5.17)$$

Donc,

$$\text{Vanne à pointe} = 2\left(\theta - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2\right) - \left(\theta - \left(\frac{t}{T_V}\right)^2\right)^2 \quad (5.18)$$

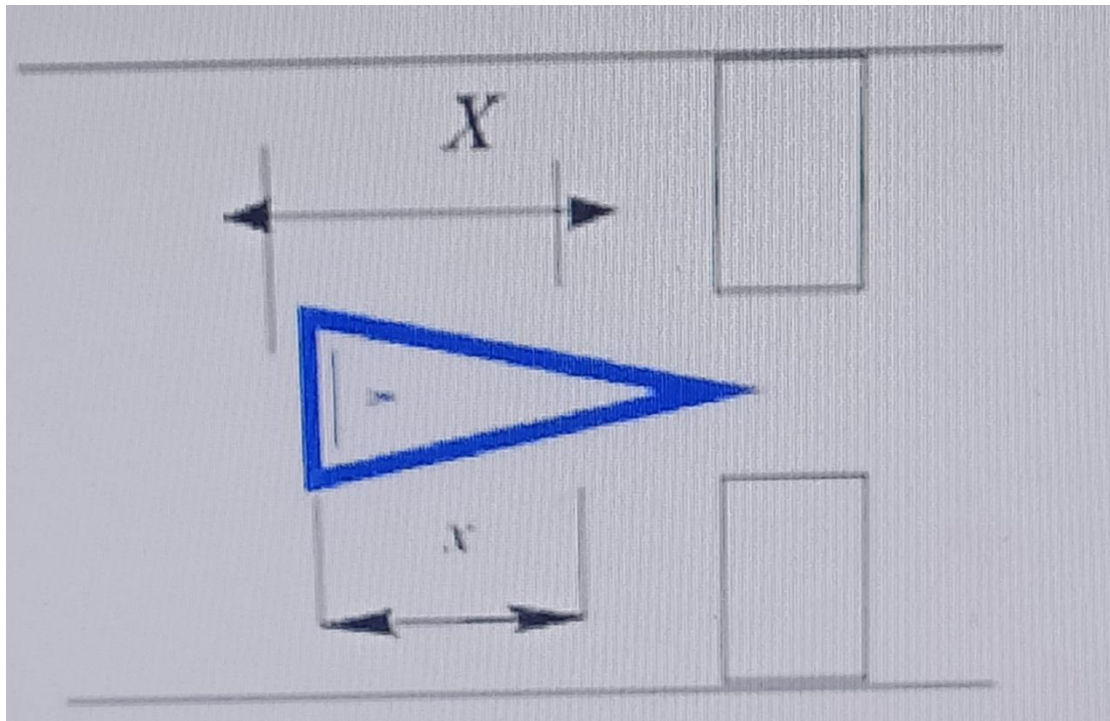


Figure (5.8) : Représentation schématique de la vanne à pointe [10]

5.3.6 Vanne circulaire

Cet type de vannes fonctionne en soulevant une vanne circulaire hors du trajet du fluide lorsque la vanne est complètement ouverte et que la vanne est à passage intégral, ce qui signifie qu'il n'y a rien pour obstruer le flux à cause de la porte et de la tuyauterie. Ce diamètre d'alésage détermine également la taille de la vanne.

La fonction d'actionnement :

$$\text{Vanne circulaire} = 1 - 2\pi \left(\arccos(\eta) - \eta\sqrt{1-\eta^2} \right) \quad (5.19)$$

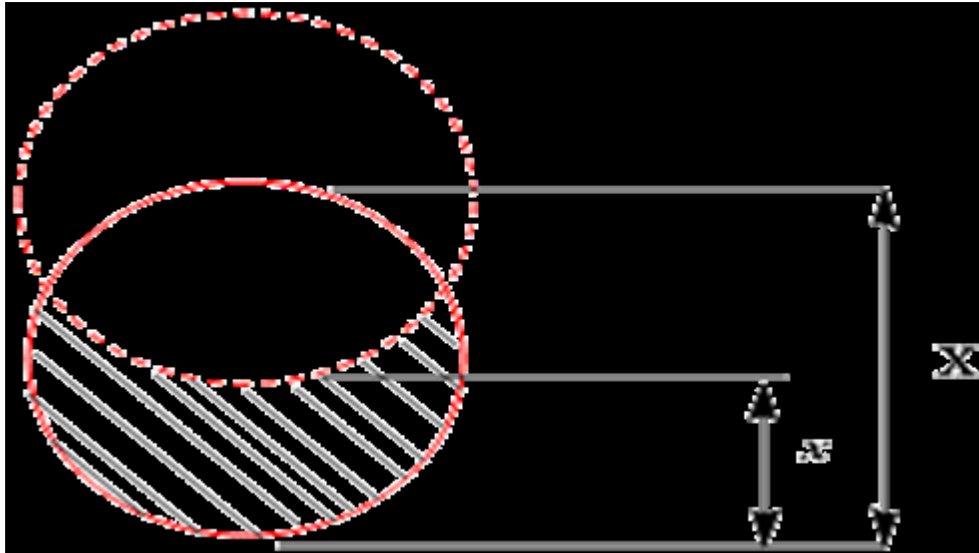
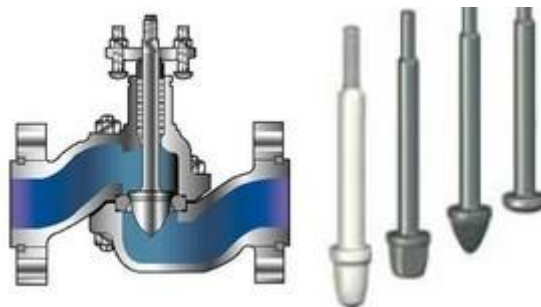


Figure (5.9) : Représentation schématique du robinet-vanne circulaire [10]

5.3.7 Vanne à clapet simple

Elles font l'objet d'une vaste gamme de production pour des applications les plus variées:

- à passage droit, en équerre, trois voies, ...
 - pour des services cryogéniques, de liquide flashant, de désurchauffe de vapeur, ...
- Elles peuvent être équipées de clapets et/ou de cages aux formes variées permettant d'ajuster la courbe de variation de débit/Cv aux besoins les plus variés.



Figure(5.10): Vanne à clapet simple [11]

5.3.8 Vanne à clapet double

Permet pour un même diamètre de raccordement une capacité quasiment double de celui d'une vanne à clapet simple.

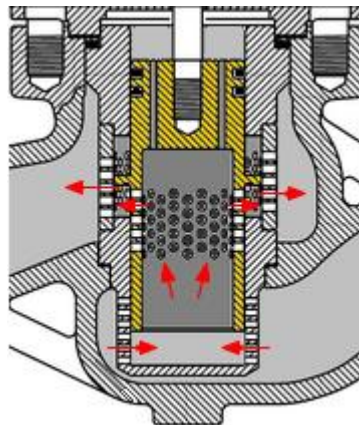
De plus l'effet de la pression sur les clapets s'annule et autorise donc un actionneur (servomoteur) de faible puissance.



Figure(5.11) : Vanne à clapet double [11]

5.3.9 Vanne à cage

De conception proche des vannes à clapet, ici la cage aussi bien que le clapet contribue au réglage du débit. Les cages peuvent avoir des formes très variées permettant de produire toutes formes de courbes caractéristiques. Elles permettent d'effectuer la détente en plusieurs étages, utile pour résoudre des problèmes de bruit ou de cavitation.



Figure(5.12) : Vanne à cage [11]

5.3.10 Vanne à clapet rotatif excentré

Ce type de vanne permet un domaine d'utilisation plus étendu que d'autres technologies telles que les vannes à clapet ou les vannes papillon. La différence de pression ne s'oppose pas directement au mouvement du clapet, ce qui autorise des actionneurs de relative faible puissance.

Elle peut être utilisée dans les deux sens de circulation du fluide; dans le sens clapet → arbre, le fluide tend à ouvrir la vanne, tandis que dans le sens arbre → clapet, le fluide tend à la fermer.

La courbe caractéristique est assez linéaire sur la variation de débit et le gain sur le débit est assez constant sur toute la course.



Figure (5.13) : Vanne à clapet rotatif excentré [11]

Ce chapitre consiste à explorer l'effet de fermeture de la vanne sur les paramètres de l'écoulement transitoire dans les conduites sous pression.

5.4 Equations de l'écoulement transitoire

Les équations gouvernant les écoulements transitoires, en fonction du débit et de la charge manométrique, dans les conduites sous pressions ont été données par les deux équations représentées par le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{Q}{S} \sin(\alpha) - \frac{a^2}{gS} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{S} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} - gS \frac{\partial H}{\partial x} \pm gSj \end{cases} \quad (5.20)$$

Où : a est la célérité d'onde.

a) cas d'une conduite libre

Pour les conduites libres la célérité d'onde s'écrit :

$$a = \left(\sqrt{\frac{K}{\rho}} \right) / \left(\sqrt{1 + \frac{K \cdot D \cdot C}{E \cdot e_1}} \right) \quad (5.21)$$

K : module d'élasticité du liquide, pour l'eau $K=2,07 \cdot 10^9$ Pascals ;

E : module d'élasticité du matériau constituant le réseau.

e_1 : épaisseur de la conduite en m ;

$C=1$ puisque on considère que la conduite étudiée est à paroi mince ;

ρ : masse volumique du liquide, pour l'eau $\rho= 10^3 \text{kg/m}^3$;

S : section transversale de la conduite (m^2) ;

g : accélération de la pesanteur (m/s^2).

Comme dans le cas général, on n'a aucune idée sur le sens de l'écoulement du liquide dans la conduite, il est plus commode d'exprimer j par la relation suivante :

$$j = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} Q \cdot |Q| \quad (5.22)$$

avec :

d : diamètre intérieur de la conduite en m ;

λ : coefficient de frottement, il est donné par la formule implicite de Colebrook-White:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{\varepsilon}{3,71d} + \frac{2,51}{Re \sqrt{\lambda}} \right) \quad (5.23)$$

avec :

Re : le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{U \cdot d}{\nu} \quad (5.24)$$

Où :

U : la vitesse moyenne d'écoulement en (m/s) ;

d : diamètre intérieur de la conduite en (m) ;

ν : est la viscosité cinématique en (m²/s), pour l'eau elle est donnée par l'expression de Poiseuille ainsi écrite.

$$\nu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337t + 0,000221t^2} \cdot 10^{-4} \quad (5.25)$$

Où test la température du liquide [12].

En phase transitoire où (2320 < Re < 4000), le coefficient de frottement est donné par la formule de Frenkel qui s'écrit[13]:

$$\lambda = \frac{2,7}{Re^{0,53}} \quad (5.23a)$$

En régime laminaire où (Re < 2320) et pour les conduits circulaires, le coefficient de frottement est donné par l'expression suivante [12,14]:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (5.23b)$$

b) cas d'une conduite enterrée

La célérité d'onde est déterminée dans le cas des conduites enterrées par l'expression suivante [15] :

:

$$\frac{1}{a^2} = \left[\frac{\rho}{K} \left(1 + K(1 - v_m^2) \frac{2r}{E_m e_m} \right) [1 + B(P - P_a)] \right] \quad (5.24)$$

D'où :

$$B = (1 - v_m^2) \frac{r^2}{E_m e_m^2} (1 - 2v_m) \quad (5.25)$$

Avec :

- a : la célérité d'onde (m/s),

- E_m : le module de Young du métal (Pa),
- ν_m : le coefficient de Poisson du métal,
- e_m : l'épaisseur du blindage (m),
- K_e : le module d'élasticité de l'eau [Pa],
- ρ : la masse volumique de l'eau [kg/m^3],
- r : le rayon de la conduite (m),
- P : la pression hydrostatique (Pa),
- P_a : la charge des terres de remblai (Pa) [16].

L'hypothèse de la charge de précontrainte requiert, tout d'abord, le calculer la pression hydrostatique en régime permanent au nœud considéré et la charge des terres du remblai. Cette dernière grandeur nécessite de savoir le type de pose de la conduite et est-ce que cette pose est faite dans une tranchée large ou étroite.

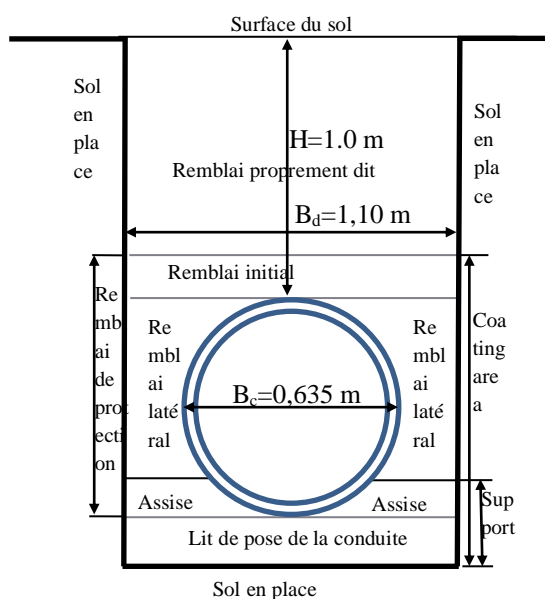


Figure (5.14) : Coupe transversale de la conduite

Tableau 1: Caractéristiques des matériaux utilisés

Type de matériaux	Fonte
Module d'élasticité en Pascal	$E_F=1.03. 10^{11}$
Diamètre extérieur en (mm)	635
Diamètre intérieur en (mm)	600
Épaisseur de la conduite e_1 en (mm)	17.5
Rugosité de la conduite ϵ en (mm)	0.03
Longueur (m)	1000
Pression nominale de la conduite (bars)	42
Coefficient de Poisson	0,26

Tableau 2: Caractéristiques du réservoir, du débit et du fluide

Niveau du trop plein du réservoir en (m)	200	Fluid elasticity modulus	$K = 2,07.10^9$ Pa
Débit sortant du réservoir en (l/s)	350	Fluid temperature	15°C

L'organigramme de la figure (5.15) donne la représentation schématique de la résolution du problème de l'écoulement transitoire.

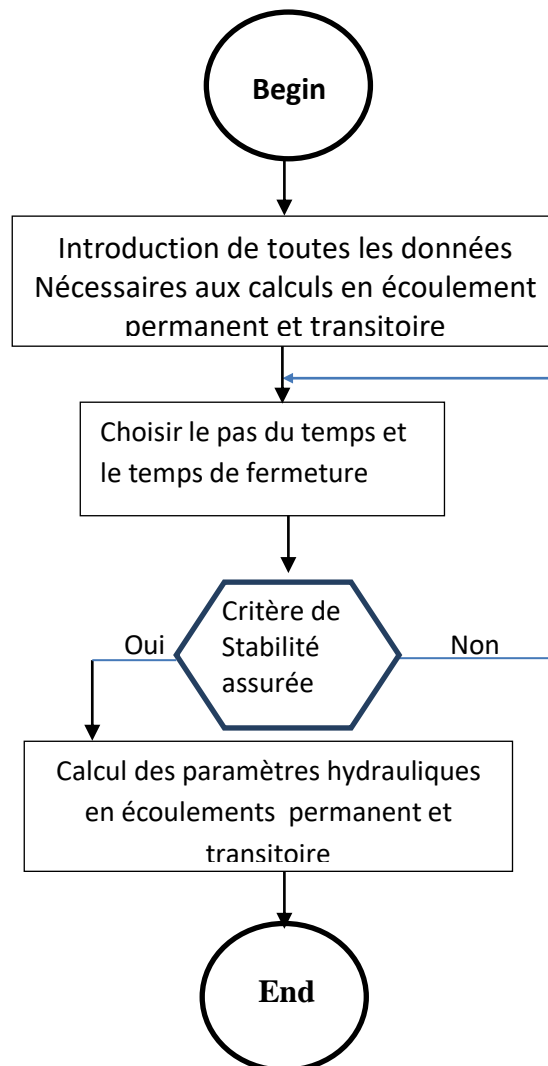


Figure (5.15) : Organigramme de calcul des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire

La fermeture instantanée, de temps de fermeture nul, génère un phénomène oscillatoire de surpressions et de dépressions de période de retour de $4L/a$, lequel a des effets néfastes sur le tuyau et ses annexes en même temps. Cette fermeture, bien qu'elle soit pratiquement irréalisable, en raison de son délai, qui doit être nul, doit être évitée afin de ne pas mettre en danger le système hydraulique. Par ailleurs, elle engendre des pressions importantes dépassant en certains endroits du système hydraulique la résistance du tuyau, notamment. Alors que la fermeture rapide, de temps de fermeture compris entre 0 et $0,5 t_4$ (période de retour), engendre des valeurs de pression importantes pouvant causer des dommages au système hydraulique.

La fermeture est dite lente, si le temps de fermeture de la vanne est supérieur au temps d'aller et de retour de l'onde de choc $t > 0,5 t_4$. Cette fermeture n'est pas obligatoire manuelle. En effet, les progrès de la technologie ont conduit à l'apparition

de vannes motorisées qui se ferment et s'ouvrent en fonction du signal de commande. Cette opportunité génère des lois reliant le débit et le signal de commande à l'instar des lois linéaire, concaves et convexes.

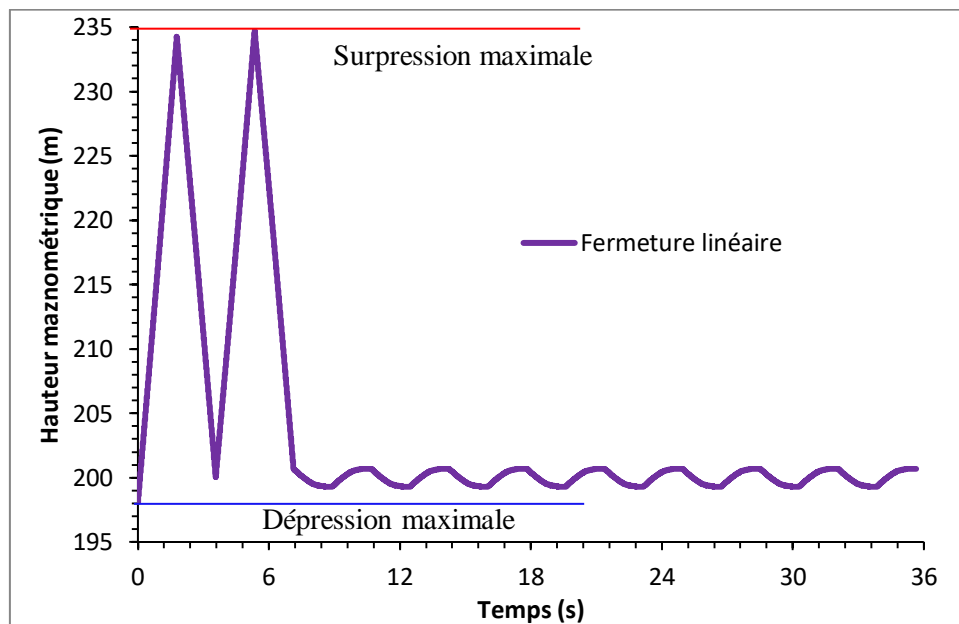
Du premier manœuvre à $t=t_0$ jusqu'à la fermeture totale de la vanne et après un certain temps de la fermeture, quelles seront les valeurs des paramètres de l'écoulement en tous les nœuds de la conduite. La réponse à cette question fait l'objet de ce travail.

5.5 Cas des fermetures lentes

Dans cette partie du travail, nous ne nous intéressons qu'aux lois de fermeture linéaires et quadratiques.

5.5.1 Cas de fermeture linéaire

Pour avoir une fermeture linéaire, l'exposant m de la formule (52) doit prendre une valeur égale à un. Dans un premier, nous allons essayer de suivre, au fil du temps, la variation de la pression à la vanne pour un temps de fermeture égal à deux fois la période de retour et un temps total de suivi de $10 t_4$ en prenant un pas de temps égale à 0,001 secondes. La figure (5.16) donne la variation au fil du temps de la hauteur manométrique totale à la vanne.

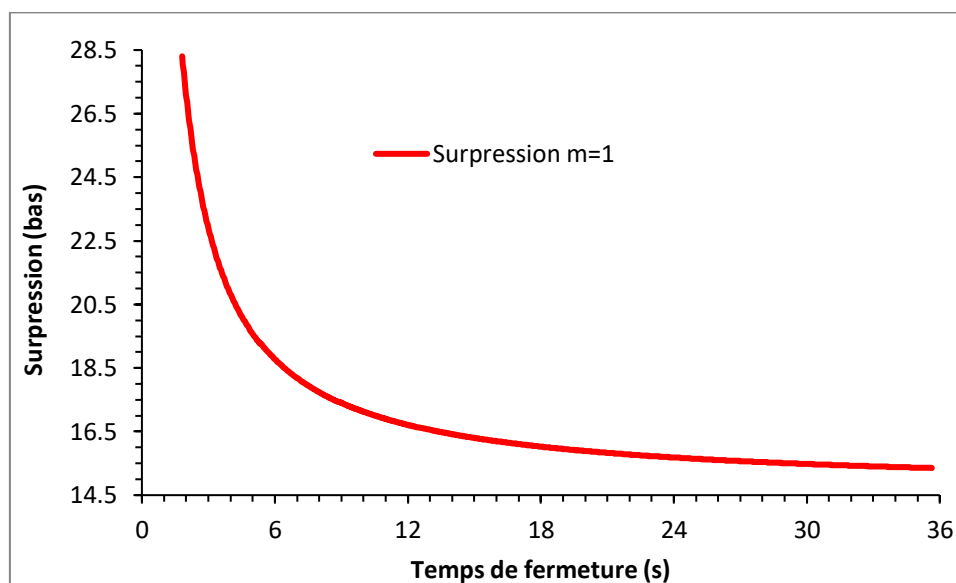


Figure(5.16): Variation de la hauteur manométrique totale à la vanne

Cette représentation élucide que la variation de la hauteur manométrique est périodique et se caractérise par deux valeurs extrêmes, la première présente une valeur maximale ce qu'on appelle la surpression et la deuxième une valeur minimale générant une dépression. Donc, l'étude de la surpression et de la dépression à la vanne pour plusieurs temps de fermeture s'avère d'une importance primordiale.

5.5.1.1 Variation de la surpression

Chaque temps de fermeture génère une valeur maximale de la pression et pour avoir une courbe aidant à prendre des correctes décisions, nous allons rechercher cette valeurs pour des temps de fermeture allant de $0.51 t_4$ (t_4 est la période de retour) jusqu'à $10 t_4$ avec un pas de temps égal à $0,01 t_4$, soit 950 valeurs. Les résultats obtenus sont dessinés sur la figure (5.17).

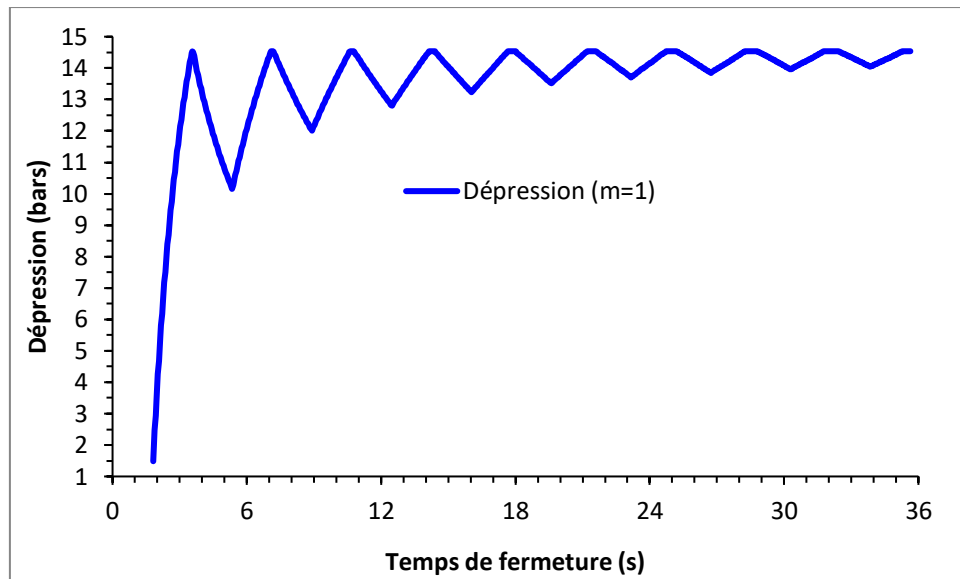


Figure(5.17) : Variation de la surpression à la vanne pour une loi de fermeture linéaire

Cette figure met en évidence que la surpression commence par des grandes valeurs aux faibles temps en allant à converger vers la pression à l'écoulement permanent et le choix du temps de fermeture dépend de la pression à ne pas dépasser aux nœuds.

5.5.1.2 Variation de la dépression

Pour avoir la courbe de la dépression susceptible d'être apparue à la vanne pour les mêmes temps de la surpression, nous allons calculer la valeur minimale de la pression pour chaque temps de fermeture. Les résultats obtenus permettent de tracer la figure (5.18).

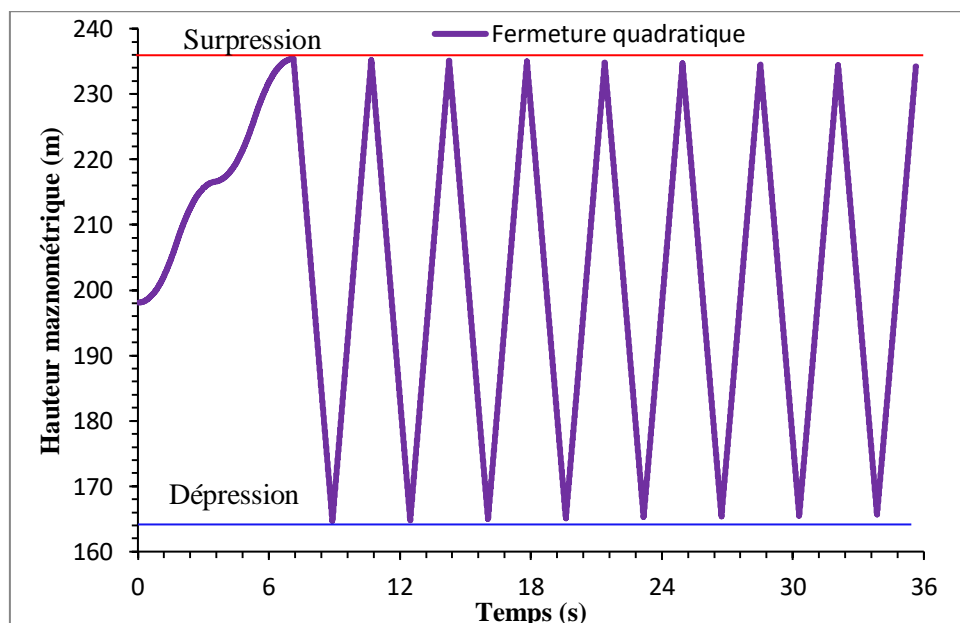


Figure(5.18): Variation de la dépression à la vanne pour une loi de fermeture linéaire

Cette représentation montre que la variation au fil du temps de la dépression prend un aspect périodique et qu'elle commence par des valeurs très faibles en allant à converger vers la valeur de la pression en écoulement permanent.

5.5.2 Cas de fermeture quadratique

Pour le cas d'une fermeture de la vanne suivant une loi quadratique ($m=2$), Nous allons suivre le même itinéraire comme la loi linéaire. Les résultats de la hauteur manométrique obtenus, pour un temps de fermeture égal également à $2 t_4$ (t_4 est la période de retour) sont représentés sur la figure (5.19).



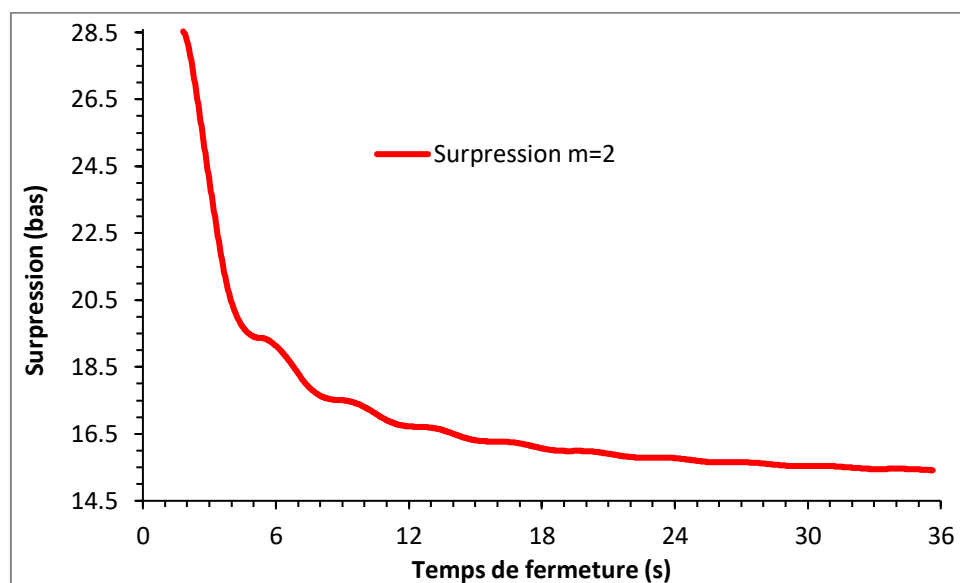
Figure(519): Variation de la hauteur manométrique totale à la vanne

A l'instar de la courbe de la loi linéaire, la courbe de la hauteur manométrique de la loi quadratique commence de sa valeur en écoulement permanent pour atteindre sa valeur maximale avant la fin de fermeture puis elle entre en mouvement périodique amortie. Ce mouvement génère deux valeurs limites l'une de la surpression et l'autre de la dépression.

On note également que peu importe le temps de la fermeture de la vanne, les grandes valeurs de la hauteur manométrique sont enregistrées en fin de course et donc l'efficacité de la vanne apparaît à ces moments. En conséquence, ces derniers tours de fermeture de la vanne sont dangereux.

5.5.2.1 Variation de la surpression

Le suivi au fil du temps des valeurs maximales de la pression à la vanne, pour une loi quadratique, donne la figure (5.20).

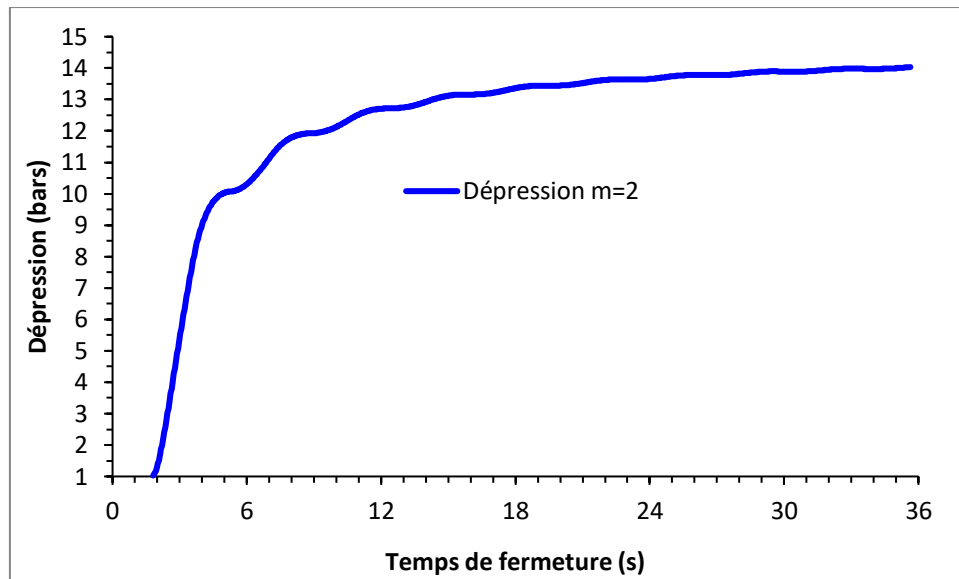


Figure(5.20) : Variation de la surpression à la vanne pour une loi de fermeture quadratique

De cette figure, on constate que les faibles temps de fermeture génèrent de grandes valeurs de la pression et qu'au-delà d'un certain temps, la courbe de la pression commence à passer asymptotiquement à l'axe des abscisses représentant le temps. Ce qui indique qu'à partir de cette valeur du temps, le temps de fermeture n'a que des très faibles influences sur la surpression.

5.5.2.2 Variation de la dépression

Afin de déterminer l'influence du temps de fermeture sur la dépression au niveau de la vanne pour différentes valeurs du temps de fermeture, la figure (5.21) a été tracée.



Figure(5.21) : Variation de la dépression à la vanne pour une loi de fermeture quadratique

Cette représentation graphique montre que les faibles temps de fermeture de vannes génèrent également des valeurs de dépressions peuvent être indésirables pour le système.

Le temps de fermeture de la vanne est un paramètre à ne pas écarter lors de la mise en manœuvre d'une vanne motorisée placée à l'extrémité aval d'une conduite. En effet, les faibles temps entraînent une augmentation abrupte de la pression le long de la conduite. Cette augmentation accouplée à un phénomène de la surpression et de la dépression générée par l'aller et le retour de l'onde pouvant causer la fatigue de la conduite. A cet effet, il est préconisé de rechercher les bons temps de fermeture de chaque système hydraulique avant d'entamer les manœuvres de vannes. Donc, l'exploration de ces temps, est une condition préalable au bon fonctionnement du système (Réservoir – Conduite – Vanne).

5.6 Recherche de la loi optimale

La figure (5.22) représente la variation de la valeur optimale de l'exposant m déterminant la loi de fermeture et la surpression correspondante.

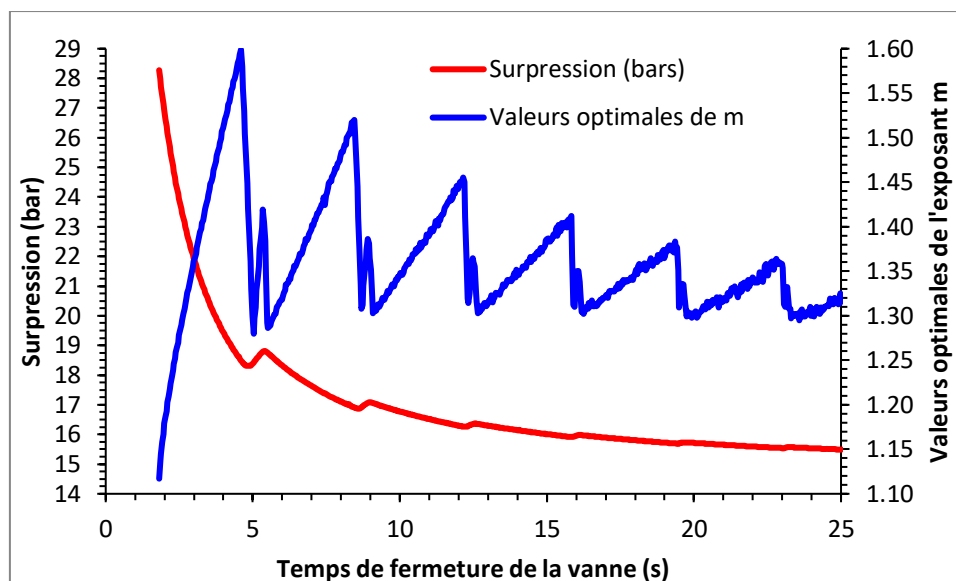


Figure (5.23) : variation au fil du temps de la surpression et de la loi optimale

Il ressort de cette représentation que la courbe de la loi optimale prend une forme périodique et chaque temps de fermeture ayant une propre loi optimale et par conséquent sa propre surpression.

5.7 Conclusion

Ce chapitre a permis de révéler quelques secrets du régime transitoire dans les réseaux d'adduction gravitaire, dans lequel il a été question de fermetures lentes (linéaire et quadratique) d'une vanne placée au bout d'une conduite gravitaire sous pression à des temps différents. En effet, les faibles temps de fermeture de la vanne, peuvent engendrer des pressions importantes. Ces dernières se propagent au fil du temps le long du réseau, causant des dommages au réseau et à ses organes. Bien que les temps de fermeture lents fasse partie des moyens de lutte contre ce phénomène seulement celle-ci ne nécessite que la recherche de ses bons temps d'une part et d'autre part elle génère des surpressions et des dépressions, ce qui exige leur suivi le long du profil en long en vue de rechercher les endroits les plus défavorables pour mettre en place un atténuateur.

Pour les mêmes durées de fermeture (de $0,50t_4$ à $10t_4$), les lois linéaire et quadratique ont été examinées afin de voir l'allure de chacune, d'en extraire la meilleure solution. Les résultats obtenus témoignent que les allures de dépressions peuvent participer à la détermination des pressions nominales des moyens de protections et que la faible pression est enregistrée au niveau de la loi linéaire.

La recherche des lois optimales conduit aux faibles valeurs de la pression et par conséquent à des moyens de protection de faibles tailles d'une part et d'autre part elle aide à mieux automatiser les vannes.

Conclusion Générale

Conclusion générale :

Dans ce mémoire intitulée "Résolution des équations de l'écoulement transitoire par la méthode des différences finies", le travail réalisé a permis d'explorer les écoulements transitoires dans les réseaux sous pression. L'étude met en évidence les équations régissant ces écoulements, les méthodes utilisées pour les résoudre, ainsi que l'implémentation des expressions et modèles obtenus.

L'utilisation du schéma en différences finies de Peter Lax et Kurt Friedrichs s'avère être une approche efficace pour résoudre les équations de type hyperbolique obtenues. Un système hydraulique, composé d'un grand réservoir, d'une conduite et d'une vanne automatisable (R - C - V), a été adopté pour réaliser le calcul des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire.

Les résultats obtenus mettent en évidence des changements brusques des paramètres hydrauliques en écoulement transitoire sur une période de temps donnée. Ces changements peuvent avoir des effets significatifs sur le système étudié. De plus, des courbes illustrant la variation de la surpression et de la dépression au fil du temps ont été tracées pour les lois linéaire, quadratique et optimale. Ces courbes s'avèrent d'une grande utilité lors du choix du bon temps de fermeture, permettant d'éviter les surpressions et les risques associés à la cavitation.

En conclusion, cette étude a permis de mieux comprendre les écoulements transitoires dans les réseaux sous pression en utilisant la méthode des différences finies. Les résultats obtenus fournissent des informations précieuses pour la gestion et l'optimisation des systèmes hydrauliques en tenant compte des phénomènes transitoires. Il est essentiel de prendre en considération ces aspects pour assurer un fonctionnement sûr et efficace des réseaux hydrauliques.

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] M.MEUNIER "Les coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression", ENGREF, Paris 1980.
- [2] OURAGH Youcef "Ecoulement forcé en hydraulique" Tome II, Edition Paris 1971.
- [3] STREETER V. L., WYLIE E. B. (1983). Fluid Mechanics, 206 pages. Eds. Mc Graw Hill, Ryerson Ann Arbor. Michigan 48106 U.S.A.
- [4] DJADEL, Karim «Anisotropie Laplacien Navier-Stokes, Équations de Singularités Volumes finis, Méthodes de Équations différentielles elliptiques » thèse, Lille 1, 2005
- [5] J. BLAZEK ET AL, « Computational Fluid Dynamics : Principles and Applications », ELSEVIER, First edition, 2001
- [6] TOUMI A. (2017) cours et simulations en hydraulique (Cours & exercices).
- [7] https://fr.wikipedia.org/wiki/Sch%C3%A9ma_de_Lax-Friedrichs
- [8] PROVENZANO P.G., BARONI F., AGUERRE R. J. (2011). The closing function in the water hammer modeling, Latin American Applied Research. Vol. 41, pp. 43–47.
- [9] SUBANI N., NORSARAHADA A. (2015). Analysis of water hammer with different closing valve laws on transient flow of hydrogen-naturalgas mixture, Abstract and Applied Analysis. Volume, Article ID 510675, 12 pages. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/510675>
- [10]
Zahraaj·Arshaithe mathematical Geometric of Open and Close Valve in Water Hammer Wasit Journal for Pure Sciences Vol. (2) No. 0(1)
- [11] <http://processs.free.fr/Pages/VersionWeb.php?page=0913>
- [12] KREMENETSKI N., SCHTERENLIHT D., ALYCHEV V., YAKOVLEVA L. (1984). Hydraulique, Édition MIR.
- [13] ZELLA L., SMADHI D. (2005). L'intérêt du calcul des pertes de charge en micro irrigation., Larhyss Journal. N°4, pp. 51- 68.
- [14] RANALD V. G. (1985). Mécanique des fluides et hydraulique, in Edition Française, 272 pages.
- [15] AIT S.Dj. (2018), Calcul du coup de bélier dans les conduites enterrées, Mémoire de master en hydraulique, ENSH.
- [16] MARSTON, M. G. et A. O. ANDERSON, « The Theory of Loads on Pipes in Ditches and Tests of Cement and Clay Drain Tile and Sewer Pipe », 1913