

Université du 8 mai 1945 – Guelma
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique



Mémoire de fin d'étude

Présenté par : **ZENATA Abdelkader**

Master II

Option : Construction Mécanique

Dynamique des rotors en flexion : modèles simples de multi-rotors coaxiaux

Sous la direction de : **Dr. REZAIGUIA Abdelouahab**

Année universitaire : 2022/2023

REMERCIEMENTS

Je voudrais présenter mes remerciements à mon encadreur : **Pr. REZAIGUIA Abdelouahab**

Je voudrais également témoigner ma gratitude pour sa patience et son soutien qui m'a été précieux afin de mener ce travail à bon port.

Mes vifs remerciements s'adressent enfin au personnel du Département de Génie mécanique de L'Université de Guelma.

DEDICACES

Louange à Dieu qui m'a aidé dans mon travail et m'a donné la santé et le bien-être et la capacité de le terminer.

A ma très chère mère

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme ils se doit. Ton affection me couvre, Ta bienveillance me guide et ta présence à mes cotes a toujours été ma source de force pour affronter les défèrent obstacles.

A mon très cher père

Tu as toujours été à mes cotes pour me soutenir et m'encourage que ce travaille traduite ma gratitude et mon affection.

A mon frères GHAITH.

A mes très chères sœurs Wissal et Chaïma.

A toutes la famille.

A tous mes enseignants.

Sommaire

Sommaire	i
Résumé	iii
Abstract	iii
ملخص	iii
Introduction générale	1
Chapitre 1 : Etude bibliographique	3
1.1 Historique de la dynamique des rotors	4
1.2 Objectifs de la dynamique des rotors	8
1.3 Equations de mouvement en dynamique des rotors	9
1.4 Diagramme de Campbell	10
1.5 Vitesses critiques	12
1.6 Trajectoire et type de précession	12
1.7 Instabilité des rotors	13
1.7.1 Définition	13
1.7.2 Causes d'instabilité	13
1.7.3 Distinction entre vitesses critiques et vitesses d'instabilité	14
1.7.4 Critères d'instabilité	15
1.7.5 Instabilité du film d'huile de certains paliers	16
Chapitre 2 : Caractéristiques des éléments de rotors	17
2.1 Introduction	18
2.2 Disque	18
2.3 Arbre	20
2.4 Palier	23
2.5 Balourd	24
2.6 Conclusion	25
Chapitre 3 : Etude des modèles simples de multi-rotors coaxiaux	26
3.1. Introduction	27
3.2. Détermination du modèle	27
3.2.1 Energie cinétique du modèle	30
3.2.2 Energie de déformation du modèle	34
3.2.3 Travail virtuel dû à la raideur k_{zz}	35
3.2.4 Equations de mouvement	35
3.2.5 Données numériques	36

3.3	Modèle symétrique	37
3.3.1	Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation	38
3.3.2	Réponse aux forces de balourd	42
3.3.3	Sens de la trajectoire	45
3.4	Modèle asymétrique	47
3.4.1	Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation	48
3.4.2	Réponse aux forces de balourd	51
3.4.3	Sens de la trajectoire	55
3.5	Conclusion	61
	Conclusion générale	62
	Références bibliographiques	65
	Annexe A : Détermination du vecteur rotation du disque	69
	Annexe B : Détermination de la matrice d'inertie du disque	72
	Annexe C : Énergie de déformation d'un arbre en flexion	74
	Annexe D : programmes FORTRAN	78

Résumé

Ce travail traite du comportement dynamique en flexion des multi-rotors coaxiaux pour montrer les principaux phénomènes de base intervenant en dynamique des rotors à l'aide d'un exemple simple mais réaliste modélisé par des équations faciles à résoudre. La méthode numérique de Rayleigh-Ritz est utilisée et deux systèmes sont étudiés : initialement le premier est symétrique, tandis que le second est asymétrique puisque le comportement des rotors symétriques et asymétriques est différent. Les principaux phénomènes de base sont : l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation appelée diagramme de Campbell et l'effet des forces d'excitation dues à la masse du balourd.

Mots clés : Dynamique des rotors/ Rotor flexible/ Multi-rotors coaxiaux/ Balourd/ Effet gyroscopique/ Diagramme de Campbell.

Abstract

This work deals with the dynamic behavior in flexion of coaxial multi-rotors to show the main basic phenomena occurring in rotodynamic by using a simple but realistic example modeled by equations that are easy to solve. The Rayleigh-Ritz numerical method is used and two systems are studied: initially the first is symmetric, while the second is asymmetric since the behavior of symmetric and asymmetric rotors is different. The main basic phenomena are: evolution of natural frequencies as function of the speed of rotation called Campbell diagram and the effect of forces of excitation due to mass unbalance.

Keywords: Rotor dynamics/ Flexible rotor/ Coaxial multi-rotors/ Unbalance/ Gyroscopic effect/ Campbell diagram.

ملخص

يعالج هذا العمل السلوك الديناميكي أثناء الإنحناء للدورات المتعددة أحادية المحور لإثبات الظواهر الأساسية الرئيسية التي تنطوي عليها ديناميكيات الدورات باستخدام مثال بسيط ولكنه واقعي منمذج بمعادلات يسهل حلها. يتم استخدام طريقة رايلي-ريتز العددية ودراسة نظامين : الأول في البداية متناظر في حين أن الثاني غير متناظر لأن سلوك الدورات المتناظرة وغير المتناظرة مختلف. الظواهر الأساسية الرئيسية هي : تغير الترددات الحرة بدلالة سرعة الدوران يسمى مخطط كامبل وتأثير قوى الإثارة بسبب كتلة عدم التوازن.

الكلمات المفتاحية : ديناميك الدورات/دوار مرن /دورات محورية متعددة / عدم توازن / تأثير جيروسكوبي /مخطط كامبل.

Introduction générale

Introduction générale

Dans la conception des machines tournantes, il est nécessaire de prévoir le comportement dynamique des rotors en flexion et en torsion. Ces prédictions sont les suivantes :

1. Le comportement statique et dynamique en torsion est effectué. Les fréquences propres qui donnent les vitesses critiques doivent être déterminées. De plus, lorsque des moteurs électriques ou des générateurs sont présents, le comportement dynamique au démarrage ou dans des conditions de court-circuit doivent être prédit.
2. Le comportement dynamique en flexion est effectué en dernier. Les fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation, qui donnent les vitesses critiques, et les éventuelles instabilités doivent être déterminées. Ensuite, l'effet des forces d'excitation est calculé, le balourd étant le plus important d'entre eux.

Ce mémoire se concentre principalement sur l'étude de la flexion d'un multi-rotor coaxiaux. Les équations de mouvements sont obtenues systématiquement de la manière suivante. D'abord, les expressions des énergies cinétiques et de déformation des éléments du rotor et du travail virtuel des forces externes sont calculées au chapitre deux et sont utilisées au chapitre trois pour les multi-rotors coaxiaux. Une méthode numérique est alors utilisée et les équations de Lagrange sont appliquées pour déterminer les équations de mouvements. La méthode Rayleigh-Ritz donne des modèles simples pour comprendre les phénomènes de base en dynamique des multi-rotors coaxiaux.

Chapitre 1

Etude bibliographique

Chapitre 1

Etude bibliographique

1.1 Historique de la dynamique des rotors

L'histoire de la dynamique des rotors s'étend sur au moins 150 ans (**Fig.1.1**) [1]. Elle commence avec l'apparition du premier article sur la dynamique des rotors publié en 1869 par **William John Macquorn Rankine** dans le journal "The Engineer", dont l'intitulé est "On the centrifugal force on rotating shafts", (Force centrifuge sur les arbres tournants) [2]. Dans cet article, l'auteur tente d'expliquer le comportement des machines tournantes lors du passage de certaine vitesse dite vitesse critique. La recherche a progressé de manière significative à la fin du 19^{ème} siècle avec des contributions de **Carl Gustaf Patrik De Laval (1845-1913)**, ingénieur suédois qui fit fonctionner une turbine à vapeur en régime supercritique en **1889** en opérant à une vitesse de rotation d'environ sept fois la vitesse critique [3].

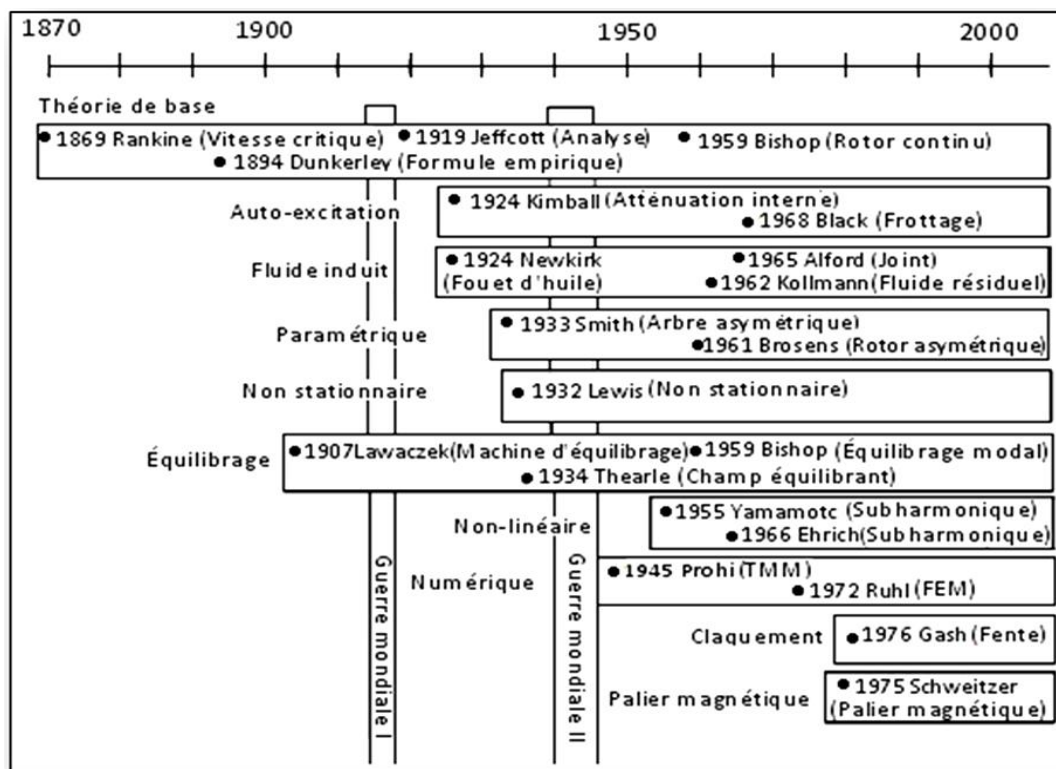


Fig. 1.1 : Historique de la dynamique des rotors [1]

Au Début, la préoccupation majeure pour les chercheurs et les concepteurs des machines tournantes était de prédire les vitesses critiques pour éviter la résonance. **Dunkerley** en **1894**, dérive une formule empirique permettant de calculer la plus faible vitesse critique d'un système tournant à plusieurs disques, Il a été le premier qui a utilisé le terme " **Vitesse critique** " pour la vitesse de rotation de résonance [4].

Le premier papier entièrement consacré à la dynamique des rotors est celui de **Henry Homan Jeffcott** (1877-1965), publié en **1919** dans "Philosophical Magazine", intitulé "**The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a wirling speed : the effect of want of balance**". Il a confirmé l'existence des vitesses supercritiques stables [5]. Il proposa un modèle connu sous le nom de rotor de **Jeffcott** mais aussi sur le continent européen de **De Laval**. Le modèle présenté par Jeffcott est constitué d'un arbre flexible de masse négligeable monté sur appuis simples (rigides) et d'un disque rigide placé en son milieu dont le centre de gravité ne coïncide pas avec le centre géométrique (présence d'un balourd) (**Fig. 1.2**).

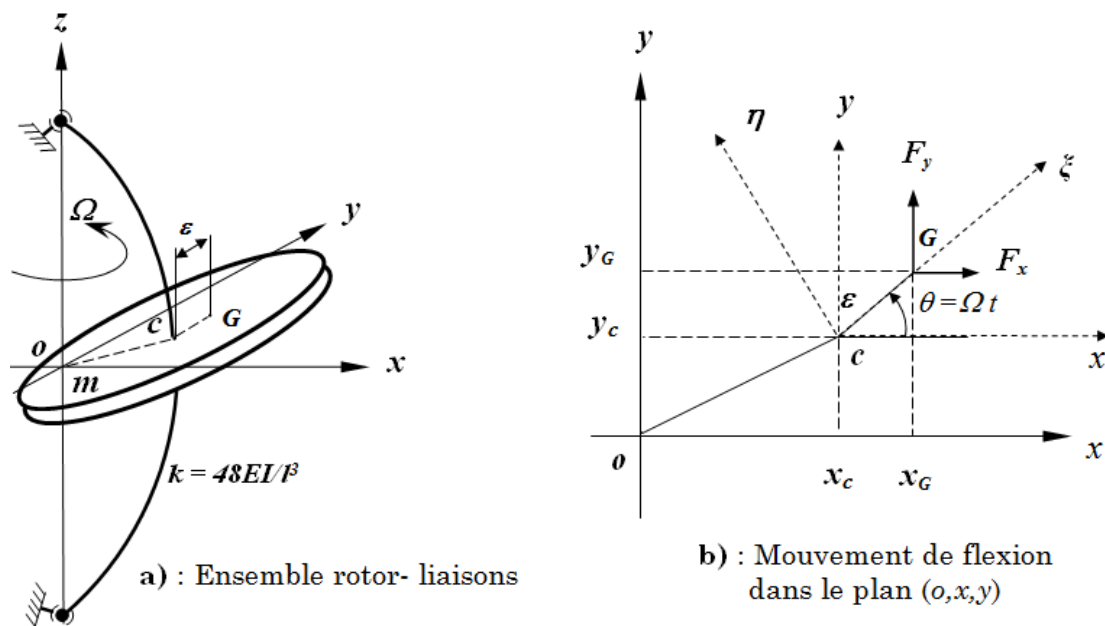


Fig.1.2 : Rotor de Jeffcott ou de De Laval [5]

Le modèle à deux degrés de liberté de Jeffcott (déplacements du centre du disque c), a été largement étendu par la suite pour prendre en compte l'amortissement interne, les paliers flexibles, l'effet gyroscopique, etc. Ce type de modèle peut être représentatif pour des rotors courts, qui sont plus rigides, comme par exemple un

banc d'essai en laboratoire pour exprimer clairement les phénomènes de bases, mais ne convient pas pour décrire le comportement vibratoire des turbines modernes, qui sont des structures élancées [6].

Après la deuxième guerre mondiale, le centre de recherche de l'Europe a été déplacé vers les États-Unis où la portée de la dynamique des rotors a été élargie pour tenir compte de divers autres phénomènes. **Campbell** en 1924 [7], a publié un article dans le journal "ASME" intitulé "**The protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration**", où il détailla les vibrations des turbines à vapeur. Leur diagramme représentant la vitesse critique par rapport aux points de croisement des courbes de fréquences naturelles et les lignes droites proportionnelles à la vitesse de rotation est maintenant largement utilisées et appelé le **diagramme de Campbell**.

Comme la vitesse de rotation peut augmenter au dessus de la première vitesse critique, l'apparition des vibrations **auto-excitées** est devenue un problème grave. Dans certaines circonstances et sur un fonctionnement très particulier, il a été observé sur le comportement dynamique des machines tournantes le phénomène de "**oil whip**" chez les Anglo-saxons et le "**fouet d'huile**" chez les Français. **Newkirk** [8] et **Kimball** [9], ont publiés deux articles intitulés "**Shaft Whipping**" et "**Internal friction theory of shaft whirling**" respectivement dans la revue "General Electric". Ils ont montré que le frottement interne des matériaux pourrait provoquer un mouvement **instable**. Ces phénomènes ; "**oil whip**" et "**oil whirl**", dans lequel le frottement qui amortit les vibrations provoque habituellement une vibration d'**auto-excitation**, ont attiré l'attention de nombreux chercheurs. En Aout 1925, **Newkirk** et **Taylor** [10], publient dans cette même revue un article intitulé "**Shaft whipping due to oil action in journal bearings**". Ils ont étudié une vibration instable appelée "**fouet d'huile**", due à un film d'huile dans les paliers. **Hummel** [11] et **Newkirk** [12], ont confirmés à travers des études expérimentales, le rôle déstabilisant provoqué par les paliers à film d'huile. Ils ont observé par ailleurs qu'en dessous d'une certaine excentricité de fonctionnement; c'est à dire lorsque le palier est faiblement chargé; l'arbre est animé d'un mouvement de précession appelé "**fouettement**" avec une fréquence proche de la moitié de la vitesse de rotation (appelé en anglais "**half frequency whirl**"), alors que pour des excentricités plus importantes (i.e. charges importantes), le système redevient stable.

En 1926, **Newkirk [13]** a observé un tourbillon en avant induite par un point chaud sur la surface du rotor, qui a été générée par le contact du rotor et du stator. Cette instabilité du point chaud "**hot spot**" est appelé l'**effet de Newkirk**.

Au milieu du 20^{ème} siècle, **Hori en 1959**, a réussi à expliquer les différentes caractéristiques fondamentales du **fouet d'huile**. Il a étudié la **stabilité** des mouvements de l'arbre en tenant en compte des forces de pression dues aux films d'huile. À peu près au même moment, d'autres types de vibrations induites ont attiré l'attention de nombreux chercheurs [14].

Traditionnellement, le nom "**tourbillon / fouet d'huile**" a été associée aux problèmes d'instabilité des paliers lubrifiés à huile qui historiquement, ont d'abord été reconnus et analysés. Au cours des dernières décennies, d'autres formes d'instabilités liées aux rotors à fluide ont été identifiées et signalés [15].

En particulier, certaines instabilités ont été observées entre les systèmes rotor/stator et dans les fluides de lubrification des machines due au processus de lubrification (**Alford [16], Vance et al. [17], Franklin et al. [18], Massey [19], Iwatsubo et al. [20], Childs et al. [21], Adams et al. [22]**).

C'est pourquoi le mot "**huile**" a été supprimé et remplacé par le mot générique "**fluide**", ce qui implique que non seulement l'huile comme un lubrifiant, a été responsable de l'instabilité du rotor. D'autres noms ont également été associés à des vibrations latérales asynchrones du rotor tel que le "**tourbillon**". Ces derniers temps, ce nom est devenu populaire pour les paliers à fluide (**Ambrosch et Schwabel [23], Miller [24], Kirk et Simpson [25], Wyssmann [26], Brown et Hart [27], Muszynska et al. [28], Bently et al. [29]**). Comme les phénomènes rapportés ci-dessous, sont cependant très similaires à un tourbillon et/ou à un fouet de fluide, les modèles mathématiques sont similaires. Il semble donc plus logique de choisir un nom commun. C'est pourquoi les vibrations **auto-excitées** ; décrites ci-dessus ; sont appelés "**tourbillon de fluide**" et ou "**fouet de fluide**".

Actuellement, la dynamique des rotors est un domaine de **recherche** très actif. Plusieurs chercheurs travail non seulement sur la dynamique linéaire des rotors, mais aussi dans la dynamique non linéaire des rotors à vitesses variables et dans **le control** actif des machines tournantes (**Fig.1.1**). Chaque année, de nombreuses conférences et séminaires scientifiques sur la dynamique des rotors sont déroulés. Ainsi que le

nombre de documents publiés dans des revues scientifiques spécifiques et des livres augmente d'une manière importante.

1.2 Objectifs de la dynamique des rotors

Lors de la conception, l'exploitation et le dépannage des machines tournantes, l'analyse de la dynamique des rotors d'après **John et al. [30]**, peut aider à accomplir les objectifs suivants :

- Prédire les vitesses critiques : Les vitesses auxquelles les vibrations dues au déséquilibre de rotor sont au maximum et peuvent être calculées à partir des données de conception, afin de les éviter dans le fonctionnement normal de la machine ;
- Déterminer les modifications de conception pour changer les vitesses critiques : Chaque fois que les ingénieurs d'études ne parviennent pas à accomplir la prédiction des vitesses critiques, il devient nécessaire de changer la plage de vitesse de fonctionnement d'une machine, des modifications de conception peuvent être exigées pour changer les vitesses critiques ;
- Prédire les fréquences naturelles de vibration en torsion : Cet objectif s'applique généralement au système de chaîne de transmission dans lequel la machine est employée. Par exemple, un rotor de compresseur centrifuge, alimenté par un moteur électrique synchrone à travers une boîte de vitesses peut participer à un mode de vibration en torsion excitée par les pulsations du moteur pendant le démarrage. Dans un tel cas, il pourrait être souhaitable de modifier la fréquence naturelle à une valeur qui a le moins possible d'excitation (En amplitude et / ou en temps) ;
- Calculer les corrections des masses d'équilibres et des endroits des mesures des données de vibration : Ces possibilités permettent l'accomplissement de l'équilibrage du rotor "sur place", réduisant de ce fait l'amplitude de la vibration synchrone ;
- Prévoir les amplitudes de vibration synchrone causées par un déséquilibre du rotor : C'est l'un des objectifs les plus difficiles à accomplir exactement puisque l'amplitude du rotor tourbillonnant dépend de deux facteurs qui sont tous deux très

difficiles à mesurer : a) la distribution du déséquilibre le long du rotor, et b) l'amortissement du système de rotor-roulement. Ce qui peut être fait, cependant, il faut prévoir les effets relatifs du déséquilibre de rotor et le système d'amortissement aux endroits spécifiques ;

- Prévoir les vitesses seuils et les fréquences de vibration pour l'instabilité dynamique : Cet objectif est un autre défi à l'heure actuelle, puisqu'un certain nombre de forces de déstabilisation ne sont toujours pas comprises assez bien pour la modélisation mathématique précise ;
- Déterminer les modifications de conception pour supprimer les instabilités dynamiques : Cet objectif peut être atteint plus facilement que l'objectif précédent, puisque la simulation par ordinateur peut prévoir l'effet stabilisateur relatif de diverses modifications de matériel, même si les modèles de la force de déstabilisation sont seulement des approximations.

1.3 Equations de mouvement en dynamique des rotors

Dans la dynamique des rotors des machines tournantes, les équations de mouvement sont légèrement différentes à celles de la dynamique des structures. Elles ont la forme générale suivante [2] :

$$[M]\{\ddot{q}\} + ([C] + [G(\Omega)])\{\dot{q}\} + ([K] + [H(\Omega)])\{q\} = \{F\} \quad (1.1)$$

$\{q\}$: vecteur des degrés de liberté contenant les coordonnées généralisées ;

$[M]$: matrice de masse symétrique ;

$[C]$: matrice d'amortissement symétrique ;

$[G(\Omega)]$: matrice gyroscopique antisymétrique ;

$[K]$: matrice de raideur symétrique ;

$[H(\Omega)]$: matrice circulatoire antisymétrique ;

$\{F\}$: vecteur dans lequel toutes les forces sont regroupées.

La matrice gyroscopique contient des termes d'inertie qui, dans le cas de la dynamique des rotors, sont strictement liés aux moments gyroscopiques agissants sur les parties tournantes de la machine. Si l'équation est écrite par rapport à un repère non

inertiel, les termes liés à l'accélération de Coriolis sont aussi présents dans la matrice gyroscopique.

La matrice circulatoire contient des termes non conservatifs liés à l'amortissement des éléments tournants et; si on utilise un modèle linéaire pour les paliers à fluides; à l'amortissement du film fluide entourant le tourillon. Il est bien connu que la présence d'une matrice circulatoire, peut causer **l'instabilité** et les rotors ne font pas exception à cette règle. Il faut noter que, dans la dynamique des rotors, les matrices gyroscopique et circulatoire sont proportionnelles à la vitesse de rotation Ω et quand la vitesse tend vers zéro, les termes antisymétriques disparaissent et l'équation se réduit à celui d'une structure non tournante. En outre, les matrices d'amortissement et de rigidité peuvent dépendre de la vitesse de rotation, souvent avec Ω^2 et $[H]$ peut-être une fonction complexe de Ω .

1.4 Diagramme de Campbell

La solution générale de l'équation (1.1) est composée de la solution homogène (sans second membre) et de la solution particulière. La première partie de la solution générale permet d'étudier le **comportement libre** du système. La solution en vibration libre est généralement harmonique et peut être écrite sous la forme :

$$\{q\} = \{Q\} e^{rt} \quad (1.2)$$

Lorsqu'on remplace (1.2) dans (1.1), on obtient un système d'équations algébriques. Les racines r_i du polynôme caractéristique de ce système sont en général, des paires de quantités complexes conjuguées qui se mettent sous la forme :

$$r_i = \sigma_i(\Omega) \pm j\omega_i(\Omega) \quad (1.3)$$

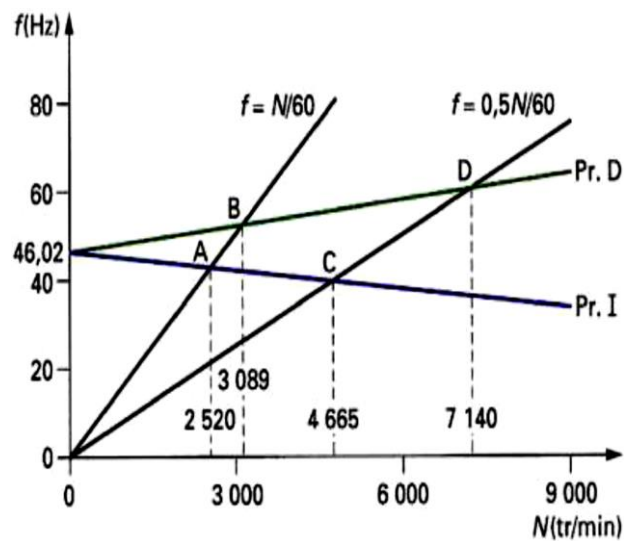
r_i : fréquence complexe, i l'ordre de la fréquence ;

$\omega_i(\Omega)$: fréquence naturelle du mouvement libre du système et Ω la vitesse de rotation ;

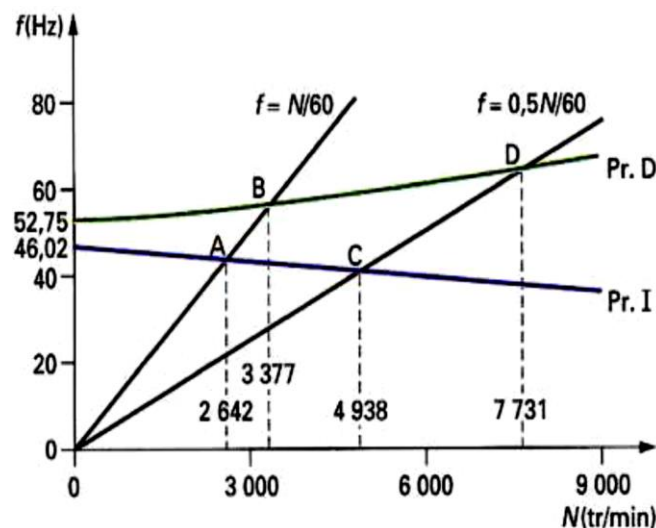
$\sigma_i(\Omega)$: taux de décroissance (c'est-à-dire, le taux à lequel l'amplitude diminue dans le temps) qui change de signe : une valeur négative de σ_i caractérise un mouvement qui

diminue dans le temps (**mouvement stable**), tandis qu'une valeur positive caractérise une croissance exponentielle du mouvement dans le temps (**mouvement instable**).

Comme la vitesse de rotation peut apparaître explicitement dans les équations du mouvement (à cause de l'effet gyroscopique dû aux disques, aux arbres et aux caractéristiques des liaisons), les fréquences propres d'une machine tournante peuvent dépendre de la vitesse de rotation Ω . Lorsque cela se produit, le comportement libre du système est généralement résumé par le traçage de l'évolution des fréquences naturelles $\omega_i(\Omega) = \text{Im}(r_i)$ en fonction de Ω : diagramme de Campbell. (Fig.1.3).



Modèle à symétrie axiale



Modèle non-symétrique

Fig.1.3 : Diagramme de Campbell d'un rotor flexible [31]

1.5 Vitesses critiques

Les vitesses critiques sont les vitesses de rotation du rotor pour lesquelles, en un point et pour une direction fixée, l'amplitude du déplacement passe par un maximum. Elles sont particulièrement dangereuses. En l'absence de l'amortissement, une vitesse critique de rotation coïncide exactement avec une fréquence propre du rotor. Les vitesses critiques peuvent être donc déterminées à partir du diagramme de Campbell par les intersections des courbes relatives aux fréquences naturelles avec celles liées aux fréquences de rotation (ligne droite $\omega = \Omega$ ou bien $f = N/60$) (**Fig.1.3**).

1.6 Trajectoire et type de précession

La trajectoire du centre géométrique c d'un rotor (**Fig.1.4**), s'appelle : trajectoire de précession. La précession est dite directe ou positive, si le mouvement de c s'effectue dans le même sens de la vitesse de rotation Ω . Dans le cas contraire, elle est dite inverse ou rétrograde.

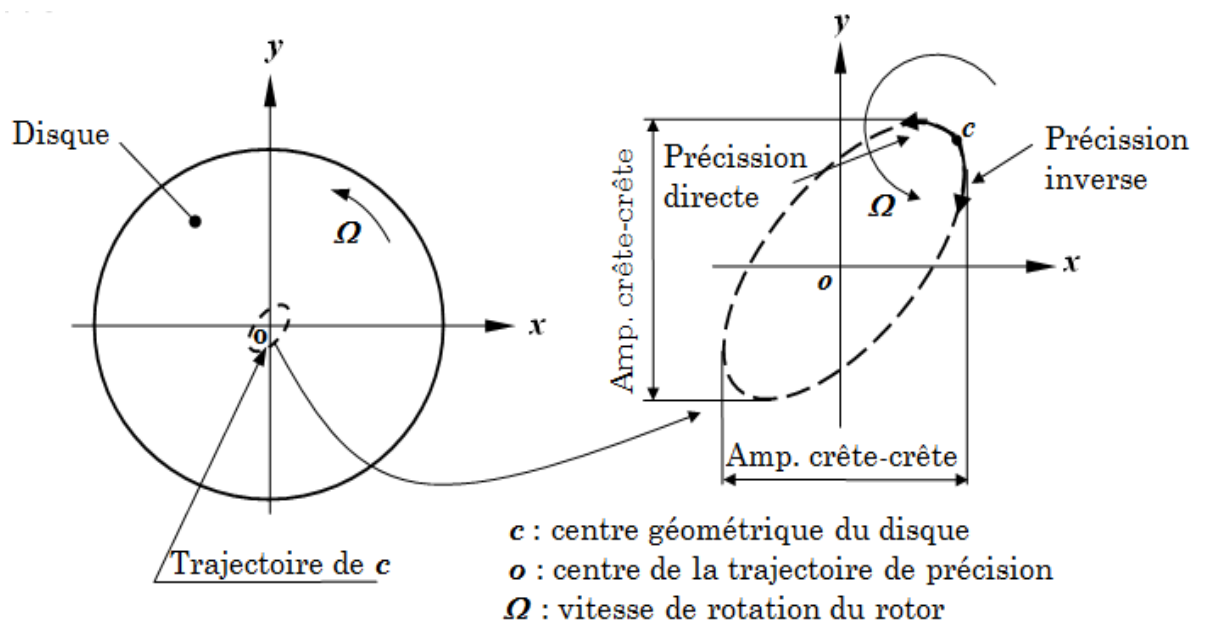


Fig.1.4 : Trajectoire et type de précession [32]

1.7 Instabilité des rotors

1.7.1 Définition

Il existe plusieurs définitions de l'instabilité mais analogues :

Muszynska [15] : Une machine tournante est stable si son rotor effectue un mouvement de rotation pur autour d'un axe à une vitesse de rotation et ce mouvement n'est pas accompagnée par d'autres modes de vibrations du rotor, de ses éléments ou d'autres parties fixes de la machine, leurs amplitudes de vibration ne dépassent pas des valeurs acceptables admis. La machine stable en rotation est à l'abri de forces perturbatrices externes. C'est-à-dire, toute perturbation aléatoire ne peut pas changer radicalement son comportement.

Lyapunov [2] : Une configuration d'équilibre d'un système est stable, si le système revient à une configuration assez proche de la configuration d'équilibre lorsqu'il est déplacé à partir de celui-ci. Bien sûr, ce déplacement ne doit pas être trop grand. Si le système revient asymptotiquement en fonction du temps à la configuration d'équilibre, celui-ci est asymptotiquement stable.

Roland [32] : un ensemble rotor-liaisons, soumis à une action qui crée une perturbation peut, après sa suppression, revenir ou non à son état initial ; il peut y revenir avec ou sans oscillation : on dit alors qu'il est stable ; il peut s'écarter de son état initial en oscillant ou sans osciller : on dit qu'il est instable.

Lalanne [31] : lorsque le rotor n'est pas soumis à des forces extérieures et est en mouvement libre sous l'action de conditions initiales, son mouvement peut croître indéfiniment avec le temps : le rotor est instable.

1.7.2 Causes d'instabilité

D'après les dernières recherches, ce phénomène est lié à la rotation propre du rotor. Lorsque l'on exprime les forces d'amortissement internes des parties tournantes dans un repère fixe, on remarque que celles-ci se décomposent en deux termes : un terme proportionnel à la vitesse, ce sont les forces d'amortissement radiales au sens classique, et un terme proportionnel au déplacement, ce sont les forces tangentielles dites circulatoires qui sont considérées comme le meilleur agent qui conduit au déclenchement du phénomène de fouettement. Lorsque ces forces tangentielles

deviennent supérieures aux forces externes d'amortissement, une instabilité se développe.

Afin d'expliquer les aspects phénoménologiques liés à cet amortissement tournant, on considère le cas simple d'un modèle de rotor de Jeffcott qui tourne sans effet gyroscopique à une vitesse constante Ω . Si le rotor possède un amortissement non tournant c_n supposé visqueux et un amortissement tournant c_r également visqueux (**Crandall [34]**), la fréquence de rotation Ω où l'instabilité se déclenche est déterminée par :

$$\Omega = \Omega_{cr} \left(1 + c_n/c_r\right) \quad (1.4)$$

Ω_{cr} est la vitesse critique du système considéré. L'expression précédente montre que l'instabilité apparaît à des vitesses supérieures à la vitesse critique et que l'ajout d'amortissement externe augmente la vitesse Ω .

1.7.3 Distinction entre vitesses critiques et vitesses d'instabilité

Les deux phénomènes sont complètement différents. Pour faciliter la distinction entre les vitesses critiques et les vitesses d'instabilité, les caractéristiques suivantes peuvent être mentionnées :

Pour les vitesses critiques :

- Elles se produisent à des valeurs bien définies de la vitesse de rotation.
- L'amplitude peut être maintenue dans des limites raisonnables, et en tant que conséquence, une vitesse critique peut être passée.
- La valeur de la vitesse est fixée, mais celle de l'amplitude maximale dépend de l'amplitude de vibration. En particulier, les principales vitesses critiques de flexions ne dépendent pas de l'amplitude du balourd, mais l'amplitude augmente avec l'augmentation du balourd.

Pour les vitesses d'instabilité :

- Leurs plages sont généralement larges. Souvent, toutes les vitesses de rotation au-delà du seuil d'instabilité donnent lieu à un comportement instable.
- Le seuil d'instabilité ; s'il existe ; se trouve généralement dans la plage des vitesses supercritiques.

- L'amplitude de vibration croît de façon exponentielle dans le temps. Elle croît de façon incontrôlable et le travail prêt du seuil d'instabilité est impossible sinon la machine se détruit complètement. Le rotor doit être modifié pour porter bien le seuil d'instabilité au-dessus de la vitesse de travail maximale.

1.7.4 Critères d'instabilité

- Stabilité vue par l'équation aux fréquences propres : Il est possible de démontrer qu'un système linéaire est asymptotiquement stable si toutes les solutions en vibration libre présentées par l'expression (1.3) sont telles que toutes les valeurs de r_i ont une partie réel négative, c'est-à-dire $\sigma_i < 0$. Si l'une ou plusieurs valeurs de σ_i sont positives, le système est instable.
- Critère de stabilité de **Routh-Hurwitz** : On peut prédire la stabilité de système numériquement à partir du critère de Routh-Hurwitz [31]. Ce critère est très bien adapté aux systèmes à faible nombre de degrés de liberté. Les fréquences du système sont les racines de l'équation caractéristique à coefficients réels :

$$P_n(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

La matrice H suivante est construite :

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdot \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Où les n quantités $h_1 \dots h_n$ sont donnés par les expressions :

$$h_1 = a_1 \quad h_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} \quad \dots \quad h_n = |H|$$

Le critère de Routh-Hurwitz démontre que si toutes les quantités h_i sont positives, toutes les racines du polynôme sont négatives ou ont une partie imaginaire négative, le système est stable. Le critère de Routh-Hurwitz peut également être appliqué à un polynôme caractéristique à coefficients complexes.

$$P_n(r) = (a_0 + ib_0)r^n + (a_1 + ib_1)r^{n-1} + \dots + (a_{n-1} + ib_{n-1})r + (a_n + ib_n) = 0 \quad a_i \in \mathbb{R}$$

La solution devient stable lorsque la partie réelle de ir est négative. Cela correspond au cas où toutes les racines r ont des coefficients positifs de leurs parties imaginaires. La condition nécessaire et suffisante est :

$$n=1 \quad (-1)^1 \Delta_2 = - \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} > 0$$

$$n=2 \quad (-1)^2 \Delta_4 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\vdots$$

$$n=n \quad (-1)^n \Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_0 & b_1 & \dots & b_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} > 0$$

1.7.5 Instabilité du film d'huile de certains paliers

Si ce phénomène d'instabilité peut apparaître lors du fonctionnement avec des coussinets lisses, il est inexistant pour les coussinets à patins. C'est pour cette raison, entre autres, que des codes de construction imposent, lors de la conception de certaines machines tournantes équipées de coussinets lisses, qu'elles doivent être étudiées pour recevoir sans modification des coussinets à patins. La fréquence d'excitation est légèrement inférieure à la demi-vitesse de rotation du rotor :

$$f = 0.45 N / 60 \quad (1.5)$$

Chapitre 2

Caractéristiques des éléments de rotors

Chapitre 2

Caractéristiques des éléments de rotors

2.1 Introduction

Les éléments de base d'un rotor sont le disque, l'arbre, les paliers et les supports. La masse du balourd doit être aussi considérée. Les expressions de l'énergie cinétique sont nécessaires pour caractériser le disque, l'arbre et le balourd. L'énergie de déformation est nécessaire pour caractériser l'arbre. Les forces dues aux paliers sont nécessaires pour calculer le travail virtuel pour déduire les forces généralisées qui agissent sur l'arbre.

2.2 Disque

Le disque est supposé rigide caractérisé par son énergie cinétique. Les différents repères de références utilisés dans l'étude de la cinématique et la dynamique des rotors flexibles sont présentés sur la **figure 2.1**.

$R_0(O, X_0, Y_0, Z_0)$: un repère fixe lié au bâti de la machine ;

$R_1(C, X_1, Y_1, Z_1)$, $R_2(C, X_2, Y_2, Z_2)$: deux repères intermédiaires ;

$R(C, X, Y, Z)$: un repère finale lié au disque ;

Le système de coordonnées $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est relié au système de coordonnées $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ par l'intermédiaire des angles d'Euler ψ , θ et ϕ .

Pour déterminer la position du disque, on tourne initialement d'un angle ψ autour de l'axe (C, Z_0) puis d'un angle θ autour du nouvel axe (C, X_1) , en fin d'un angle ϕ autour de l'axe de rotation propre du disque (C, Y) .

Le vecteur rotation traduisant l'orientation instantanée de la base $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ par rapport la base $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ s'écrit (voir **annexe A**) :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \dot{\Psi} \bar{z}_1 + \dot{\theta} \bar{x}_2 + \dot{\phi} \bar{y} \quad (2.1)$$

\bar{z}_1 , \bar{x}_2 et \bar{y} : vecteurs unitaires des axes (C, Z_1) , (C, X_2) et (C, Y) respectivement.

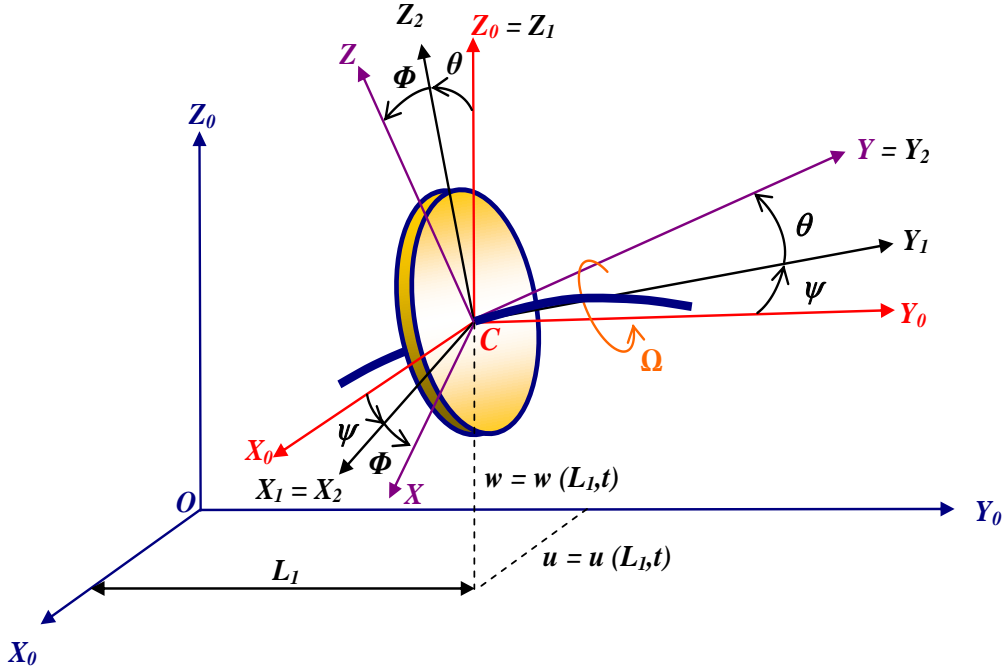


Fig.2.1 : Repères de référence du disque rigide sur l'arbre flexible.

Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ (R/R_0), exprimé dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, s'écrit (voir annexe A) :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2.2)$$

Soient u et w , les déplacements en flexion de C dans les plans (O, X_0, Y_0) et (O, Y_0, Z_0) respectivement. Le mouvement de traction compression suivant (O, Y_0) est négligé.

La masse du disque est notée M_d , son tenseur d'inertie en C , comme $(C, X), (C, Y), (C, Z)$ sont les directions principales d'inertie, a comme expression (voir annexe B) :

$$[I_C(D)] = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2.3)$$

L'énergie cinétique du disque est la somme de l'énergie cinétique de translation et l'énergie cinétique de rotation du centre de masse C :

$$T_d = \underbrace{\frac{1}{2} M_d (\vec{V}(C/R_0))^2}_{\text{Energie de translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \{\omega\}_R^T [I_C(D)]_R \{\omega\}_R}_{\text{Energie de rotation}} \quad (2.4)$$

Avec $\vec{V}(C/R_0)$ est le vecteur vitesse absolue de C exprimé dans R_0 , obtenu en dérivant par rapport au temps le vecteur position $O\vec{C}$ avec $\dot{\phi} = \Omega$ constante :

$$\vec{V}(C/R_0) = \left[\frac{d\overline{OC}}{dt} \right]_{R_0} = \frac{d}{dt} (u \vec{x}_0 + L_1 \vec{y}_0 + w \vec{z}_0) = \dot{u} \vec{x}_0 + \dot{w} \vec{z}_0 \quad (2.5)$$

Remplaçons (2.2), (2.3) et (2.5) dans (2.4), l'expression de l'énergie cinétique du disque devient alors :

$$T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (I_{dx} \omega_x^2 + I_{dy} \omega_y^2 + I_{dz} \omega_z^2) \quad (2.6)$$

L'expression (2.6) peut être simplifiée car le disque est symétrique ($I_{dx} = I_{dz}$), les angles θ et ψ sont petits (vibrations linéaires) et la vitesse angulaire $\dot{\phi} = \Omega$ est constante. L'expression (2.6) devient alors :

$$\boxed{T_d = \frac{1}{2} M_d (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{dx} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2 + I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta} \quad (2.7)$$

Le terme $\frac{1}{2} I_{dy} \Omega^2$ n'a pas d'influence sur les équations de mouvement et il représente l'énergie cinétique du disque tournant à la vitesse Ω dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le terme $I_{dy} \Omega \dot{\psi} \theta$ représente l'effet gyroscopique.

2.3 Arbre

L'arbre est représenté par une poutre continue de section circulaire constante, caractérisée par une énergie cinétique et une énergie de déformation élastique. La formulation générale de l'énergie cinétique de l'arbre est une extension de celle du disque en intégrant sur la longueur de l'arbre. Sur la **Figure 2.2**, on présente un élément d'arbre considéré comme un disque élémentaire.

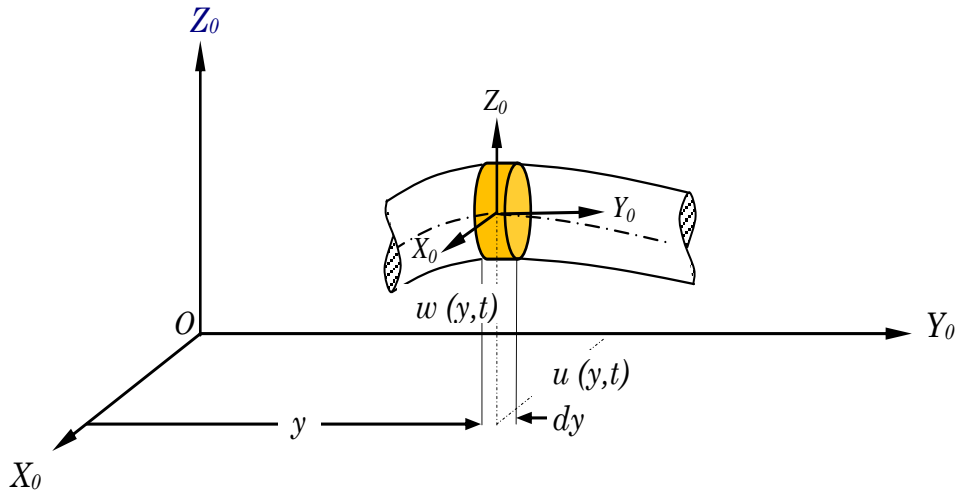


Fig.2.2 : Elément d'arbre en flexion

L'énergie cinétique de l'arbre s'écrit alors :

$$T_a = \int_0^L \left(\frac{1}{2} m_a (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} I_{ax} (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) + \frac{1}{2} I_{ay} (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\psi}\theta) \right) dy$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} \rho s \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dy + \frac{1}{2} \rho I \int_0^L (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2) dy + \rho I L \Omega^2 + 2\rho I \Omega \int_0^L \dot{\psi} \theta dy} \quad (2.8)$$

Où ρ est la masse volumique de l'arbre, $m_a = \rho s$ est la masse par unité de longueur de l'arbre, s est l'aire de la section droite de l'arbre et $I = \frac{\pi R_1^4}{4}$ est le moment d'inertie diamétral ($I_{ax} = \rho I dy$; $I_{ay} = 2\rho I dy$), R_1 est le rayon de l'arbre.

- La première intégrale de (2.8) est l'expression classique de l'énergie cinétique d'une poutre en flexion dans deux plans ;
- La seconde intégrale de (2.8) correspond à l'effet secondaire de l'inertie de rotation ;
- Le terme $\rho I L \Omega^2$ est constant et a une contribution nulle dans les équations du mouvement ;
- La dernière intégrale de (2.8) représente l'effet gyroscopique.

Le point O_l de la **Figure 2.3** est le centre géométrique d'une section de la poutre à l'état déformée, $B(x,z)$ est un point de cette section droite, u^* et w^* sont les

déplacements du centre O_1 par rapport aux axes (O,X) et (O,Z) . La déformation longitudinale du point B s'écrit (voir annexe C) :

$$\varepsilon_{yy} = -x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \quad (2.9)$$

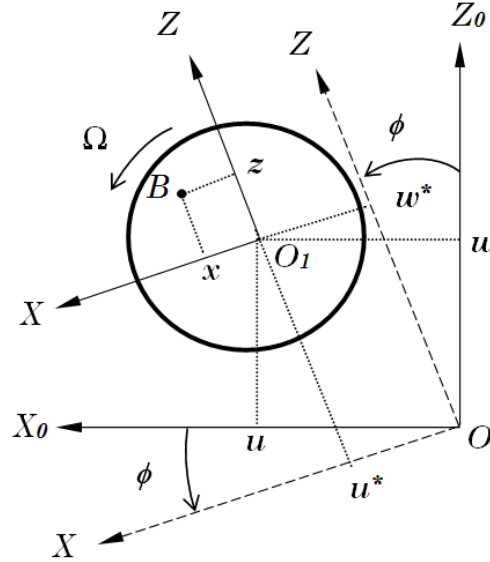


Fig.2.3 : Section droite de l'arbre, mouvement dans le plan (O, X_0, Z_0)

L'énergie de déformation de l'arbre a comme expression (voir annexe C) :

$$U_a = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} dV \quad (2.10)$$

Avec V est le volume de la poutre, σ_{yy} est la contrainte longitudinale.

La relation entre la contrainte et la déformation est (voire annexe C) :

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (2.11)$$

Compte tenu de (2.11), l'expression (2.10) devient :

$$U_a = \frac{1}{2} E \int_V \varepsilon_{yy}^2 dV \quad (2.12)$$

En tenant compte de l'expression (2.9), l'énergie de déformation (2.12) s'écrit :

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a} \left(-x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 ds dy \\ &= \frac{E}{2} \int_0^L \int_{s_a} \left[x^2 \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 + 2xz \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right] ds dy \end{aligned} \quad (2.13)$$

Par suite de la symétrie de la section de l'arbre, l'intégrale correspondant au troisième terme de (2.13) est nulle. En introduisant les inerties diamétrales de la section droite par rapport à $(0,X)$ et à $(0,Z)$ on a :

$$I_x = \int_s z^2 ds \quad I_z = \int_s x^2 ds \quad (2.14) \quad (2.15)$$

et l'énergie de déformation de l'arbre a donc comme expression :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^l \left[I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.16)$$

De préférable exprimer U_a en fonction des déplacements u et w . Le passage de u, w à u^*, w^* s'écrit (voir **Fig.2.3**) :

$$u^* = u \cos \Omega t - w \sin \Omega t \quad (2.17)$$

$$w^* = u \sin \Omega t + w \cos \Omega t \quad (2.18)$$

En tenant en compte de (2.17) et (2.18), l'expression (2.16) devient alors :

$$U_a = \frac{E}{2} \int_0^L \left[I_z \left(\cos \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + I_x \left(\sin \Omega t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cos \Omega t \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (2.19)$$

Finalement, pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ($I_x = I_z = I$), l'énergie de déformation se simplifie à :

$$\boxed{U_a = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy} \quad (2.20)$$

2.4 Palier

Les caractéristiques de raideurs et d'amortissements sont supposées connues. Le travail virtuel δW des forces extérieures agissantes sur l'arbre se met sous la forme (**Fig.2.4**) :

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (2.21)$$

F_u et F_w sont les composants de la force généralisée qui s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_u \\ F_w \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{XX} & 0 \\ 0 & k_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{XX} & 0 \\ 0 & c_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{Bmatrix} \quad (2.22)$$

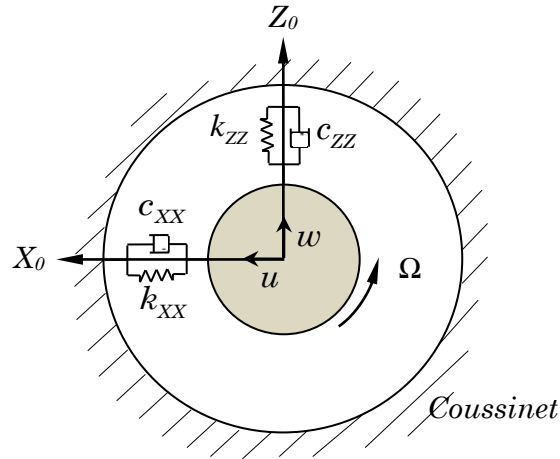


Fig.2.4 : Amortissement et raideur d'un palier

2.5 Balourd

Le balourd (**Fig.2.5**) est dû à une masse m_b située à la distance d du centre géométrique C du disque et son énergie cinétique doit être calculée. La masse reste dans un plan perpendiculaire à l'axe (O, Y) et sa coordonnée selon cet axe est constante. Dans le repère R_0 , les coordonnées de la masse m_b sont :

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \begin{cases} u + d \sin \Omega t \\ \text{cte} \\ w + d \cos \Omega t \end{cases}_{R_0} \quad (2.23)$$

D'où la vitesse absolue :

$$\vec{V}(D/R_0) = \left[\frac{d\vec{OD}}{dt} \right]_{R_0} = \begin{cases} \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t \\ 0 \\ \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t \end{cases}_{R_0} \quad (2.24)$$

et l'énergie cinétique sera :

$$T_b = \frac{1}{2} m_b \left[\vec{V}(D/R_0) \right]^2 = \frac{1}{2} m_b \left(\dot{u}^2 + \dot{w}^2 + \Omega^2 d^2 + 2\Omega d(\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t) \right) \quad (2.25)$$

Le terme $m_b \Omega^2 d^2 / 2$ est constant et donc sans influence sur les équations du mouvement. La masse m_b est négligée devant celle du disque, alors l'énergie cinétique du balourd peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{T_b \approx m_b \Omega d (\dot{u} \cos \Omega t - \dot{w} \sin \Omega t)} \quad (2.26)$$

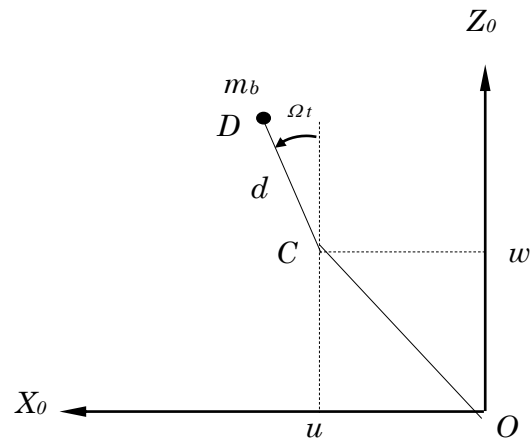


Fig. 2.5 : Paramétrage du balourd élémentaire.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé les différentes caractéristiques des éléments de rotors à savoir, l'énergie cinétique du disque, l'énergie cinétique et de déformation élastique de l'arbre, le travail virtuel dû au palier et l'énergie cinétique du balourd. Ces expressions sont nécessaires pour établir les équations du mouvement du modèle de multi rotors coaxiaux du chapitre trois.

Chapitre 3

Etude des modèles simples de multi-rotors coaxiaux

Chapitre 3

Etude des modèles simples de multi-rotors coaxiaux

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour objet l'étude du comportement dynamique en flexion d'un modèle mathématique simple de deux rotors coaxiaux en se basant sur les expressions mathématiques des caractéristiques des éléments du mono-rotor présentées dans le chapitre 2. La méthode numérique de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange sont utilisées pour déterminer les équations de mouvement des deux modèles suivants : modèle symétrique et modèle non symétrique. Les phénomènes de base suivants sont étudiés :

- Evolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation (diagramme de Campbell) ;
- Effet des forces d'excitation dû à la masse du balourd.

3.2 Détermination du modèle

Le modèle est simple mais réaliste et est présenté sur la **figure 3.1 [31]**. Les rotors sont symétriques car, les sections droites des arbres sont supposées circulaires et constantes et la non symétrie est due à la raideur k_{zz} . Les raideurs des roulements sont supposées très élevées, donc les supports sont rigides. Au niveau de la raideur k_{zz} , les déplacements latéraux des deux rotors 1 et 2 sont les mêmes [31].

Les expressions de l'énergie cinétique, de l'énergie de déformation et le travail virtuel, présentées dans le chapitre deux sont utilisées pour chaque élément des deux rotors. Les termes constants qui apparaissent dans l'expression de l'énergie cinétique sont omis car, leur contribution est nulle dans les équations de mouvement.

Les expressions des déplacements d'un point situé sur l'axe du rotor 1, dans les directions (O, X_0) et (O, Z_0) respectivement sont :

$$u_1(y, t) = \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right) q_1(t) = f_1(y)q_1(t) \quad (3.1)$$

$$w_1(y, t) = \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right) q_2(t) = f_1(y)q_2(t) \quad (3.2)$$

Avec $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont les deux coordonnées généralisées indépendantes à déterminer. $f_1(y)$ est le premier mode propre d'une poutre Appuyée-Appuyée. Les angles (déplacements angulaires) de voilement pour le rotor 1 qui caractérisent l'effet gyroscopique, sont liés aux déplacements par (faibles rotations) (Fig.3.2) :

$$\theta_1(y, t) = \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{df_1}{dy}(y)q_2(t) = g_1(y)q_2(t) \quad (3.3)$$

$$\Psi_1(y, t) = -\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{df_1}{dy}(y)q_1(t) = -g_1(y)q_1(t) \quad (3.4)$$

Avec :

$$f_1(y) = \sin\left(\frac{\pi y}{l}\right) ; g_1(y) = \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi y}{l}\right) \quad (3.5)$$

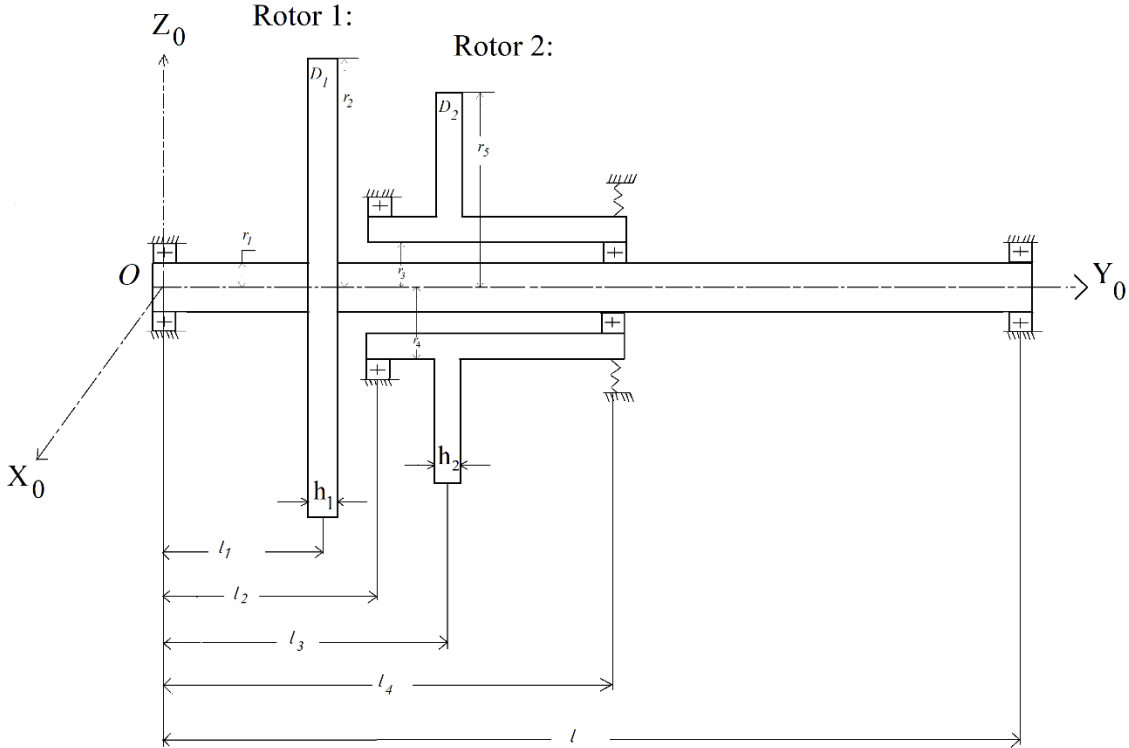


Fig. 3.1 : Modèle simple de deux-rotors coaxiaux [31]

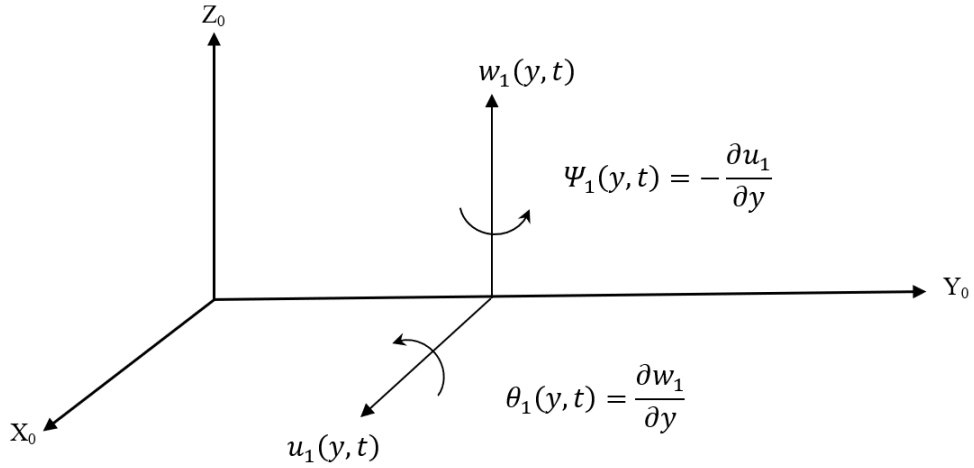


Fig. 3.2 : Déplacements d'un point sur l'axe de rotor 1.

Les dérivées secondaires de u_1 et w_1 sont nécessaires pour calculer l'énergie de déformation, leurs expressions sont :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = \frac{d^2 f_1}{dy^2}(y) q_1(t) = h_1(y) q_1(t) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{d^2 f_1}{dy^2}(y) q_2(t) = h_1(y) q_2(t) \quad (3.7)$$

Avec :

$$h_1(y) = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sin \left(\frac{\pi y}{l} \right) \quad (3.8)$$

Le rotor 2 est supposé rigide, on a :

$$u_2(y, t) = \frac{(y-l_2)}{l_4-l_2} \sin \left(\frac{\pi l_4}{l} \right) q_1(t) = f_2(y) q_1(t) \quad (3.9)$$

$$w_2(y, t) = \frac{(y-l_2)}{l_4-l_2} \sin \left(\frac{\pi l_4}{l} \right) q_2(t) = f_2(y) q_2(t) \quad (3.10)$$

Avec :

$$\theta_2(y, t) = \frac{\partial w_2}{\partial y} = \frac{df_2}{dy}(y)q_2(t) = g_2 q_2(t) \quad (3.11)$$

$$\Psi_2(y, t) = -\frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{df_2}{dy}(y)q_1(t) = -g_2 q_1(t) \quad (3.12)$$

Avec :

$$f_2(y) = \sin \frac{(y-l_2)}{l_4-l_2} \sin \left(\frac{\pi l_4}{l} \right) ; \quad g_2(y) = \sin \frac{1}{l_4-l_2} \sin \left(\frac{\pi l_4}{l} \right) \quad (3.13)$$

Comme g_2 est constante, alors :

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0 \quad (3.14)$$

3.2.1 Energie cinétique du modèle

L'énergie cinétique du modèle est la somme des énergies cinétiques des deux rotors 1 et 2, c'est-à-dire la somme des énergies des 2 disques, des deux arbres et des deux balourds :

$$T = T_1 + T_2 \quad (3.15)$$

Avec :

$$T_i = T_{di} + T_{ai} + T_{bi}, \quad i = 1, 2 \quad (3.16)$$

Les énergies cinétiques des disques d₁ et d₂ sont calculées par (voir chapitre 2, expression (2.7)) :

$$T_{di} = \frac{1}{2} M_{di} (\dot{u}_i^2 + \dot{w}_i^2) + \frac{1}{2} I_{dxi} (\dot{\theta}_i^2 + \dot{\Psi}_i^2) + I_{dyi} \Omega_i \dot{\Psi}_i \theta_i + \frac{1}{2} I_{dyi} \Omega_i^2 \quad (3.17)$$

Le terme $\frac{1}{2} I_{d_{yi}} \Omega_i^2$ est constant et n'a pas d'influence sur les équations de mouvement. Il représente l'énergie cinétique des disques tournants à Ω_i dans le cas où tous les autres déplacements sont nuls. Le terme $I_{d_{yi}} \Omega_i \dot{\Psi}_i \theta_i$ représente l'effet gyroscopique.

L'énergie cinétique de chacun des deux arbres est calculée par l'expression (2.8) du chapitre 2 :

$$T_{a1} = \frac{1}{2} \rho s_1 \int_0^l (\dot{u}_1^2 + \dot{w}_1^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_1 \int_0^l (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\Psi}_1^2) dy + 2\rho I_1 \Omega_1^2 \int_0^l \Psi_1 \theta_1 dy + \rho I_1 L \Omega_1^2 \quad (3.18)$$

$$T_{a2} = \frac{1}{2} \rho s_2 \int_{l_2}^{l_4} (\dot{u}_2^2 + \dot{w}_2^2) dy + \frac{1}{2} \rho I_2 \int_{l_2}^{l_4} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\Psi}_2^2) dy + 2\rho I_2 \Omega_2^2 \int_{l_2}^{l_4} \Psi_2 \theta_2 dy + \rho I_2 (l_4 - l_2) \Omega_2^2 \quad (3.19)$$

Et l'énergie cinétique des deux balourds par (voir expression (2.26)) :

$$T_b = m_{bi} \Omega_i d_i (\dot{u}_i \cos \Omega_i t - \dot{w}_i \sin \Omega_i t) ; i=1, 2 \quad (3.20)$$

Remplaçons les expressions (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) dans les expressions de l'énergie cinétique disque (3.17), de l'arbre (3.18) et du balourd (3.20), il vient pour le rotor 1 :

Pour le disque 1 de position $y = l_1$:

$$\begin{aligned} T_{d1} &= \frac{1}{2} M_{d1} [f_1^2(l_1) \dot{q}_1^2 + f_1^2(l_1) \dot{q}_2^2] + \frac{1}{2} I_{d_{x1}} [g_1^2(l_1) \dot{q}_1^2 + g_1^2(l_1) \dot{q}_2^2] \\ &\quad - \Omega_1 I_{d_{y1}} g_1^2(l_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ &= \frac{1}{2} [M_{d1} f_1^2(l_1) + I_{d_{x1}} g_1^2(l_1)] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega_1 I_{d_{y1}} g_1^2(l_1) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour l'arbre 1 :

$$T_{a1} = \frac{1}{2} \left[\rho s_1 \int_0^l f_1^2(y) dy + \rho I_1 \int_0^l g_1^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - 2\rho I_1 \Omega_1 \int_0^l g_1^2(y) dy \dot{q}_1 \dot{q}_2 \quad (3.22)$$

Pour le balourd 1 :

$$T_{b1} = m_{b1} \Omega_1 d_1 f_1(l_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega_1 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_1 t] \quad (3.23)$$

En introduisant les expressions (3.21), (3.22) et (3.23) dans (3.16) on obtient l'énergie cinétique du rotor 1 :

$$T_1 = \frac{1}{2} \left[M_{d1} f_1^2(l_1) + I_{dx1} g_1^2(l_1) + \rho s_1 \int_0^l f_1^2(y) dy + \rho I_1 \int_0^l g_1^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega_1 \left[I_{dy1} g_1^2(l_1) + 2\rho I_1 \int_0^l g_1^2(y) dy \right] \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{b1} \Omega_1 d_1 f_1(l_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega_1 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_1 t] \quad (3.24)$$

L'expression (3.24) peut s'écrire :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega_1 a_1 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + m_{b1} \Omega_1 d_1 f_1(l_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega_1 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_1 t] \quad (3.25)$$

Avec :

$$m_1 = M_{d1} f_1^2(l_1) + I_{dx1} g_1^2(l_1) + \rho s_1 \int_0^l f_1^2(y) dy + \rho I_1 \int_0^l g_1^2(y) dy \quad (3.26)$$

$$a_1 = I_{dy1} g_1^2(l_1) + 2\rho I_1 \int_0^l g_1^2(y) dy \quad (3.27)$$

Remplaçons maintenant les expressions (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12) dans les expressions de l'énergie cinétique du disque (3.17), de l'arbre 2 (3.19) et du balourd (3.20), il vient pour le rotor 2 :

Pour le disque 2 de position $y = l_3$:

$$T_{a2} = \frac{1}{2} [M_{d2} f_2^2(l_3) + I_{dx2} g_2^2(l_3)] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - I_{dy2} \Omega_2 g_2^2(l_3) \dot{q}_1 q_2 \quad (3.28)$$

Pour l'arbre 2 :

$$T_{a2} = \frac{1}{2} \left[\rho s_2 \int_{l_2}^{l_4} f_2^2(y) dy + \rho I_2 \int_{l_2}^{l_4} g_2^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + 2\rho \Omega_2 I_2 \int_{l_2}^{l_4} g_2^2(y) dy \dot{q}_1 q_2 \quad (3.29)$$

Pour le balourd 2:

$$T_{b2} = m_{b2} \Omega_2 d_2 f_2(l_3) [\dot{q}_1 \cos \Omega_2 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_2 t] \quad (3.30)$$

En introduisant les expressions (3.28), (3.29) et (3.30) dans l'expression (3.16) on obtient :

$$\begin{aligned} T_2 = & \frac{1}{2} \left[M_{d2} f_2^2(l_3) + I_{dx2} g_2^2(l_3) + \rho s_2 \int_{l_2}^{l_4} f_2^2(y) dy + \rho I_2 \int_{l_2}^{l_4} g_2^2(y) dy \right] (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) \\ & - \Omega_2 \left[I_{dy2} g_2^2(l_3) + 2\rho I_2 \int_{l_2}^{l_4} g_2^2(y) dy \right] \dot{q}_1 q_2 \\ & + m_{b2} \Omega_2 d_2 f_2(l_3) [\dot{q}_1 \cos \Omega_2 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_2 t] \end{aligned} \quad (3.31)$$

L'expression (3.31) peut s'écrire sous la forme :

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \Omega_2 a_2 \dot{q}_1 q_2 + m_{b2} \Omega_2 d_2 f_2(l_3) [\dot{q}_1 \cos \Omega_2 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_2 t] \quad (3.32)$$

Avec :

$$m_2 = M_{d2} f_2^2(l_3) + I_{dx2} g_2^2(l_3) + \rho s_2 \int_{l_2}^{l_4} f_2^2(y) dy + \rho I_2 \int_{l_2}^{l_4} g_2^2(y) dy \quad (3.33)$$

$$a_2 = I_{dy2} g_2^2(l_3) + 2\rho I_2 \int_{l_2}^{l_4} g_2^2(y) dy \quad (3.34)$$

Finalement, l'énergie cinétique totale du modèle a comme expression :

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 \\ &= \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - (\Omega_1 a_1 + \Omega_2 a_2) \dot{q}_1 q_2 + m_{b1} \Omega_1 d_1 f_1(l_1) [\dot{q}_1 \cos \Omega_1 t \\ &\quad - \dot{q}_2 \sin \Omega_2 t] + m_{b2} \Omega_2 d_2 f_2(l_3) [\dot{q}_1 \cos \Omega_2 t - \dot{q}_2 \sin \Omega_2 t] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Avec $m = m_1 + m_2$

Les deux vitesses de rotation sont tel que :

$$\Omega_2 = n \Omega_1 = n \Omega \quad (3.36)$$

Avec n et le rapport de transmission

3.2.2 Energie de déformation du modèle

Comme le rotor 2 est supposé rigide, l'énergie de déformation du modèle se limite a celle de l'arbre du rotor 1. Elle est donnée par l'expression (2.20) du chapitre 2 :

$$U = \frac{EI_1}{2} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad (3.37)$$

Introduisons les expressions (3.6) et (3.7) dans (3.37), il vient :

$$U = \frac{EI_1}{2} (q_1^2 + q_2^2) \int_0^l h_1^2(y) dy = \frac{1}{2} k (q_1^2 + q_2^2) \quad (3.38)$$

Avec :

$$k = EI_1 \int_0^l h_1^2(y) dy = \frac{\pi^4 EI_1}{2l^3} \quad (3.39)$$

3.2.3 Travail virtuel dû à la raideur k_{zz}

Le travail virtuel effectué par la force causée par k_{zz} qui agit sur l'arbre a comme expression :

$$\delta W = -k_{zz} w_1(l_4) \delta w_1(l_4) \quad (3.40)$$

Ou bien :

$$\delta W = -k_{zz} f_1^2(l_4) q_2 \delta q_2 \quad (3.41)$$

D'où les forces généralisées :

$$F_{q_1} = 0 \quad (3.42)$$

$$F_{q_2} = -k_{zz} f_1^2(l_4) q_2 \quad (3.43)$$

3.2.4 Equations de mouvement

Les équations de mouvement sont obtenues par l'application des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial U}{\partial q_1} = F_{q_1} \quad (3.44)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial U}{\partial q_2} = F_{q_2} \quad (3.45)$$

3.2.5 Données numériques

La vitesse de rotation Ω_1 est la référence et les valeurs choisies pour le rapport de vitesse n sont -5 ; -1 et 5. Les autres données sont :

- *Arbre du rotor 1 :*

Longueur : $l = 0.4 \text{ m}$

Rayon : $r_1 = 0.02 \text{ m}$

Masse volumique : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Module d'Young: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

Section: $S_1 = \pi r_1^2 = 12.56 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

Moment quadratique : $I_1 = \frac{\pi r_1^4}{4} = 12.56 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

- *Arbre du rotor 2 :*

Longueur : $l_4 - l_2 = 0.1066 \text{ m}$

Rayon intérieur : $r_3 = 0.03 \text{ m}$

Rayon extérieure : $r_4 = 0.035 \text{ m}$

Masse volumique : $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Module d'Young: $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$

Section: $S_2 = \pi (r_4^2 - r_3^2) = 10.21 \times 10^{-4} \text{ m}^2$

Moment quadratique : $I_2 = \frac{\pi}{4} (r_4^2 - r_3^2) = 54.24 \times 10^{-8} \text{ m}^4$

- *Disque du rotor 1 :*

Rayon intérieur : $r_1 = 0.02 \text{ m}$

Rayon extérieure : $r_2 = 0.15 \text{ m}$

Epaisseur : $h_1 = 0.03 \text{ m}$

Position de l'arbre : $l_1 = \frac{l}{3} = 0.133 \text{ m}$

Masse : $M_{d1} = \pi(r_2^2 - r_1^2)h_1\rho = 16.24 \text{ Kg}$

Moments d'inertie : $I_{dx1} = \frac{M_{d1}}{12}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h_1^2) = 9.42 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2$

$$I_{dy1} = \frac{M_{d1}}{2}(r_1^2 + r_2^2) = 18.59 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2$$

- *Disque du rotor 2 :*

Rayon intérieur : $r_4 = 0.035 \text{ m}$

Rayon extérieure : $r_5 = 0.1 \text{ m}$

Epaisseur : $h_2 = 0.02 \text{ m}$

Position de l'arbre : $l_3 = \frac{8l}{15} = 0.213 \text{ m}$

Masse : $M_{d2} = \pi(r_5^2 - r_4^2)h_2\rho = 4.3 \text{ Kg}$

Moment d'inertie : $I_{dx2} = \frac{M_{d2}}{12}(3r_4^2 + 3r_5^2 + h_2^2) = 1.22 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2$

$$I_{dy2} = \frac{M_{d2}}{2}(r_4^2 + r_5^2) = 2.41 \times 10^{-2} \text{ Kg m}^2$$

- *Balourds :*

$$m_{b1}d_1 = m_{b2}d_2 = m_b d = 10^{-5} \text{ kg/m}$$

- *Palier*

$$k_{zz} = 8 \times 10^6 \text{ N/m}$$

3.3 Modèle symétrique

Ici on a pris la raideur $k_{zz} = 0$. L'application des équations de Lagrange (3.44) et (3.45) conduit aux équations de mouvement sous forme générale :

$$m\ddot{q}_1 - \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_2 + kq_1 = F_1(t) \quad (3.46)$$

$$m\ddot{q}_2 + \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_1 + kq_2 = F_2(t) \quad (3.47)$$

Lorsque la masse du balourd est située sur le disque 1 ($y = l_1$) ; les composantes des forces sont :

$$F_1(t) = m_{b1} d \Omega_1^2 f_1(l_1) \sin \Omega t = m_1^* d \Omega_1^2 \sin \Omega_1 t \quad (3.48)$$

$$F_2(t) = m_{b1} d \Omega_1^2 f_1(l_1) \cos \Omega t = m_1^* d \Omega_1^2 \cos \Omega_1 t \quad (3.49)$$

Lorsque la masse du balourd est située sur le disque 2 ($y = l_3$) ; les composantes des forces sont :

$$F_1(t) = m_b d \Omega_2^2 f_2(l_3) \sin \Omega_2 t = m_2^* d n^2 \Omega^2 \sin n \Omega t \quad (3.50)$$

$$F_2(t) = m_b d \Omega_2^2 f_2(l_3) \cos \Omega_2 t = m_2^* d n^2 \Omega^2 \cos n \Omega t \quad (3.51)$$

Les termes des équations (3.46) et (3.47) sont :

$$a_1 = 2.893 \text{ kg}, a_2 = 1.651 \text{ kg}, k = 19.13 \times 10^6 \text{ N/m et } m = 17.46 \text{ kg}$$

3.3.1. Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell

Le modèle est étudié en vibration libres. Les équations (3.46) et (3.47) devient :

$$m\ddot{q}_1 - \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_2 + kq_1 = 0 \quad (3.52)$$

$$m\ddot{q}_2 + \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_1 + kq_2 = 0 \quad (3.53)$$

Les solutions des équations (3.52) et (3.53) sont sous forme :

$$q_1(t) = Q_1 e^{rt} \quad (3.54)$$

$$q_2(t) = Q_2 e^{rt} \quad (3.55)$$

Remplacent (3.54) et (3.55) dans (3.52) et (3.53) et pour une solution non triviale, il faut que le déterminant soit égal à zéro, d'où l'équation aux fréquences :

$$m^2 r^4 + (2km + (a_1 + na_2)^2 \Omega^2) r^2 + k^2 = 0 \quad (3.56)$$

A l'arrêt ($\Omega = 0$) les solutions (racines) de (3.56) sont $\pm j\omega_{10}$ et $\pm j\omega_{20}$ d'où les fréquences propres à l'arrêt :

$$\omega_{10} = \omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.57)$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines de (3.56) sont r_1^2 et r_2^2 :

$$r_1^2 = j^2 \omega_1^2 \rightarrow r_1 = \pm j \omega_1 = \pm j \left[\omega_{10}^2 + \frac{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 - \left(1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2} \right)^{1/2} \right) \right]^{1/2} \quad (3.58)$$

$$r_2^2 = j^2 \omega_2^2 \rightarrow r_2 = \pm j \omega_2 = \pm j \left[\omega_{10}^2 + \frac{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2}{2m^2} \left(1 + \left(1 + \frac{4m^2 \omega_{10}^2}{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2} \right)^{1/2} \right) \right]^{1/2} \quad (3.59)$$

Les amplitudes Q_1 et Q_2 sont :

$$Q_1 = \frac{\Omega(a_1 + na_2)rQ_2}{k + mr^2} \quad (3.60)$$

Le type de précession (sens de la trajectoire) dans le diagramme de Campbell dépend de la valeur de n . Si $n < -\frac{a_1}{a_2}$, la fréquence $\omega_2(\Omega)$ correspond au moment de

précession inverse (P_r I) et $\omega_1(\Omega)$ au mouvement de de précession directe (P_r D). Si $n > -\frac{a_1}{a_2}$; la précession se change.

Les diagrammes de Campbell, avec $f_1(N) = \frac{\omega_1}{2\pi} =$ et $f_2(N) = \frac{\omega_2}{2\pi} =$ ou $N = \frac{30\Omega}{\pi}$ est la vitesse de rotation du rotor 1 exprimée en tr/min, sont présentés respectivement pour $n = -5, -1$ et 5 sur les figures 3.3, 3.4 et 3.5. Les lignes droites correspondent respectivement à $f = \frac{N}{60}$ et $f = |n| \frac{N}{60}$. Aux intersections des courbes $f_1(N)$ et $f_2(N)$ avec ces droites, une fréquence propre du modèle égale a la fréquence de rotation de chaque rotor. Il est intéressant d'obtenir les expressions générales des fréquences correspondant aux points A, B, C et D.

- Aux points A et B :

$$\omega = \Omega_1 \quad (3.61)$$

Et en utilisant l'équation caractéristique (3.56) avec $r = \pm j\omega$ on obtient :

$$\Omega_{cr1} = \sqrt{\frac{k}{m+(a_1+na_2)}} \quad (3.62)$$

$$\Omega_{cr2} = \sqrt{\frac{k}{m-(a_1+na_2)}} \quad (3.63)$$

- Aux points C et D :

$$\omega = |n| \Omega \quad (3.64)$$

Ce qui donne :

$$\Omega_{cr1} = \sqrt{\frac{k}{n(mn+(a_1+na_2))}} \quad (3.65)$$

$$\Omega_{cr2} = \sqrt{\frac{k}{n(mn-(a_1+na_2))}} \quad (3.66)$$

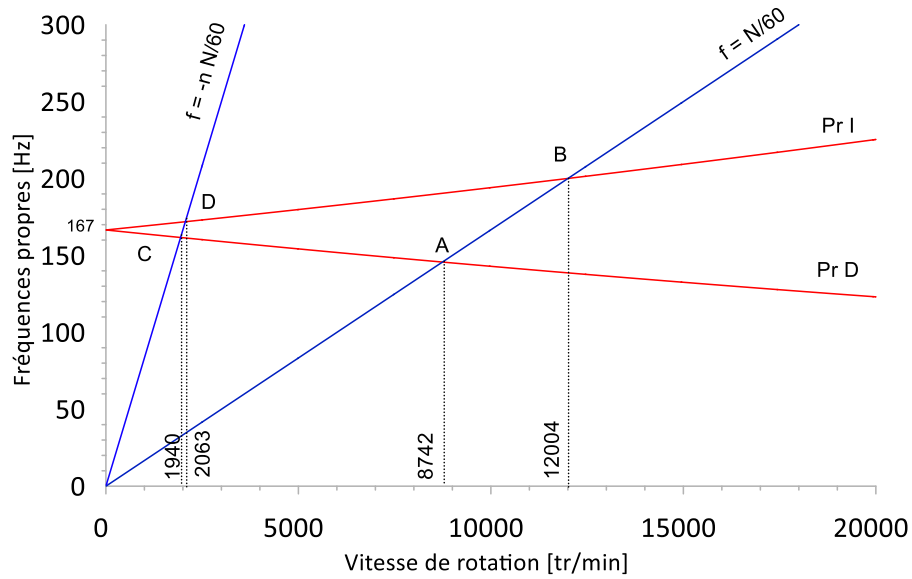


Fig.3.3 : Diagramme de Campbell, $n = -5$

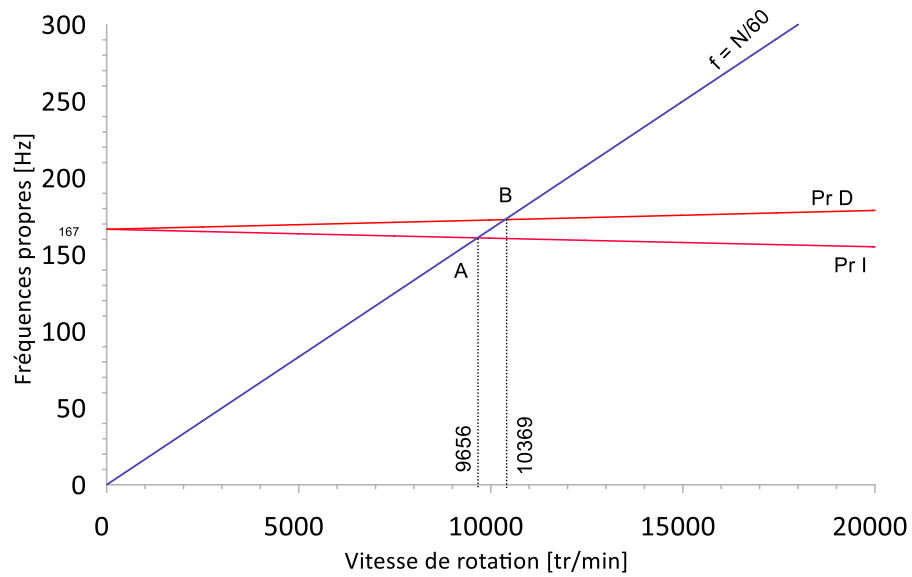


Fig.3.4 : Diagramme de Campbell, $n = -1$

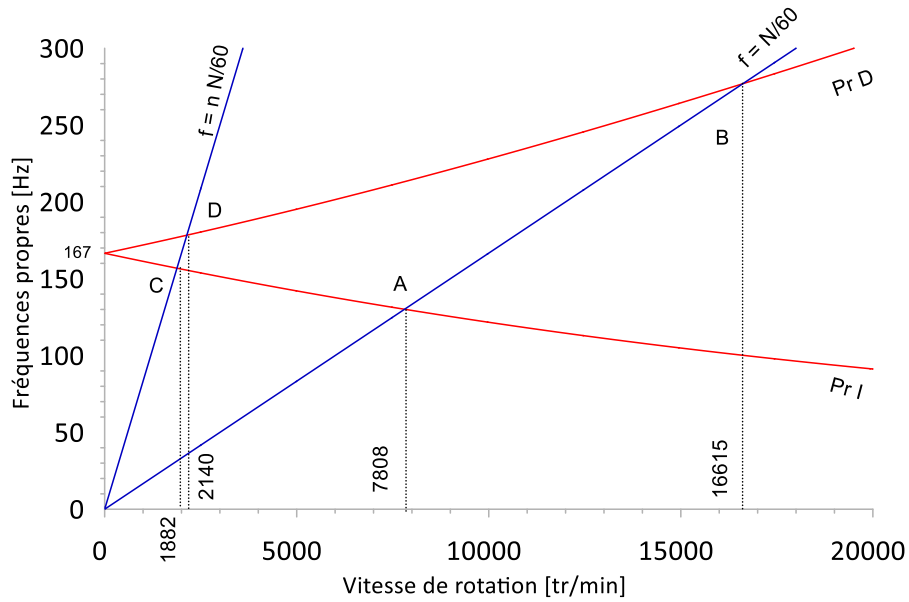


Fig.3.5 : Diagramme de Campbell, $n = 5$

3.3.2 Réponse aux forces de balourds

Seulement la solution particulière est calculée. La solution générale des équations (3.52) et (3.53) n'est pas considérée. La réponse due à la masse du balourd est calculée avec la masse de balourd localisée dans le disque 1 (rotor 1) ou bien le disque 2 (rotor 2).

- Masse de balourd sur le rotor 1 :

Dans ce cas, le modèle est décrit par les équations (3.46) et (3.47) avec les forces sont donnée par les expressions (3.48) et (3.49) :

$$m\ddot{q}_1 - \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_2 + kq_1 = m_1 * d \Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.67)$$

$$m\ddot{q}_2 + \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_1 + kq_2 = m_1 * d \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.68)$$

Les solutions de (3.67) et (3.68) sont la forme :

$$q_1(t) = Q_1 \sin \Omega t \quad (3.69)$$

$$q_2(t) = Q_2 \cos \Omega t \quad (3.70)$$

Substitutions de (3.69) et (3.70) dans les équations (3.67) et (3.68), nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} k - m \Omega^2 & (a_1 + na_2) \Omega^2 \\ (a_1 + na_2) \Omega^2 & k - m \Omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_1^* d \Omega^2 \\ m_1^* d \Omega^2 \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

Les racines de (3.71) sont :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m_1^* d \Omega^2}{k + (a_1 + na_2 - m) \Omega^2} \quad (3.72)$$

Comme $Q_1 = Q_2$, les orbites (trajectoires) décrits par les rotors sont des cercles. La vitesse critique est ($k + (a_1 + na_2 - m) \Omega^2 = 0$) :

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{m - (a_1 + na_2)}} \quad (3.73)$$

Qui correspond à l'expression (3.36) et les points A (pour $n = -5$, figure 3.6) et B (pour $n = -1$, figure 3.7 et $n = 5$, figure 3.8). Pour chaque ω , il y a une seule vitesse critique qui correspond à l'intersection entre $f(N/60)$ et la fréquence de précession inverse, présentée par les figures 3.6, 3.7 et 3.8 pour $n = -5$, -1 et 5 respectivement.

- Masse de balourd sur le rotor 2 :

Dans ce cas les forces sont données par les expressions (3.50) et (3.51) :

$$m\ddot{q}_1 - \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_2 + kq_1 = m_2^* d n^2 \Omega^2 \sin \Omega t \quad (3.74)$$

$$m\ddot{q}_2 + \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_1 + kq_2 = m_2^* d n^2 \Omega^2 \cos \Omega t \quad (3.75)$$

Les solutions de (3.74) et (3.75) sont sous la forme :

$$q_1(t) = Q_1 \sin n\Omega t \quad (3.76)$$

$$q_2(t) = Q_2 \cos n\Omega t \quad (3.77)$$

Ce qui donne :

$$Q_1 = Q_2 = \frac{m_2^* d n^2 \Omega^2}{k + (a_1 + na_2 - mn) n \Omega^2} \quad (3.78)$$

Comme $Q_1 = Q_2$ les orbites décrites par les deux rotors sont des cercles. La vitesse critique est :

$$\Omega_{cr} = \sqrt{\frac{k}{n(mn - (a_1 + na_2))}} \quad (3.79)$$

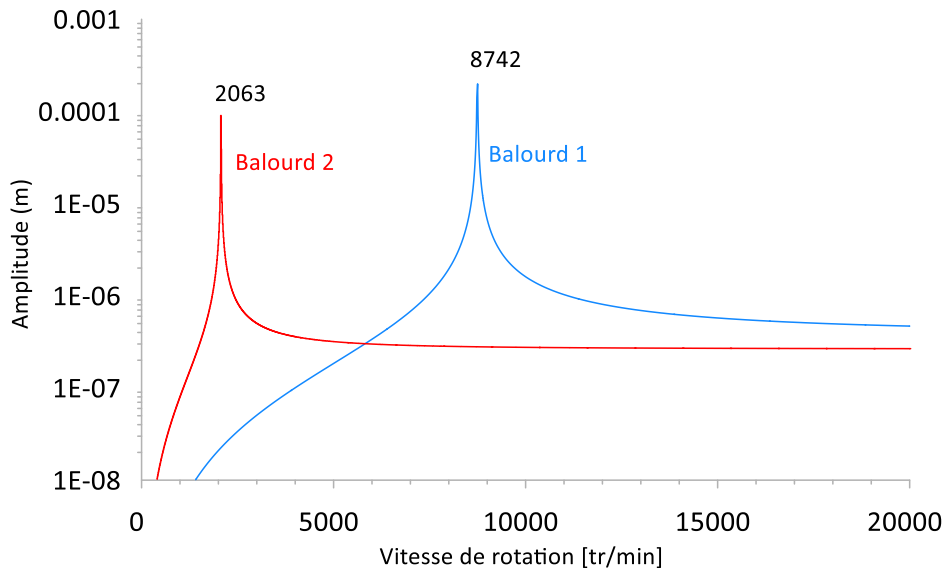


Fig. 3.6 : Réponse due à la masse du balourd, $n = - 5$

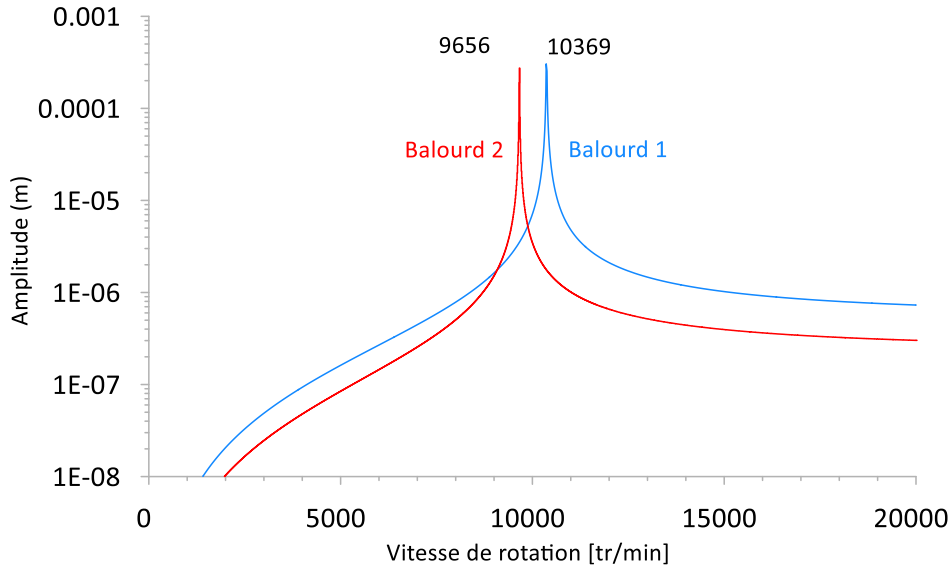


Fig. 3.7 : Réponse due à la masse du balourd, $n = -1$

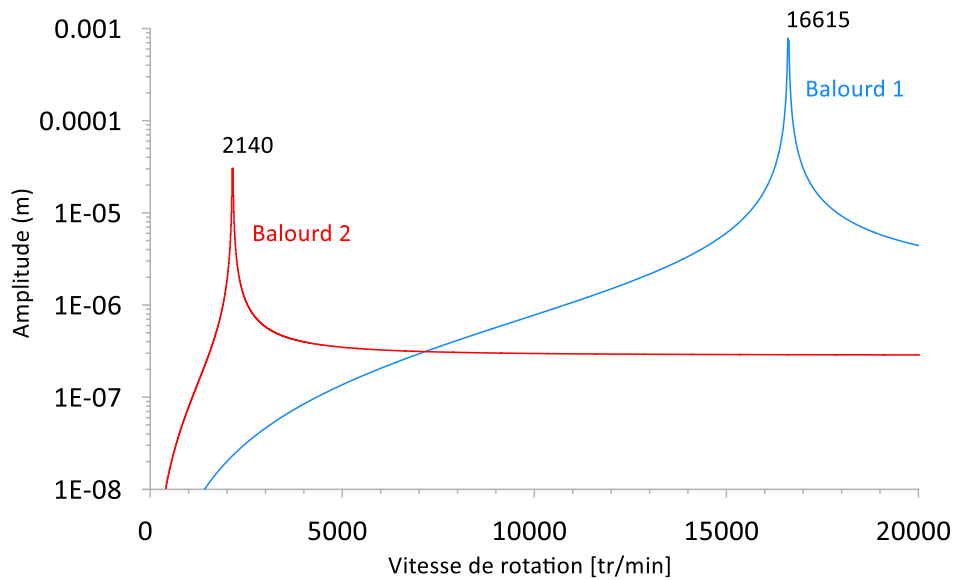


Fig. 3.8 : Réponse due à la masse du balourd, $n = 5$

3.3.3 Sens de la trajectoire

Les expressions (3.1) et (3.2) montrent que les déplacements suivant les axes X_0 et Z_0 , d'un point sur l'axe du rotor 1 sont respectivement proportionnels aux quantités $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Les expressions (3.9) et (3.10) montrent que les déplacements suivant les axes X_0 et Z_0 , d'un point sur l'axe du rotor 2 sont aussi respectivement proportionnels aux quantités $q_1(t)$ et $q_2(t)$. Le sens de rotation de la trajectoire qui définit le type de

précession, est facilement obtenu à partir des déplacements du point sur l'axe d'un des rotors exprimés par $q_1(t)$ et $q_2(t)$ (Fig.3.9) .

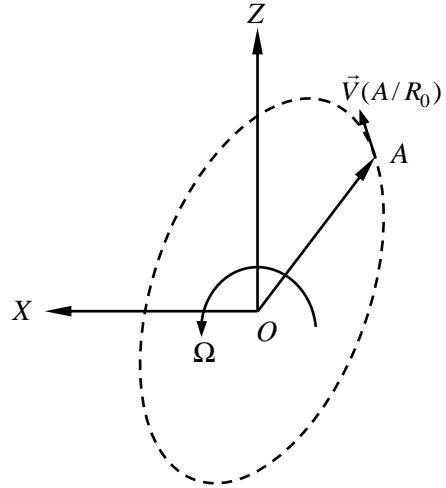


Fig. 3.9 : Trajectoire et type de précession

Définissons maintenant :

$$O\vec{A} = \begin{bmatrix} q_1 \\ 0 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Ensuite :

$$dO\vec{A} = \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} dt \\ 0 \\ \frac{dq_2}{dt} dt \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

et le produit vectoriel sera :

$$O\vec{A} \wedge dO\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_2 \frac{dq_1}{dt} dt - q_1 \frac{dq_2}{dt} dt \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

Lorsque la masse du balourd est sur le rotor 1 et en utilisant les expressions (3.69) et (3.72), on obtient :

$$o\vec{A} \wedge dO\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1^2 dt \Omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_2^2 dt \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Comme $Q_1^2 dt \Omega$ est une quantité positive la précession est directe.

Lorsque la masse du balourd est sur le rotor 2, et en utilisant les expressions (3.76) et (3.78), on obtient :

$$o\vec{A} \wedge dO\vec{A} = \begin{bmatrix} 0 \\ nQ_1^2 dt \Omega \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ nQ_2^2 dt \Omega \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

La précession est directe si $n > 0$ et inverse si $n < 0$.

3.4. Modèle non symétrique

La non symétrie est due à l'introduction de la rigidité k_{zz} donnée par les expressions (3.42) et (3.43). Les équations (3.46) et (3.47) deviennent :

$$m\ddot{q}_1 - \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_2 + k_1 q_1 = F_1 \quad (3.85)$$

$$m\ddot{q}_2 + \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_1 + k_2 q_2 = F_2 \quad (3.86)$$

Avec :

$$k_1 = k \quad (3.87)$$

$$k_2 = k + k_{zz} f_1^2(l_4) \quad (3.88)$$

La valeur de $k_2 = 25.13 \times 10^6 \text{ N/m}$ et les composantes de la force sont déjà exprimées par (3.48) et (3.49) ou bien (3.50) et (3.51).

3.4.1. Fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation : diagramme de Campbell

Le système est étudié en vibration libres ; les équations (3.85) et (3.86) deviennent :

$$m\ddot{q}_1 - \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_2 + k_1q_1 = 0 \quad (3.89)$$

$$m\ddot{q}_2 + \Omega(a_1 + na_2)\dot{q}_1 + k_2q_2 = 0 \quad (3.90)$$

Les solutions sont sous la forme (3.54) et (3.55) que lorsque qu'elles sont remplacées dans (3.89) et (3.90) donnent le polynôme caractéristique :

$$m^2r^4 + (k_1m + k_2m + (a_1 + na_2)^2 \Omega^2)r^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.91)$$

A l'arrêt ($\Omega = 0$), les racines de (3.91) sont $r_{10}^2 = \pm \omega_{10}^2$ et $r_{20}^2 = \pm \omega_{20}^2$, avec

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad (3.92)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} \quad (3.93)$$

En rotation ($\Omega \neq 0$), les racines de (3.90) sont $r_1^2 = \pm \omega_1^2$ et $r_2^2 = \pm \omega_2^2$, avec :

$$\omega_1 = \left[\frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}{2} + \frac{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2}{2m^2} - \sqrt{\left[\frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}{2} + \frac{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2}{2m^2} \right]^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \right]^{1/2} \quad (3.94)$$

$$\omega_2 = \left[\frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}{2} + \frac{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2}{2m^2} + \sqrt{\left[\frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2}{2} + \frac{(a_1 + na_2)^2 \Omega^2}{2m^2} \right]^2 - \omega_{10}^2 \omega_{20}^2} \right]^{1/2} \quad (3.95)$$

A partir des expressions (3.94) et (3.95), on peut observer que :

$$\omega_1(\Omega) < \omega_{10} < \omega_{20} < \omega_2(\Omega) \quad (3.96)$$

Les diagrammes de Campbell avec $f_1(N) = \frac{\omega_1}{2\pi}$ et $f_2(N) = \frac{\omega_2}{2\pi}$ sont présentés respectivement pour $n = -5, -1, 5$ par les figures (3.10), (3.11) et (3.12), aux intersections des courbes $f_1(N)$ et $f_2(N)$ avec les droites $N/60$ et $|n|N/60$, une fréquence propre du modèle est égale à une fréquence de rotation des rotors.

Aux points A et B, ou C et D, une fréquence propre des rotors égale à une fréquence de rotation du rotor 1 ou bien avec une fréquence de rotation du rotor 2 respectivement. Les expressions générales qui donnent les valeurs des fréquences aux points A et B ou bien C et D, peuvent être obtenues à partir de l'équation caractéristique (3.87), ce qui donne pour les points A et B :

$$\Omega^4 (m^2 - (a_1 + na_2)^2) - (k_1 + k_2)m\Omega^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.97)$$

et pour les points C et D :

$$\Omega^4 (n^4 m^2 - n^2(a_1 + na_2)^2) - (k_1 + k_2)n^2m^2\Omega^2 + k_1k_2 = 0 \quad (3.98)$$

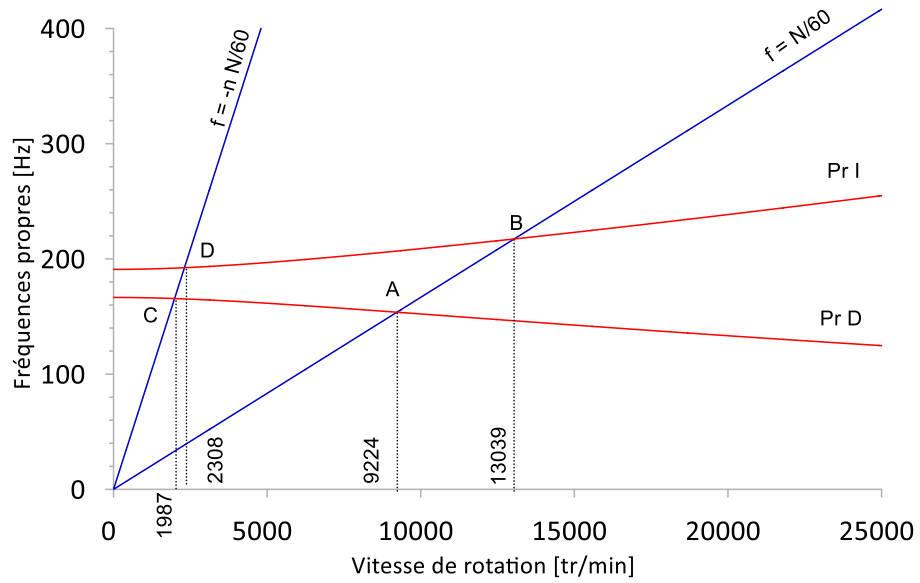


Fig. 3.10 : Diagramme de Campbell, $n = -5$

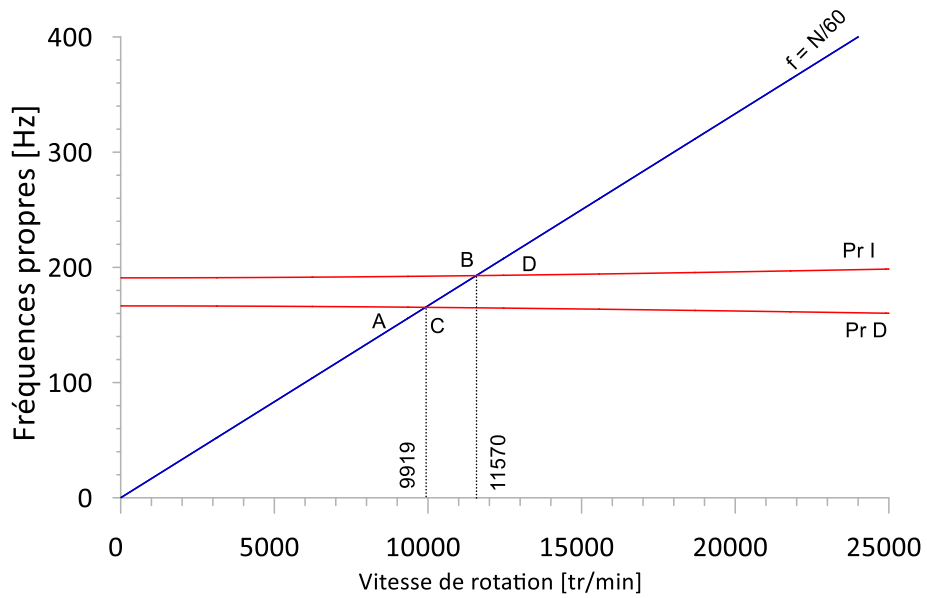
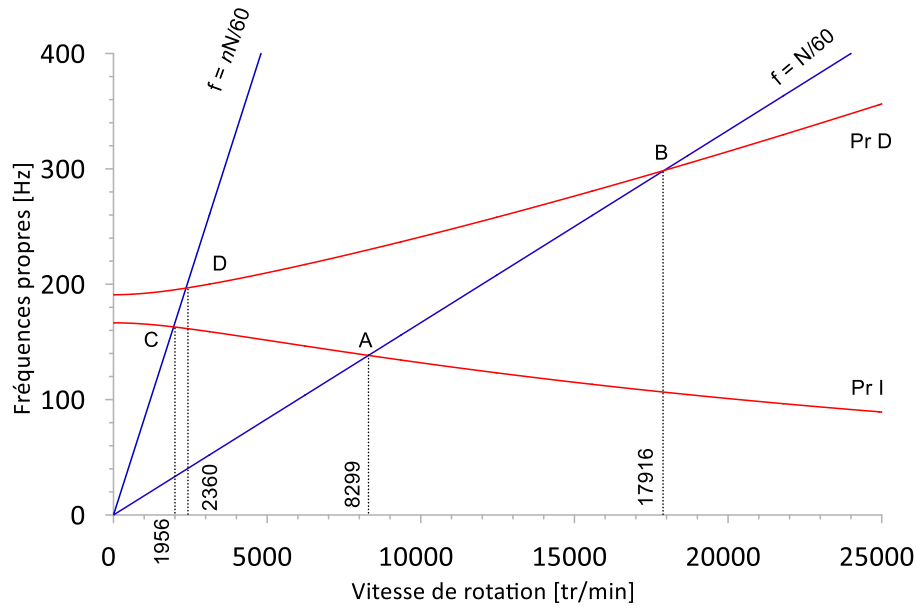


Fig. 3.11 : Diagramme de Campbell, $n = -1$


 Fig. 3.12 : Diagramme de Campbell, $n = 5$

3.4.2 Réponse aux forces de balourd

Ici, seulement la réponse particulière est calculée. La solution générale des équations (3.85) et (3.86) est non considérée. La réponse due à la masse du balourd est calculée avec la masse localisée au disque d_1 (rotor 1) ou bien au disque d_2 (rotor 2).

- *Masse de balourd sur le disque 1*

Le modèle est décrit par les équations (3.85) et (3.86) avec les forces données par les expressions (3.48) et (3.49). Les solutions sont sous les formes (3.69) et (3.70) ce qui donne :

$$Q_1 = \frac{m_1 * d \Omega^2 (k_2 - (m + a_1 + n a_2) \Omega^2)}{(k_1 - m \Omega^2)(k_2 - m \Omega^2) - (a_1 + n a_2)^2 \Omega^4} \quad (3.99)$$

$$Q_2 = \frac{m_1 * d \Omega^2 (k_1 + (m + a_1 + n a_2) \Omega^2)}{(k_1 - m \Omega^2)(k_2 - m \Omega^2) - (a_1 + n a_2)^2 \Omega^4} \quad (3.100)$$

Comme $Q_1 \neq Q_2$, les orbites décrites par un point sur l'axe (O, Y_0) des rotors sont des ellipses. Les vitesses critiques correspondant sont :

$$(k_1 - m \Omega^2)(k_2 - m \Omega^2) - (a_1 + n a_2)^2 \Omega^4 = 0 \quad (3.101)$$

C'est la même équation que (3.97). Les deux fréquences solutions de (3.97) donnent les vitesses critiques. Les réponses due à la masse de balourd pour $n = -5$, -1 et 5 , respectivement, sont présentées par les figures (3.13), (3.14) et (3.15).

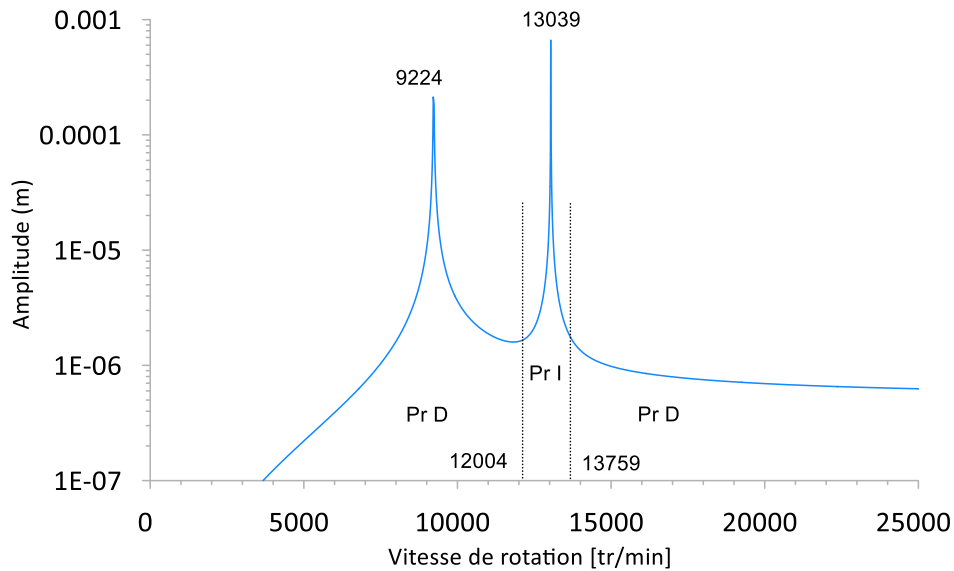


Fig. 3.13 : Réponse due à la masse du balourd, $n = -5$

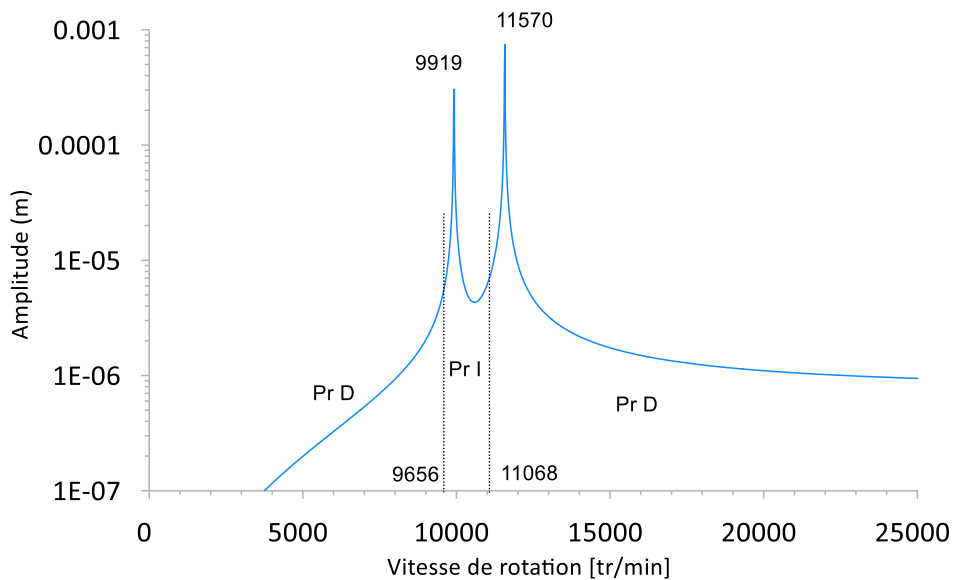


Fig. 3.14 : Réponse due à la masse du balourd, $n = -1$

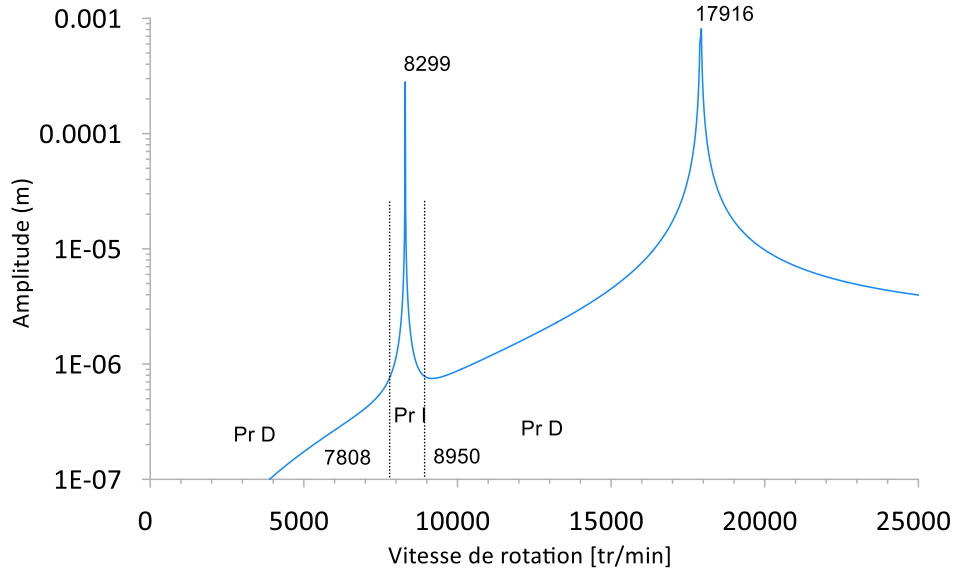


Fig. 3.15 : Réponse due à la masse du balourd, $n = 5$

- *Masse de balourd sur le disque 2*

Ici les forces sont données par les expressions (3.50) et (3.51), et les solutions sont aussi sous les formes (3.69) et (3.70), ce qui donne :

$$Q_1 = \frac{m_2 * d n^2 \Omega^2 (k_2 - (mn + a_1 + na_2)n\Omega^2)}{(k_1 - mn^2\Omega^2)(k_2 - mn^2\Omega^2) - (a_1 + na_2)^2 n^2 \Omega^4} \quad (3.102)$$

$$Q_2 = \frac{m_2 * d n^2 \Omega^2 (k_1 - (mn + a_1 + na_2)n\Omega^2)}{(k_1 - mn^2\Omega^2)(k_2 - mn^2\Omega^2) - (a_1 + na_2)^2 n^2 \Omega^4} \quad (3.103)$$

Comme $Q_1 \neq Q_2$, les orbites sont des ellipses. Les vitesses critiques correspondant sont :

$$(k_1 - mn^2\Omega^2)(k_2 - mn^2\Omega^2) - (a_1 + na_2)^2 n^2 \Omega^4 = 0 \quad (3.104)$$

C'est la même équation que (3.98). Les deux solutions de (3.98) sont les vitesses critiques. Les réponses dus à la masse de balourd pour $n = -5$, -1 et 5 , respectivement, sont présentées par les figures (3.16), (3.17) et (3.18).

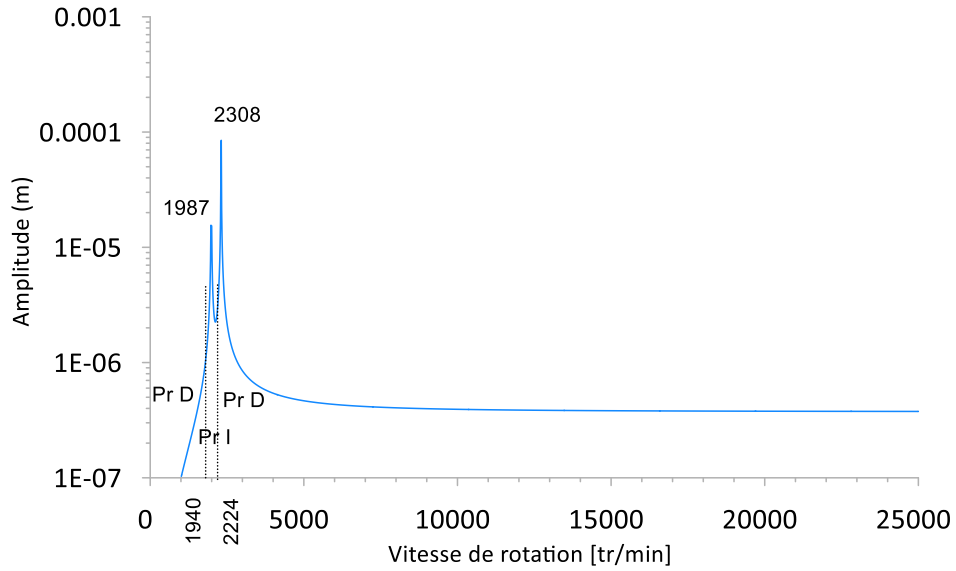


Fig. 3.16 : Réponse due à la masse du balourd, $n = -5$

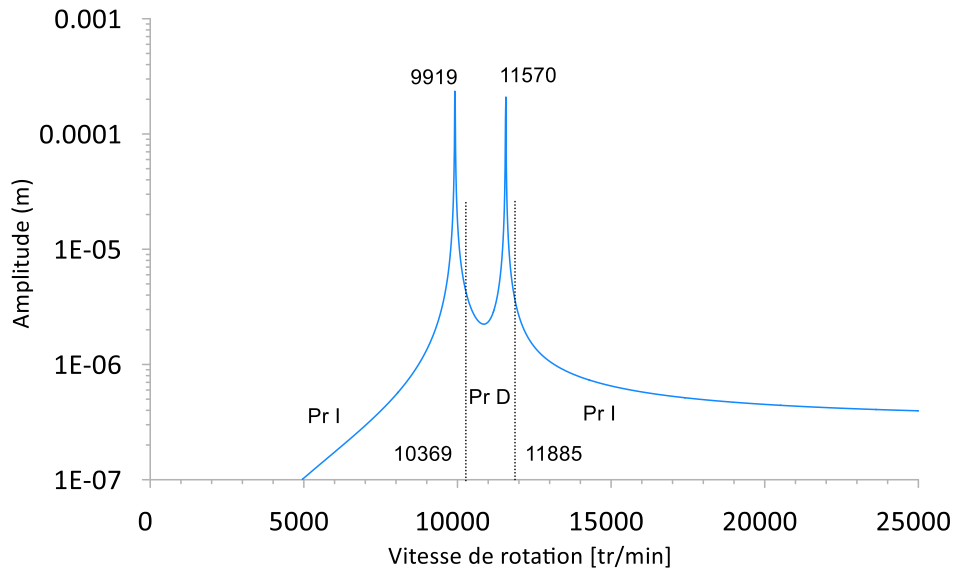


Fig. 3.17 : Réponse due à la masse du balourd, $n = -1$

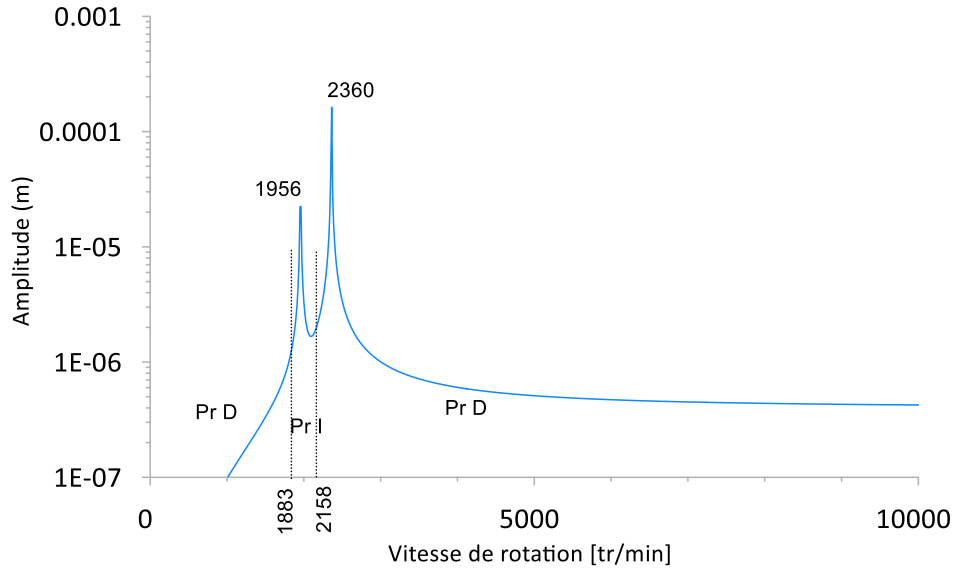


Fig. 3.18 : Réponse due à la masse du balourd, $n = 5$

3.4.3 Sens de la trajectoire

Comme dans le modèle est symétrique (Fig.3.9), le sens de la trajectoire est donné par l'expression (3.82) lorsque la masse du balourd se trouve sur le rotor 1. Les expressions (3.76), (3.77), (3.99) et (3.100) qui donnent :

$$O\vec{A} \wedge \frac{dO\vec{A}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1 Q_2 \Omega dt \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

et le signe de $Q_1 Q_2 \Omega dt$ est celui de $Q_1 Q_2$, qui est celui de

$$P = (k_2 - (m + a_1 + na_2)\Omega^2)(k_1 - (m + a_1 + na_2)\Omega^2) \quad (3.106)$$

Si $P > 0$, la précession est direct (Pr D), et si $P < 0$, la précession est inverse (Pr I), en termes de fréquence Ω_1 et Ω_2 telles que :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m+a_1+na_2}} \quad (3.107)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m+a_1+na_2}} \quad (3.108)$$

Nous avons une précession directe lorsque $\Omega < \Omega_1$ ou $\Omega_2 < \Omega$ et une précession inverse pour $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$. De plus, il est intéressant de savoir ce qui se passe aux vitesses critiques ω_1 et ω_2 . Comme les vitesses critiques sont des solutions de l'équation (3.97), l'expression devient :

$$P(\omega^2) = \omega^4(m^2 - (a_1 + na_2)^2) - (k_1 + k_2)m\omega^2 + k_1k_2 \quad (3.109)$$

est une quantité positive lorsque $\omega < \omega_1$ ou $\omega > \omega_2$. Si $0 < a_1 + na_2$, la valeur de $P(\omega^2)$ pour $\omega = \Omega$, qui est :

$$P(\Omega_1^2) = P\left(\frac{k_1}{m+a_1+na_2}\right) = \frac{k_1(a_1+na_2)(k_2-k_1)}{m+a_1+na_2} \quad (3.110)$$

est également une quantité positive. De plus, étant donné que :

$$P(\Omega_2^2) = P\left(\frac{k_2}{m+a_1+na_2}\right) = \frac{k_2(a_1+na_2)(k_1-k_2)}{m+a_1+na_2} \quad (3.111)$$

$P(\Omega_2^2)$ Est une quantité négative. Par conséquent, pour $n > -(a_1/a_2)$

$$\Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 \quad (\text{Figure 3.19}) \quad (3.112)$$

Le sens de la trajectoire est indiqué sur les figures (3.19) et (3.20).

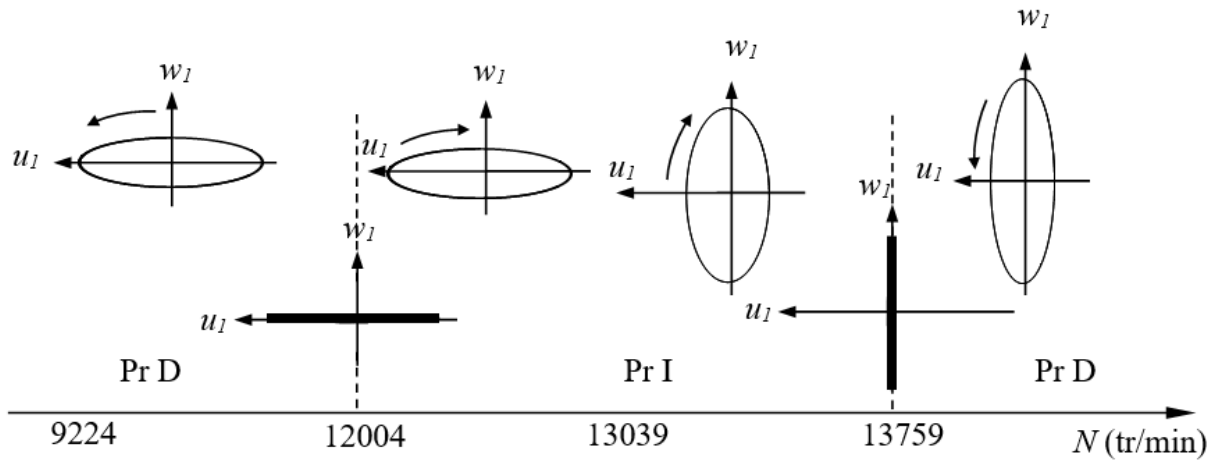


Fig. 3.19 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du palier élastique et type de précession, masse du balourd sur le disque 1, $n = -5$

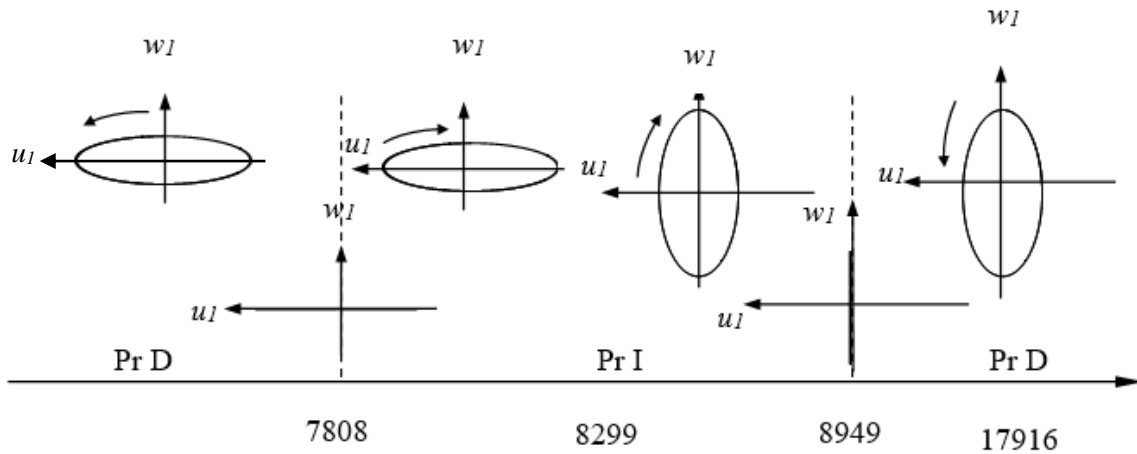


Fig. 3.20 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du palier élastique et type de précession, masse du balourd sur le disque 1, $n = 5$

Lorsque la masse du balourd se trouve sur le rotor 2, les équations (3.76), (3.77), (3.102) et (3.103) qui donne :

$$o\vec{A} \wedge \frac{dO\vec{A}}{dt} = \begin{bmatrix} 0 \\ n\Omega Q_1 Q_2 dt \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

et le signe de $n\Omega Q_1 Q_2 dt$ est celui de $n\Omega Q_1 Q_2$, qui est celui de :

$$P = n(k_2 - (mn + a_1 + na_2)n\Omega^2)(k_1 - (mn + a_1 + na_2)n\Omega^2) \quad (3.114)$$

Il convient maintenant de définir les fréquences Ω_1 et Ω_2 as comme étant :

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{n(mn+a_1+na_2)}} \quad (3.115)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{n(mn+a_1+na_2)}} \quad (3.116)$$

et il est également d'intérêt particulier de savoir ce qui se passe aux vitesses critiques ω_1 et ω_2 . Ces fréquences sont la solution de l'équation (3.98) est le signe de l'expression :

$$P(\omega^2) = \omega^4(m^2n^4 - n^2(a_1 + na_2)^2) - (k_1 + k_2)mn^2\omega^2 + k_1k_2 \quad (3.117)$$

Doit être pris en considération. On peut démontrer que :

$$P(\Omega_1^2) = P\left(\frac{k_1}{n(mn+a_1+na_2)}\right) = \frac{k_2(a_1+na_2)(k_1-k_2)}{n(mn+a_1+na_2)} \quad (3.118)$$

et

$$P(\Omega_2^2) = P\left(\frac{k_2}{n(mn+a_1+na_2)}\right) = \frac{k_2(a_1+na_2)(k_1-k_2)}{n(mn+a_1+na_2)} \quad (3.119)$$

Il peut être démontré en outre que si $n > -(a_1/a_2)$:

$$\Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 \quad (\text{Figure 3.21}) \quad (3.120)$$

Si $-a_1/a_2 < n < 0$:

$$\omega_1 < \Omega_1 < \omega_2 < \Omega_2 \quad (\text{Figure 3.22}) \quad (3.121)$$

et si $n > 0$:

$$\Omega_1 < \omega_1 < \Omega_2 < \omega_2 \quad (\text{Figure 3.23}) \quad (3.122)$$

Les expressions (3.120) et (3.122) sont les mêmes mais le sens de la trajectoire est différent : voir les figures (3.21), (3.22), (3.23).

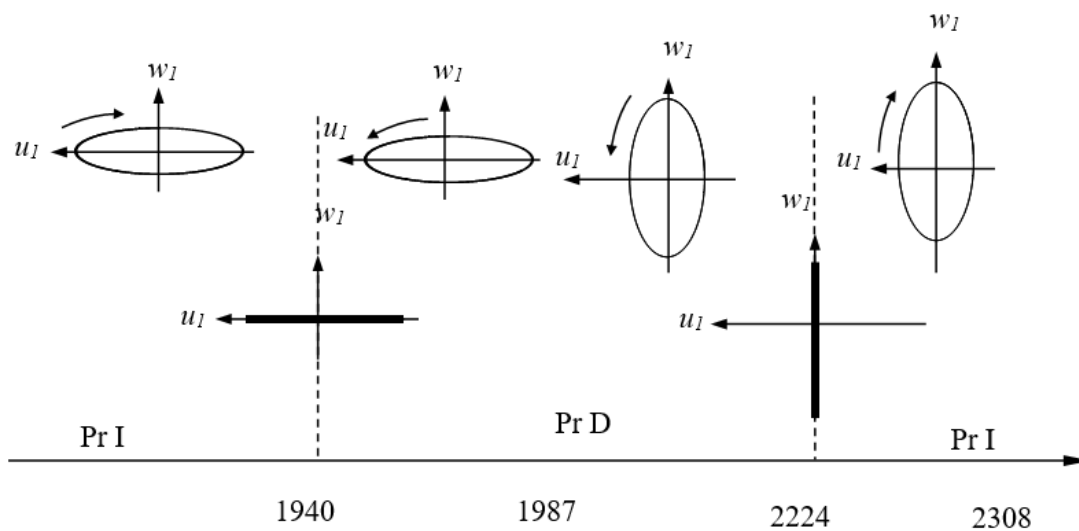


Fig. 3.21 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du palier élastique et type de précession, masse du balourd sur le disque 2, $n = -5$

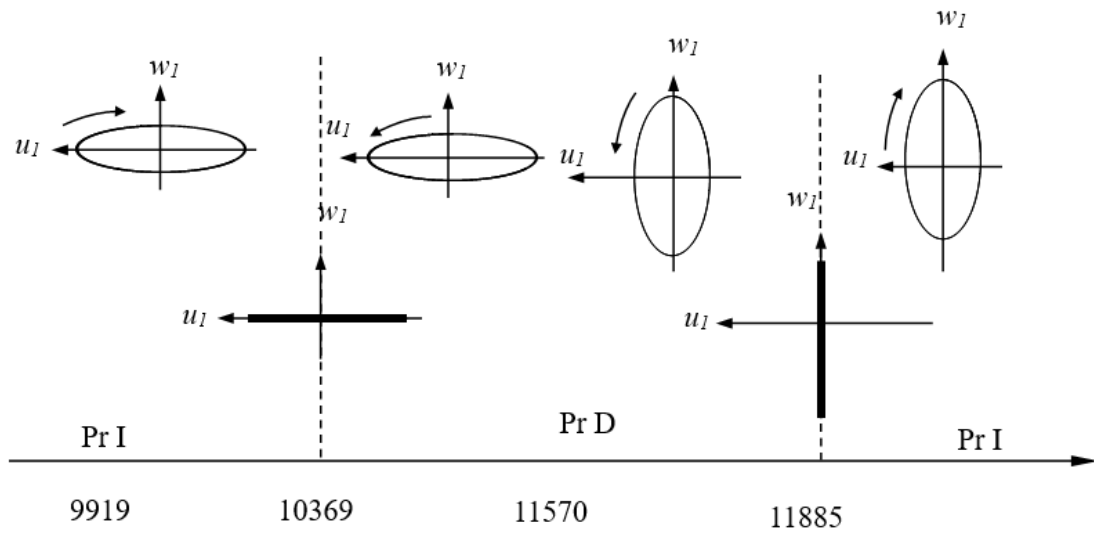


Fig. 3.22 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du palier élastique et type de précession, masse du balourd sur le disque 2, $n = -1$

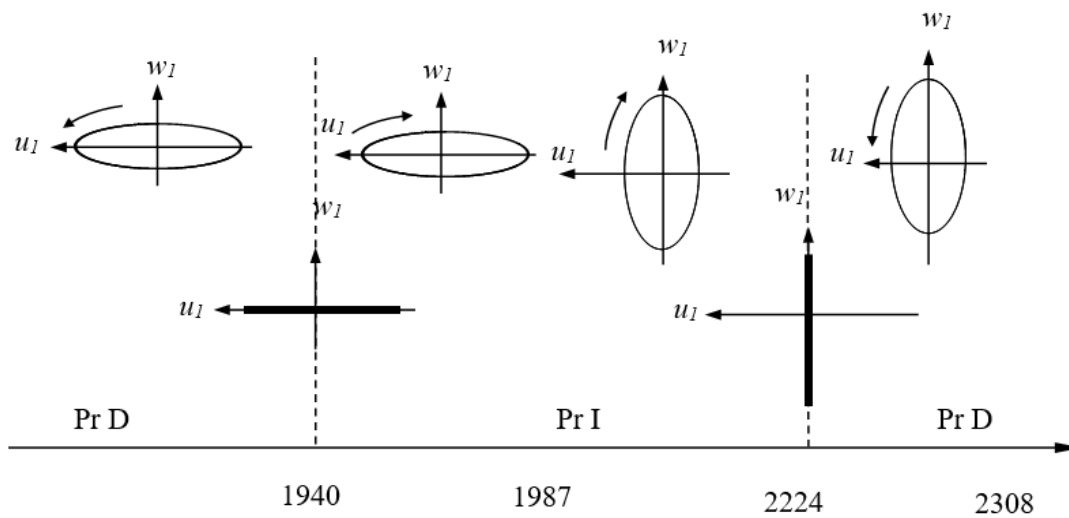


Fig. 3.23 : Trajectoire du centre géométrique du rotor au niveau du palier élastique et type de précession, masse du balourd sur le disque 2, $n = 5$

3.5 Conclusion

Deux modèles mathématiques simples de multi-rotors coaxiaux en flexion ont été présentés en se basant sur les différentes expressions des caractéristiques des éléments de rotors présentés dans le chapitre deux. Le premier modèle est symétrique et le deuxième est non symétrique. Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, nous avons déterminé les équations de mouvement en utilisant la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange. La programmation a été effectuée à l'aide du langage FORTRAN. Les résultats présentés concernent le diagramme de Campbell et la réponse due au défaut de balourd pour plusieurs rapports de vitesses.

- Le diagramme de Campbell permet de déterminer les vitesses critiques dues aux balourds ;
- La prise en compte de l'effet gyroscopique dû aux disques ou aux arbres rond les fréquences propres varient en fonction de la vitesse de rotation ;
- Les trajectoires (orbites) de l'axe des deux rotors sont circulaires dans le cas du modèle symétrique et elliptiques dans le cas du modèle non symétrique, cela est dû à la rigidité k_{zz} ;
- A l'arrêt, il y a une seule fréquence propre pour le modèle symétrique alors que pour le modèle non symétrique, il y en a deux ;
- Dans le modèle symétrique, la force de balourd sur un rotor excite un seul mode (un seul pic) alors que dans le modèle non symétrique excite aussi bien le mode direct qu'inverse (deux pics).

Conclusion générale

Conclusion générale

Ce travail avait pour objectif l'étude des principaux phénomènes de base intervenant en dynamique des multi-rotors coaxiaux en flexion, à l'aide de deux exemples simples mais réalistes, modélisés par des équations faciles à résoudre. Les principaux phénomènes de base étudiés sont : la variation des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation et l'effet des forces d'excitation dues aux masses de balourd.

Au premier chapitre, un bref historique sur la dynamique des rotors est présenté, suivi par les objectifs de la dynamique des rotors, les équations de mouvement en dynamique des rotors, le diagramme de Campbell, les vitesses critiques, l'instabilité des rotors et leurs critères ainsi que la distinction entre les vitesses critiques et les vitesses d'instabilité.

Au deuxième chapitre, les différentes caractéristiques des éléments de rotors à savoir, l'énergie cinétique du disque, l'énergie cinétique et de déformation élastique de l'arbre, le travail virtuel dû au palier et l'énergie cinétique du balourd sont présentés en détail pour les utilisés par la suite dans le chapitre trois.

Au troisième chapitre, l'essentielle de notre travail, nous avons présenté deux modèles mathématiques de multi rotors coaxiaux : symétrique et asymétrique. Sur la base de certaines hypothèses simplificatrices, nous avons déterminé les équations de mouvement des deux modèles en se basant sur la méthode de Rayleigh-Ritz et les équations de Lagrange. La programmation a été effectuée à l'aide du langage FORTRAN. Les principaux résultats présentés sont : l'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation appelée diagramme de Campbell et l'effet des forces d'excitation dues aux balourds ainsi que les trajectoires du centre du palier élastique pour le modèle asymétrique. A cause de l'absence de l'amortissement, la stabilité n'a pas été étudiée dans ce travail. Cette étude nous a permis d'extraire les conclusions suivantes :

- ✓ Le diagramme de Campbell est de grande importance en dynamique des rotors car, il permet de déterminer les vitesses critiques dues aux balourds ;

- ✓ L'évolution des fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation est due à l'effet gyroscopique dû aux disques, aux arbres et aux caractéristiques des paliers ;
- ✓ Dans le cas du modèle symétrique, les trajectoires de l'axe des deux rotors sont circulaires ;
- ✓ Dans le cas du modèle asymétrique, les trajectoires de l'axe des deux rotors sont elliptiques ou linéiques ;
- ✓ Dans le modèle symétrique, la force de balourd sur un rotor excite un seul mode qui dépend du signe de $(a_1 + n a_2)$ et du rotor contenant le balourd.
- ✓ Dans le modèle asymétrique, la force de balourd sur un rotor excite aussi bien le mode direct qu'inverse ;
- ✓ Le facteur $(a_1 + n a_2)$, présent dans le terme gyroscopique, a une grande influence aussi bien sur le sens de la précession que sur le sens de variations des fréquences propres directes et rétrogrades.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] W. A. Rankine, **On the centrifugal force of rotating shafts**, The Engineer (London), Vol. 27, 249, 1869.
- [2] G. Genta, "**Dynamic of rotating systems**", Mechanical Engineering series, Edition Springer, 2005.
- [3] I. Yukio, Y. Toshio, "**Linear and Nonlinear Rotordynamics: A Modern Treatment with Applications**", Second Edition, 2012.
- [4] S. Dunkerley, "**On the whirling and vibration of shaft**", Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 185, 279–359, 1894.
- [5] H. H. Jeffcott, "**The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance**", Philos. Mag. 37, 304–315, 1919.
- [6] N. Frederick, "Rotor Dynamics without Equations", 2nd Internat. Journal of COMADEM. 10 (2007) 2–10.
- [7] W. Campbell, "**The Protection of steam-turbine disk wheels from axial vibration**", Trans. ASME, Vol. 46, 31–160, 1924.
- [8] B. L. Newkirk, "**Shaft whipping**", General Electric Review, Vol. 27, 169-178, 1924.
- [9] A.L. Kimball, "**Internal friction theory of shaft whirling**", Gen. Electric Rev., 27 (4), 244–251, 1924.
- [10] B. L. Newkirk, H. D. Taylor, "**Shaft whipping due to oil action in journal bearings**", Gen. Electr. Rev., 28 (7), 559–568, 1925.
- [11] B. L. Hummel "**Kritische Drehzahlen als folge der Nachgiebigkeit der Schmiermittels im lager**", VDI-Forschift, 1926.
- [12] B. L. Newkirk, "**Whirling balance shafts**", 3rd ICAM, Stockholm, Proc. 3, 1931, pp. 105-110, 1930.
- [13] B.L. Newkirk, "**Shaft rubbing**", Mech. Eng., 48 (8), 830–832, 1926.
- [14] Y. Hori, "**A theory of oil whip**" Trans. ASME, J. Appl. Mech., 26 (2), 189–198, 1959.
- [15] A. Muszynska, "**Rotordynamics**", Boca Raton: Taylor & Francis, 2005.
- [16] J.S. Alford, "**Protecting Turbomachinery from Self-Excited Rotor Whirl**", Journal of Engineering for Power, Vol. 87, Ser. A., No. 4, October 1965
- [17] J.M. Vance, F.J. Laudadio "**Experiment Measurement of Alford's: Force in Axial Flow Turbomachinery**", Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, Texas A & M University, NASA Conf. Publ. 2250, 1982.
- [18] D.E. Franklin, J.C. Van Horne, "**Dynamic Analyses of an Over-Running Clutch Vibration Problem on a Gas Turbine Generator Set**", Proc. of the Eighth Machinery Dynamics Seminar, NRC Canada, Halifax, Nova Scotia, 1984.

- [19] I. Massey, “**Subsynchronous Vibration Problems in High-Speed**”, Multistage Centrifugal Pumps, 14th Texas A & M Turbomachinery Symposium, 1985.
- [20] T. Iwatsubo, B. Sheng , T. Matsumoto, “**An Experimental Study on the Static and Dynamic Characteristics of Pump Annular Seals**”, Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, NASA CP 3026, The Fifth Workshop at Texas A & M University, pp. 285–306, 1988.
- [21] D.W., Childs D. Elrod K. Hale, “**Annular Honeycomb Seals: Test Results for Leakage and Rotordynamic Coefficients, Comparison to Labyrinth and Smooth Configurations**”, Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, NASA CP 3026, The Fifth Workshop at Texas A&M University, pp. 143–160, 1988.
- [22] M.L. Adams T. Yang , S.E. Pace, “**A Seal Test Facility for the Measurement of Isotropic and Anisotropic Linear Rotordynamic Characteristics**”, Rotordynamic Instability Problems in High Performance Turbomachinery, NASA CP 3026, The Fifth Workshop at Texas A & M University, pp. 253–268, 1988.
- [23] F. Ambrosch, R. Schwabel, “**Method of and Device for Avoiding Rotor Instability to Enhance Dynamic Power Limit of Turbines and Compressors**”, United States Patent No. 4, p. 273, June 1981.
- [24] E.H. Miller, “**Rotor Stabilizing Labyrinth Seal for Steam Turbines**”, United States Patent No. 4, 1983.
- [25] R.G. Kirk, M. Simpson, “**Full Local Shop Testing of 1800 HP Gas Turbine Driven Centrifugal Compressor for Offshore Platform Service: Evaluation of Rotor Dynamics Performance**”, Proceedings of Symposium, Instability in Rotating Machinery, NASA CP 2409, Carson City, NV, 1985.
- [26] H.R. Wyssmann, “**Theory and Measurements of Labyrinth Seal Coefficients for Rotor Stability of Turbocompressors**”, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, Texas A & M University, NASA Conf. Publ. No. 2443, 1986.
- [27] R.D. Brown, A. Hart, “**A Novel Form of Damper for Turbomachinery**”, Rotordynamic Instability Problems in High-Performance Turbomachinery, Texas A & M University, NASA Conf. Publ. 2443, 1986.
- [28] A. Muszynska D.E. Bently J. Yuan, “**Simulation Result for the Oil Whip of a Rotor Supported in a Poorly Lubricated Bearing**”, BRDRC Report 3, 1998b.
- [29] **D.E. Bently, A. Muszynska, “Anti-Swirl Arrangements Prevent Rotor/Seal Instability, Trans. of the ASME Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design**”, Vol. 111, No. 2, , pp. 156–162, April 1989”,
- [30] V. John, Z. fouad, M. Brian, “**Machinery Vibration and Rotordynamics**”, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc, 2010.
- [31] M. Lalanne, G. Ferraris, “**Rotordynamics Prediction in Engineering**”, John Wiley & Sons Ltd, 2^{ème} edition, 1998.

- [32] B. Roland J. L. Feron, « **Diagnostic-maintenance-disponibilité des machines tournantes** », Collection Technologie, Masson Paris Milan Barcelone, 1995.
- [33] R. Bigret, J.L. Feron, "Diagnostic-maintenance-disponibilité des machines tournantes", Masson, 1995.
- [34] S. H. Crandall , “**Nonlinear Dynamics and Stochastic Mechanics**”, chapter Rotordynamics, pages 1–44. CRC Press, Boca Raton, 1995.

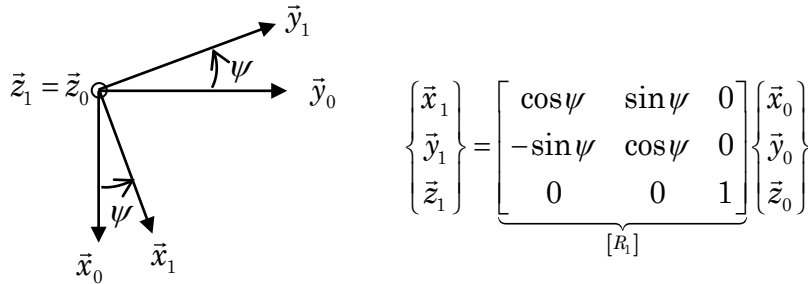
Annexe A
Détermination du vecteur rotation
du disque

Annexe A

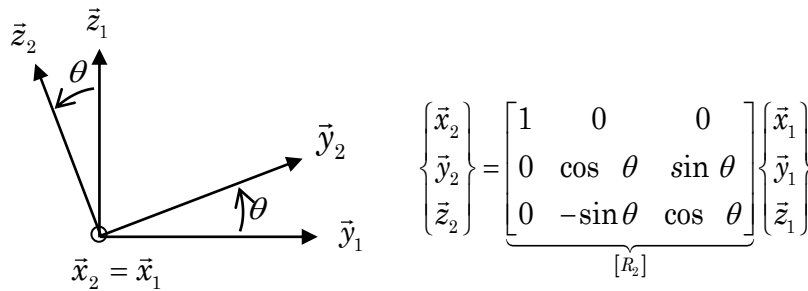
Détermination du vecteur rotation du disque

Le système d'axe et de coordonnées utilisés dans l'étude de la cinématique et dynamique des rotors en flexion est présenté sur la **Fig.2.1**.

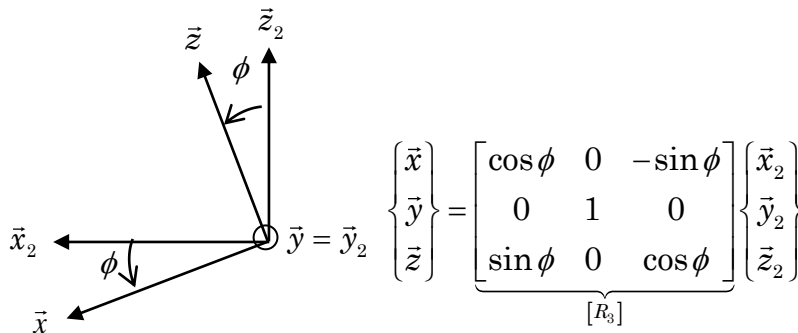
Première rotation : $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\text{rot}(\psi, Z_0)} (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$



Deuxième rotation : $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\text{rot}(\theta, \vec{x}_1)} (\vec{x}_2 = \vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$



Troisième rotation : $(\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2) \xrightarrow{\text{rot}(\phi, \vec{y}_2)} (\vec{x}, \vec{y} = \vec{y}_2, \vec{z})$



D'où le vecteur rotation :

$$\vec{\omega} (R/R_0) = \dot{\psi} \vec{z}_1 + \dot{\theta} \vec{x}_2 + \dot{\phi} \vec{y}$$

Expression de $\vec{\omega}(R/R_0)$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = [R_3] \begin{Bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_2 \\ \vec{y}_2 \\ \vec{z}_2 \end{Bmatrix} = [R_3]^T \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix}$$

D'où : $\vec{x}_2 = \cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{z}$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} &= [R_3][R_2] \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} = [R_2]^T [R_3]^T \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta & -\sin \theta \cos \phi \\ -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \\ \vec{z} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

D'où : $\vec{z}_1 = -\cos \theta \sin \phi \vec{x} + \sin \theta \vec{y} + \cos \theta \cos \phi \vec{z}$

Le vecteur rotation exprimé dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \vec{\omega}(R/R_0) &= \dot{\psi} [-\cos \theta \sin \phi \vec{x} + \sin \theta \vec{y} + \cos \theta \cos \phi \vec{z}] + \dot{\theta} [\cos \phi \vec{x} + \sin \phi \vec{z}] + \dot{\phi} \vec{y} \\ &= (\dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi) \vec{x} + (\dot{\phi} + \sin \theta) \vec{y} + (\dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi) \vec{z} \end{aligned}$$

D'où, on obtient :

$$\vec{\omega}(R/R_0) = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\dot{\Psi} \cos \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi \end{Bmatrix}_R$$

Annexe B
Détermination de la matrice d'inertie
du disque

Annexe B

Détermination de la matrice d'inertie du disque

La base finale $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est la base principale d'inertie. Dans cette base, la matrice d'inertie du disque est de la forme suivante :

$$I_C(D) = \begin{bmatrix} I_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{dz} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Les axes (o, \vec{x}) , (o, \vec{y}) et (o, \vec{z}) sont appelés les *axes principaux d'inertie*. Les moments I_{dx} , I_{dy} et I_{dz} sont appelés les *moments principaux d'inertie*. La masse et les inerties du disque sont :

$$M_d = \pi(R_2^2 - R_1^2)\rho h$$

$$I_{dx} = I_{dz} = \int_{M \in d} (y^2 + z^2) dm = \int_{M \in d} y^2 dm + \int_{M \in d} z^2 dm$$

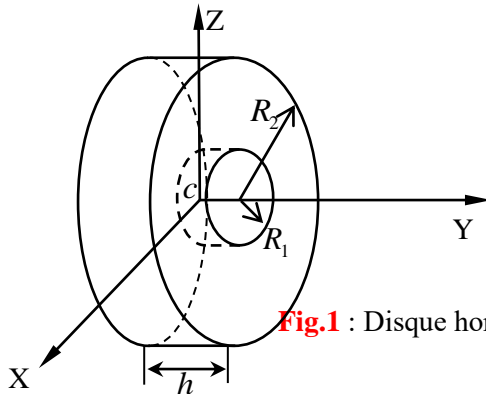


Fig.1 : Disque homogène, creux, et symétrique d'épaisse h

Avec

$$\int_{M \in d} y^2 dm = \frac{M_d}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{M_d h^2}{12}$$

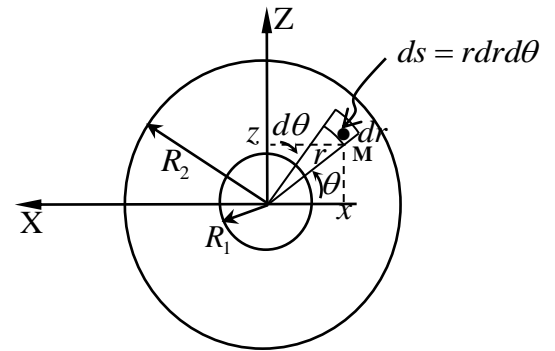
$$\int_{M \in d} z^2 dm = \frac{M_d}{s_d} \int_{M \in d} z^2 ds = \frac{M_d}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_{M \in d} (r \sin \theta)^2 r dr d\theta$$

$$= \frac{M_d}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{M_d(R_2^4 - R_1^4)}{4(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{M_d(R_1^2 + R_2^2)}{4}$$

D'où les moments d'inerties du disque :

$$I_{dx} = I_{dz} = \frac{M_d}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2)$$

$$I_{dy} = \int_{M \in d} (x^2 + z^2) dm = \frac{M_d(R_1^2 + R_2^2)}{2}$$



Annexe C
Énergie de déformation d'un arbre
en flexion

Annexe C

Énergie de déformation d'un arbre en flexion

1. Rappels d'élasticité

Considérons un arbre continue repéré dans une base orthonormée (x,y,z) , un point $B(x,y,z)$ de ce milieu continu qui subit, à un instant donné t , des déplacements (u^*,v^*,w^*) , des déformations ε_{ij} et des contraintes σ_{ij} . Ces grandeurs sont définies et liées par les relations suivantes :

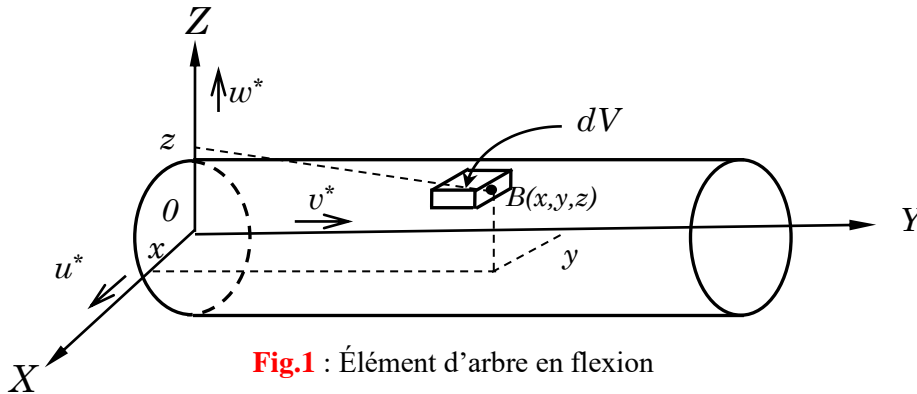


Fig.1 : Élément d'arbre en flexion

Déplacements :

$$\left. \begin{aligned} u^* &= u^*(x,y,z,t) \\ v^* &= v^*(x,y,z,t) \\ w^* &= w^*(x,y,z,t) \end{aligned} \right\} u_i^*, \quad i=1, 2, 3 \quad (\text{C.1})$$

Déformations :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (\text{C.2})$$

Contraintes : Pour un matériau isotrope, la loi de Hooke s'écrit :

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (\text{C.3})$$

Avec

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial z}$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ G = \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\} \text{Constantes de Lamé}$$

E : Module d'élasticité d'Young ν : Coefficient de Poisson

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & ; \quad i \neq j \\ 1 & ; \quad i = j \end{cases} \quad \text{Symbole de Kronecker}$$

2. Énergie de déformation par unité de volume

L'énergie de déformation par unité de volume est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} \quad (C.4)$$

Les contraintes sont liées aux déformations par les relations suivantes (loi de Hooke) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & & \\ \hline & & & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ & & & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} = [D] \{\varepsilon\} \quad (C.5)$$

Avec $[D]$ est la matrice des coefficients d'élasticité.

De Saint Venant a démontré que :

$$\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0 \quad (C.6)$$

Avec cette hypothèse, on peut analyser le comportement d'un élément d'arbre qui décrit par les déformations du centre de gravité de la section. La **figure 2** représente les contraintes non nulles sur la face d'un élément d'arbre. Avec les l'hypothèses définies par les relations (C.6), et en tenant compte des relations générales de l'élasticité, on montre que (on néglige les déformations dues à σ_{yz} et à σ_{yx}) :

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v^*}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \quad (C.7)$$

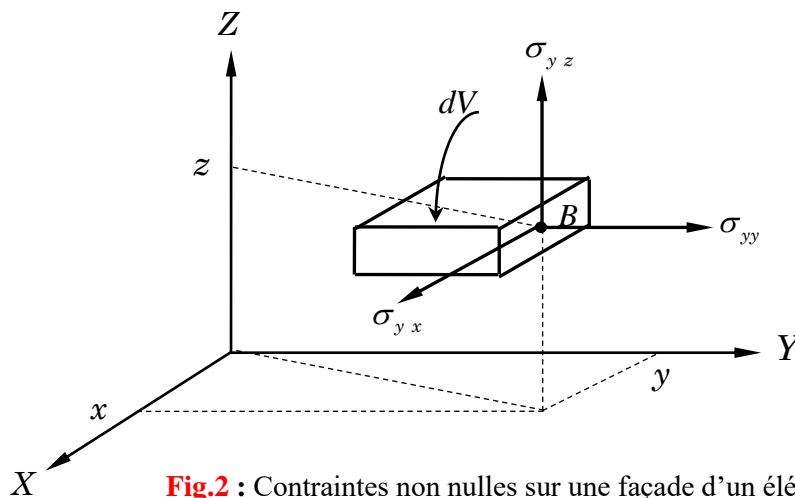


Fig.2 : Contraintes non nulles sur une façade d'un élément de volume de l'arbre en flexion

Avec

$\frac{\partial v^*}{\partial y}$: Résulte de la traction- compression suivant l'axe (O,Y)

$z \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2}$ et $x \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2}$: Résultent de la flexion dans les plans (O,Y,Z) et (O,X,Y)

L'énergie de déformation par unité de volume se simplifie à :

$$U = \frac{1}{2} \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} \quad (\text{C.8})$$

Selon l'hypothèse de Saint Venant, on peut démontrer que $(\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0 \rightarrow \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz} = -\nu \varepsilon_{yy})$:

$$\sigma_{yy} = E \varepsilon_{yy} \quad (\text{C.9})$$

3. Énergie de déformation totale de l'arbre

L'énergie de déformation totale de l'arbre est obtenue en intégrant sur son volume :

$$\begin{aligned} U_a &= \int_V U dV = \int_0^L \int_{s_a} U ds dy \\ &= \frac{1}{2} E \int_0^L S \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} \right)^2 dy + \frac{1}{2} E \int_0^L I_x \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2} E \int_0^L I_z \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 dy \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

Avec S est la section de l'arbre, I_x est le moment d'inertie de section par rapport à l'axe (O,X) ($I_x = \int_s z^2 ds$),

I_z est l'inertie de section par à l'axe (O,Z) , ($I_z = \int_s x^2 ds$).

Pour le cas le plus courant d'un arbre symétrique ($I_x = I_z = I$), l'énergie de déformation total se simplifie à :

$$U_a = \underbrace{\frac{EI}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy}_{\text{Energie de flexion}} + \underbrace{\frac{ES}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial v^*}{\partial y} \right)^2 dy}_{\text{Energie de trac-comp}} \quad (\text{C.11})$$

Annexe D
Programmes FORTRAN

Annexe D

Programmes FORTRAN

```
PROGRAM ROTOR 1
C -----
C   DYNAMIQUE D'UN ROTOR FLEXIBLE : MODELE SIMPLE DE MULTIROTORS COAXIAUX
C   MODELE 1 : ROTOR SYMETRIQUE
C -----
C   DECLARATION DES VARIABLES :

PARAMETER (NV=2001)
IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
IMPLICIT INTEGER (I-N)
REAL L,L1,L2,L3,L4,M,M1,M2,M1E,M2E,MB1,MB2,K,NMAX,I1,I2,IDX1,
*IDY1,IDX2,IDY2,MD1,MD2,N,NCRIT1,NCRIT2,LR2

C   FICHIERS DE RESULTATS :

OPEN(UNIT=10,FILE='RES.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=20,FILE='FREQPROP.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=30,FILE='REPBAL1.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=40,FILE='REPBAL2.DAT',STATUS='UNKNOWN')

C   DONNEES NUMERIQUES :

C   VALEUR DE PI
PI=4.*ATAN(1.)

C   LONGEUR DE L'ARBRE DU ROTOR 1(m)
L=0.4

C   RAYON DE L'ARBRE DU ROTOR 1(m)
R1=0.02

C   MASSE VOLUMIQUE DE L'ARBRE DU ROTOR 1(kg/m^3)
RO1=7800

C   MODULE DE YOUNG DE L'ARBRE DU ROTOR 1(N/m^2)
E1=2.E11

C   SECTION DE L'ARBRE 1(m^2)
S1=PI*R1**2

C   MOMENT QUADRATIQUE DE L'ARBRE 1 (m^4)
I1=(PI*R1**4)/4.
```

- C POSITION DU PALIER 1 DU ROTOR 2 (m)
 $L2=2.*L/5$
- C POSITION DU PALIER 2 DU ROTOR2 (m)
 $L4=2.*L/3$
- C POSITION DU DISQUE 1 (m)
 $L1=L/3.$
- C POSITION DU DISQUE 2 (m)
 $L3=8.*L/15.$
- C LONGUEUR DE L'ARBRE DU ROTOR 2(m)
 $LR2=L4-L2$
- C RAYON INTERIEUR DE L'ARBRE 2(m)
 $R3=0.03$
- C RAYON EXTERIEUR DE L'ARBRE 2(m)
 $R4=0.035$
- C MASS DE VOLUMIQUE DE L'ARBRE 2(kg/m³)
 $RO2=7800$
- C MODULE DE YOUNG DE L'ARBRE DU ROTOR 2 (N/m²)
 $E2=2.E11$
- C SECTION DE L'ARBRE 2(m²)
 $S2=PI*(R4**2-R3**2)$
- C MOMENT QUADRATIQUE DE L'ARBRE 2 (m⁴)
 $I2=PI*(R4**4-R3**4)/4.$
- C RAYON INTERIEUR DU DISQUE 1(m)
 $R1=0.02$
- C RAYON EXTERIEUR DU DISQUE 1(m)
 $R2=0.15$
- C EPAISSEUR DU DISQUE 1 (m)
 $H1=0.03$
- C MASSE DU DISQUE 1(KG)
 $MD1=PI*H1*RO1*(R2**2-R1**2)$
- C MOMENT D'INERTIE DU DISQUE 1(Kg m²)
 $IDX1=MD1*(3.*R1**2+3.*R2**2+H1**2)/12.$
 $IDY1=MD1*(R1**2+R2**2)/2.$

C RAYON INTERIEUR DU DISQUE 2(m)
R4=0.035

C RAYON EXTERIEUR DU DISQUE 2(m)
R5=0.1

C EPAISSEUR DU DISQUE 2 (m)
H2=0.02

C MASSE DU DISQUE 2 (m)
MD2=PI*H2*RO2*(R5**2-R4**2)

C MOMENT D'INERTIE DU DISQUE 2(Kg m^2)
IDX2=MD2*(3.*R4**2+3.*R5**2+H2**2)/12.
IDY2=MD2*(R4**2+R5**2)/2.

C MASSE DE BALOURD DANS LE DISQUE 1(kg)
MB1=6.6666E-5

C POSITION DE MB1 SUR LE DISQUE 1(m)
D1=0.15

C BALOURD DANS LE DISQUE 1 (Kgm)
B1=MB1*D1

C MASSE DE BALOURD DANS LE DISQUE 2 (kg)
MB2=1.E-4

C POSITION DE MB2 SUR LE DISQUE 2(m)
D2=0.1

C BALOURD DANS LE DISQUE 2 (Kgm)
B2=MB2*D2

C VALEUR DE RIGIDITE K (N/m)
K=(PI**4)*E1*I1/(2.*L**3)

C VALEUR DE LA MASSE M (kg)
M1=MD1*SIN(PI/3.)**2+IDX1*(PI/L)**2*COS(PI/3.)**2+RO1*S1*L/2.
*+RO1*I1*PI**2/(2.*L)

M2=SIN(PI*L4/L)**2*(MD2*((L3-L2)/(L4-L2))**2+IDX2*(1./(L4-L2))**2
*+RO2*S2*((L4-L2)/3.)+RO2*I2*(1./(L4-L2)))

M=M1+M2

```

C      VALEUR DE A1 ET A2 (kg)
      A1=IDY1*(PI/L)**2*COS(PI/3.)**2+2.*RO1*I1*(PI**2/(2.*L))

      A2=((IDY2+2.*RO2*I2*(L4-L2))*SIN(PI*L4/L)**2)/(L4-L2)**2

C      CALCUL DES FREQUENCES PROPRES EN FONCTION DE LA VITESSE DE ROTATION :
C      DIAGRAMME DE CAMPBELL
      WRITE (*,*)'ENTRER LE RAPPORT DE VITESSE : '
      READ(*,*)R

C      PAS DE VITESSE
      NMAX=20000.
      DELTAN=NMAX/FLOAT(NV-1)

C      FREQUENCES PROPRES A L'ARRET (Hz)
      OMEGA10=SQRT(K/M)
      OMEGA20=SQRT(K/M)
      F10=OMEGA10/(2.*PI)
      F20=OMEGA20/(2.*PI)

      WRITE (10,*)'FREQUENCES PROPRES A L'ARRET:'
      WRITE(10,*)'f10=',F10,'Hz', ' f20=',F20,'Hz'
      DO 10 I=2,NV
      N=FLOAT(I-1)*DELTAN
      OMEG=PI*N/30.

      AA1=((A1+R*A2)**2*OMEG**2)/(2.*M**2)
      AA2=(4.*M**2*OMEGA10**2)/((A1+R*A2)**2*OMEG**2)
      OMEGA1=SQRT(OMEGA10**2+AA1*(1.-SQRT(1.+AA2)))
      OMEGA2=SQRT(OMEGA20**2+AA1*(1.+SQRT(1.+AA2)))
      F1=OMEGA1/(2.*PI)
      F2=OMEGA2/(2.*PI)
      WRITE(20,200)N,F1,F2,N/60.,ABS(R)*N/60.
200   FORMAT (5F15.3)

10     CONTINUE

C      CALCULE DES VITESSES CRITIQUES ET FREQUENCES PROPRES CORRESPONDANTES
      WRITE(10,*)'FREQUENCES PROPRES ET VITESSES CRITIQUES EN A ET B : '

      OMEGACRIT1=SQRT(K/(M-(A1+R*A2)))
      OMEGACRIT2=SQRT(K/(M+(A1+R*A2)))

      F11=OMEGACRIT1/(2.*PI)
      F22=OMEGACRIT2/(2.*PI)

      NCRIT1=30.*OMEGACRIT1/PI
      NCRIT2=30.*OMEGACRIT2/PI

```



```

WRITE(10,*)'EN A:f1=',F11,'Hz','; N1=',NCRIT1,'tr/min'
WRITE(10,*)'EN B:f2=',F22,'Hz','; N2=',NCRIT2,'tr/min'
WRITE(10,*)'FREQUENCES PROPRES ET VITESSES CRITIQUES EN C ET D:'

OMEGACRIT1=SQRT(K/(R*(M*R-(A1+R*A2))))
OMEGACRIT2=SQRT(K/(R*(M*R+(A1+R*A2))))

NCRIT1=30.*OMEGACRIT1/PI
NCRIT2=30.*OMEGACRIT2/PI

F11=OMEGACRIT1/(2.*PI)
F22=OMEGACRIT2/(2.*PI)

WRITE(10,*)'EN C:f1=',F11,'Hz','; N1=',NCRIT1,'tr/min'
WRITE(10,*)'EN D:f2=',F22,'Hz','; N2=',NCRIT2,'tr/min'

C    CALCUL DE LA REPONSE DE BALOURD SUR LE DISQUE 1
M1E=MB1*SIN(PI*L1/L)
DO 20 I=1,NV
N=FLOAT(I-1)*DELTAN
OMEG=PI*N/30.
Q1=ABS((M1E*D1*OMEG**2)/(K+(A1+R*A2-M)*OMEG**2))
WRITE(30,*) N,Q1

20   CONTINUE

C    CALCUL DE LA REPONSE DE BALOURD SUR LE DISQUE 2
M2E=MB2*((L3-L2)/(L4-L2))*SIN(PI*L4/L)
DO 30 I=1,NV
N=FLOAT(I-1)*DELTAN
OMEG=PI*N/30.
Q1=ABS((M2E*D2*R**2*OMEG**2)/(K+(A1+R*A2-R*M)*R*OMEG**2))
WRITE(40,*) N, Q1

30   CONTINUE

C    VITESSE CRITIQUE DUE AU BALOURD 1
OMEG1=SQRT(K/(M-(A1+R*A2)))
NCRIT1=30.*OMEG1/PI
WRITE(10,*)'VITESSE CRITIQUE DUE AU BALOURD 1=',NCRIT1

C    VITESSE CRITIQUE DUE AU BALOURD 2
OMEG2=SQRT(K/(R*(M*R-(A1+R*A2))))
NCRIT2=30.*OMEG2/PI
WRITE(10,*)'VITESSE CRITIQUE DUE AU BALOURD 2=',NCRIT2

STOP
END

```

```

PROGRAM ROTOR 2
C -----
C   DYNAMIQUE D'UN ROTOR FLEXIBLE : MODELE SIMPLE DE MULTIROTORS COAXIAUX
C   MODELE 2 : ROTOR NON SYMETRIQUE
C -----
C   DECLARATION DES VARIABLES

PARAMETER (NV=2001,NT=2001)
IMPLICIT REAL (A-H,O-Z)
IMPLICIT INTEGER (I-N)

REAL L,L1,L2,L3,L4,M,M1,M2,M1E,M2E,MB1,MB2,K,KZZ,K1,K2,NMAX,I1,I2
*,IDX1,IDY1,IDX2,IDY2,MD1,MD2,N,N1,N2,NCRIT1,NCRIT2,LR2,NUM1,NUM2

C   FICHIERS DE RESULTATS

OPEN(UNIT=10,FILE='RES.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=20,FILE='FREQPROP.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=30,FILE='REPBAL1.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=40,FILE='REPBAL2.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=50,FILE='ORBIT1.DAT',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=60,FILE='ORBIT2.DAT',STATUS='UNKNOWN')

C   DONNEES NUMERIQUES

C   VALEUR DE PI
PI=4.*ATAN(1.)
C   LONGEUR DE L'ARBRE DU ROTOR 1(m)
L=0.4
C   RAYON DE L'ARBRE DU ROTOR 1(m)
R1=0.02
C   MASSE VOLUMIQUE DE L'ARBRE DU ROTOR 1(kg/m^3)
RO1=7800.
C   MODULE DE YOUNG DE L'ARBRE DU ROTOR 1(N/m^2)
E1=2.E11
C   SECTION DE L'ARBRE 1(m^2)
S1=PI*R1**2
C   MOMENT QUADRATIQUE DE L'ARBRE 1 (m^4)
I1=(PI*R1**4)/4.
C   POSITION DU PALIER 1 DU ROTOR 2 (m)
L2=2.*L/5.
C   POSITION DU PALIER 2 DU ROTOR2 (m)
L4=2.*L/3
C   POSITION DU DISQUE 1 (m)
L1=L/3.
C   POSITION DU DISQUE 2 (m)
L3=8.*L/15.

```

C LONGUEUR DE L'ARBRE DU ROTOR 2(m)
 $LR2=L4-L2$

C RAYON INTERIEUR DE L'ARBRE 2(m)
 $R3=0.03$

C RAYON EXTERIEUR DE L'ARBRE 2(m)
 $R4=0.035$

C MASS DE VOLUMIQUE DE L'ARBRE 2(kg/m³)
 $RO2=7800.$

C MODULE DE YOUNG DE L'ARBRE DU ROTOR 2 (N/m²)
 $E2=2.E11$

C SECTION DE L'ARBRE 2(m²)
 $S2=PI*(R4**2-R3**2)$

C MOMENT QUADRATIQUE DE L'ARBRE 2 (m⁴)
 $I2=PI*(R4**4-R3**4)/4.$

C RAYON INTERIEUR DU DISQUE 1(m)
 $R1=0.02$

C RAYON EXTERIEUR DU DISQUE 1(m)
 $R2=0.15$

C EPAISSEUR DU DISQUE 1 (m)
 $H1=0.03$

C MASSE DU DISQUE 1(KG)
 $MD1=PI*H1*RO1*(R2**2-R1**2)$

C MOMENT D'INERTIE DU DISQUE 1(Kg m²)
 $IDX1=MD1*(3.*R1**2+3.*R2**2+H1**2)/12.$
 $IDY1=MD1*(R1**2+R2**2)/2.$

C RAYON INTERIEUR DU DISQUE 2(m)
 $R4=0.035$

C RAYON EXTERIEUR DU DISQUE 2(m)
 $R5=0.1$

C EPAISSEUR DU DISQUE 2 (m)
 $H2=0.02$

C MASSE DU DISQUE 2 (m)
 $MD2=PI*H2*RO2*(R5**2-R4**2)$

C MOMENT D'INERTIE DU DISQUE 2(Kg m²)
 $IDX2=MD2*(3.*R4**2+3.*R5**2+H2**2)/12.$
 $IDY2=MD2*(R4**2+R5**2)/2.$

C MASSE DE BALOURD DANS LE DISQUE 1(kg)
 $MB1=6.6666E-5$

C POSITION DE MB1 SUR LE DISQUE 1(m)
 $D1=0.15$

C BALOURD DANS LE DISQUE 1 (Kgm)
 $B1=MB1*D1$

C MASSE DE BALOURD DANS LE DISQUE 2 (kg)
 $MB2=1.E-4$

C POSITION DE MB2 SUR LE DISQUE 2(m)
 $D2=0.1$

C BALOURD DANS LE DISQUE 2 (Kgm)
 $B2=MB2*D2$

```

C      VALEUR DE RIGIDITE K (N/m)
      K=(PI**4)*E1*I1/(2.*L**3)
C      RIGIDITE KZZ DU PALIER ELASTIQUE (N/m)
      KZZ=8.E+6
C      CALCUL DES RIGIDITES K1 ET K2 (N/m)
      K1=K
      K2=K+KZZ*SIN(PI*L4/L)**2

C      VALEUR DE LA MASSE M (kg)
      M1=MD1*SIN(PI/3.)**2+IDX1*(PI/L)**2*COS(PI/3.)**2+RO1*S1*L/2.
      *+RO1*I1*PI**2/(2.*L)
      M2=SIN(PI*L4/L)**2*(MD2*((L3-L2)/(L4-L2))**2+IDX2*(1./(L4-L2))**2
      *+RO2*S2*((L4-L2)/3.)+RO2*I2*(1./(L4-L2)))
      M=M1+M2
C      VALEUR DE A1 ET A2 (kg)
      A1=IDY1*(PI/L)**2*COS(PI/3.)**2+2.*RO1*I1*(PI**2/(2.*L))
      A2=((IDY2+2.*RO2*I2*(L4-L2))*SIN(PI*L4/L)**2)/(L4-L2)**2

C      CALCUL DES FREQUENCES PROPRES EN FONCTION DE LA VITESSE DE ROTATION:
C      DIAGRAMME DE CAMPBELL
      WRITE (*,*)'ENTRER LE RAPPORT DE VITESSE R='
      READ(*,*)R

C      PAS DE VITESSE
      NMAX=20000.
      DELTAN=NMAX/FLOAT(NV-1)

C      FREQUENCES PROPRES A L'ARRET (Hz)
      OMEGA10=SQRT(K1/M)
      OMEGA20=SQRT(K2/M)
      F10=OMEGA10/(2.*PI)
      F20=OMEGA20/(2.*PI)

      WRITE (10,*)'FREQUENCES PROPRES A L"ARRET:'
      WRITE(10,*)'f10=',F10,'Hz', ' f20=',F20,'Hz'

      DO 10 I=2,NV
      N=FLOAT(I-1)*DELTAN
      OMEG=PI*N/30.

      AA1=(OMEGA10**2+OMEGA20**2)/2.
      AA2=((A1+R*A2)**2*OMEG**2)/(2.*M**2)
      AA3=OMEGA10**2*OMEGA20**2
      OMEGA1=SQRT(AA1+AA2-SQRT((AA1+AA2)**2-AA3))
      OMEGA2=SQRT(AA1+AA2+SQRT((AA1+AA2)**2-AA3))

      F1=OMEGA1/(2.*PI)
      F2=OMEGA2/(2.*PI)

```

```
WRITE(20,200)N,N/60.,ABS(R)*N/60.,F1,F2

200  FORMAT (5F15.3)

10   CONTINUE

C    CALCUL DES VITESSES CRITIQUES ET FREQUENCES PROPRES CORRESPONDANTES

WRITE(10,*)'FREQUENCES PROPRES ET VITESSES CRITIQUES EN A ET B:'

BB1=M*(K1+K2)
BB2=SQRT((K1+K2)**2*M**2-4.*K1*K2*(M**2-(A1+R*A2)**2))
BB3=2.*(M**2-(A1+R*A2)**2)

OMEGACRIT1=SQRT((BB1-BB2)/BB3)
OMEGACRIT2=SQRT((BB1+BB2)/BB3)

F11=OMEGACRIT1/(2.*PI)
F22=OMEGACRIT2/(2.*PI)

NCRIT1=30.*OMEGACRIT1/PI
NCRIT2=30.*OMEGACRIT2/PI

WRITE(10,*)'EN A:f1=',F11,'Hz','; Ncr1=',NCRIT1,'tr/min'
WRITE(10,*)'EN B:f2=',F22,'Hz','; Ncr2=',NCRIT2,'tr/min'

WRITE(10,*)'FREQUENCES PROPRES ET VITESSES CRITIQUES EN C ET D:'

BB1=(K1+K2)*M*R**2
BB2=SQRT((K1+K2)**2*M**2*R**4
*-4.*K1*K2*(M**2*R**4-R**2*(A1+R*A2)**2))
BB3=2.*(M**2*R**4-R**2*(A1+R*A2)**2)

OMEGACRIT1=SQRT((BB1-BB2)/BB3)
OMEGACRIT2=SQRT((BB1+BB2)/BB3)

F11=OMEGACRIT1/(2.*PI)
F22=OMEGACRIT2/(2.*PI)

NCRIT1=30.*OMEGACRIT1/PI
NCRIT2=30.*OMEGACRIT2/PI

WRITE(10,*)'EN C:f1=',F11,'Hz','; Ncr1=',NCRIT1,'tr/min'
WRITE(10,*)'EN D:f2=',F22,'Hz','; Ncr2=',NCRIT2,'tr/min'

C    CALCUL DE LA REPONSE DUE AU BALOURD SUR LE DISQUE 1
M1E=MB1*SIN(PI*L1/L)
```

```

DO 20 I=1,NV
N=FLOAT(I-1)*DELTAN

OMEG=PI*N/30.

DEN=(K1-M*OMEG**2)*(K2-M*OMEG**2)-(A1+R*A2)**2*OMEG**4
NUM1=M1E*D1*OMEG**2*(K2-(M+A1+R*A2)*OMEG**2)
NUM2=M1E*D1*OMEG**2*(K1-(M+A1+R*A2)*OMEG**2)

Q1=ABS(NUM1/DEN)
Q2=ABS(NUM2/DEN)
Q=SQRT(Q1**2+Q2**2)

WRITE(30,*) N,Q

20    CONTINUE

C    VITESSES DE CHANGEMENT DU TYPE DE PRECISSION (BALOURD SUR LE DISQUE 1)

OMEGA1=SQRT(K1/(M+A1+R*A2))
OMEGA2=SQRT(K2/(M+A1+R*A2))

N1=30.*OMEGA1/PI
N2=30.*OMEGA2/PI

WRITE(10,*)'VITESSES DE CHANGEMENT DU TYPE DE PRECISSION
*(BALOURD SUR LE DISQUE 1)'
WRITE(10,*)'N1=',N1,'tr/min','; N2=',N2,'tr/min'

C    CALCUL DE LA REPONSE DUE AU BALOURD SUR LE DISQUE 2
M2E=MB2*((L3-L2)/(L4-L2))*SIN(PI*L4/L)

DO 30 I=1,NV
N=FLOAT(I-1)*DELTAN

OMEG=PI*N/30.

DEN=(K1-M*R**2*OMEG**2)*(K2-M*R**2*OMEG**2)
*-(A1+R*A2)**2*R**2*OMEG**4
NUM1=M2E*D2*R**2*OMEG**2*(K2-(M*R+A1+R*A2)*R*OMEG**2)
NUM2=M2E*D2*R**2*OMEG**2*(K1-(M*R+A1+R*A2)*R*OMEG**2)

Q1=ABS(NUM1/DEN)
Q2=ABS(NUM2/DEN)
Q=SQRT(Q1**2+Q2**2)

WRITE(40,*) N, Q

30    CONTINUE

```

C VITESSES DE CHANGEMENT DU TYPE DE PRECISSION (BALOURD SUR LE DISQUE 2)

```
OMEGA1=SQRT(K1/(R*(M*R+A1+R*A2)))
OMEGA2=SQRT(K2/(R*(M*R+A1+R*A2)))
```

```
N1=30.*OMEGA1/PI
N2=30.*OMEGA2/PI
```

```
WRITE(10,*)'VITESSES DE CHANGEMENT DU TYPE DE PRECISSION
*(BALOURD SUR LE DISQUE 2)'
WRITE(10,*)'N1=',N1,'tr/min','; N2=',N2,'tr/min'
```

C TRAJECTOIRE DU CENTRE DE TOURILLON AU NIVEAU DU PALIER ELASTIQUE

```
N=14100.
OMEG=PI*N/30.
TMAX=0.01
DELTAT=TMAX/FLOAT(NT-1)
```

C BALOURD SUR LE DISQUE 1:

```
DEN=(K1-M*OMEG**2)*(K2-M*OMEG**2)-(A1+R*A2)**2*OMEG**4
NUM1=M1E*D1*OMEG**2*(K2-(M+A1+R*A2)*OMEG**2)
NUM2=M1E*D1*OMEG**2*(K1-(M+A1+R*A2)*OMEG**2)
Q1=NUM1/DEN
Q2=NUM2/DEN
```

```
DO 40 IT=1,NT
T=FLOAT(IT-1)*DELTAT
```

```
QQ1=Q1*SIN(OMEG*T)
QQ2=Q2*COS(OMEG*T)
```

```
U1=QQ1*SIN(PI*L4/L)
W1=QQ2*COS(PI*L4/L)
```

```
WRITE(50,*) T,U1,W1
```

40 CONTINUE

C BALOURD SUR LE DISQUE 2:

```
DEN=(K1-M*R**2*OMEG**2)*(K2-M*R**2*OMEG**2)
* -(A1+R*A2)**2*R**2*OMEG**4
NUM1=M2E*D2*R**2*OMEG**2*(K2-(M*R+A1+R*A2)*R*OMEG**2)
NUM2=M2E*D2*R**2*OMEG**2*(K1-(M*R+A1+R*A2)*R*OMEG**2)
```

Q1=NUM1/DEN

Q2=NUM2/DEN

DO 50 IT=1,NT

T=FLOAT(IT-1)*DELTAT

QQ1=Q1*SIN(R*OMEG*T)

QQ2=Q2*COS(R*OMEG*T)

U1=QQ1*SIN(PI*L4/L)

W1=QQ2*COS(PI*L4/L)

WRITE(60,*) T,U1,W1

50 CONTINUE

STOP

END