

**Université 8 mai 1945 – Guelma**  
**Faculté des Sciences et de la Technologie**  
**Département de Génie Mécanique**



**Mémoire de fin d'étude pour  
L'obtention de Diplôme de Master**

**Option : Construction Mécanique**

**Présenté par : FREINE RANDA**

=====

**ETUDE DES EFFETS DE MESALIGNEMENT ET  
DES PARAMETRES GEOMETRIQUES SUR LE  
COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES PALIERS  
HYDRODYNAMIQUES**

=====

Sous la Direction de : **Pr. BOUCHERIT Hamid**

---

**JUIN 2022 - 2023**

---

## *Remerciements*

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, monsieur **BOUCHERIT Hamid**. Je la remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je désire aussi remercier les professeurs de l'université de Guelma département Génie Mécanique, qui m'ont fourni les outils nécessaires à la réussite de mes études universitaires.

Enfin, je remercie tout le personnel technique et administratif du département de Génie Mécanique.

Je remercie tous ceux qui m'ont aidé de loin ou de près à l'aboutissement de ce travail.

## *Dédicaces*

Je dédie ce travail à :

Mon père *FREINE Salah* qui m'a aidé à devenir ce que je suis aujourd'hui, que DIEU le garde et le protège ;

Ma mère *TABOULA Nawal* qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, que DIEU la garde ;

Mes sœurs *Imane ; Hadil ; Zeyneb* , symbole de tendresse et de fidélité ;

Mes bien chères amies SURTOUT *.ZEREG Hiba*

Merci de m'encourager et d'être à mes côtés  
dans mes moments difficiles

## RESUME

*L'étude théorique et numérique proposée vise à prédire l'impact de défaut géométrique du mésalignement sur le comportement dynamique linéaire et non linéaire des paliers hydrodynamiques.*

*La solution du problème en régime dynamique non linéaire a nous conduit de résoudre simultanée de l'équation de Reynolds dont l'inconnue principale est la pression dans le film lubrifiant et les équations du mouvement de l'arbre pour déterminer la trajectoire du centre de l'arbre dans le palier.*

*La présence de défaut géométrique du mésalignement de l'arbre permet d'engendrer des avaries dans la grande majorité des paliers fluides des machines tournantes au moment de leur fonctionnement dont l'intensité de cette détérioration dépend de type et de degré de mésalignement.*

*L'étude paramétrique menée dans cette investigation a montré en évidence d'une part, les effets non négligeable de défaut géométrique du mésalignement sur les performances statiques et dynamiques des paliers fluides et d'autre part, le défaut de mésalignement conduit à une diminution très importante de l'épaisseur minimale du film à l'une d'extrémité du palier au cours du fonctionnement qui permet de provoquer le risque de contact entre l'arbre et le coussinet (métal-métal) et d'avaries par rupture du film d'huile des palier fluides des machines tournantes.*

**Mots clés :** *Paliers fluides, Défaut géométrique du mésalignement, Equation de Reynolds, Lubrification hydrodynamique.*

## Abstract

The proposed theoretical and numerical study aims to predict the impact of geometric defect of misalignment on the linear and nonlinear dynamic behavior of hydrodynamic bearings.

The solution of the problem in nonlinear dynamic regime has led us to solve simultaneously the Reynolds equation whose main unknown is the pressure in the lubricant film thickness and the equations of motion of shaft to determine the trajectory of the center of shaft in the journal bearing.

The presence of the geometric misalignment defect of shaft causes damage to the vast majority of journal bearings of rotating machines during their operation, the intensity of this deterioration mainly depends on the type and degree of misalignment.

The parametric study in this investigation has clearly shown, on the one hand, the non-negligible effects of the geometric misalignment defect on the static and dynamic performances of the journal bearings and, on the other hand, the misalignment defect leads to a significant reduction of the minimum film thickness at one end of the journal bearing during operation which can cause the risk of contact metal-metal and damage by rupture oil film of the journal bearings of rotating machines.

Keywords : Fluid journal bearings, Geometric misalignment defect, Reynolds equation, Hydrodynamic lubrication.

## ملخص

تهدف الدراسة النظرية والرقمية المقترحة إلى التنبؤ بتأثير الخلل الهندسي الناتج عن عيب اختلال العمود في المحمل على السلوك الديناميكي الخطي وغير الخطي للمحامل الهيدروديناميكية .

لقد قادنا حل المشكلة في النظام الديناميكي غير الخطي في وقت واحد إلى حل معادلة رينولدز ، والتي يعد المجهول الرئيسي فيها هو الضغط في غشاء التشحيم ومعادلات حركة العمود لتحديد مسار مركز العمود في المحمل.

يؤدي وجود عيب اختلال العمود في المحمل إلى تلف الغالبية العظمى من محامل السوائل للآلات الدوارة أثناء تشغيلها ، وتعتمد شدة هذا تلف بشكل أساسي على نوع ودرجة هذا الاختلال.

أظهرت الدراسة العددية التي تم إجراؤها في هذا العمل من ناحية الآثار التي لا يمكن إهمالها للعييب الهندسي الناتج عن اختلال العمود في المحمل على الأداء الثابت والديناميكي للمحامل الزيتية ، ومن ناحية أخرى يؤدي هذا العيب إلى انخفاض مهم للسمك الأدنى في أحد طرفي المحمل أثناء التشغيل مما يجعل من الممكن التسبب في خطر التلامس بين العمود والمحمل (معدن - معدن) وتلف محامل الآلات الدوارة بسبب توقف مرور الزيت فيها .

الكلمات المفتاحية : محامل الزيتية ، عيب اختلال العمود في المحمل ، معادلة رينولدز ، التزيت الهيدروديناميكي.

# TABLE DES MATIÈRES

- Introduction Générale	1
-------------------------	---

## Chapitre Un

### *Étude bibliographique succincte sur les paliers et leurs défauts*

1. INTRODUCTION	2
2. DIFFÉRENTES CLASSES DE SUPPORTS	2
2.1. Paliers de roulements	2
2.2. Paliers secs	3
2.3. Paliers poreux	3
2.4. Paliers magnétiques	4
2.5. Paliers et butées fluides	5
2.5.1. Paliers et butées hydrodynamiques	5
2.5.1.1. Paliers hydrodynamiques	5
2.5.1.2. Butées hydrodynamiques	6
a. Paliers à géométrie fixe	6
a. 1. Paliers cylindriques	6
a. 2. Palier à arc partiel	7
a. 3. Paliers multilobés	8
b. Paliers à géométrie variable	9
b. 1. Paliers à patins oscillants	9
2.5.1.3. Paliers à films amortisseurs (Squeeze Film Damper Bearings)	11
2.5.2. Paliers et butées hydrostatiques	12
2.5.2.1. Paliers hydrostatiques	12
2.5.3. Paliers et butées hybrides	13
3. DÉFAILLANCE ET DÉFAUX DANS LES PALIERS HYDRODYNAMIQUES	14
4. CONCLUSION	15

## Chapitre Deux

### *Équations générales de la lubrification par fluide newtonien, piézo-visqueux et barotrope*

1. INTRODUCTION	16
-----------------	----

<b>2. LOIS GENERALES DE LA LUBRIFICATION HYDRODYNAMIQUE PAR FLUIDE NEWTONIEN PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE</b>	<b>16</b>
2.1. Loi de conservation de la masse	17
2.2. Lois de conservation de la quantité de mouvement	17
<b>3. EQUATIONS DE MOUVEMENT D'UN FLUIDE NEWTONIEN PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPES</b>	<b>18</b>
3.1. Analyse dimensionnelle des équations du mouvement en film mince visqueux	18
3.2. Intégration des équations de Navier	20
<b>4. EXPRESSION DE TENSEUR DES CONTRAINTES ET DE TAUX DES DEFORMATIONS</b>	<b>22</b>
<b>5. DERIVATION DE L'EQUATION DE REYNOLDS POUR UN FLUIDE NEWTONIEN PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE EN REGIME ISOTHERME</b>	<b>23</b>
<b>6. EXPRESSION DE L'EQUATION DE REYNOLDS DANS LE CAS D'UN PALIER HYDRODYNAMIQUE LUBRIFIE PAR UN FLUIDE NEWTONIEN, PIEZOVISQUEUX ET BAROTROPE EN REGIME ISOTHERME</b>	<b>26</b>
6.1. Equations géométriques du film lubrifiant	28
6.2. Conditions aux limites	31
6.2.1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement du palier	31
6.2.2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant	31
<b>7. ECRITURE DE L'EQUATION DE REYNOLDS EN VARIABLES SANS DIMENSION</b>	<b>33</b>
<b>8. CONCLUSION</b>	<b>33</b>
<i>Références bibliographiques</i>	33

## **Chapitre Trois**

### *Analyse théorique et numérique de défaut de mésalignement sur le comportement dynamique linéaire d'un palier hydrodynamique*

<b>1. INTRODUCTION</b>	<b>34</b>
<b>2. ANALYSE DYNAMIQUE LINEAIRE DES PALIERS FLUIDES</b>	<b>35</b>
2.1. Méthode de perturbation	36
<b>3. ETUDE STATIQUE DU PALIER</b>	<b>37</b>
3.1. Portance hydrodynamique et angle de calage du palier	38
3-2. Puissance dissipée	38
3.3. Forces de frottement	39
3.4. Vitesses moyennes de l'écoulement et le débit de fuite	39
<b>4. ETUDE DYNAMIQUE LINEAIRE DU PALIER</b>	<b>40</b>
4.1. Coefficients de raideur et d'amortissement	40
4.2. Système en vibration libre : paramètres de stabilité (fréquence de fouettement et masse critique)	40

4.3. Système en vibrations forcées : réponse à un balourd résiduel	42
5. SCHEMA DE RESOLUTION DU PROBLEME	42
5.1. Solution statique	42
5.2. Méthode de résolution en régime dynamique	44
6. RESULTATS ET DISCUSSIONS	45
6.1. Validation du programme développé	45
6.2. Etude paramétrique	45
6.2.1. Effets de défaut de mésalignement sur la distribution de champs de pression	46
6.2.2. Effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur les performances statiques du palier	47
6.2.3. Effets de défaut de mésalignement sur les paramètres de stabilité du palier : masse critique et fréquence de fouettement	50
7. CONCLUSION	51
<i>Références bibliographies</i>	52

## Chapitre Quatre

### *Analyse théorique et numérique de défaut de mésalignement sur le comportement dynamique non linéaire des paliers hydrodynamiques*

1. INTRODUCTION	53
2. EQUATIONS DU PROBLEME DYNAMIQUE NON LINEAIRE	54
2.1. Equation de Reynolds en variables sans dimension	54
2.2. Equations de mouvement de l'arbre	55
2.2.1. Equations de mouvement en variables sans dimension	56
3. RESOLUTION DES EQUATIONS DE MOUVEMENT	56
4. RESOLUTION DE L'EQUATION DE REYNOLDS	57
5. ETUDE PARAMETRIQUE DE PROBLEME	58
5.1. Résultats et discussion	60
5.1.1. Effets de mésalignement sur les trajectoires du centre de l'arbre dans le Palier.	60
5.1.2. Effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur l'épaisseur minimale du film	64
6-CONCLUSION	67
<i>Références bibliographies</i>	67



<b>- Conclusion Générale</b>	<b>68</b>
<b>- Annexes</b>	<b>70</b>
<b>ANNEXE A : LOIS DE VARIATION VISCOSITE-PRESSION ET DENSITE-PRESSION</b>	<b>70</b>
<b>ANNEXE B : REPONSE D'UN PALIER HYDRODYNAMIQUE A UNE EXCITATION SYNCHROME DE TYPE BALOURD</b>	<b>74</b>

# LISTES DES FIGURES ET DES TABLEAUX

## CHAPITRE UN

<b>Figure I-1 :</b> <i>Paliers avec roulement en acier, inox et plastique</i> .....	3
<b>Figure I-2 :</b> <i>Palier lisse sec</i> .....	3
<b>Figure I-3 :</b> <i>Coupe schématique d'un palier poreux</i> .....	4
<b>Figure I-4 :</b> <i>Principe de fonctionnement d'un palier magnétique</i> .....	5
<b>Figure I-5 :</b> <i>Butée double effet</i> .....	6
<b>Figure I-6 :</b> <i>Butée simple effet</i> .....	6
<b>Figure I-7 :</b> <i>Schémas d'un palier lisse cylindrique</i> .....	6
<b>Figure I-8 :</b> <i>Section droite d'un palier lisse</i> .....	7
<b>Figure I-9 :</b> <i>Phases de travail d'un palier lisse</i> .....	7
<b>Figure I-10 :</b> <i>Schématisation d'un palier à arc partiel</i> .....	8
<b>Figure I-11 :</b> <i>Schématisation d'un palier à trois lobes</i> .....	8
<b>Figure I-12 :</b> <i>Photographie d'un palier à quatre patins oscillants</i> .....	9
<b>Figure I-13:</b> <i>Schématisation d'un palier à trois patins oscillants</i> .....	9
<b>Figure I-14 :</b> <i>Schéma de principe d'un palier à film amortisseur (SFD)</i> .....	10
<b>Figure I-15 :</b> <i>Palier hydrostatique à six alvéoles</i> .....	10
<b>Figure I-16 :</b> <i>Palier hydrostatique à alvéoles découplées et non découplées</i> .....	11
<b>Figure I-17 :</b> <i>Schéma d'un palier hydrostatique à trois alvéoles découplées</i> .....	11

## CHAPITRE DEUX

<b>Figure II-1:</b> <i>Schéma du contact lubrifié</i> .....	16
<b>Figure II-2:</b> <i>Schéma général d'un contact hydrodynamique</i> .....	18
<b>Figure II-3:</b> <i>Géométrie et cinématique d'un contact hydrodynamique</i> .....	21
<b>Figure II-4:</b> <i>Schémas d'un palier lisse cylindrique</i> .....	27
<b>Figure II-5 :</b> <i>Section droite du palier développé</i> .....	28
<b>Figure II-6 :</b> <i>Systèmes de coordonnées du palier fluide cylindrique</i> .....	28

<b>Figure II-7</b> : <i>Palier fluide hydrodynamique en mouvement (a) et au repos (b)</i> .....	29
<b>Figure II-8</b> : <i>configuration d'un palier mésaligné</i> .....	30
<b>Figure II-9</b> : <i>Présentation des zones active et inactive dans un palier hydrodynamique</i> .....	31
<b>Figure II-10</b> : <i>Conditions de Sommerfeld</i> .....	31
<b>Figure II-11</b> : <i>Conditions de Gûmbel</i> .....	32
<b>Figure II-12</b> : <i>Conditions de Reynolds</i> .....	32

## CHAPITRE TROIS

<b>Figure III-1</b> : <i>Géométrie et modélisation dynamique linéaire du palier</i> .....	35
<b>Figure III-2</b> : <i>Systèmes d'axes et notations</i> .....	36
<b>Figure III-3</b> : <i>Codage des régions active et inactive du demi-palier</i> .....	37
<b>Figure III-4</b> : <i>Maillage du film lubrifiant par la MDF (2D)</i> .....	43
<b>Figure III-5</b> : <i>Présentation du champ de pression statique adimensionné (<math>\epsilon_0 = 0.8</math>)</i> .....	47
<b>Figure III-6</b> : <i>Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique</i> .....	48
<b>Figure III-7</b> : <i>Variations de la puissance dissipée adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique</i> .....	49
<b>Figure III-8</b> : <i>Variations de l'angle de calage statique en fonction de l'excentricité relative statique</i> .....	49
<b>Figure III-9</b> : <i>Variations du débit de fuite moyen adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique</i> .....	50
<b>Figure III-10</b> : <i>Variations de la masse critique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique</i> .....	51
<b>Figure III-11</b> : <i>Variations de la fréquence de fouettement adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique</i> .....	51

<b>Tableau III-1:</b> <i>Comparaison de quelques performances statiques d'un palier de longueur finie (<math>R/L = 0.5</math>) lubrifié par fluide newtonien.....</i>	45
<b>Tableau III-2:</b> <i>Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement .....</i>	45

## CHAPITRE QUATRE

<b>Figure IV-1 :</b> <i>Schéma du système rotor - palier pour l'analyse dynamique non linéaire.....</i>	54
<b>Figure IV-2 :</b> <i>Section droite du palier et bilan des forces statiques et dynamique agissant sur l'arbre .....</i>	54
<b>Figure IV-3 :</b> <i>Configuration géométrique d'un palier mésaligné.....</i>	55
<b>Figure IV-4 :</b> <i>Organigramme du programme du calcul développé pour l'analyse dynamique non linéaire .....</i>	59
<b>Figure IV-5 :</b> <i>Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier pour , <math>\omega = 2000\text{rpm}</math> .....</i>	62
<b>Figure IV-6 :</b> <i>Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier en régime établi, pour <math>\omega = 4000\text{rpm}</math> .....</i>	63
<b>Figure IV-7 :</b> <i>Variations de l'épaisseur minimale de film lubrifiant dans les trois sections du palier, pour <math>\omega = 2000\text{rpm}</math> .....</i>	65
<b>Figure IV-8 :</b> <i>Variations de l'épaisseur minimale de film lubrifiant dans les trois sections du palier, pour <math>\omega = 4000\text{rpm}</math> .....</i>	66
<b>Tableau IV-1:</b> <i>Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier .....</i>	60

## NOMENCLATURES

$C$  : jeu radial du palier, (m)

$C_b$  : le jeu radial d'assemblage

$D_{ij}$  : tenseur des taux de déformation

$M_C$  : Masse critique adimensionnée

$e$  : excentricité de fonctionnement, (m)

$F_\varepsilon, F_\phi$  : Composantes de la portance hydrodynamique, (N)

$h$  : épaisseur du film lubrifiant, (m)

$\tilde{h}$  : épaisseur du film adimensionnée

$L$  : longueur du palier, (m)

$O_a$  : Centre de l'arbre,

$O_c$  : Centre du coussinet,

$O_i$  : Centre de courbure de lobe ,

$R_L$  : rayon de courbure,

$M_{rk}$  : tenseur des couples de contraintes

$e_{ijk}$  : tenseur de permutation d'ordre trois

$K_{ij}$  : tenseur du taux de rotation

$p$  : Pression dans le film lubrifiant, (Pa)

$\tilde{p}$  : Pression adimensionnée,

$R_a$  : Rayon de l'arbre, (m)

$R_c$  : Rayon du coussinet, (m)

$t$  : temps, (s)

$u, v, w$  : composantes de vecteur vitesse d'écoulement de lubrifiant, (m/s)

$u_{\text{moy}}, w_{\text{moy}}$  : vitesses moyennes de l'écoulement du fluide lubrifiant, (m/s)

$\tilde{U}_{\text{moy}}, \tilde{W}_{\text{moy}}$  : vitesses moyennes d'écoulement adimensionnées

$\tilde{W}_0$  : Portance hydrodynamique adimensionnée

$f_i$  : forces massiques

$\rho.f_i$  : forces volumiques

$T_0$  : température de référence ,

$\tau_{xy}$  et  $\tau_{zy}$  : contraintes de cisaillement visqueuses.

$\lambda$  et  $\mu$  : coefficients de Navier

$\mu_s$  : viscosité du solvant

$\mu$  : viscosité dynamique du fluide lubrifiant, (Pa.s)

$\varepsilon$  : Excentricité relative,  $\varepsilon = \left(\frac{e}{C}\right)$

$\Theta$  : Taux de dilatation cubique ( $\Theta = D_{kk}$ )

$\overline{\overline{\sigma}}(M)$  : tenseur des contraintes est symétrique ,

$\overline{\overline{D}}(M)$  : taux de déformation

$\delta_v$  : Mésalignement vertical

$\delta_h$  : Mésalignement horizontal

$\beta_i$  : amplitudes circonférentielle de lobe

$\phi$  : Angle de calage, (rad)

$\theta$  : Coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres

$\theta_s$  : Angle de cavitation, (rad)

$\omega$  : Vitesse angulaire de l'arbre (rad/s)

$\rho$  : Masse volumique du lubrifiant, (kg/m<sup>3</sup>)

$\rho_0$  : masse volumique de référence,

$\delta_{ij}$  : Symbole de Kronecker ou tenseur unité

$\Re$  : le nombre de Reynolds sans dimension,

## INTRODUCTION GENERALE

Actuellement, les machines tournantes et réductrices jouent un rôle vital dans la production. Ce rôle nous oblige à fournir des conditions favorables pour le bon fonctionnement de ces machines afin d'améliorer leur rendement en réduisant les pertes de puissance par frottement et de prévenir leur dysfonctionnement en augmentant leur durée de vie.

Les vibrations excessives des machines tournantes à grande vitesse équipées par des paliers fluides peuvent causer une perte appréciable de la production. Les paliers sont le siège des différents effets physiques et problèmes rencontrés tel que, le défaut de mésalignement. Le mésalignement dans les paliers fluides provient généralement de la déviation de l'arbre, déformation de l'arbre sous charge, défaut d'assemblage et de fabrication.

La présence de défaut de mésalignement engendre des dommages pratiquement dans tous les organes de guidage et les supports des machines tournantes et réductrices. En effet, le défaut de mésalignement constitue un problème majeur dans les machines tournantes et réductrices et la cause principale des pannes produites dans ces derniers, car elle influe directement sur la dégradation de fonctionnement de leurs organes, tels que, les paliers, les roulements, les engrenages.

Pour toutes ces raisons, le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier est considéré comme un problème majeur par les ingénieurs et donc a été le but de plusieurs chercheurs. L'objectif principal de notre investigation est de déterminer les effets de défaut de mésalignement sur le comportement dynamique des paliers fluides des machines tournantes.

Le manuscrit de ce présent travail contient une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale :

- Dans le premier chapitre, on va présenter d'une part une étude bibliographique sur les différents supports utilisés pour le guidage des lignes d'arbres des machines tournantes ainsi que une description des différents régimes de lubrification rencontrés dans les différents systèmes lubrifiés. Tandis que la deuxième partie a été réservée à une étude succincte sur les défauts rencontrés dans les paliers fluides.
- En chapitre deux, on va présenter les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus et l'écriture de l'équation de Reynolds en régime dynamique dans le cas d'un palier lubrifié par un fluide newtonien piezovisqueux et barotrope fonctionnant en régime permanent et isotherme.
- Dans le troisième chapitre, on va mettre en évidence l'influence de la présence de défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier d'une part sur les performances statiques, tels que la portance hydrodynamique, angle de calage, puissance dissipée et le débit moyen volumique d'écoulement de lubrifiant et d'autre part sur la stabilité de palier hydrodynamique.
- Le quatrième chapitre est réservé à l'étude théoriquement et numériquement de comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse mésaligné lubrifié par fluide newtonien afin de nous permettra la prédiction des effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur les variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps qui est l'un des paramètres le plus important dans la conception des paliers fluides des machines tournantes et réductrices.

# **Chapitre Un**

## **Etude bibliographique succincte sur les paliers et leurs défauts**

### **1. Introduction**

Tous les systèmes mécaniques, tels que les machines tournantes, les turbines, les moteurs, etc. comportent plus ou moins des paliers fluides. Les paliers sont des organes utilisés en construction mécanique pour supporter et guider, en rotation, des arbres de transmission, le choix d'un type de palier fluide est une décision qui doit être prise dans la première phase du processus de conception des machines. Dans la pratique, les principaux supports sont :

- paliers de roulements ;
  - paliers secs ;
  - paliers poreux ;
  - paliers magnétiques ;
  - paliers et butées fluides (*hydrodynamique, hydrostatique et hybride*).
- etc.

L'objet essentiel de ce chapitre est de présenter une bibliographie succincte les différents paliers fluides utilisés pour le guidage des lignes d'arbres des machines tournantes.

### **2. Différentes classes de supports**

#### **2.1. Paliers de roulements**

Dans un palier à roulements le glissement de l'arbre sur le coussinet est remplacé par le roulement de corps intermédiaires (*billes, rouleaux et aiguilles*) ce qui permet de supporter des charges plus fortes tout en réduisant l'usure et le frottement à cause de leur coefficient de frottement très faible au démarrage (*figure I-1*).

Les avantages et inconvénients des paliers à roulements sont :

##### **a) Avantages:**

- installation simple et facile à remplacer ;
- durée de vie prévisible ;
- possibilité de graissage à vie ;
- possibilité de supporter des charges combinées ;
- faible coût ;
- supportent mieux les interruptions temporaires de lubrification ;
- assurent un meilleur alignement radial et axial ;
- pas de phénomène de fouettement (*whirl*) ;
- présentent un faible couple au démarrage même à basse température.

##### **b) Inconvénients:**

- problèmes de fatigue plus importants ;
- faible capacité d'amortissement ;
- encombrement radial important ;
- générateur de bruits ;
- fréquence de rotation limitée ;
- diamètre nominal limité.





**Figure I-1 :** *Paliers avec roulement en acier, inox et plastique*

## 2.2. Paliers secs

Ce sont des paliers généralement constitués d'une matrice (*résine, métal, carbone*) imprégnée de graphite. Ces paliers sont utilisés sans apport extérieur de lubrifiant (*figure I-2*). Le frottement à sec est particulièrement dangereux pour les organes qui y sont soumis ; le dégagement de chaleur peut provoquer une amorce de fusion entre les surfaces en contact et aboutir au grippage, on ne les utilise que pour des systèmes fonctionnant rarement ou à vitesse réduite et faible charge et doivent être envisagés dans toute application où la présence et le maintien du film lubrifiant est impossible (*vide spatial, par exemple*).



**Figure I-2 :** *Palier lisse sec*

## 2.3. Paliers poreux

Les paliers à coussinet poreux sont dits auto-lubrifiants car c'est le coussinet et lui même qui imbibé d'huile, joue le rôle de réservoir de lubrifiant (*figure I-3*).

La couche auto-lubrifiée est constituée par une poudre frittée à haute température (*bronze, fer, cuivre*). Ces paliers comportent des pores remplis d'huile avec un volume qui représente de 16 à 36% du volume total. Dans un palier poreux, l'huile circule d'une part dans le jeu, circonférentiellement et axialement, et d'autre part dans le coussinet, de la zone de pression élevée vers la zone de basse pression (*figure I-3*), l'huile filtre au travers de la surface interne du coussinet du film vers le coussinet dans la zone de pression élevée du coussinet vers le film dans la zone de pression basse.

L'utilisation de ces paliers est limitée par la température de fonctionnement. Les avantages et les inconvénients de ce type de palier sont:

### a) Avantages :

- l'absence de l'alimentation du lubrifiant permet d'avoir un montage simple;
- faible coût de fabrication du coussinet.

### b) Inconvénients :

- ils ne supportent pas les grandes vitesses et les grandes charges;
- un couple de démarrage faible;
- ils nécessitent un grand couple au démarrage à des basses températures.

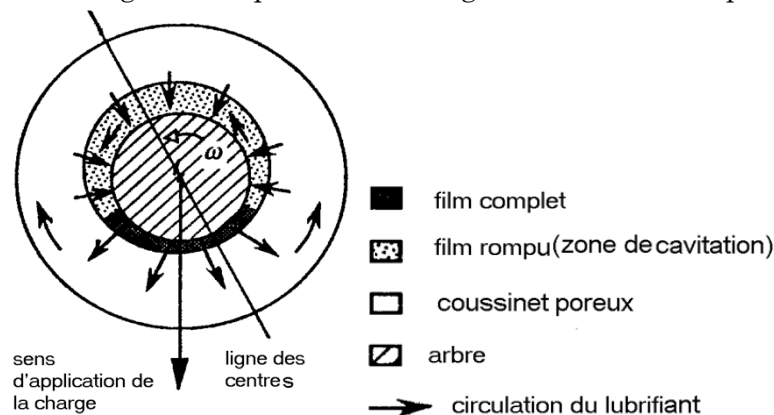


Figure I-3: Coupe schématique d'un palier poreux

## 2.4. Paliers magnétiques

Les paliers magnétiques permettent de supprimer tout contact entre un arbre et un bâti, d'éliminer les lubrifiants et tous les problèmes de frottement (figure I-4). Ces paliers ont une très grande précision de guidage, ils peuvent fonctionner dans le vide et ils sont utilisables dans une large gamme de températures (-200 °C à 450 °C) avec une dissipation d'énergie mécanique pratiquement nulle.

Les paliers magnétiques ne sont pas encore d'emploi courant, ils correspondent dans le cas où la présence d'un fluide lubrifiant ne se justifie pas, les pressions diamétrales sont faibles et les vitesses de rotation élevées (50000rpm).

Les avantages et les inconvénients de ce type de palier sont :

### a) Avantages :

- grande rigidité statique ;
- rigidité dynamique réglable permettant d'influencer la vitesse critique du rotor ;
- amortissement élevé utile pour éviter certains phénomènes d'instabilité ;
- position de l'axe de rotation réglable (*position nominale*);
- diagnostique permanent de la machine en fonctionnement ;
- réduction importante des pertes.

### b) Inconvénients:

- mise en œuvre coûteuse ;
- nécessité d'un système électronique.

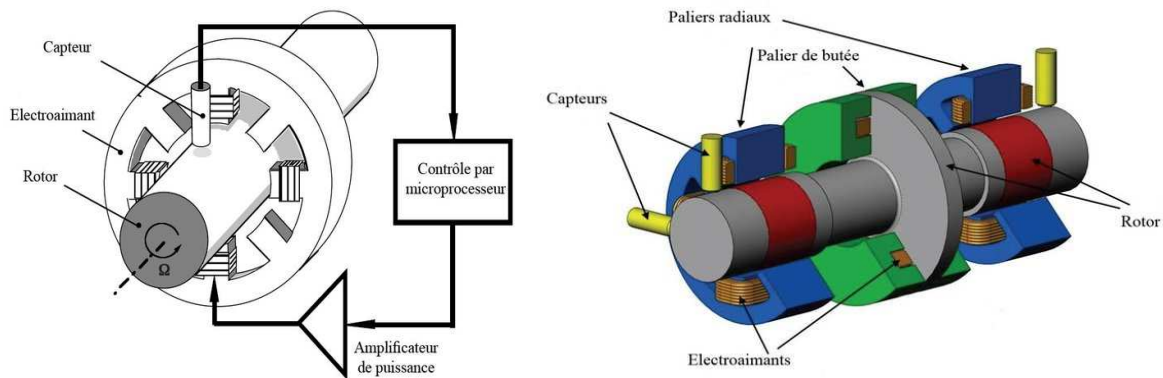


Figure I-4 : Principe de fonctionnement d'un palier magnétique

## 2.5. Paliers et butées fluides

Il existe deux grandes classes de paliers et butées fluides, les paliers et butées hydrodynamiques où la portance résulte de la géométrie du film lubrifiant et de la cinématique des surfaces et les paliers et butées hydrostatiques où la portance est principalement due à l'existence d'une source extérieure de fluide sous pression.

### 2.5.1. Paliers et butées hydrodynamiques

Dans ce cas, un fluide visqueux sépare totalement les surfaces en présence. Ce fluide peut être un liquide pratiquement incompressible ou un gaz compressible. La pression dans le film est créée par le déplacement relatif des surfaces et la géométrie du contact.

#### 2.5.1.1. Butées hydrodynamiques

Les butées hydrodynamiques sont utilisées pour supporter des charges axiales et immobiliser en translation les rotors des machines tournantes. L'axe du rotor peut être soit vertical, soit horizontal et cette position joue un rôle significatif dans la conception de la butée. Pour un rotor horizontal, on utilise généralement une butée à double effet telle que schématisée sur la figure I-5, lorsque la charge axiale a une direction déterminée la contre face est destinée à supporter les inversions transitoires de charge, chaque butée est alors dimensionnée différemment en fonction de son rôle.

Pour un rotor vertical, la charge est généralement due au poids, on utilise une butée à simple effet (*figure I-6*). La génération d'une pression hydrodynamique impose l'effet simultané de vitesse et d'espace convergent, si ceci est automatiquement réalisé dans les paliers, dans les butées on est en général contraint de diviser le secteur circulaire en un ensemble discontinu de surfaces appelées patins.

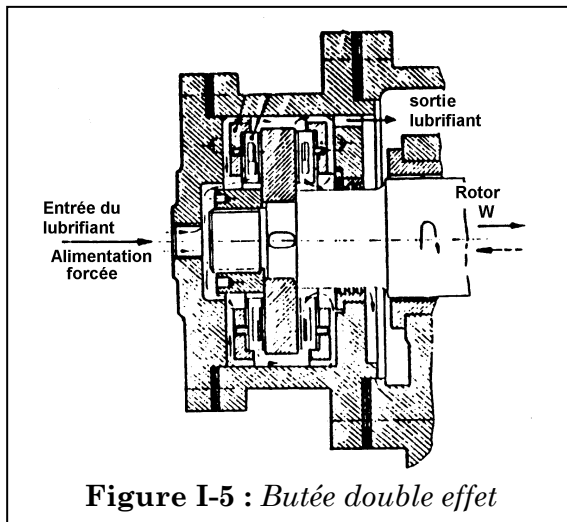


Figure I-5 : Butée double effet

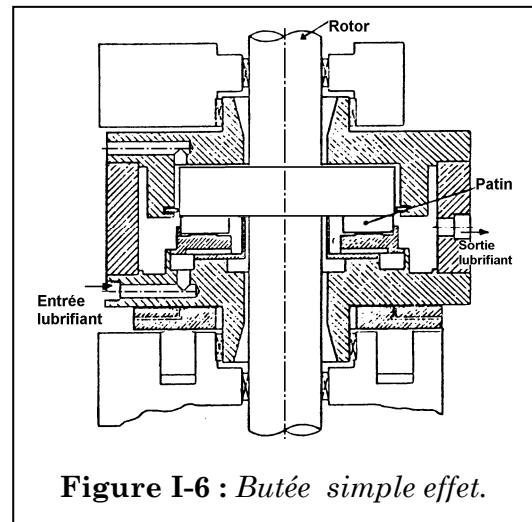


Figure I-6 : Butée simple effet.

### 2.5.1.2. Paliers hydrodynamiques

Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment utilisés pour supporter des charges radiales et pour le guidage des rotors de dimensions importantes surtout lorsque les conditions de fonctionnement sont sévères tels que la charge et la fréquence de rotations élevées. Par conséquent, pour remplir leur fonction dans de parfaites conditions, les paliers hydrodynamiques doivent être soigneusement conçus. Il existe deux types de configuration de paliers hydrodynamiques :

- paliers à géométrie fixe ;
- paliers à géométrie variable.

#### a) Paliers à géométrie fixe

##### a. 1. Paliers cylindriques

Les paliers sont fréquemment utilisés, les plus simples sont constitués d'un arbre qui tourne à l'intérieur d'un coussinet complet (*amplitude angulaire 360°*). Ces deux éléments sont totalement séparés par un film lubrifiant (*figure I-7*). Dans certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, ....etc.

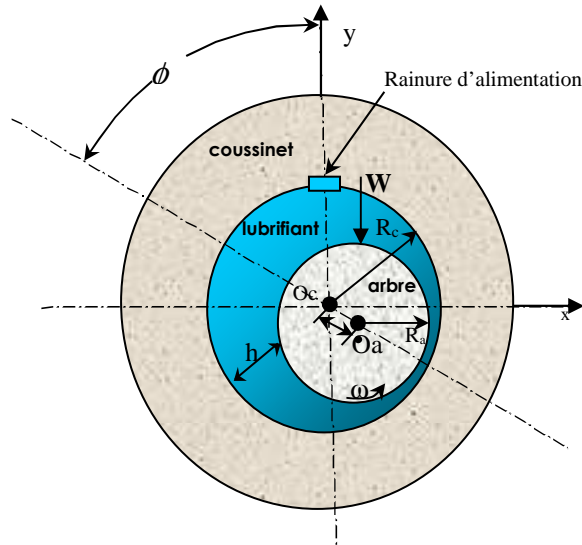


Figure I-7: Schémas d'un palier lisse cylindrique

#### Caractéristiques géométriques :

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre de rayon  $R_a$  et le coussinet de rayon  $R_c$  et de longueur  $L$  (*figure I-8*). Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs :

- le jeu radial ( $C = R_c - R_a$ );
- le jeu relatif ( $C / R$ ) qui est de l'ordre de  $10^{-3}$ ;
- le rapport de la longueur au diamètre du palier ( $L / R$ )



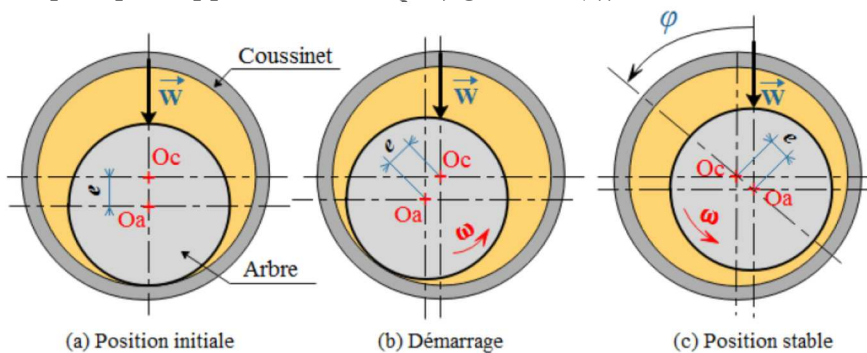
**Figure I-8:** Section droite d'un palier lisse

**Phases de travail d'un palier :**

Lors de la mise en route sous charge d'un palier hydrodynamique, on observe les trois phases représentées dans la figure I-9, les points  $O_a$  et  $O_c$  représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet, tandis que  $\vec{W}$  désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre.

- A l'arrêt, l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance  $O_a O_c$  est égale au jeu radial  $C$  (figure I-9 (a)).

- Au démarrage l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge (figure I-9 (c)).



**Figure I-9:** Phases de travail d'un palier lisse

Deux paramètres sont nécessaires pour positionner le centre de l'arbre par rapport au centre du coussinet, on utilise habituellement la distance  $O_c O_a$  appelée excentricité ( $e$ ) et l'angle que fait la direction de la charge ( $\vec{W}$ ) avec la ligne des centres  $O_a O_c$  appelé angle de calage ( $\varphi$ ).

**α. 2. Palier à arc partiel**

Le calcul de ce type de palier est similaire à celui d'un palier circulaire complet, la pression d'entrée du palier est imposée. La figure I-10 représente la section droite d'un palier à arc partiel,  $O_a$  et  $O$  indiquent respectivement le centre de l'arbre et le centre géométrique du palier,  $O$  représente aussi dans ce cas le centre de courbure de l'arc partiel ou du lobe. Comme pour le palier cylindrique, deux paramètres sont nécessaires pour repérer le centre de l'arbre  $O_a$  vis-à-vis du centre de coussinet  $O$  qui sont  $e$  et  $\phi$ . Le début du lobe est repéré par l'angle  $\alpha_1$ , et sa fin par l'angle  $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$  où  $\beta$  représente l'amplitude circonférentielle de l'arc.

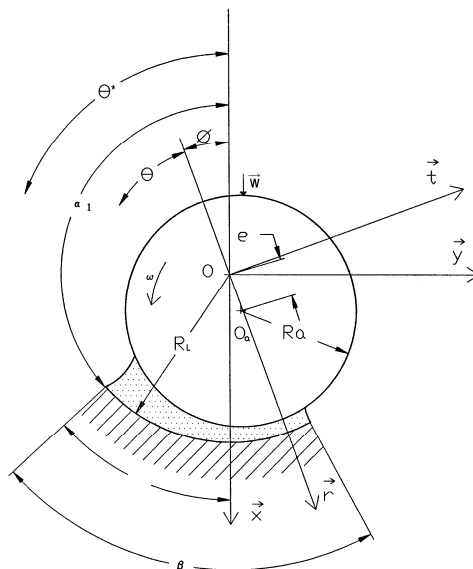
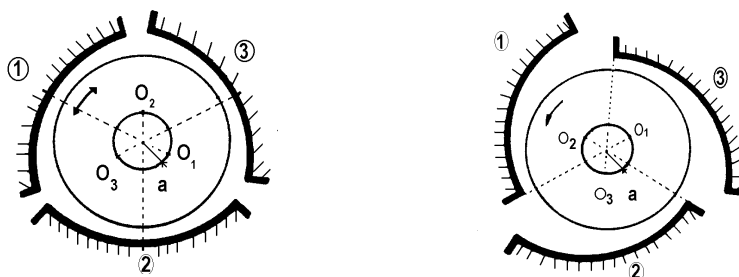


Figure I-10 : Schématisation d'un palier à arc partiel

### a. 3. Paliers multilobes

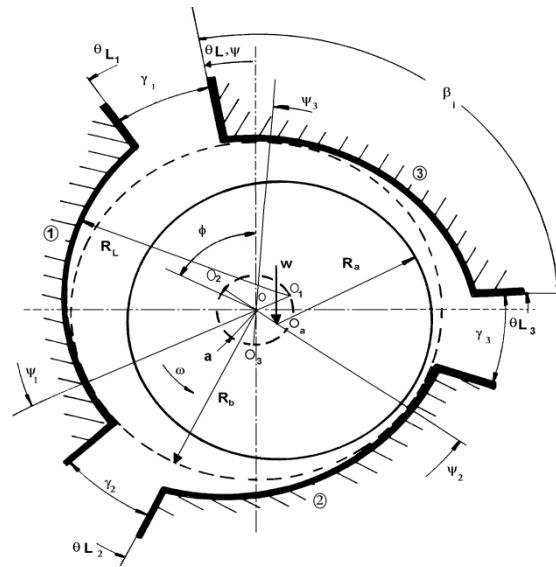
La figure I-11 représente un palier à trois lobes pour deux conditions de fonctionnement différentes : positions centrée (figure I-11 (a) et I-11 (b)) et excentrée (figure I-11(c)). Le coussinet est constitué de trois lobes d'amplitude circonférentielle  $\beta_i$  de longueur axiale  $L$ , de rayon de courbure  $R_L$  et de centre de courbure  $O_i$ .

Les centres de courbure  $O_i$  des lobes sont situés sur un cercle de rayon  $a$  et de centre  $O$ , centre géométrique du palier, le palier est dit préchargé géométriquement d'une valeur  $a$ . Le rôle de cette précharge géométrique apparaît clairement sur les figures I-11-a et I-11-b en position centrée. Il existe toujours une suite d'espaces convergent-divergents répartis autour de l'arbre, ce qui entraîne une succession de coins d'huile qui vont opposer une certaine résistance à tout déplacement du centre de l'arbre. L'arbre étant en position centrée, on définit deux types de paliers à lobe selon le lieu de la ligne des centres  $O_iO$  vis-à-vis des lobes. Si cette ligne des centres est l'axe de symétrie du lobe, le palier est dit à lobes symétriques (figure I-11 (a)), dans le cas contraire il est dit à lobes asymétriques (figure I-11 (b)).



a) lobes symétriques (palier centré)

b) lobes asymétriques (palier centré)



c) Cas général : Palier excentré

Figure I-11 : Schématisation d'un palier à trois lobes

### Caractéristiques géométriques :

La caractérisation géométrique d'un palier à lobes impose la définition des grandeurs suivantes (figure I-11(c)) :

- le nombre de lobes  $n$  ;
- les amplitudes circonférentielle  $\beta_i$  et axiale  $L$  des lobes;
- les rayons de courbure des lobes  $R_L$ , de l'arbre  $R_a$  et du cercle inscrit au coussinet  $R_b$  ;
- la précharge géométrique  $a$  qui correspond à la distance entre le centre géométrique du palier et le centre de courbure du lobe;
- la position des lobes vis-à-vis d'une direction fixe arbitraire ( $Ox$ ) (*direction de la charge, par exemple*) caractérisée par les coordonnées  $\theta_{Li}$  et  $\psi_i$  où  $\theta_{Li}$  positionne le début du lobe ( $i$ ) et  $\psi_i$  repère sa ligne des centres en position centrée  $O_iO$  ;
- l'amplitude circonférentielle  $\gamma_i$  des rainures de découplages.

La connaissance de ces grandeurs permet de définir:

- le jeu radial d'usinage :  $C_L = R_L - R_a$  ;
  - le jeu radial d'assemblage :  $C_b = R_b - R_a$  ;
  - le coefficient de précharge géométrique :  $m = a / C_L$  ;
  - les coefficients d'asymétrie  $\alpha_i = (\psi_i - \theta_{Li}) / \beta_i$  qui caractérisent le rapport de l'amplitude de la région convergente à celle du lobe.
- Si,  $m = 0$ , le palier n'est pas préchargé, c'est un palier circulaire à  $n$  rainures axiales, tandis que la valeur  $m=1$  représente le cas limite où il y a contact permanent entre l'arbre et chacun des lobes.
- Si,  $\alpha_i = 0.5$ , le lobe est symétrique.
- Si,  $\alpha_i = 1$ , toute la région est convergente.

## b. Paliers à géométrie variable

### b. 1. Paliers à patins oscillants

Les paliers à patins oscillants sont des paliers réglables par leur mode de fonctionnement (*figure I-12*). Ils sont composés de  $n$  patins, identiques ou non, individuellement articulés autour de pivots situés généralement sur un cercle appelé cercle des pivots.



Figure I-12: Photographie d'un palier à quatre patins oscillants

On a schématisé sur la figure I-13 (a) un palier à trois patins oscillants non chargé.

#### - Caractéristiques géométriques :

Les principaux paramètres sont:

- le nombre de patins  $n$  ;
- le rayon de l'arbre  $R_a$  ;
- le rayon de cercle des pivots  $R_b$  ;
- l'amplitude angulaire  $\beta$ , la largeur  $L$ , le rayon de courbure  $R_p$ , la masse équivalente de chaque patin ( $M = \frac{I}{R_p}$ ) où  $I$  est le moment d'inertie du patin par rapport à son pivot ;
- la position des pivots  $\psi_i$  ;
- le jeu d'usinage du patin  $C_p = R_p - R_a$  ;
- le rapport  $\frac{\alpha}{\beta}$  qui définit la position angulaire du pivot;
- la distance  $a$  qui sépare le centre géométrique du palier du centre de courbure du patin;
- le coefficient de précharge géométrique  $m = a / C_p$ .

Sous charge nulle, les centres de l'arbre  $O_a$  et du palier  $O$  sont confondus (*figure I-13 (a)*).

Si le coefficient de précharge géométrique  $m$  est nul, il n'y a pas de génération de pression hydrodynamique. Les patins sont alors en position d'équilibre. Il y a alors un risque de contact entre l'extrémité du patin et l'arbre. Par contre, lorsque le coefficient de précharge géométrique  $m$  est différent de zéro, tous les patins sont hydrodynamiquement chargés.

Le paramètre de précharge géométrique est donc très important puisqu'il assure, comme dans le cas des paliers à géométrie fixe, une bonne rigidité du système sous charge nulle.

Lorsque le palier est chargé, l'arbre est excentré (*figure I-13 (b)*) et les patins tournent autour de leurs pivots et occupent alors une position d'équilibre statique telle que l'action hydrodynamique exercée sur chaque patin passe par son pivot et que la résultante de toutes les forces  $\vec{F}$  soit égale et opposée à la charge statique extérieure  $\vec{W}_0$  supportée par le palier.



En régime dynamique, les patins peuvent suivre le mouvement de l'arbre, ce qui est à l'origine de la grande stabilité de ce type de palier.

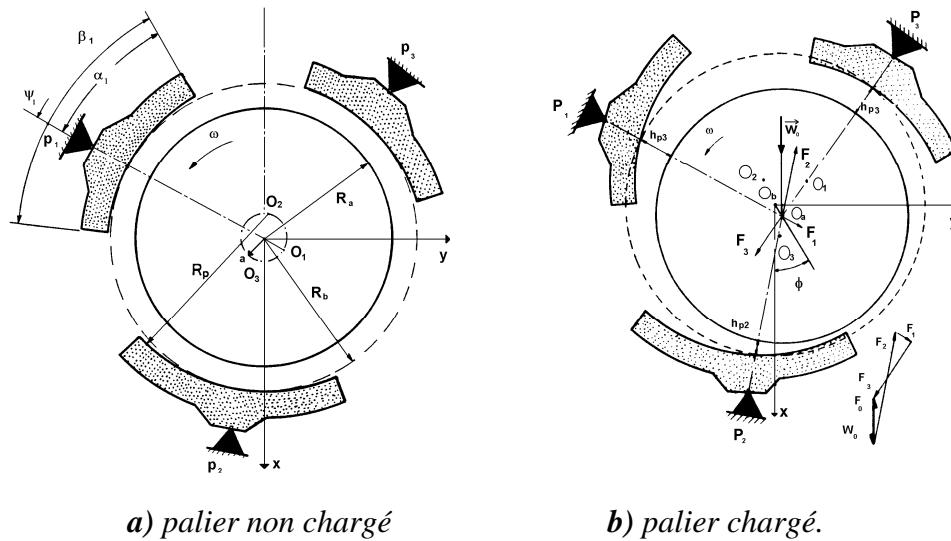


Figure I-13: Schématisation d'un palier à trois patins oscillants

### - Mode de calcul

Le processus de calcul des caractéristiques statique et dynamique d'un palier à patins oscillants est proche de celui utilisé pour les paliers à lobes : après avoir calculé les caractéristiques de chaque patin, celles du palier complet sont déterminées par superposition, la différence est due à la mobilité en rotation des patins.

Les paliers à patins identiques sont les plus fréquemment utilisées car le palier présente alors une certaine symétrie de révolution.

La charge totale  $\vec{W}_0$  supportée par le palier est obtenue par la somme vectorielle des charges  $\vec{W}_i$  relatives à chacun des patins.

Les paliers à patins oscillants ont une très grande stabilité qui est principalement due à la présence des pivots et leur nombre qui provoque une bonne stabilité hydrodynamique. La précharge géométrique est indispensable pour assurer la stabilité d'un palier non chargé et pour rendre actif tous les patins dans le cas de précharge.

### 2.5.1.3. Paliers à films amortisseurs (*Squeeze Film Damper Bearings*)

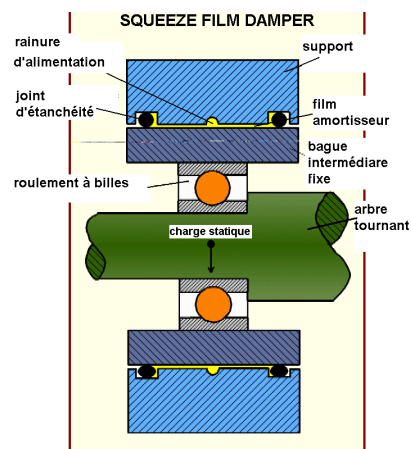
L'idée de base de ce type de palier est de monter l'ensemble rotor-roulement à billes dans un palier fluide (*figure I-14*). Le guidage en rotation de l'arbre est assuré par le roulement alors que le palier fluide joue le rôle d'un amortisseur visqueux. La bague intermédiaire (*fixe en rotation*) permet de réduire le mouvement de la bague extérieure du roulement dans le palier à une translation.

Deux technologies de paliers à film amortisseur peuvent être envisagées :

- montage d'un ressort en parallèle avec le film amortisseur permettant de donner une certaine raideur au palier ;
- film amortisseur libre (sans ressort).

Ce type de palier est surtout utilisé pour le guidage des rotors de turbines tournant à grande vitesse tels que les turbo-réacteurs d'avion qui utilisent fréquemment des paliers de roulement au lieu des paliers à film d'huile. A cause de leur faible amortissement, les

paliers de roulement ne permettent pas d'atténuer les amplitudes de vibration surtout lors du passage des vitesses critiques.



**Figure I-14:** Schéma de principe d'un palier à film amortisseur (SFD)

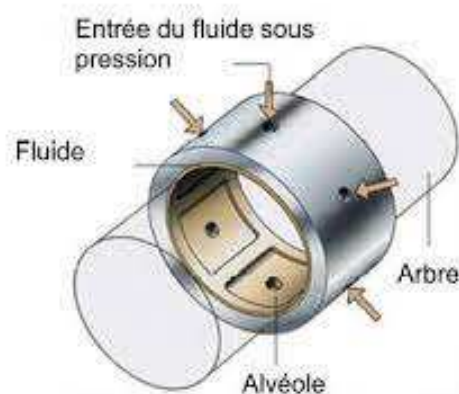
## 2.5.2. Paliers et butées hydrostatiques

Dans les systèmes hydrodynamiques tels que les paliers et les butées, la capacité de charge réside dans la vitesse de glissement de la surface de l'arbre par rapport au coussinet. Dans les paliers hydrostatiques, il en va différemment, la charge résulte d'une pression engendrée par un système extérieur au contact par exemple une pompe ou compresseur.

On peut employer ce type de paliers lorsque les conditions cinématiques ne sont pas suffisantes ou stables pour obtenir une portance hydrodynamique (*démarrages fréquents, oscillations de l'arbre*).

### 2.5.2.1. Paliers hydrostatiques

Un palier hydrostatique est constitué par  $n$  alvéoles réparties régulièrement sur la périphérie du coussinet (*figure I-15*). Deux types de paliers existent suivant que les alvéoles sont découplées ou non par des rainures axiales. Celles-ci ont l'avantage de découpler les alvéoles et mieux irriguer le palier, par contre elles augmentent le débit de fluide et peuvent introduire de l'air dans le palier lorsque la vitesse de rotation de l'arbre est très élevée.



**Figure I-15 :** Palier hydrostatique à six alvéoles

### - Avantages et inconvénients des systèmes hydrostatiques

Dans un support hydrostatique ou en lubrification par film complet, les surfaces des éléments portés et portants sont totalement séparées par un film, même lorsqu'il n'y a pas de vitesse relative entre les surfaces. La seule résistance au mouvement est due à la viscosité du lubrifiant.

Les systèmes hydrostatiques particulièrement ceux qui fonctionnent avec des liquides dont la viscosité est importante possèdent de nombreux avantages :

- les deux surfaces sont toujours séparées par un film fluide, même lorsqu'elles sont immobiles, ce qui théoriquement rend l'usure nulle et assure aussi une très grande durée de vie ;
- la pression est distribuée sur une grande surface, il n'y a pas de concentration de pression ;
- comme la portance ne résulte pas du mouvement des surfaces l'effet des imprécisions d'usinage est atténué surtout dans le cas des liquides.

Les inconvénients majeurs des dispositifs hydrostatiques sont leur **coût**, car ils nécessitent une pompe, des filtres, des régulateurs de pression, etc., et leur **fiabilité**, car le moindre incident dans le système d'alimentation peut entraîner la destruction des surfaces.

#### 2.5.3. Paliers et butées hybrides

Un palier hybride est un palier où interviennent simultanément des effets hydrostatique et hydrodynamique. Le palier est alimenté sous pression constante au moyen de résistances hydrauliques (*capillaires ou orifices en paroi mince*). Un palier hybride est généralement constitué de  $n$  alvéoles réparties régulièrement sur la périphérie du coussinet.

On trouve deux types de paliers suivant que les alvéoles sont découplées ou non par des rainures axiales (*figure I-16*), chaque alvéole doit être alimentée au travers d'un système de régulation, le plus utilisé est l'orifice.

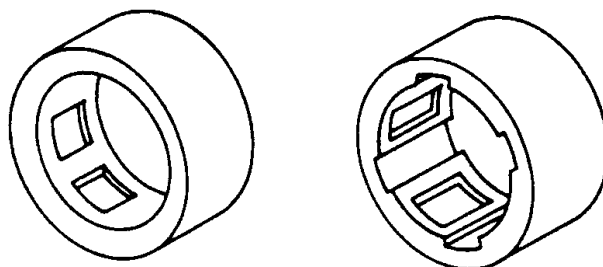
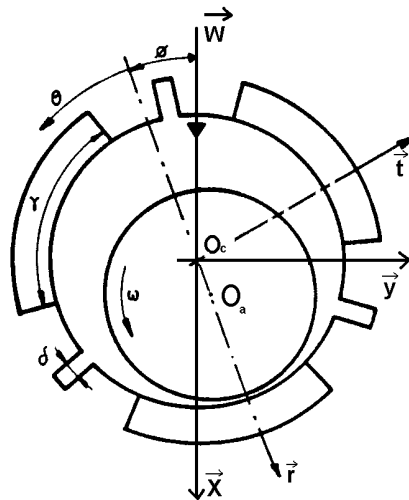


Figure I-16: Palier hydrostatique à alvéoles découplées et non découplées

Il est nécessaire de connaître la position de chaque alvéole ainsi que son amplitude angulaire ( $\gamma$ ). De même, les rainures de découplage sont caractérisées par leurs amplitudes ( $\delta$ ).

- Si, les axes de l'arbre et du coussinet sont supposés parallèles, deux paramètres sont nécessaires pour positionner l'arbre à l'intérieur du coussinet (*figure I-17*):

- l'excentricité  $e = \left| \vec{O_a O_c} \right|$  ou  $e = \varepsilon C$  ( $\varepsilon$  et  $C$  étant l'excentricité relative et le jeu radial du palier) ;
- l'angle  $\phi$  que fait la direction de la charge avec la ligne des centres.



**Figure I-17:** Schéma d'un palier hydrostatique à trois alvéoles découplées

### 3. Défaillances et défauts dans les paliers hydrodynamiques

Les causes de défaillance sont des circonstances liées à la conception, à la fabrication, à l'installation, à l'utilisation et à la maintenance qui conduisent au dysfonctionnement des paliers fluides des machines tournantes. Déterminer la cause exacte d'une défaillance s'avère primordial pour être en mesure de corriger le problème. L'analyse des défaillances qui surviennent sur les paliers fluides demande une bonne connaissance des données historiques du composant. Les causes de la défaillance des paliers fluides sont nombreuses et variées. Il existe des défaillances qui sont dues par exemple à la :

- **Surcharge :** le dépassement de la charge nominale du palier fluide entraîne une déformation. Elle résulte généralement d'une fatigue de la rotation de l'arbre après un temps de fonctionnement plus ou moins long, et elle peut aussi résulter d'une mauvaise répartition des charges.
- **Fatigue de la rotation :** c'est la limite d'endurance du palier fluide. Il s'agit d'efforts répétés et alternés par exemple les vibrations entraînant la rupture du palier à fluide.
- **Fatigue thermique :** c'est une fatigue engendrée par des contraintes thermiques, une lubrification inadéquate ou excessive. Il faut lubrifier le palier fluide avec un lubrifiant spécifique adapté à l'application en respectant la fréquence et la quantité adéquate.
- **Contamination :** ce sont les résidus de combustion qui contaminent et dégradent le fluide. Ces résidus peuvent être très durs et provoquer dans certains cas, des usures qui détériorent la couche d'oxyde protectrice de certaines surfaces et initie de ce fait la corrosion. Les poussières atmosphériques passant malgré la filtration de l'air par entrée principale en sont un exemple.
- **Vibrations :** un palier fluide en fonctionnement bien dimensionné produit des vibrations engendrées par l'arbre en mouvement. Ainsi un palier neuf en excellent état de fonctionnement produit très peu de vibrations.

- **Usure** : c'est un phénomène très complexe. En général, l'usure est caractérisée par une perte de matière des surfaces. Elle se produit soit au démarrage appelé période de rodage ou au cours des premiers cycles de fonctionnement appelé période d'endurance. On distingue quatre types ou formes d'usure, usure par adhésion, usure par abrasion, usure par fatigue et enfin une usure par corrosion. Les trois premières formes d'usure sont des processus mécaniques et le dernier est un processus chimique.

- **Mauvais alignement de l'arbre** : dans un palier, les axes du palier et de l'arbre ne sont pas toujours parallèles, en pratique il existe toujours un mésalignement dont les causes peuvent être d'origine diverses, par exemple, déformation thermique ou élastique de l'arbre. Le défaut d'alignement est l'une des principales causes de réduction de la durée de vie des paliers fluides.

- **Balourd** : Un balourd se définit comme une masse excentrée en rotation. Il en résulte que l'arbre en rotation est soumis à des efforts centrifuges qui le déforment. Le problème de balourd est probablement la cause la plus commune de vibration et inévitable, puisque la perfection n'existe pas dans les systèmes mécaniques. Le défaut de balourd est l'une des principales causes de réduction de la durée de vie des paliers fluides et il constitue l'un des principaux risques pour la sécurité des machines tournantes.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une étude bibliographique succincte sur les différents types de supports utilisés dans les guidages en rotation et en translation des lignes d'arbre des machines tournantes ainsi que quelques défaillances et défauts géométriques dans les paliers hydrodynamiques.

Il est intéressant de noter que dans la pratique la détermination de la cause exacte d'une défaillance s'avère primordial pour être en mesure de corriger le problème ainsi que l'analyse des défaillances qui surviennent sur les paliers fluides demande une bonne connaissance des données historiques des paliers.

## Chapitre deux

### Équations générales de la lubrification par fluide newtonien, piézovisqueux et barotrope

#### 1. Introduction

Tous les systèmes mécaniques comportent plus ou moins des éléments lubrifiés. Le but de la lubrification est de diminuer les frottements, en réduisant l'usure et en améliorant le rendement, c'est-à-dire que l'on cherche plus de puissance et moins de consommation, c'est la fonction la plus évidente des huiles lubrifiantes.

Dans ce chapitre, on va présenter les équations de base de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien piézovisqueux et barotrope en régime isotherme, ainsi, on va rappeler les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus, à savoir la loi de conservation de la masse, la loi de conservation de la quantité de mouvement et la loi constitutive de fluide.

L'utilisation de l'hypothèse d'un écoulement en film mince permettra de simplifier sensiblement les équations de mouvement du fluide (*figure II-1*). Pour ce type d'écoulement le comportement du film fluide peut être décrit par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre appelée équation de Reynolds non linéaire dans le cas de fluide newtonien piézovisqueux et barotrope. La résolution de l'équation de Reynolds permettra de déterminer le champ de pression dans le film lubrifiant. Ce dernier servira pour le calcul des performances statiques et dynamiques du contact lubrifié.

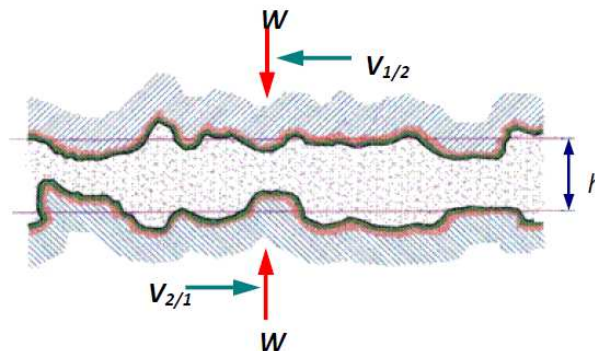


Figure II-1 : Schéma du contact lubrifié

#### 2. Lois générales de la lubrification hydrodynamique par fluide newtonien piézovisqueux et barotrope

Les équations générales de la lubrification hydrodynamique ou hydrostatique permettent, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince et en particulier sa portance (*figure II-1*). Elles sont déduites des équations de la mécanique des milieux continus, appliquées à des fluides newtoniens piézovisqueux et barotropes.

Les équations qui décrivent le comportement d'un fluide newtoniens piézovisqueux et barotropes en régime isotherme sont établies à partir :

- des principes fondamentaux de la mécanique des milieux continus ; *lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie*
- les lois de variations :  $\rho = \rho(p)$ ,  $\mu = \mu(p)$
- régime d'écoulement isotherme en tous points du fluide, c'est à dire la température reste constante en tous points du fluide lubrifiant.

## 2.1. Loi de conservation de la masse

La loi fondamentale de la mécanique classique concernant la conservation de la masse traduit le fait que la masse d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante. Cette équation peut être décrite par sa forme différentielle suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0 \quad (\text{II-1})$$

$i = 1 \div 3$

Avec,  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $u_i$  sont composantes du vecteur vitesse d'une particule fluide.

## 2.2. Lois de conservation de la quantité de mouvement

L'équation générale de conservation de la quantité de mouvement de fluide est donnée par :

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{II-2})$$

$i$  et  $j = 1 \div 3$

Avec,  $\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  ; la dérivée totale qui représente l'accélération d'une particule

fluide située en point  $\mathbf{M}$

Où,  $\sigma_{ij}$  : tenseur des contraintes au point  $\mathbf{M}$

$f_i$  : forces massiques

$\rho.f_i$  : forces volumiques

La loi de comportement rhéologique pour un fluide newtonien, qui lie le tenseur des contraintes au tenseur de taux de déformation ( $\varepsilon_{ij}$ ) s'écrit :

$$\sigma_{ij} = (-p + \lambda\theta)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (\text{II-3})$$

Avec,

$p$  : pression dans le fluide

$\varepsilon_{ij}$  : tenseur de taux de déformation, ( $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$ )

$\theta$  : taux de dilation cubique, ( $\theta = \varepsilon_{kk}$ )

$\delta_{ij}$ : symbole de Kronecker

$\lambda$  et  $\mu$  : coefficients de Navier

Pour un fluide incompressible ( $\theta = 0$ ), le second coefficient de viscosité  $\lambda$  n'intervient plus.

Remarque : le régime d'écoulement étant isotherme, on ne tient pas compte l'équation de conservation d'énergie.

### 3. Equations de mouvement d'un fluide newtonien piézovisqueux et barotrope

En reportant l'équation du comportement rhéologique, Eq.II-3 dans l'équation de mouvement, Eq.II-2, on obtient les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien

$$\rho \frac{du_i}{dt} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \quad (\text{II-4})$$

Avec,  $i$  et  $j = 1 \div 3$

#### 3-1. Analyse dimensionnelle des équations du mouvement en film mince visqueux

En lubrification hydrodynamique, les équations de mouvement ou les équations de Navier se simplifient très sensiblement car l'épaisseur du film suivant  $(0, \bar{x}_2)$  est très faible par rapport aux deux autres dimensions du contact, figure II-2, ce qui permet de déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation II-4, de faire une analyse dimensionnelle.

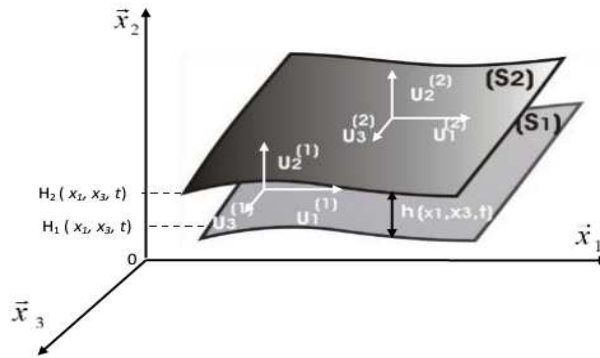


Figure II-2 : Schéma général d'un contact hydrodynamique

Pour une analyse dimensionnelle, on pose :

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{L}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{h}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{L}, \quad \tilde{t} = \frac{tV}{L}, \quad \tilde{u}_1 = \frac{u_1}{V}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{u_2 L}{Vh}, \quad \tilde{u}_3 = \frac{u_3}{V}, \quad \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (\text{II-5})$$

$\mu_0$  : viscosité dynamique de référence,  $\mu = \mu(T)$

$\rho_0$  : masse volumique de référence,  $\rho = \rho(T)$

Dans, ces expressions,  $L$  et  $V$  sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes  $(0, \bar{x}_1)$  et  $(0, \bar{x}_3)$ ,  $h$  et  $\frac{Vh}{L}$  celles suivant  $(0, \bar{x}_2)$ ,  $\frac{L}{V}$ ,  $\mu_0$  et  $\rho_0$  finissent l'ordre de grandeur du temps, de coefficient de viscosité et de la masse volumique à la température de référence ( $T_0$ ).

Ce changement de variable conduit à poser :  $\tilde{p} = \frac{ph^2}{\mu_0 VL}$

On remarque que la vitesse caractéristique  $V$  peut être définie de plusieurs façons, en hydrodynamique,  $V$  sera la vitesse de l'une des parois du contact.

Compte tenu de ces changements de variable et en négligeant les forces massiques extérieures, l'équation de Navier (Eq.II-4) s'écrit :



$$\begin{cases}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_1} = \varepsilon \left[ -R\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \tilde{\mu} + \tilde{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \varepsilon \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2^2} + \\
\varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{x}_1} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) \\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = \varepsilon^2 \left\{ \varepsilon \left[ -R\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \varepsilon \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] + \left( \tilde{\mu} + \tilde{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2^2} + \right. \\
\left. \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{x}_2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \left( \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right) + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \left( \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right\} \\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_3} = \varepsilon \left[ -R\tilde{\rho} \left( \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \varepsilon \left( \tilde{\mu} + \tilde{\lambda} \frac{\lambda_0}{\mu_0} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_3} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \varepsilon \tilde{\mu} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3^2} \right) \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2^2} + \\
\varepsilon^2 \left[ \frac{\lambda_0}{\mu_0} \frac{\partial \tilde{\lambda}}{\partial \tilde{x}_3} \left( \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_j} \right) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_3} \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_1} \left( \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} + \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} \right) \right] + \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} \right)
\end{cases} \quad (\text{II-6})$$

Avec,  $j = 1, 2, 3$

Où,  $\Re = \rho_0 \frac{VH}{\mu_0}$  est le nombre sans dimension de Reynolds relatif à l'épaisseur de l'écoulement représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule fluide

$\varepsilon = h/L$  est paramètre d'échelle, est en mécanique des films minces visqueux de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Si, on néglige les termes multipliés soit par  $\varepsilon^2$ , soit par  $\varepsilon^3 \Re$ , les équations de Navier se réduisent à :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = -\varepsilon \Re \tilde{\rho} \left[ \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2^2} + \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \cdot \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial \tilde{x}_2} \\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0 \rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3)
\end{cases} \quad (\text{II-7})$$

avec,  $i = 1$  et  $3$

Les termes en  $\varepsilon \times \Re$  ou termes d'inertie de l'équation II-7 seront négligeables devant les termes de viscosité quand,  $\varepsilon \times \Re \ll 1$ ; ce qui est souvent vérifié dans la plus part des écoulements rencontrés en lubrification.

Si, par hypothèse, on néglige les forces d'inertie l'équation II-7, elle devient comme suit :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_2} \left( \tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} \right) \\
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_2} = 0
\end{cases} \quad (\text{II-8})$$

avec,  $i = 1$  et  $3$

Et en revenant aux variables dimensionnées, l'équation, II-8 devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad \text{(II-9)}$$

D'après ce système d'équations, la pression varie en fonction que de  $x$  et  $z$ , ( $p = p(x,z)$ ). Ce sont les équations de Navier écrites dans le cadre de la théorie de lubrification. Ces équations auxquelles s'ajoute l'équation de la conservation de la masse et les conditions aux limites et après intégration, permettent formellement de connaître le champ de vitesses  $u_1$  et  $u_3$ , avec  $u_2 \ll u_1$  et  $u_3$  (écoulement bidimensionnel de lubrifiant dans la direction  $(o, \bar{x}_1)$  et  $(o, \bar{x}_3)$ ), la pression et les contraintes de cisaillement dans le film lubrifiant.

### 3.2. Intégration des équations de Navier

#### • Détermination du champ de vitesses

Lorsque la vitesse de paroi du contact est tangente en tous points à cette paroi, l'équation de la mécanique des films minces visqueux généralisées se simplifie car en plaçant l'origine du système d'axes sur cette paroi, on pose que :  $h_1 = 0$  et  $h_2 = h(x,z,t)$

Définition des hypothèses et des conditions aux limites sur les vitesses :

- surface du contact lisse ;
- le fluide adhère parfaitement aux parois (*vitesse de glissement négligeable*) ;
- on suppose que la paroi inférieure ( $S_1$ ) est plane et confondue avec le plan du référentiel  $(x_1, 0, x_3)$  ;
- la vitesse en tous points de la surface ( $S_1$ ) est tangente à cette surface.

Pour un écoulement bidimensionnel (2D) en film mince visqueux figure II-2, les équations de Navier s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \end{cases} \quad \text{(II-10)}$$

Après deux intégrations de ces équations précédentes par rapport à la variable  $x_2$ , on obtient, première intégration par rapport à  $x_2$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + A(x_1, x_3) = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2 + B(x_1, x_3) = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases}$$

ou encore, 
$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2 + \frac{A(x_1, x_3)}{\mu} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2 + \frac{B(x_1, x_3)}{\mu} \end{cases} \quad \text{(II-11)}$$

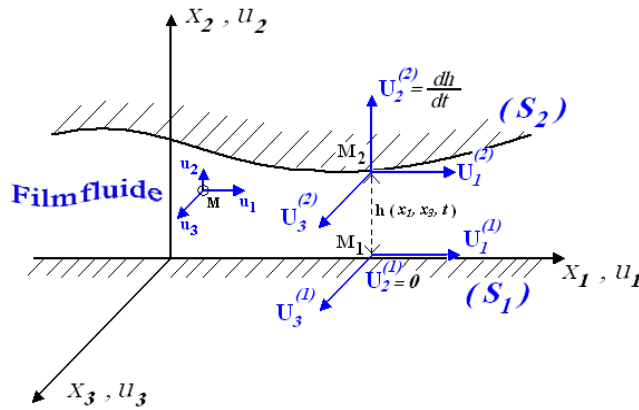
- Deuxième intégration par rapport à  $x_2$  :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = \frac{\partial p}{\partial x_1} \int \frac{x_2}{\mu} dx_2 + A(x_1, x_3) \int \frac{dx_2}{\mu} + C(x_1, x_3) \\ u_3(x_2) = \frac{\partial p}{\partial x_3} \int \frac{x_2}{\mu} dx_2 + B(x_1, x_3) \int \frac{dx_2}{\mu} + D(x_1, x_3) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} x_2^2 + \frac{A}{\mu} x_2 + C \\ u_3(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} x_2^2 + \frac{B}{\mu} x_2 + D \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

Pour déterminer les constantes A, B, C et D en utilise les conditions aux limites sur les vitesses suivantes :



**Figure II-3 : Géométrie et cinématique d'un contact hydrodynamique**

D'après la figure II-3, les conditions aux limites sur les vitesses sont :

$$\begin{cases} \text{pour } x_2 = 0, & u_1 = U_1^{(1)}, & u_2 = U_2^{(1)} = 0, & u_3 = U_3^{(3)} \\ \text{pour } x_2 = h, & u_1 = U_1^{(2)}, & u_2 = U_2^{(2)}, & u_3 = U_3^{(2)} \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

En utilisant les conditions aux limites sur les vitesses (II-13), on obtient :

$$\begin{cases} A = \frac{\mu}{h} \left[ U_1^{(2)} - U_1^{(1)} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} h^2 \right] \\ B = \frac{\mu}{h} \left[ U_3^{(2)} - U_3^{(1)} - \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} h^2 \right] \\ C = U_1^{(1)} \\ D = U_3^{(1)} \end{cases}$$

En remplaçant les constantes A, B, C et D par leurs expressions, les deux composantes de vecteur vitesse d'écoulement s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} u_1(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_1} (x_2^2 - x_2 h) + \frac{x_2}{h} U_1^{(2)} + U_1^{(1)} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \\ u_3(x_2) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x_3} (x_2^2 - x_2 h) + \frac{x_2}{h} U_3^{(2)} + U_3^{(1)} \left(1 - \frac{x_2}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

Les premiers termes des deux équations de vitesses, représentent l'écoulement de Poiseuille (*dû au gradient de pression*) et cependant, les seconds termes représentent l'écoulement de Couette (*dû au déplacement de parois*).

#### 4. Expression de tenseur des contraintes et de taux des déformations

Dans le cas d'un fluide newtonien le tenseur des contraintes est symétrique et la matrice représentative de ce tenseur s'écrit en un point M (*figure II-3*) :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II-15})$$

On suppose que :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \approx \varepsilon, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \approx \varepsilon, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \approx \varepsilon^2, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \approx \varepsilon^2, \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \approx \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \approx \varepsilon^2$$

En prenant en considération les hypothèses ci-dessus, la loi de comportement rhéologique (II-3) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{Sym} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{Sym} & & 1 \end{bmatrix} + 2\mu \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}u_{1,2} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2}u_{1,2} \\ \text{Sym} & & 0 \end{bmatrix}$$

Soit :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{bmatrix} -p & \mu u_{1,2} & 0 \\ & -p & \mu u_{3,2} \\ \text{Sym} & & -p \end{bmatrix} \quad (\text{II-16})$$

**Le taux de déformation :**

$$\bar{\bar{D}}(M) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & 0 \\ & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \text{Sym} & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II-17})$$

Le fluide étant newtonien, le champ de contraintes de cisaillement dans le fluide s'expriment par :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad (\text{II-18})$$

Si, en remplaçant  $u_1$  et  $u_3$  par leurs expressions, on obtient les champs de contraintes de cisaillement exercées par le fluide sur les parois :

$$\begin{cases} \sigma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_1} (2x_2 - h) + \frac{\mu}{h} (U_1^{(2)} - U_1^{(1)}) \\ \sigma_{23} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x_3} (2x_2 - h) + \frac{\mu}{h} (U_3^{(2)} - U_3^{(1)}) \end{cases} \quad (\text{II-19})$$

### - Changement de notation

Dans ce qui suit, on adoptera la nouvelle notation pour les variables d'espace et les composants de vitesses d'écoulement :

$$\begin{aligned} (x, y, z) & \text{ au lieu de } (x_1, x_2, x_3) \\ (u, v, w) & \text{ au lieu de } (u_1, u_2, u_3) \\ (U_1, V_1, W_1) & \text{ au lieu de } (U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, U_3^{(1)}) \\ (U_2, V_2, W_2) & \text{ au lieu de } (U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, U_3^{(2)}) \end{aligned} \quad (\text{II-20})$$

Les composantes de vecteur vitesse d'écoulement (II-14) deviennent:

$$\begin{cases} u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} U_2 + U_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \\ w(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} (y^2 - yh) + \frac{y}{h} W_2 + W_1 \left(1 - \frac{y}{h}\right) \end{cases} \quad (\text{II-21})$$

Et les équations des contraintes de cisaillement (II-19) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma_{xy} = \tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \frac{\mu}{h} (U_2 - U_1) \\ \sigma_{yz} = \tau_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} (2y - h) + \frac{\mu}{h} (W_2 - W_1) \end{cases} \quad (\text{II-22})$$

## 5. Dérivation de l'équation de Reynolds pour un fluide newtonien piezovisqueux et barotrope en régime isotherme

### ▪ Hypothèses de la théorie de Reynolds

La dérivation de l'équation de Reynolds nécessite l'emploi des hypothèses suivantes :

- le milieu est continu : *l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film ;*
- le fluide est newtonien : *les contraintes de cisaillement sont proportionnelles au taux de cisaillement ;*
- l'écoulement est laminaire : *dans le cas contraire, il faudra utiliser une équation autre que l'équation de Reynolds ;*
- Les forces massiques extérieures dans le fluide sont négligeables, *ce qui est très généralement vérifié sauf en magnétohydrodynamique ;*
- les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression : *cela est vérifié dans le cas des films minces tant que l'écoulement est laminaire ;*
- Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact : *ainsi, sur les parois, la vitesse du fluide est égale à celle des parois ;*
- la courbure générale du film est négligée, *on peut démontrer qu'en film mince, dans un palier par exemple, l'effet de courbure est du second ordre ;*
- la vitesse d'une des parois du contact est toujours tangente à cette paroi : *ce qui permet de placer le système d'axe (o, x, z) sur la paroi (S<sub>1</sub>) où H<sub>1</sub> = 0 et H<sub>2</sub> = h(x,y,t) (figure II-3) ;*
- les surfaces formant le contact sont supposées lisses et indéformables ;

- l'épaisseur du film est très faible devant la largeur et la longueur du contact, le rapport entre ces grandeurs doit être de l'ordre de  $10^{-3}$ . C'est l'hypothèse fondamentale de la lubrification hydrodynamique.

### - Dérivation de l'équation de Reynolds

Pour un fluide newtonien piézo-visqueux et barotrope à partir de l'équation de continuité II-1 :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad \text{(II-23)}$$

Si, on intègre cette équation à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(x,z)} \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] dy = 0 \quad \text{(II-24)}$$

Ou encore :

$$\int_0^{h(x,z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy}_{I_1} + \int_0^{h(x,z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy}_{I_2} + \int_0^{h(x,z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy}_{I_3} = 0$$

On a pour un fluide piézo-visqueux et barotrope (**annexe A**) :  $P = P(x,z)$  ,  $\mu = \mu(P)$  et  $\rho = \rho(P)$ .

Il vient alors :  $\mu = \mu(x,z)$  et  $\rho = \rho(x,z)$ .

Ainsi :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad \text{(II-25)}$$

avec ,

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 = \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dy \\ I_2 = \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \\ I_3 = \int_0^{h(x,z)} \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dy \end{array} \right. \quad \text{(II-26)}$$

Où :  $I_2 = \rho [v]_0^h = \rho(v(h) - v(0)) = \rho(v_2 - v_1) = \rho v_2$

$I_1$  et  $I_3$  des intégrales sont difficile à calculer, pour les déterminer en utilisant la théorème de Leibnitz suivante :

$$\int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z) dy = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} f(x,y,z) dy - f(x,h_2,z) \frac{\partial h_2}{\partial x} + f(x,h_1,z) \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

Ainsi, les intégrales  $I_1$  et  $I_3$  deviennent :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h (\rho u(y)) dy - \rho u(y) \frac{\partial h}{\partial x} \\ I_3 = \int_0^h (\rho w(y)) dy - \rho w(y) \frac{\partial h}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

Avec,  $U(h) = U_2$  et  $W(h) = W_2$

Comme la variation de  $\rho$  à travers l'épaisseur du film n'est pas importante, alors les équations II-27 deviennent :

$$\begin{cases} I_1 = \left( \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) - \rho U_2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \\ I_2 = \rho V_2 = \rho \frac{dh}{dt} \\ I_3 = \left( \frac{\partial Q_z}{\partial z} \right) + \rho W_2 \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right) \end{cases}$$

Où,

$$\begin{cases} Q_x = \rho \int_0^h (U(y)) dy \\ Q_z = \rho \int_0^h (w(y)) dy \end{cases} \quad (\text{II-28})$$

$$\text{Et,} \quad \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$$

En intégrant  $Q_x$  et  $Q_z$  selon l'épaisseur du film, on obtient :

$$\begin{cases} Q_x = \rho \left( -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{h}{2} (U_2 + U_1) \right) \\ Q_z = \rho \left( -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{h}{2} (W_2 + W_1) \right) \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

$Q_x$  et  $Q_z$  sont les débits massiques par unité de longueur suivant les directions  $x$  et  $z$ .

Ainsi, l'intégration de l'équation de continuité II-23 donne :

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_z}{\partial z} = \rho U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \rho W_2 \frac{\partial h}{\partial z} - \rho V_2 \quad (\text{II-30})$$

En remplaçant  $V_2$ ,  $Q_x$  et  $Q_z$  par leurs expressions, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial z} \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho h (U_1 + U_2)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} [\rho h (W_1 + W_2)] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad (\text{II-31})$$

Cette équation est l'équation de base de la mécanique du film mince visqueux par un fluide newtonien piézo-visqueux et barotrope.

Sous forme plus condensée (*utilisation des opérateurs différentiels*), l'équation (II-31) s'écrit :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\rho h^3}{12\mu}\vec{\nabla}P\right)=\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho h\vec{U})+\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) \quad (\text{II-32})$$

avec ,  $\vec{\nabla}P = \begin{Bmatrix} \partial P / \partial x \\ \partial P / \partial z \end{Bmatrix}$  et  $\vec{U} = \begin{Bmatrix} U_2 + U_1 \\ W_2 + W_1 \end{Bmatrix}$

C'est l'équation de Reynolds écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D) pour un fluide newtonien piézovisqueux et barotrope.

C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet généralement pas une solution analytique.

Notant que, le second membre de l'équation générale de Reynolds correspond à deux effets qui sont :

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}(\rho h\vec{U}) \text{ est l'effet d'entraînement (wedge effect) ;}$$

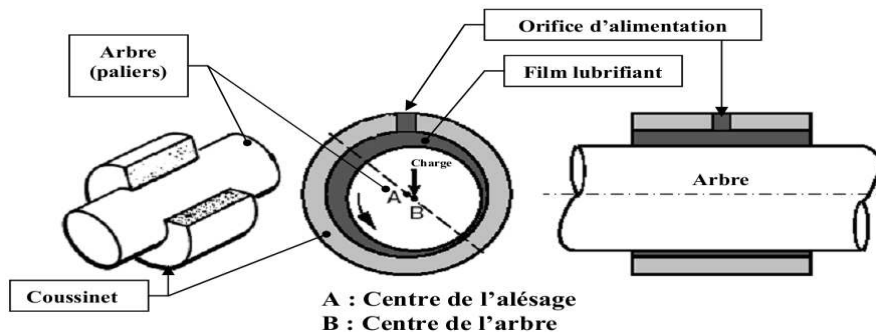
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) \text{ est l'effet d'écrasement (squeeze effect).}$$

## 6. Expression de l'équation de Reynolds dans le cas d'un palier hydrodynamique lubrifié par un fluide newtonien, piézovisqueux et barotrope en régime isotherme

Les paliers hydrodynamiques sont fréquemment plus utilisés, les plus simples sont constitués d'un arbre cylindrique tournant à l'intérieur d'un alésage en présence de lubrifiant (figures II-4 et II-5). Sur certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc.

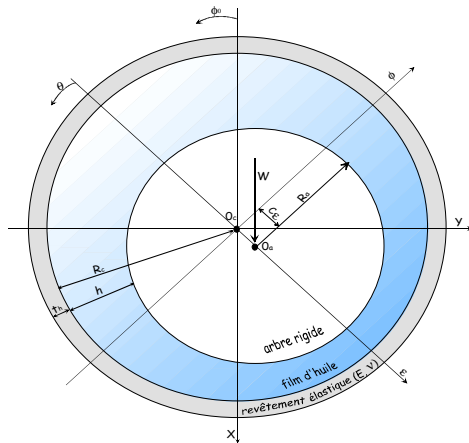
Un palier hydrodynamique est constitué de deux éléments, l'arbre généralement en acier de rayon  $R_a$  et le coussinet en bronze ou en acier régulé même en polymère de rayon intérieur  $R_c$  et de longueur  $L$  (figure II-4-b). Ainsi, un palier peut être schématisé par deux cercles (figure II-4-b) de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs : le jeu radial,  $C = R_c - R_a$ , le rapport  $C / R$  ou jeu relatif de l'ordre de  $10^{-3}$  et le rapport de la longueur au diamètre du palier  $L / D$ .

Le jeu radial étant très petit devant le rayon du coussinet ou de l'arbre, on peut alors négliger la courbure du film est développée suivant sa direction circonférentielle (figure II-4-c). Dans ces conditions, la surface du coussinet est confondue avec le plan (O, x, z) du référentiel local.

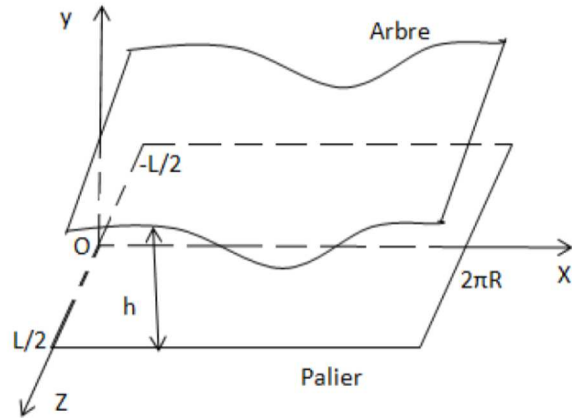


a) schéma d'un palier cylindrique





b) Section droite détail d'un palier cylindrique



c) Palier cylindrique développé

Figure II-4: Schémas d'un palier lisse cylindrique

Dans cette étude, on se limite au régime hydrodynamique établi, ainsi on suppose que le régime d'écoulement du fluide à travers le palier est laminaire et isotherme ( $T = \text{cts}$ ).

L'analyse de comportement d'un palier hydrodynamique peut être basée sur trois parties

- écriture de l'équation de Reynolds correspondant au palier étudié ;
- écriture de l'équation géométrique donnant l'épaisseur du film lubrifiant ;
- définition des conditions aux limites sur la pression.

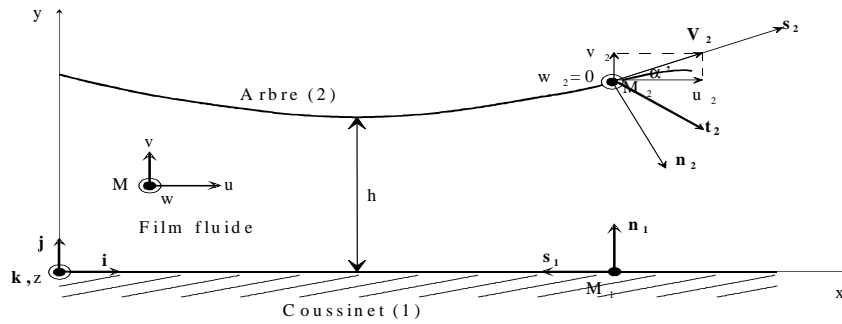
Les conditions cinématiques relatives aux surfaces de contact (*figure II-5*) sont :

$$\begin{cases} U_1 = V_1 = W_1 = 0; \\ U_2 = R_a \omega_a \cos \alpha = R_a \omega_a; \\ W_2 = 0 \quad (\text{vitesse de l'arbre selon l'axe } z) \\ V_2 = R_a \omega_a \sin \alpha = R_a \omega_a \frac{dh}{dx} \end{cases} \quad (\text{II-33})$$

Où,  $\text{tg} \alpha \approx \alpha \approx \frac{dh}{dx}$ , car  $\alpha \ll 1$ .

Dans l'équation II-33, on a :

- $U_1, V_1$  et  $W_1$  sont les vitesses du coussinet fixe ;
- $U_2, V_2$  et  $W_2$  sont les vitesses de l'arbre mobile ;
- $R_a$  et  $R_b$  sont respectivement le rayon de l'arbre et du coussinet tel que:  $R_a \approx R_b = R$ .
- $\omega$  est la vitesse angulaire de l'arbre
- $\epsilon$  est l'excentricité relative du palier,  $\epsilon = \left(\frac{e}{C}\right)$
- $\theta$  est la coordonnée circonférentielle dont l'origine est située sur la ligne des centres du palier (*figure II-5*),  $\theta = x / R$



**Figure II -5 :** Section droite du palier développé

On remplace les expressions II-33 dans l'équation II-31, on obtient l'équation de Reynolds dans le cas d'un palier lubrifié par un fluide newtonien piezovisqueux et barotrope fonctionnant en régime isotherme est :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = \left( \frac{R\omega}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} [\rho h] + \frac{\partial}{\partial t} (\rho h) \quad \text{(II-34)}$$

L'équation II-35 est l'équation Reynolds écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D) en régime laminaire et isotherme.

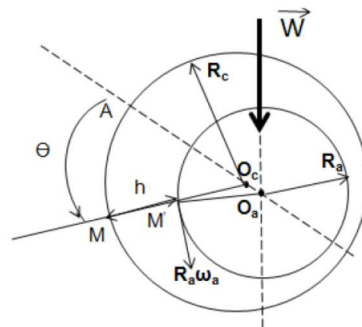
avec,  $p(x, z, t)$  : pression dans le film

$h(x, z, t)$  : épaisseur du film lubrifiant

$\mu$  et  $\rho$  : viscosité dynamique et la masse volumique de fluide respectivement.

### 6-1. Equations géométriques du film lubrifiant

L'épaisseur du film est la distance qui sépare l'arbre et le coussinet. Cette épaisseur permet d'éviter le contact des deux surfaces concernées. La schématisation du palier fluide cylindrique ci-dessous permet d'évaluer l'épaisseur du film fluide. Le film fluide impose une pression afin d'équilibrer la charge appliquée entre les deux surfaces du mécanisme. Cette pression dépend de la géométrie du contact, de sa cinématique et des conditions aux limites lors de la résolution des conditions de l'équation de Reynolds.



**Figure II-6 :** Systèmes de coordonnées du palier fluide cylindrique

#### a) Cas d'un palier aligné

Pour la détermination de l'épaisseur du film fluide  $h$  (figure II-6), on considère un point  $M$  appartenant à la surface du coussinet et qui sera repéré par l'angle  $(\overline{O_C A}, \overline{O_C M})$ .

$O_a$  et  $O_c$  sont respectivement le centre de l'arbre et du coussinet.

Le jeu radial est défini par la distance des centres lorsque le palier est au repos :

$$C = R_c - R_a$$

Le repos de l'arbre est la position où la charge et la droite passant par  $O_a$  et  $O_c$  sont confondues (*figure II-7*) ; c'est la condition de l'arrêt de l'arbre dans le coussinet. Lorsque l'arbre et le palier ne sont plus en contact, il existe une épaisseur de film fluide les séparant. La direction des centres et celle de la charge ne sont plus confondues constamment.



**Figure II -7** : Palier fluide hydrodynamique en mouvement (a) et au repos (b)

L'excentricité est définie par la distance des centres lorsque l'arbre est en mouvement :

$$e = O_a - O_c$$

On suppose l'angle :  $\alpha = (\overrightarrow{M'O_a}, \overrightarrow{M'O_c})$

L'épaisseur du film :  $h = O_c M - O_c M'$  (II-35)

En considérant le triangle  $O_c M' O_a$  et d'après la loi des sinus il vient alors :

$$\frac{O_a M'}{\sin \theta} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{O_c M'}{\sin(\theta - \alpha)}$$

Soit :  $\frac{R_a}{\sin \theta} = \frac{e}{\sin \alpha} = \frac{O_c M'}{\sin(\theta - \alpha)} \rightarrow \sin \alpha = \frac{e}{R_a} \sin \theta \rightarrow \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)$

Ainsi,  $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin(\theta - \alpha)$

Alors,  $O_c M' = \frac{R_a}{\sin \theta} \sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right]$  (II-36)

On a :  $\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right] = \sin \theta \cos\left[\arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right] - \cos \theta \sin\left[\arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right]$

$$\text{Avec } \begin{cases} \cos\left[\arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right] = \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} \\ \sin\left[\arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right] = \frac{e}{R_a} \sin \theta \end{cases}$$

D'où,  $\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)\right] = \sin \theta \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - \frac{e}{R_a} \sin \theta \cos \theta$

On remplace dans l'expression, (II-36) :

$$O_c M' = R_a \sqrt{1 - \left(\frac{e}{R_a} \sin \theta\right)^2} - e \cos \theta$$

La quantité  $e / R_a$  est très petite devant l'unité de l'ordre  $10^{-3}$ , donc on peut négliger le terme  $e \sin \theta / R_a$  devant 1, on obtient ainsi :

$$O_c M' = R_a - e \cos \theta \quad \text{(II-37)}$$

Finalement l'épaisseur du film s'écrit :

$$h = R_c - R_a + e \cos \theta = C \left(1 + \frac{e}{R_a} \cos \theta\right) \quad \text{(II-38)}$$

En posant l'excentricité relative,  $\varepsilon = e / C$  qui variant de 0 à 1, l'expression de h devient :

$$h = C (1 + \varepsilon \cos \theta) \quad \text{(II-39)}$$

Alors, dans le cas du palier aligné lisse et rigide (*figure II-4-b*), l'équation géométrique définie en chaque point et à chaque instant l'épaisseur du film lubrifiant est donnée par :

$$h(\theta, t) = C(1 + \varepsilon(t)\cos\theta) \quad (\text{II-40})$$

Ou encore, en utilisant la coordonnée  $\theta$  :

$$\begin{aligned} h(\theta, t) &= C(1 + \varepsilon(t)\cos(\theta - \phi_0)) \\ &= C + X(t)\cos(\theta) + Y(t)\sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{II-41})$$

Avec,  $X(t) = C\varepsilon(t)\cos\phi_0$  et  $Y(t) = C\varepsilon(t)\sin\phi_0$

### b) Cas d'un palier mésaligné

Dans le cas d'un palier mésaligné, les axes du coussinet et de l'arbre ne sont plus parallèles (*figure II-8*). Dans ces conditions, l'expression de l'épaisseur du film d'huile est donnée par [1] :

$$h = C \left( 1 + \varepsilon \cos\theta + \delta \frac{z}{L} \cos(\theta - \beta) \right) \quad (\text{II-42})$$

Avec,  $\delta = \frac{d}{C}$  est le mésalignement relatif,  $\beta$  l'angle de mésalignement,  $d$  est l'amplitude de mésalignement caractérisée par le module de la projection de l'axe  $C_1C_2$  de l'arbre sur la section médiane et  $L$  est la longueur du palier.

Le domaine de variation de ces paramètres est :  $0 \leq \delta < \delta_m$  et  $-180^\circ \leq \beta \leq 180^\circ$

$\delta_m$  représente la valeur maximale que peut prendre  $\delta$  pour une excentricité et un angle de mésalignement fixés, dont l'expression est :

$$\delta_m = 2 \left( \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta} - \varepsilon |\cos \beta| \right) \quad (\text{II-43})$$

La valeur de  $\delta_m$  est toujours comprise entre 0 et 2.

$D_m$  est le degré du mésalignement défini par,  $D_m = \frac{\delta}{\delta_m}$ , dont la valeur est comprise entre 0

et 1.

La symétrie du palier par rapport au plan défini par la section médiane permet de réduire l'intervalle de variation de  $\beta$  à  $\pm 90^\circ$ .

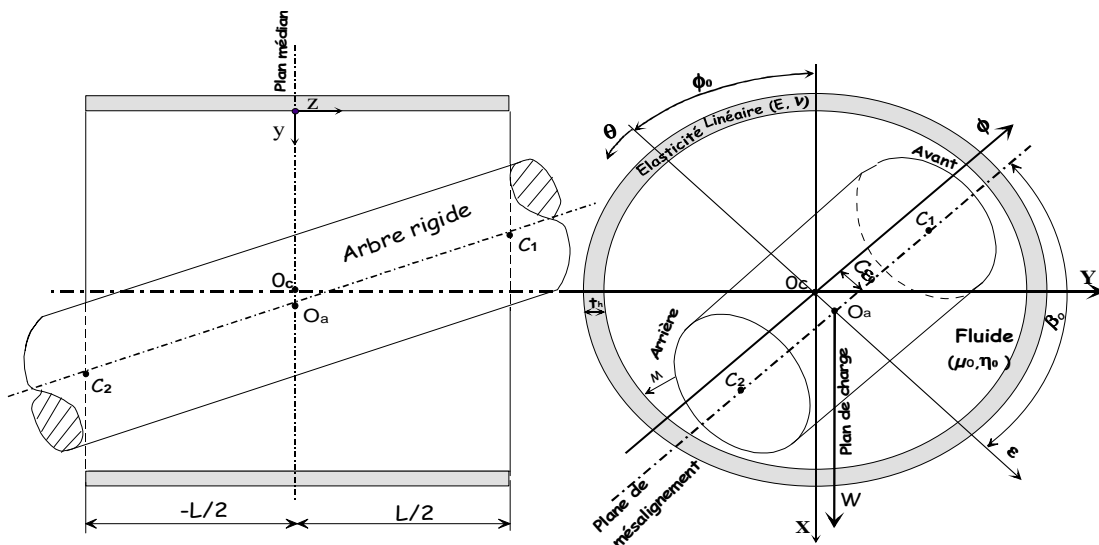


Figure II-8: configuration d'un palier mésaligné

## 6-2. Conditions aux limites

Le champ de pression dans le film lubrifiant doit satisfaire à l'équation de Reynolds et à certaines conditions limites liées à l'alimentation du palier ainsi qu'à l'écoulement du lubrifiant dans le palier.

### 6-2-1. Conditions liées à l'alimentation et à l'environnement du palier

$$\begin{cases} p(\theta = 0) = p_a & \text{dans les rainures d'alimentation axiale du palier} \\ p(z = \pm \frac{L}{2}) = p_{\text{atm}} & \text{pression atmosphérique aux extrémités du palier} \end{cases} \quad (\text{II-44})$$

### 6-2-2. Conditions liées à l'écoulement du lubrifiant

L'équation de Reynolds s'applique que dans les zones où il n'y a pas rupture du film c.-à-d. le milieu est continu (*figure II-9*).

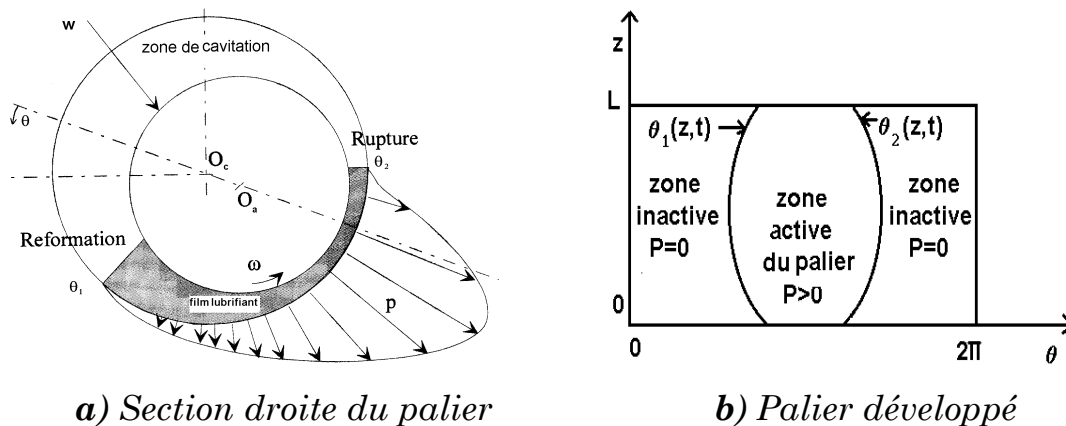


Figure II -9: Présentation des zones active et inactive dans un palier hydrodynamique

On distingue trois types de conditions aux limites [1]:

#### a) conditions de Sommerfeld

Ces conditions ne tiennent pas compte du phénomène de cavitation (*zone dans laquelle on trouve huile mélangé avec l'air*) qui obligeant le film en entier d'être actif (*figure II-10*):

$$\begin{cases} p(\theta = 0) = 0 \\ p(\theta = \pi \text{ ou } 2\pi) = 0 \end{cases} \quad (\text{II-45})$$

La solution de Sommerfeld donne une distribution de pression antisymétrique au point  $\theta = \pi$  pour une position de l'arbre. La solution donne aussi un angle de calage égale  $\frac{\pi}{2}$  par rapport à la direction de charge, ces conditions aux limites ne sont valables que pour des paliers fonctionnant à de très faibles charges ou sous des pressions très élevées.

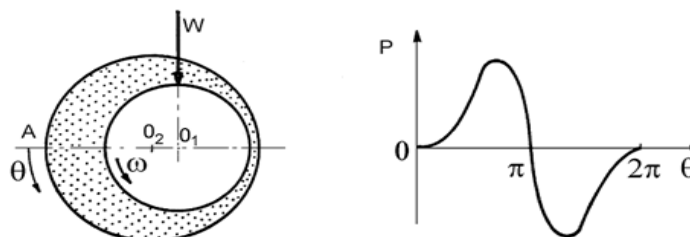


Figure II -10: Conditions de Sommerfeld

### b) Conditions de Gumbel ou de demi-Sommerfeld

Gumbel en 1921, à la suite des travaux de Sommerfeld, propose comme conditions aux limites :

$$\begin{cases} p(\theta = 0, z) = 0 \\ p(\theta = \pi, z) = 0 \\ p(\theta, z) = 0 \quad \text{si } \pi < \theta < 2\pi \quad (\text{étendue de la zone de cavitation}) \end{cases} \quad (\text{II-46})$$

Ces conditions (*figure II-11*) prennent en compte la rupture du film lubrifiant mais elles ne respectent pas la continuité du débit qui est physiquement inacceptable. Cette solution est fréquemment employée dans le cas d'un palier court car elles permettent d'obtenir des résultats proches aux résultats expérimentaux.

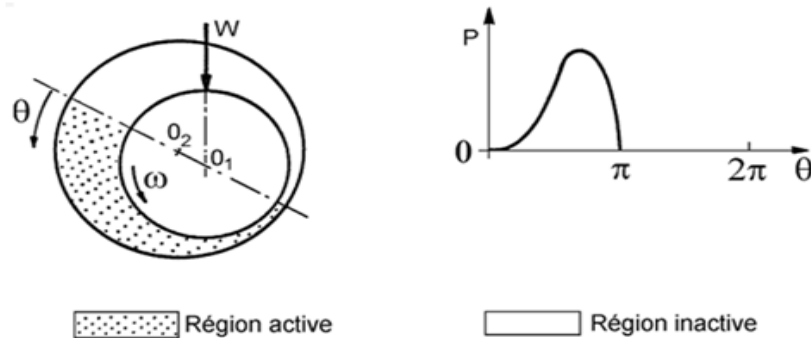


Figure II -11: Conditions de Gumbel

### c) Conditions de Reynolds ou de Swift-Stieber

Ces conditions proposées indépendamment par Swift en 1932 et par Steiber en 1933, respectent la continuité du débit et supposent que pour une abscisse  $\theta_s$  à priori inconnue, appelée angle de cavitation la pression et le gradient de pression s'annulent (*figure II-12*) :

$$\begin{cases} P(\theta = 0, z) = 0 \\ p(\theta = \theta_s, z) = 0 \\ p(\theta, z) = 0 \quad \text{si } \theta_s < \theta < 2\pi \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, z) = 0 \quad (\text{II-47})$$

On distingue ainsi, deux régions dans le palier ; une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de  $\theta$  comprises entre 0 et  $\theta_s$  et une région inactive à pression nulle et dans laquelle en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour  $\theta_s < \theta < 2\pi$ .

Ces conditions sont celles qui donnent les solutions les plus exactes ; elles ont été vérifiées dans de nombreuses études expérimentales.

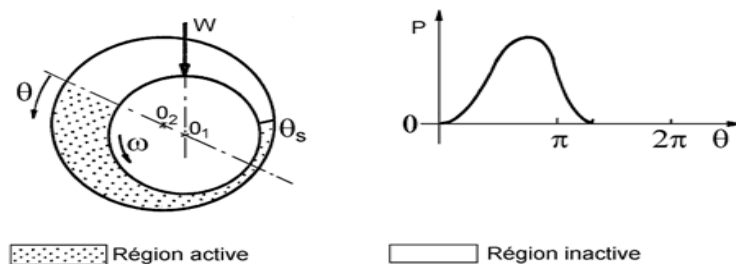


Figure II -12 : Conditions de Reynolds

Les conditions les plus utilisées et relativement proche de la réalité physique sont celles de Swift-Stieber connues sous le nom de conditions de Reynolds, une des difficultés majeures du calcul réside dans la double recherche de la répartition de pression dans le film et la frontière de la zone active du palier.

## 7. Ecriture de l'équation de Reynolds en variables sans dimension

Pour les traitements numériques, il est recommandé de réécrire toutes les équations de la lubrification hydrodynamique en variables sans dimension pour but de diminuer le nombre de paramètres physiques, ainsi en utilisant des paramètres composés sans dimensions, dans le cas d'un palier fluide comme suit :

$$\theta = \frac{x}{R} ; \tilde{z} = \frac{z}{L} ; \tilde{h} = \frac{h}{C} ; \tilde{t} = \omega t ; \text{ et } \tilde{p} = p / \mu \omega \left( \frac{R}{C} \right)^2$$

En remplaçant ces variables réduites dans l'équation de Reynolds (II-35) pour un fluide newtonien incompressible et isovisqueux, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[ \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right] = 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{II-48})$$

### - Equation géométrique adimensionnée

Dans le cas du palier aligné indéformable, l'expression de l'épaisseur du film adimensionnée (II-40) devient :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta \quad (\text{II-49})$$

Pour un palier indéformable mésaligné, l'expression de l'épaisseur du film d'huile adimensionnée (II-42) devient :

$$\tilde{h} = 1 + \varepsilon \cos \theta + \delta \tilde{z} \cos(\theta - \beta) \quad (\text{II-50})$$

## 8. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté d'une part les lois fondamentales de la mécanique des milieux continus et la dérivation de l'équation de Reynolds écrite pour les fluides newtoniens piézo-visqueux et barotropes. D'autre part, l'étude cinématique du palier a conduit à l'écriture de l'équation de Reynolds en régime dynamique dans le cas d'un palier lubrifié par un fluide newtonien piézo-visqueux et barotrope fonctionnant en régime permanent et isotherme.

### Références bibliographiques

[1] Frêne J., Nicolas D., Degueurce B., Berthe D., Godet M., *Lubrification Hydrodynamique : Paliers et butées*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, n° 72, Edition Eyrolle, 1990.

## Chapitre trois

# Analyse théorique et numérique de défaut de mésalignement sur le comportement dynamique linéaire d'un palier hydrodynamique

### 1. Introduction

Les rotors des machines tournantes, telles que les turbines utilisées dans les centrales électriques, comportent des lignes d'arbres caractérisées par des conditions de fonctionnement de plus en plus sévères. Les vibrations excessives des machines tournantes à grande vitesse équipées par des paliers fluides peuvent causer une perte appréciable de la production. Les paliers sont le siège des différents effets physiques et problèmes rencontrés tel que, le défaut de mésalignement. Le mésalignement dans les paliers fluides provient généralement de la déviation de l'arbre, déformation de l'arbre sous charge, défaut d'assemblage et de fabrication. Le mésalignement peut provoquer des effets considérables sur les performances statiques ou dynamiques des paliers hydrodynamiques, il peut provoquer l'usure, vibration et même de dysfonctionnement des machines [1].

Depuis les cinquante dernières années, le mésalignement, que ce soit pour des paliers ou pour des butées, fût un phénomène de plus en plus étudié. Les premiers travaux concernant le problème de mésalignement, en 1922, A. Fisher[2] a montré que le mésalignement pouvait entraîner une différence remarquable dans l'écoulement aux extrémités du palier. S.A. McKee et T.R. McKee en 1932 [3] mesurent les profils de pression dans la direction axiale du palier. R. Piggott [4] montre en 1942 qu'un mésalignement de 0,0002 radian peut réduire la capacité maximale de chargement d'un palier de 40%. En 1949, A. Buske et W. Rolli [5] montrent que le mésalignement perturbe la symétrie axiale de la distribution de champs de pression dans le palier. H. Boucherit et al [6], ont montré que l'existence du mésalignement de l'arbre dans le palier lubrifié par fluide non newtonien ne peut être négligée pour la prédiction des performances statiques et dynamiques des paliers fluides.

Dans la pratique, les causes de mésalignement peuvent être de trois natures :

- Un défaut géométrique d'alignement des coussinets d'une même ligne d'arbre;
- L'existence d'un moment sur l'arbre dû par exemple à la présence d'engrenages hélicoïdaux;
- La flexion de l'arbre.

Dans ce chapitre, on va mettre en évidence l'influence de défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier d'une part sur les performances statiques, tels que la portance hydrodynamique, angle de calage, puissance dissipée et débit moyen volumique d'écoulement de fluide lubrifiant et d'autre part sur la stabilité de palier (*masse critique et la fréquence de fouettement*) d'un palier indéformable de longueur finie lubrifié par fluide newtonien isovisqueux et incompressible.



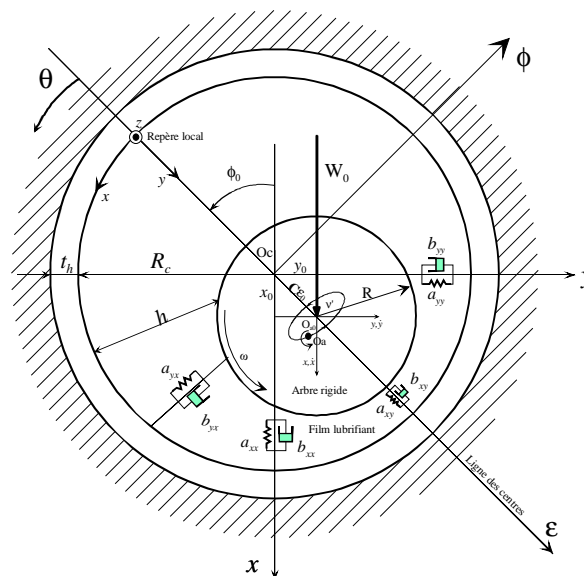
## 2. Analyse dynamique linéaire des paliers fluides

L'analyse dynamique linéaire d'une ligne d'arbre dans le cas des petits mouvements, peut comporter deux étapes :

- Une analyse statique permettant de définir la position d'équilibre de l'arbre dans le palier pour une charge statique imposée ;
- Une analyse dynamique linéaire de la ligne d'arbre autour de sa position d'équilibre statique.

Cette analyse linéaire permet de :

- ✓ de modéliser le film lubrifiant par huit coefficients dynamiques à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement (*figure III-1*);
- ✓ d'établir les cartes de stabilité d'un palier fluide ;
- ✓ d'étudier la réponse linéaire d'un palier à une excitation dynamique synchrone de faible amplitude (*balourd résiduel par exemple*).



**Figure III.1** : Géométrie et modélisation dynamique linéaire du palier.

Pour calculer les coefficients dynamiques de raideur et d'amortissement, on va utiliser la méthode de perturbation ; l'équation des écoulements en film mince ou l'équation de Reynolds écrite pour un palier hydrodynamique lubrifié par fluide newtonien est transformée en un système de trois équations aux dérivées partielles du second ordre.

La résolution de ce système permet de déterminer le champ de pression hydrodynamique statique ( $\mathbf{p}_0$ ) correspondant à la position d'équilibre statique du centre de l'arbre dans le palier fluide et les répartitions de pressions dynamiques complexes ( $\mathbf{p}_\varepsilon$  et  $\mathbf{p}_\phi$ ) dues au mouvement vibratoire de faible amplitude de l'arbre autour de cette position.

La connaissance de la répartition de la pression hydrodynamique statique du film permet de calculer les performances statiques du système (*arbre et coussinet*), tels que la portance hydrodynamique, l'angle de calage, la puissance dissipée, le champ des vitesses moyennes de l'écoulement ainsi que le débit de fuite à l'extrémité du palier.

La connaissance des pressions dynamiques permet de calculer les huit coefficients dynamiques du palier à savoir quatre coefficients de raideur et quatre coefficients d'amortissement.

## 2.1. Méthode de perturbation

Lorsque l'arbre est soumis à des vibrations harmoniques de faibles amplitudes avec une fréquence d'excitation relative ( $\gamma$ ) au voisinage de la position d'équilibre statique ( $O_{a0}$ ) définie par l'excentricité relative statique ( $\varepsilon_0$ ) et l'angle de calage statique ( $\phi_0$ ) (figure III-2), l'excentricité relative et l'angle de calage instantanés peuvent être exprimés par [6]:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \\ \phi = \phi_0 + \phi_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \end{cases} \quad \text{(III-1)}$$

avec,  $i = \sqrt{-1}$

Où,  $\gamma = v^*/\omega$  est la fréquence d'excitation relative,  $\varepsilon_1$  et  $\phi_1$  sont respectivement les amplitudes de perturbation de l'excentricité de fonctionnement et de l'angle de calage, tels que  $\left|\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\right| \ll 1$  et  $\left|\frac{\phi_1}{\phi_0}\right| \ll 1$ .

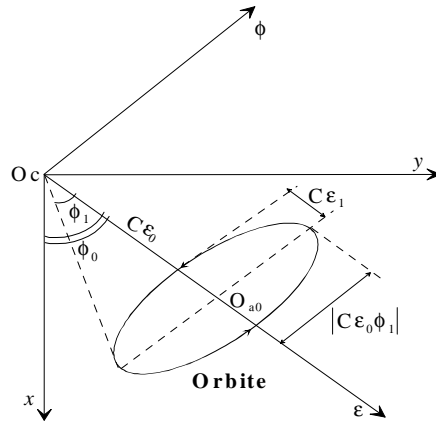


Figure III-2 : Systèmes d'axes et notations.

Le mouvement du centre de l'arbre engendre une perturbation du champ de pression, ce mouvement étant de faible amplitude, la pression dans le film et l'épaisseur du film correspondants peuvent être exprimées en variables réduites comme suit :

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + (\varepsilon_1 \tilde{p}_\varepsilon + \varepsilon_0 \phi_1 \tilde{p}_\phi) e^{i\gamma\tilde{t}} \quad \text{(III-2)}$$

$$\tilde{h} = \tilde{h}_0 + \tilde{h}_1 e^{i\gamma\tilde{t}} \quad \text{(III-3)}$$

Avec,  $\tilde{h}_1 = \varepsilon_1 \cos\theta + \varepsilon_0 \phi_1 \sin\theta$ ,  $\tilde{p}_\varepsilon = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varepsilon}$  et  $\tilde{p}_\phi = \frac{\partial \tilde{p}}{\varepsilon_0 \partial \phi}$

$\tilde{h}_0$  est l'épaisseur du film adimensionnée correspondant à la position d'équilibre statique ( $\varepsilon_0, \phi_0$ ) et  $\tilde{h}_1$  est l'amplitude du déplacement du centre de l'arbre dû à la vibration.

$\tilde{p}_0$  est le champ de pression adimensionné hydrodynamique statique,  $\tilde{p}_\varepsilon$  et  $\tilde{p}_\phi$  sont des pressions dynamiques complexes dues aux déplacements du centre de l'arbre dans les directions de la ligne des centres et sa normale.

En remplaçant les équations III-2 et III-3 dans l'équation de Reynolds II-48 et en négligeant les termes d'ordre supérieur, on obtient le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

a) **Equation aux dérivées partielles d'ordre zéro :**

$$\Re(\tilde{p}_0) = 6 \frac{\partial \tilde{h}_0}{\partial \theta} \quad \text{(III-4)}$$

b) **Equations aux dérivées partielles d'ordre un :**

$$\Re(\tilde{p}_\varepsilon) + 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \cos \theta \right) + 3 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{z}} \cos \theta \right) = -6 \sin \theta + 12i\gamma \cos \theta \quad \text{(III-5)}$$

$$\Re(\tilde{p}_\phi) + 3 \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} \sin \theta \right) + 3 \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \tilde{h}_0^2 \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \bar{z}} \sin \theta \right) = 6 \cos \theta + 12i\gamma \sin \theta \quad \text{(III-6)}$$

Avec,  $\Re(\circ) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \tilde{h}_0^3 \frac{\partial (\circ)}{\partial \theta} \right) + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \tilde{h}_0^3 \frac{\partial (\circ)}{\partial \bar{z}} \right)$

La résolution d'équation d'ordres zéro est effectuée numériquement à l'aide de la méthode des différences finies centrées. Après discrétisation, cette équation est résolue par la méthode de Gauss-Seidel avec coefficient de sur-relaxation.

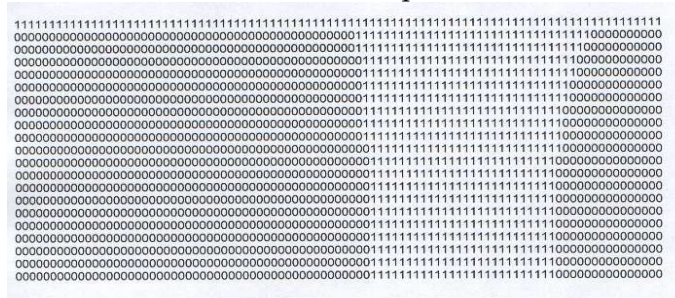
Le champ de pression statique ( $\tilde{p}_0$ ) doit satisfaire à l'équation différentielle d'ordre zéro, ainsi qu'aux conditions limites de Reynolds qui tiennent compte de la rupture du film dans l'espace divergent du palier:

$$\begin{cases} \tilde{p}_0(\theta, \bar{z} = -\frac{1}{2}) = \tilde{p}_0(\theta, \bar{z} = \frac{1}{2}) = 0 \\ \tilde{p}_0 = \frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial \theta} = 0 \quad \text{pour } \theta = \theta_{c0} \end{cases} \quad \text{(III-7)}$$

Où,  $\theta_{c0}$  est l'angle de cavitation qui est une inconnue supplémentaire du problème dont l'origine se trouve sur la ligne des centres.

La détermination de  $\theta_{c0}$ , c'est à dire l'étendue de la zone pressurisée du palier, permet de définir le domaine d'intégration des équations dynamiques d'ordre un (figure III-3).

#### Bord libre du palier



Section médiane du palier développé

0 : Pression positive, 1 : Pression nulle

**Figure III-3 :** Codage des régions active et inactive du demi-palier.

### 3. Etude statique du palier

La détermination de la répartition du champ de pression hydrodynamique statique ( $\tilde{p}_0$ ) dans le film lubrifiant pour une position statique de l'arbre dans le palier permet de

déterminer les performances statiques du palier, tels que la portance hydrodynamique, l'angle de calage, la puissance dissipée, les vitesses moyennes d'écoulement du fluide lubrifiant ainsi que le débit volumique moyen de fuite

### 3.1. Portance hydrodynamique et angle de calage du palier

L'intégration du champ de pression à la surface du coussinet permet de déterminer les composantes de la portance hydrodynamique et l'angle de calage. Dans le repère intermédiaire  $(O_a, \vec{\varepsilon}, \vec{\phi}, \vec{z})$ , les composantes de la portance s'expriment par :

$$\begin{cases} F_{\varepsilon} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_0(\theta, z) \cos \theta R d\theta dz \\ F_{\phi} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\pi} p_0(\theta, z) \sin \theta R d\theta dz \end{cases} \quad (\text{III-8})$$

En variables réduites, les équations III-8 deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{F}_{\varepsilon} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) \cos \theta d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{F}_{\phi} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \tilde{p}_0(\theta, \tilde{z}) \sin \theta d\theta d\tilde{z} \end{cases} \quad (\text{III-9})$$

$$\text{Avec, } (\tilde{F}_{\varepsilon}, \tilde{F}_{\phi}) = \frac{(F_{\varepsilon}, F_{\phi})}{\mu \omega R L \left(\frac{R}{C}\right)^2}$$

De ces deux relations, on peut déterminer les valeurs de la portance hydrodynamique adimensionnée  $(\tilde{W}_0)$  et de l'angle de calage  $(\phi_0)$  du palier fluide, comme suit :

$$\tilde{W}_0 = (\tilde{F}_{\varepsilon}^2 + \tilde{F}_{\phi}^2)^{1/2} \quad (\text{III-10})$$

$$\phi_0 = \tan^{-1} \left( -\frac{\tilde{F}_{\phi}}{\tilde{F}_{\varepsilon}} \right) \quad (\text{III-11})$$

### 3.2. Puissance dissipée

La puissance dissipée est calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse  $(\Phi_0)$  :

$$P_0 = \iiint_V \Phi_0 dx dy dz$$

Avec,  $\Phi_0 = \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right]$  et  $V = [0, 2\pi R] \times [0, h_0] \times [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$  est le volume occupé par le fluide.

Après intégration par rapport à  $y$ , l'expression de la puissance dissipée devient :

$$P_0 = \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{h^3}{12\mu} \left( \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{\mu(\omega R)^2}{h} \right] R d\theta dz \quad (\text{III-12})$$

En variables réduites:

$$\tilde{P}_0 = \left( \frac{C}{\mu \omega^2 R^3 L} \right) P_0 = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{\tilde{h}^3}{12} \left( \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 \right) + \frac{1}{\tilde{h}_0} \right] d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III-13})$$

### 3.3. Forces de frottement

Le calcul des forces de frottement s'effectue par intégration des contraintes de cisaillement (II-22) à la surface de l'arbre où  $y = h$  et du coussinet  $y = 0$ , ainsi, les valeurs des forces de frottement sont calculées à partir des relations suivantes :

$$\begin{cases} F_a = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \tau_{xy} \Big|_{y=h} R d\theta dz \\ F_c = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \tau_{xy} \Big|_{y=0} R d\theta dz \end{cases} \quad \text{(III-14)}$$

avec,  $\tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (2y - h) + \frac{\mu U_2}{h}$

$$\begin{cases} F_a = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \frac{\mu U_2}{h} + \frac{h}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right] R d\theta dz \\ F_c = \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ \frac{\mu U_2}{h} - \frac{h}{2} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \right] R d\theta dz \end{cases} \quad \text{(III-15)}$$

En variables réduites :

$$\begin{cases} \tilde{F}_a = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{1}{\tilde{h}} + \frac{\tilde{h}}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] d\theta d\tilde{z} \\ \tilde{F}_c = \int_0^{2\pi} \int_{-1/2}^{1/2} \left[ \frac{1}{\tilde{h}} - \frac{\tilde{h}}{2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] d\theta d\tilde{z} \end{cases} \quad \text{(III-16)}$$

Avec,  $\begin{Bmatrix} \tilde{F}_a \\ \tilde{F}_c \end{Bmatrix} = \frac{C}{\mu \omega R^2 L} \begin{Bmatrix} F_a \\ F_c \end{Bmatrix}$

- les nombres de frottement sur l'arbre et sur le coussinet se calculent par les relations

suivantes :  $f_a = \frac{\tilde{F}_a}{\tilde{W}_0}$  et  $f_c = \frac{\tilde{F}_c}{\tilde{W}_0}$

### 3-4. Vitesses moyennes de l'écoulement et le débit de fuite

Les vitesses moyennes de l'écoulement du fluide données par l'expression suivante :

$$\begin{cases} u_m = \frac{1}{h} \int_0^h u dy = \frac{\omega R}{2} - \frac{h^2}{12 \times \mu} \frac{\partial p}{R \partial \theta} \\ w_m = \frac{1}{h} \int_0^h w dy = -\frac{h^2}{12 \times \mu} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad \text{(III-17)}$$

Les vitesses moyennes d'écoulement adimensionnées:

$$\begin{cases} \tilde{u} = \frac{u_{moy}}{\omega R} = \frac{1}{2} - \frac{\tilde{h}^2}{12} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \\ \tilde{w} = \frac{L w_{moy}}{\omega R^2} = -\frac{\tilde{h}^2}{12} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \end{cases} \quad \text{(III-18)}$$

Le débit moyen volumique à l'extrémité de palier s'exprime par:

$$Q_+ = \int_0^{2\pi} \int_0^h w_{moy} \Big|_{z=L/2} R dy d\theta \quad \text{(III-19)}$$

- Le débit moyen volumique total adimensionné:

$$\tilde{Q}_{\text{moy}} = |\tilde{Q}_+| + |\tilde{Q}_-| \quad (\text{III-20})$$

En variable, on obtient alors :

$$\tilde{Q} = \left( \frac{L}{C\omega R^3} \right) Q = \left| \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\tilde{h}^3}{6} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right]_{\tilde{z}=\pm 1/2} d\theta \right| \quad (\text{III-21})$$

$$\text{Avec, } \begin{cases} \tilde{Q}_+ = \int_0^{2\pi} \left[ \tilde{h} \tilde{w}_{\text{moy}} \right]_{\tilde{z}=1/2} d\theta \\ \tilde{Q}_- = \int_0^{2\pi} \left[ \tilde{h} \tilde{w}_{\text{moy}} \right]_{\tilde{z}=-1/2} d\theta \end{cases}$$

$\tilde{Q}_+$  et  $\tilde{Q}_-$  sont les débits moyens volumiques adimensionnés à chaque extrémité du palier ( $\tilde{z} = \pm 1/2$ ).

## 4. Etude dynamique linéaire du palier

### 4.1. Coefficients de raideur et d'amortissement

La connaissance de la distribution des champs de pressions dynamiques complexes ( $\tilde{p}_\varepsilon$  et  $\tilde{p}_\phi$ ) permet de déterminer les coefficients de raideur et d'amortissement sans dimension du film lubrifiant, dans le repère intermédiaire lié à la ligne des centres ( $O_c, \varepsilon, \phi$ ) (figure III-1). Les expressions des coefficients dynamiques adimensionnés s'expriment comme suit [6] :

$$\begin{bmatrix} Z_{\varepsilon\varepsilon} & Z_{\varepsilon\phi} \\ Z_{\phi\varepsilon} & Z_{\phi\phi} \end{bmatrix}^T = - \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_\varepsilon \\ \tilde{p}_\phi \end{Bmatrix} \langle \cos \theta : \sin \theta \rangle d\theta d\tilde{z} \quad (\text{III-22})$$

Avec,  $Z_{\varepsilon\phi} = A_{\varepsilon\phi} + i\gamma B_{\varepsilon\phi}$  sont les impédances complexes du palier.

$$\text{Tel que, } A_{ij} = \frac{a_{ij}}{\mu\omega L(R/C)^3} \quad \text{et} \quad B_{ij} = \frac{b_{ij}}{\mu L(R/C)^3}$$

$a_{ij}$  et  $b_{ij}$  sont les coefficients de raideur et d'amortissement du film lubrifiant.

Le changement du système de coordonnées permet d'exprimer les coefficients de raideur et d'amortissement sans dimension dans le repère fixe ( $O_c, X, Y$ ) :

$$\begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{\varepsilon\varepsilon} & A_{\varepsilon\phi} \\ A_{\phi\varepsilon} & A_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\sin \phi_0 \\ \sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{\varepsilon\varepsilon} & B_{\varepsilon\phi} \\ B_{\phi\varepsilon} & B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \sin \phi_0 \\ -\sin \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-23})$$

### 4.2. Système en vibration libre : paramètres de stabilité (fréquence de fouettement et masse critique)

L'influence des paliers sur le comportement vibratoire d'une ligne d'arbre fut pressentie, puis identifiée par B.Newkirk au cours des années 1924-1925 [7]. Il mit en évidence l'existence d'une vibration qui apparaissait lorsque la vitesse critique persistait à une fréquence sensiblement constante lorsque la vitesse de rotation augmentait. Elle fut appelée "fouettement". Depuis, la publication des travaux de Newkirk, des études effectuées sur des rotors rigides confirmèrent le rôle parfois déstabilisant des paliers

lisses. Ces études ont permis d'observer qu'au-delà d'une certaine vitesse de fonctionnement, l'arbre fouettait à l'intérieur du palier avec une fréquence proche de la moitié de la fréquence de rotation. Les paliers hydrodynamiques peuvent constituer une source d'instabilités pour la ligne d'arbre qu'ils supportent due à la présence du film lubrifiant. Il est donc nécessaire d'étudier leur stabilité de fonctionnement.

L'étude de stabilité est effectuée dans le cas d'un rotor rigide de masse  $2\mathbf{M}$  supporté horizontalement par deux paliers lisses identiques lubrifiés avec fluides newtonien. Différents critères de stabilité ont été proposés, le plus utilisé est celui de Routh-Hurwitz [7], dans le système des coordonnées  $(O_c, X, Y)$ , les équations linéarisées du mouvement libre du rotor en variables sans dimension s'écrivent alors :

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-24})$$

Avec,  $\tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$

Où, X et Y sont les composantes dans le repère fixe du déplacement du centre de l'arbre à partir de la position d'équilibre statique  $(O_{a0})$ .

La solution du système d'équations III-24 est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_a \\ \tilde{Y}_a \end{Bmatrix} e^{\lambda \tilde{t}} \quad (\text{III-25})$$

Avec,  $\tilde{X}_a$  et  $\tilde{Y}_a$  sont les amplitudes du mouvement et  $\lambda = \xi + i\gamma$  est une valeur propre complexe,  $\xi$  est l'amortissement structural.

Le signe du coefficient  $\xi$  permet de définir la stabilité du régime de fonctionnement de l'arbre, lorsque :

- $\xi < 0$ , le régime est stable ;
- $\xi > 0$ , le régime est instable.

A la limite de la stabilité,  $\xi = 0$ , le mouvement est purement harmonique ( $\lambda = i\gamma$ ).

La substitution de l'équation III-25 dans l'équation III-24 donne :

$$\begin{bmatrix} A_{XX} + \lambda B_{XX} + \tilde{m}\lambda^2 & A_{XY} + \lambda B_{XY} \\ A_{YX} + \lambda B_{YX} & A_{YY} + \lambda B_{YY} + \tilde{m}\lambda^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-26})$$

Au seuil de la stabilité  $\xi = 0$ , l'équation III-26 s'écrit :

$$\begin{bmatrix} A_{XX} + i\gamma B_{XX} - \tilde{m}\gamma^2 & A_{XY} + i\gamma B_{XY} \\ A_{YX} + i\gamma B_{YX} & A_{YY} + i\gamma B_{YY} - \tilde{m}\gamma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-27})$$

La solution non triviale de l'état permanent est obtenue en annulant le déterminant des coefficients de la matrice, conduit aux équations couplées suivantes :

$$\tilde{m}_c \gamma_c^2 = \frac{A_{xx} B_{yy} + A_{yy} B_{xx} - A_{yx} B_{xy} - A_{xy} B_{yx}}{B_{xx} + B_{yy}} \quad (\text{III-28})$$

$$\gamma_c^2 = \frac{(A_{xx} - \tilde{m}_c \gamma_c^2)(A_{yy} - \tilde{m}_c \gamma_c^2) - A_{yx} A_{xy}}{B_{xx} B_{yy} - B_{xy} B_{yx}} \quad (\text{III-29})$$

A partir de ces deux équations III-28 et III-29, on peut calculer à l'aide d'un processus itératif les paramètres de stabilité sans dimension, la masse critique ( $\tilde{m}_c$ ) et la fréquence de fouettement ( $\gamma_c$ ).

Si, le coefficient  $\gamma_c^2$  est inférieur de zéro, ceci entraîne que le palier est stable ;

Si, le coefficient  $\gamma_c^2$  est supérieur de zéro, alors on peut calculer la masse critique ( $\tilde{m}_c$ ) du rotor. Pour une masse de l'arbre inférieure à la masse critique, le palier est stable. A l'inverse, pour une masse de l'arbre supérieure à la masse critique, le palier est instable.

La vitesse angulaire critique sans dimension du rotor est calculée par :

$$\tilde{\omega}_c = \omega_c \sqrt{\frac{MC}{W_0}} = \sqrt{\tilde{m}_c} \quad (\text{III-30})$$

### 4.3. Système en vibrations forcées : réponse à un balourd résiduel

La trajectoire du centre de l'arbre prédite par l'approche linéaire est toujours de forme elliptique pour un balourd de faible excentricité ( $\epsilon_b$ ). Celle-ci est obtenue à partir de la résolution du système d'équations différentielles suivant (*annexe B*) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}'' \\ \tilde{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}' \\ \tilde{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{m} \epsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-31})$$

Avec,  $\tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$ ,  $\tilde{t} = \omega t$ ,  $\tilde{X} = \frac{X}{C}$ ,  $\tilde{Y} = \frac{Y}{C}$ ,  $\tilde{X}' = \frac{X'}{C\omega}$ ,  $\tilde{Y}' = \frac{Y'}{C\omega}$ ,  $(\tilde{X}'', \tilde{Y}'') = \frac{(X'', Y'')}{C\omega^2}$  et

$$\epsilon_b = \frac{e_b}{C} .$$

## 5. Schéma de résolution du problème

### 5.1. Solution statique

Dans le cas d'un palier lubrifié par un fluide newtonien, l'équation de Reynolds d'ordre zéro (III-4) est discrétisée par la méthode des différences finies centrée bidimensionnelle. Dans un palier, les rayons de l'arbre et du coussinet étant voisins, la courbure du film est négligeable, le palier est alors développé suivant sa direction circonférentielle. On est ainsi ramené à un problème bidimensionnel.

La méthode des différences finies (2D) est utilisée dans le cas d'un palier de longueur finie où l'écoulement du fluide est bidimensionnel. Dans cette méthode, simple à mettre en œuvre pour des géométries de films et d'alimentation régulières, le domaine est discrétisé en rectangles élémentaires appelés mailles (figure III-4). La pression aux nœuds du maillage est l'inconnue nodale, les dérivées partielles de la pression sont évaluées en un point du maillage en fonction des valeurs de la pression aux points environnants.

Si, on considère que la pression à ses extrémités est nulle, dans ces conditions, le domaine de discrétisation de l'équation de Reynolds est  $(0, 2\pi) \times (0, 1)$ .



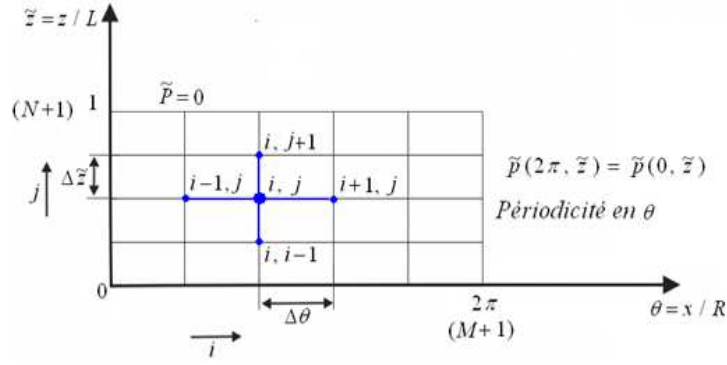


Figure III-4: Maillage du film lubrifiant par la MDF (2D).

M et N sont respectivement les nombres de mailles suivant  $\theta$  et  $\tilde{z}$ .

$\Delta\theta$  et  $\Delta\tilde{z}$  sont respectivement les pas du maillage dans les directions circonférentielle et axiale tel que :

$$\Delta\theta = 2\pi/M$$

$$\Delta\tilde{z} = 1/N$$

Les variables continues  $\theta$  et  $\tilde{z}$  sont remplacées par des variables discrètes, i et j :

$$\tilde{p}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{p}_{ij} \quad \text{et} \quad \tilde{h}(\theta_i, \tilde{z}_j) = \tilde{h}_{ij}$$

Les gradients de pression en un point du maillage sont approchés par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta}\right)_{ij} &= \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - \tilde{p}_{i-1,j}}{2\Delta\theta} \\ \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2}\right)_{ij} &= \frac{\tilde{p}_{i+1,j} - 2\tilde{p}_{ij} + \tilde{p}_{i-1,j}}{(\Delta\theta)^2} \\ \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}}\right)_{ij} &= \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - \tilde{p}_{i,j-1}}{2\Delta\tilde{z}} \\ \left(\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \tilde{z}^2}\right)_{ij} &= \frac{\tilde{p}_{i,j+1} - 2\tilde{p}_{ij} + \tilde{p}_{i,j-1}}{(\Delta\tilde{z})^2} \end{aligned}$$

La méthode des différences finies centrées est utilisée pour la discrétisation de l'équation de Reynolds III-4. Alors, l'équation aux différences s'écrit comme suit :

$$\tilde{p}_{ij} = a_{ij}\tilde{p}_{i+1,j} + b_{ij}\tilde{p}_{i-1,j} + c_{ij}\tilde{p}_{i,j+1} + d_{ij}\tilde{p}_{i,j-1} - e_{ij} \quad (\text{III-32})$$

Où,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \left[ \frac{3\tilde{h}_{ij}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial \theta} + \frac{\tilde{h}_{ij}^3}{(\Delta\theta)^2} \right] \left( \frac{1}{\text{den}_{ij}} \right), \quad b_{ij} = \left[ \frac{\tilde{h}_{ij}^3}{(\Delta\theta)^2} - \frac{3\tilde{h}_{ij}^2}{2\Delta\theta} \frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial \theta} \right] \left( \frac{1}{\text{den}_{ij}} \right), \quad c_{ij} = \left[ \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\tilde{h}_{ij}^3}{(\Delta\tilde{z})^2} \right] \left( \frac{1}{\text{den}_{ij}} \right), \\ d_{ij} &= c_{ij}, \quad e_{ij} = \left[ 6 \frac{\partial(\tilde{h}_{ij})}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial^2 \tilde{h}_{ij}}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{1}{\text{den}_{ij}} \right) \quad \text{et} \quad \text{den}_{ij} = 2 \left( \frac{\tilde{h}_{ij}^3}{(\Delta\theta)^2} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\tilde{h}_{ij}^3}{(\Delta\tilde{z})^2} \right) \end{aligned}$$

L'utilisation de l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficients de sur-relaxation donne :

$$\tilde{p}_{ij}^{(K+1)} = (1 - \Omega)\tilde{p}_{ij}^{(K)} + \Omega \left[ a_{ij}\tilde{p}_{i+1,j}^{(K)} + b_{ij}\tilde{p}_{i-1,j}^{(K+1)} + c_{ij}\tilde{p}_{i,j+1}^{(K)} + d_{ij}\tilde{p}_{i,j-1}^{(K+1)} - e_{ij} \right] \quad (\text{III-33})$$

Où,

K : numéro d'itération ;

$\Omega$  : facteur de sur-relaxation dans la valeur est comprise entre 1 et 2.

Si,  $\Omega = 1$ , on revient la méthode de Gauss-Seidel classique.

Si,  $\Omega = 2$ , la méthode de Gauss-Seidel est non convergente.

Les composantes  $\tilde{F}_\varepsilon$  et  $\tilde{F}_\phi$  de la portance hydrodynamique adimensionnée sont évaluée à l'aide de la formule des trapèzes généralisée :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_\varepsilon \\ \tilde{F}_\phi \end{Bmatrix} = \Delta\theta \Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \tilde{P}_{ij} \begin{Bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{Bmatrix} \quad (\text{III-34})$$

### - Le processus de résolution du problème statique

Le système d'équations algébriques obtenu après discrétisation est résolu à l'aide d'un processus itératif comme suit :

- 1- Lecture des données :  $\varepsilon_0, R/L, \omega, \mu, N_\theta, N_z$  , facteurs de relaxation, critères de convergence et le nombre maximal ;
- 2- Calcul de l'épaisseur de film adimensionnée ( $\tilde{h}_0$ ) ;
- 3- Initialiser le compteur d'itération n à 0 ;
- 4- Initialiser le champ de pression statique adimensionné,  $\tilde{p}_0^{(n)} = 0$  ;
- 5- Calcul du champ de pression hydrodynamique statique adimensionné,  $\tilde{p}_0^{(n+1)}$  par résolution de l'équation de Reynolds d'ordre zéro (III-4) à l'aide de la méthode itérative de Gauss-Seidel avec coefficient de sous-relaxation :
- 6- Vérifier, le critère de convergence :  $\frac{1}{N} \sum_{i,j} \left| \frac{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)} - \tilde{p}_{0ij}^{(n)}}{\tilde{p}_{0ij}^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-5}$ , où N est le nombre total de nœuds pour lesquels la pression est positive, si la convergence n'est pas atteinte, incrémenter le nombre d'itération de 1 et revenir à l'étape 5 ;
- 7- Si, la convergence est atteinte, calculer les performances statiques adimensionnées du palier fluide à partir de leurs équations ;
- 8- Codage de la région active du palier dans laquelle la pression statique ( $\tilde{p}_0$ ) est positive pour la définition du domaine d'intégration des équations différentielles d'ordre un.

### 5.2. Méthode de résolution en régime dynamique

Les calculs des performances dynamiques linéaires dues à de faibles amplitudes de perturbation sont effectués comme suit :

- 1- Donner une valeur initiale de la fréquence relative, par exemple,  $\gamma = 1$  ;
- 2- Résoudre les équations aux dérivées partielles d'ordre un (III-5 et III-6) sur la région active du film pour obtenir des pressions dynamiques complexes adimensionnées ( $\tilde{p}_\varepsilon$  et  $\tilde{p}_\phi$ ) par la méthode des sur-relaxations successive (SOR). Le critère d'arrêt des processus est similaire à celui utilisé pour le calcul du champ de pression hydrodynamique statique ( $\tilde{p}_0$ ) ;
- 3- Calcul des coefficients dynamiques du palier ;
- 4- Calcul des paramètres de stabilité du système ( $\gamma_c$  et  $\tilde{m}_c$ ) à partir des deux équations III-28 et III-29 ;
- 5- Comparer la valeur estimée initialement  $\gamma$  avec la valeur calculée  $\gamma_c$ .
  - Si, le test  $\left| \frac{\gamma - \gamma_c}{\gamma_c} \right| \leq 10^{-4}$  n'est pas satisfait, on pose  $\gamma = \gamma_c$  et retour à l'étape 2.

Une valeur négative de  $\gamma_c^2$  signifie que la position de fonctionnement définie en coordonnées polaires ( $\varepsilon_0, \phi_0$ ) est stable.

## 6. Résultats et discussions

### 6-1. Validation du programme développé

Pour valider le programme de calcul développé pour l'étude des effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur le comportement dynamique linéaire d'un palier de longueur finie, il est nécessaire de faire une comparaison des résultats obtenus à partir de la présente étude avec ceux qui disponibles dans la littérature.

Les caractéristiques statiques sont présentés dans le tableau III-1, tels que le nombre de Sommerfeld, angle de calage et le nombre de frottement sur l'arbre pour une excentricité relative statique varie de 0.1 au 0.9, d'un palier rigide de longueur finie ( $R/L = 0.5$ ), lubrifié avec un fluide newtonien.

Comme il montre dans le tableau III-1, les résultats obtenus sont en bonne concordance avec ceux qui publiés par Nicolas [8].

**Tableau III-1:** Comparaison de quelques performances statiques d'un palier de longueur finie ( $R/L = 0.5$ ) lubrifié par fluide newtonien.

$\varepsilon$		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\phi$	a	79.5	68	56.5	44	26
	b	79.39	68.25	56.69	43.82	26.34
	c	<b>0.1383</b>	<b>0.3676</b>	<b>0.3315</b>	<b>0.4090</b>	<b>1.3076</b>
S	a	1.33	0.388	0.178	0.0776	0.0185
	b	1.33	0.390	0.179	0.0781	0.0190
	c	<b>0.00</b>	<b>0.5154</b>	<b>0.00</b>	<b>0.2570</b>	<b>2.7027</b>
$f_a$	a	25.36	7.35	3.67	1.99	0.859
	b	26.52	8.21	4.29	2.40	1.063
	c	<b>4.5741</b>	<b>11.7006</b>	<b>14.2523</b>	<b>16.7364</b>	<b>23.7485</b>

Avec : (a) résultats de référence [8]

(b) résultats de travail présenté

(c) l'écart en les deux résultats en (%).

### 6-2. Etude paramétrique

L'étude paramétrique menée dans ce travail permet de mettre en évidence les effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur quelques performances statiques et la stabilité (*masse critique et la fréquence de fouettement*) d'un palier lisse de longueur finie lubrifié par un fluide newtonien isovisqueux et incompressible, dont les caractéristiques géométriques, les conditions de fonctionnement et les propriétés physiques du lubrifiant sont portés dans le suivant (tableau III-2) :

**Tableau III-2:** Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement.

Caractéristiques géométriques	
- Longueur du palier, L	$50 \times 10^{-3}$ m
- Rayon de l'arbre, R	$25 \times 10^{-3}$ m
- Jeu radial, C	$35 \times 10^{-5}$ m
Conditions de fonctionnement	
- Masse du rotor affectée au palier, M	$2 \times$ kg

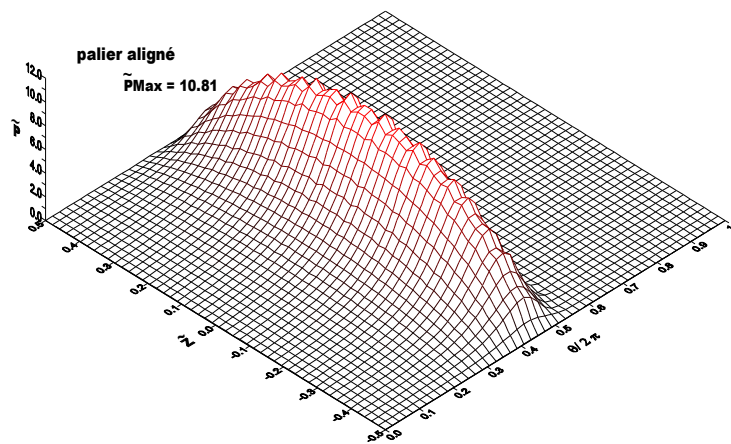
- Vitesse angulaire de l'arbre, $\omega$	100 $\times \pi$ rad/s
<b>Propriétés du lubrifiant, ISO VG 32 à 40°C</b>	
- Viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique, $\mu_0$	0.027 Pa.s
- Masse volumique, $\rho$	870 kg/m <sup>3</sup>

### 6.2.1. Effets de défaut de mésalignement sur la distribution du champ de pression

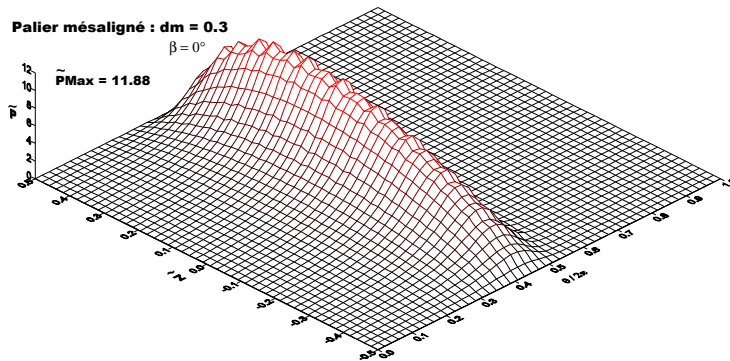
Pour mettre en évidence les effets de défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier fluide, les résultats graphiques seront présentés pour un palier aligné,  $D_m = 0.0$  et un palier mésaligné, en considérant trois types de mésalignement, les plus significatifs caractérisés par les paramètres suivants : faible mésalignement,  $D_m = 0.30$  et  $\beta = 0^\circ$ , mésalignement modéré,  $D_m = 0.60$ ,  $\beta = 0^\circ$  et fort mésalignement,  $D_m = 0.90$ ,  $\beta = 0^\circ$ .

La figure III-5 présente les distributions du champ de pression statique adimensionnée en 3D dans le film lubrifiant d'un palier lubrifié par fluide newtonien pour une excentricité relative statique imposée,  $\epsilon_0 = 0.80$ .

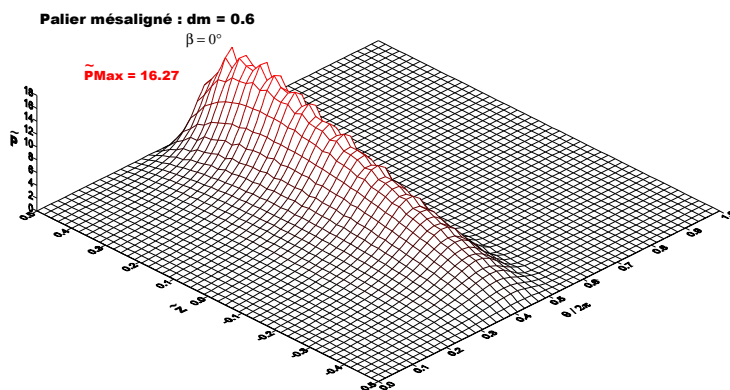
Les résultats montrent que le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier conduit à une augmentation significative du pic de pression dans le film lubrifiant. En outre, la valeur de la pression maximale croît quand le degré de mésalignement augmente, par exemple pour forte mésalignement ( $D_m = 0.9$ ) est de l'ordre de 44% par rapport au palier aligné et son point d'application se rapproche d'une des extrémités du palier (figure III-5.d).



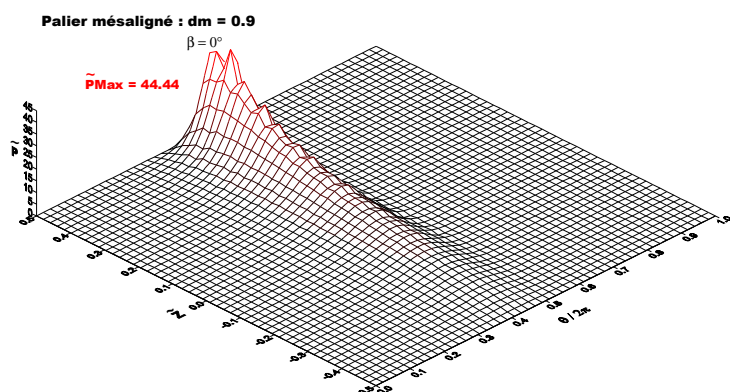
a) palier aligné :  $D_m = 0$



b) palier mésaligné :  $D_m = 0.3$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



c) palier mésaligné :  $D_m = 0.6$  et  $\beta_0 = 0^\circ$



d) palier misaligné :  $D_m = 0.9$  et  $\beta_0 = 0^\circ$

Figure III-5 : Présentation du champ de pression statique adimensionné ( $\epsilon_0 = 0.8$ ).

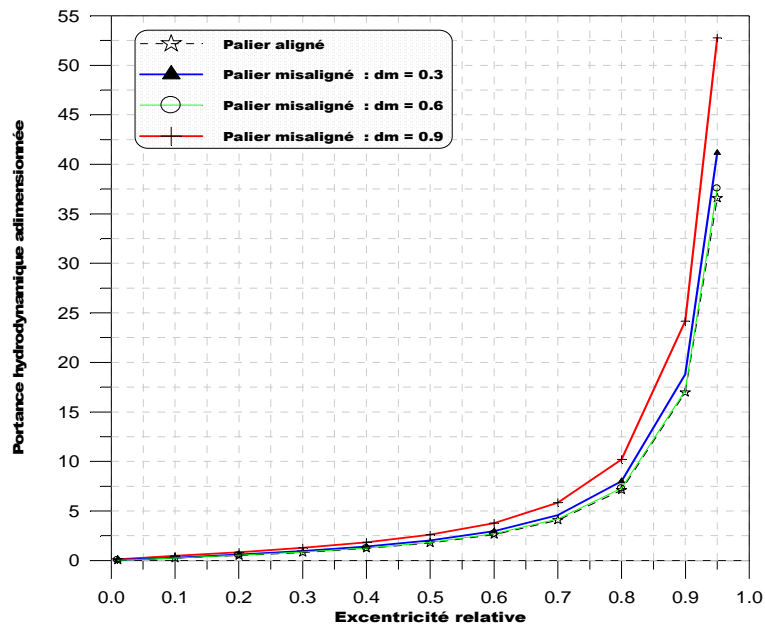
### 6.2.2. Effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur les performances statiques de palier

Les performances statiques ont été obtenues pour une excentricité relative statique ( $\epsilon_0$ ) variant de 0.01 à 0.90 d'un palier lisse lubrifié par fluide newtonien fonctionnant dans le

cas aligné,  $D_m = 0.0$  et mésaligné en considérant trois types de mésalignement : faible mésalignement,  $D_m = 0.30$  et  $\beta = 0^\circ$ , mésalignement modéré,  $D_m = 0.60$ ,  $\beta = 0^\circ$  et fort mésalignement,  $D_m = 0.90$ ,  $\beta = 0^\circ$ .

La figure III-6 présente les variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique dans le cas d'un palier aligné et d'un palier mésaligné. On observe une augmentation significative de la portance hydrodynamique adimensionnée de palier avec l'augmentation de degré de mésalignement surtout pour des grandes valeurs d'excentricité relative statique ( $\epsilon_0$ ).

On peut conclure que le mésalignement de l'arbre dans le palier permet d'augmenter la capacité de charge de palier comparativement au palier aligné.



**Figure III-6 :** Variations de la portance hydrodynamique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique.

Les variations de la puissance dissipée adimensionnée dans le film lubrifiant en fonction de l'excentricité relative statique pour les deux cas du palier étudié (*aligné et mésaligné*) sont présentées sur la figure III-7.

Comme montre la figure, les effets de mésalignement de l'arbre dans le palier conduit à une augmentation significative de la puissance dissipée dans le film lubrifiant surtout pour fort mésalignement.

Le mésalignement de l'arbre dans le palier fluide conduit d'augmenter sensiblement les pertes par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement mésaligné.

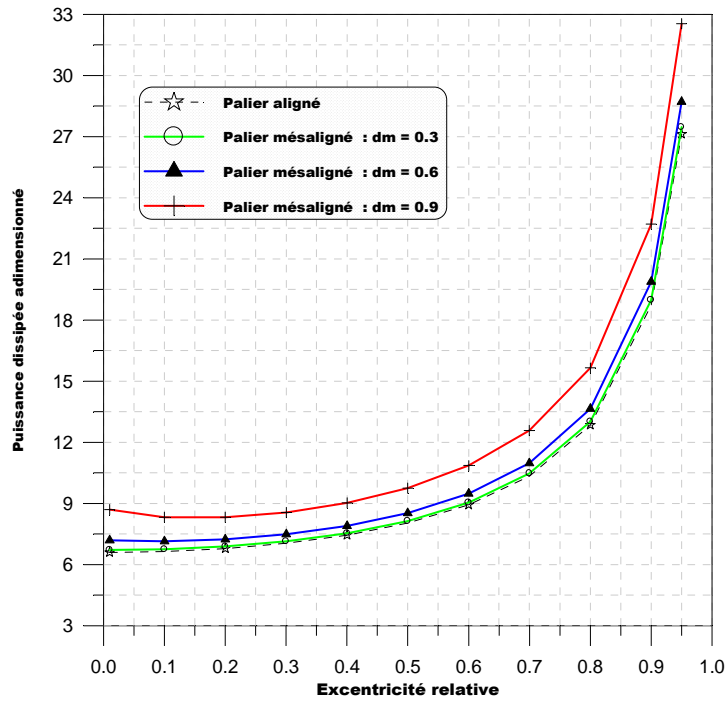


Figure III-7: Variations de la puissance dissipée adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique.

Les variations de l'angle de calage statique de palier en fonction de l'excentricité relative statique pour les deux types de palier étudié, cas aligné et cas mésaligné sont présentées sur la figure III-8.

On constate que la valeur de l'angle de calage de palier diminue de façon remarquable avec l'augmentation de degré de mésalignement surtout pour un palier faiblement chargé.

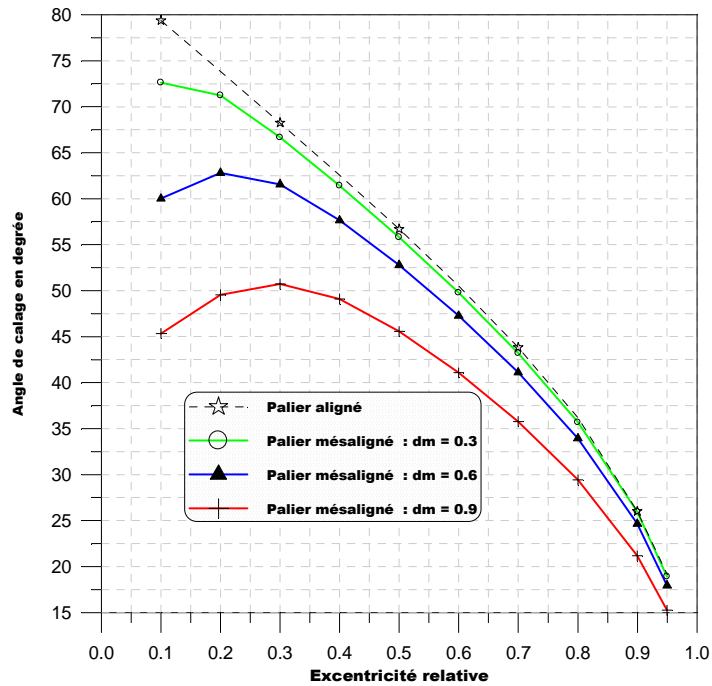


Figure III-8: Variations de l'angle de calage statique en fonction de l'excentricité relative statique.

La figure III-9 présente les variations de débits volumiques moyens d'écoulement du fluide dans palier en fonction de l'excentricité relative statique, pour les deux types de palier (*palier aligné et palier mésaligné*).

On remarque, d'une part que le débit de fuit augmente avec l'augmentation de degré de mésalignement pour des faibles valeurs de l'excentricité relative statique (*palier faiblement chargé*) et d'autre pour un palier moyennement et lourdement chargé le débit de fuit reste presque le même sans changement significatif.

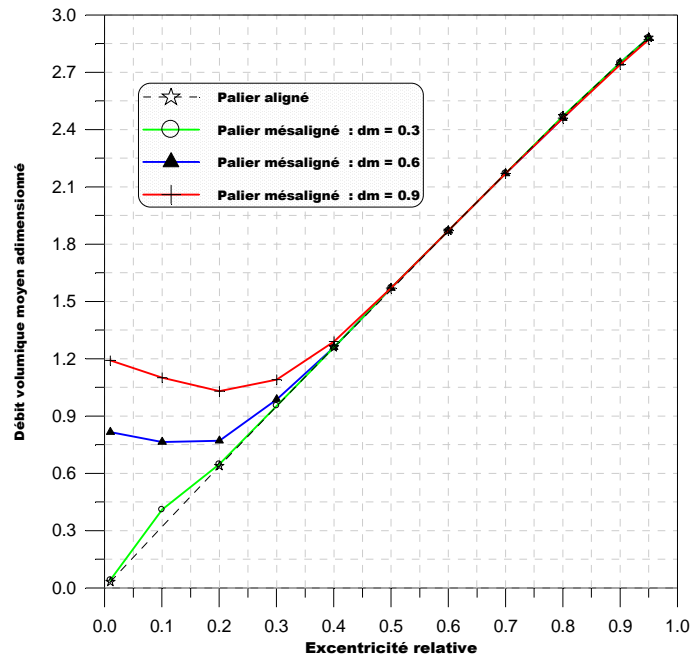


Figure III-9 : Variations du débit de fuite moyen adimensionné en fonction de l'excentricité relative statique.

### 6.2.3. Effets de défaut de mésalignement sur les paramètres de stabilité de palier : masse critique et fréquence de fouettement

A partir des huit coefficients dynamiques obtenus après calcul, les cartes de stabilité du système rotor-palier sont déterminées et tracées pour un palier lisse lubrifié par fluide newtonien fonctionnant dans les deux cas : palier aligné,  $D_m = 0.0$  et palier mésaligné (*faible mésalignement*,  $D_m = 0.30$  et  $\beta = 0^\circ$ , *mésalignement modéré*,  $D_m = 0.60$ ,  $\beta = 0^\circ$  et *fort mésalignement*,  $D_m = 0.90$ ,  $\beta = 0^\circ$ ).

Les figures III-10 et III-11 présentent les variations de la masse critique et de la fréquence de fouettement (*paramètre de stabilité*) en fonction de l'excentricité relative statique pour les deux cas, palier aligné et mésaligné, pour pouvoir connaître l'influence de mésalignement de l'arbre sur la stabilité des paliers fluides des rotors des machines tournantes.

Les résultats montrent que le mésalignement de l'arbre dans le palier augmente sensiblement la stabilité du système rotor-palier. Cette stabilité est d'autant plus importante que le palier fortement mésaligné et faiblement chargé.

En conséquence, le palier mésaligné même lorsqu'il est peu chargé est plus stable que celui aligné.



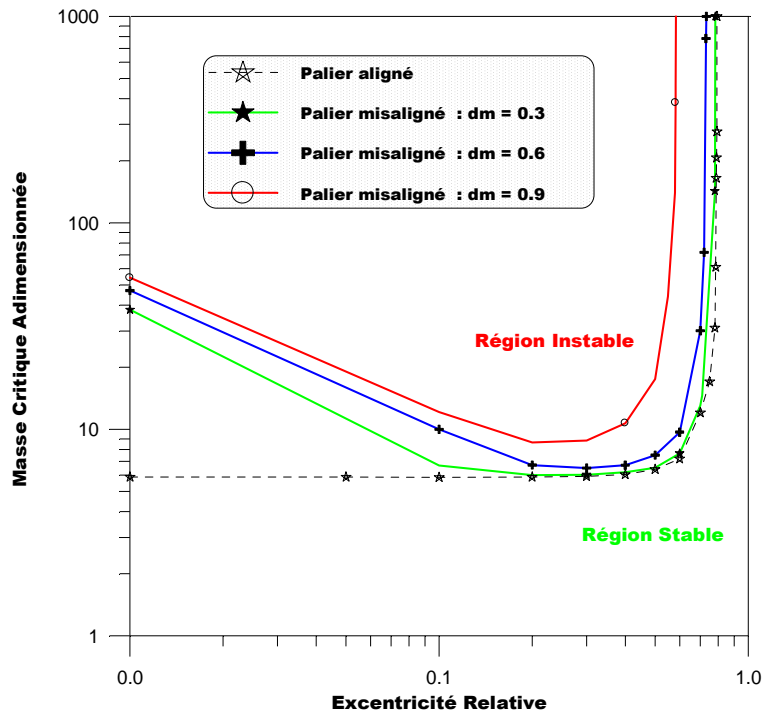


Figure III-10 : Variations de la masse critique adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique.

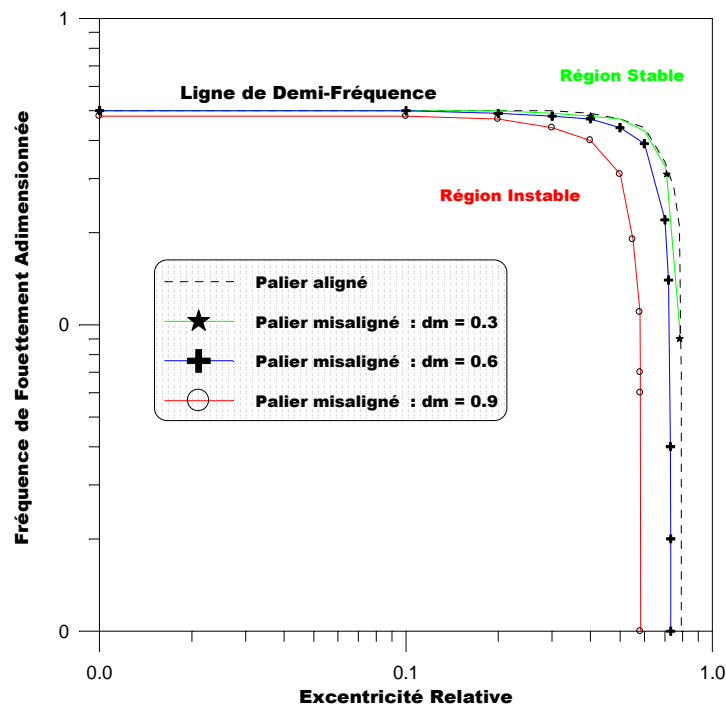


Figure III-11 : Variations de la fréquence de fouettement adimensionnée en fonction de l'excentricité relative statique.

## 7. Conclusion

Après présentation des équations du problème dynamique linéaire et validation de programme de calcul développé, on a étudié, les effets de la présence de défaut de mésalignement de l'arbre sur les performances statiques et dynamiques linéaires d'un

palier lisse lubrifié par fluide newtonien. Selon les résultats obtenus, des conclusions peuvent être tirées comme suit :

- le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier conduit à une augmentation significative du pic de pression dans le film lubrifiant ;
- la valeur de la pression maximale croît quand le degré de mésalignement augmente et son point d'application se rapproche d'une des extrémités de palier ;
- le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier permet d'augmenter la capacité de charge de palier comparativement au palier aligné.
- l'angle de calage de palier diminue de façon remarquable avec l'augmentation de degré de mésalignement surtout pour un palier faiblement chargé ;
- le débit de fuit augmente avec l'augmentation de degré de mésalignement pour palier faiblement chargé et reste presque le même sans changement significatif pour un palier moyennement ou lourdement chargé;
- le mésalignement de l'arbre dans le palier augmente sensiblement la stabilité du système rotor-palier surtout pour le palier fortement mésaligné et faiblement chargé ;
- le palier mésaligné même lorsqu'il est peu chargé est plus stable que celui aligné.

### **References bibliographies**

[1] J. Young Jang, M. Khonsari, 'On the Characteristics of Misaligned Journal Bearings', *Journal Lubrificants*, 3, 27-53, 2015.

[2] A. Fisher, 'Oil flow in ring lubricated bearings. *Machinery*', London, 21 : 311, 1922.

[3] S.A. McKee and T.R. McKee, 'Pressure distribution in oil films of journal bearings'. *ASME RP-54-8*, 5 :149-165, 1932.

[4] R.J.S. Piggott, 'Bearings and lubrication, bearing troubles traceable to design can be avoided by engineering study'. *Mech. Engng*, 64 :259, 1942.

[5] A. Buske and W. Rolli, 'Measurements of oil-film pressures in bearings under constant and variable loads'. *NACA*, page 43, 1949.

[6] H. BOUCHERIT, M. LAHMAR et B. BOU-SAÏD, 'Misalignment effects on steady-state and dynamic behaviour of compliant journal bearings lubricated with couple stress fluids', *Journal of Lubrication Science*, Vol. 20 (2008), pp. 241-268, John Wiley Editor, 2008.

[7] B.L. , Newkirk, et L.P., Grobel, 'Oil-film whirl-A nonwhirling bearing', *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 59, 607, 1934.

[8] N. Nicolas, 'Les paliers hydrodynamiques soumis à un torseur de forces quelconque'. *Thèse de Docteur Ingénieur, Lyon*, 1972

## Chapitre IV

# Analyse théorique et numérique de défaut de mésalignement sur le comportement dynamique non linéaire des paliers hydrodynamiques

### 1. Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier théoriquement et numériquement le comportement dynamique non linéaire d'un palier lisse mésaligné lubrifié par fluide newtonien qui nous permettra la prédiction des effets de la présence de défaut de mésalignement de l'arbre sur les variations de l'épaisseur minimale du film lubrifiant en fonction du temps et les trajectoires du centre de l'arbre dans le palier.

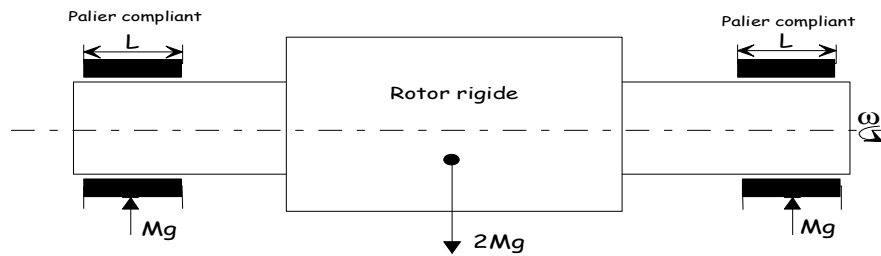
Le rôle du palier hydrodynamique dans l'analyse dynamique d'une ligne d'arbre des machines tournantes est caractérisé par les forces hydrodynamiques engendrées par le champ de pression dans le film lubrifiant, celles-ci sont obtenues par intégration du champ de pression calculé à partir de l'équation de Reynolds écrite en régime dynamique, ces forces sont des fonctions non linéaires de la position et de la vitesse du centre de l'arbre.

L'hypothèse des petits déplacements au voisinage de la position d'équilibre ne permet pas de prévoir le comportement d'une ligne d'arbre au-delà du seuil de stabilité ou sous l'effet de fortes charges dynamiques. Dans ces conditions, il est alors nécessaire de résoudre simultanément l'équation de Reynolds en régime dynamique et les équations du mouvement de l'arbre.

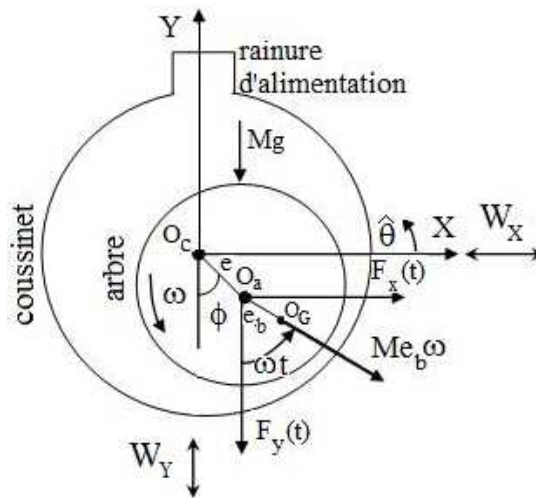
Pour cette étude, on va utiliser un modèle d'arbre simplifié de masse  $2M$  en supposant celui-ci indéformable et supporté symétriquement dans deux paliers identiques (*figure IV-1*). A chaque palier est attribuée une masse  $M$  du rotor, les types de charges agissant sur l'arbre sont :

- Charge statique représentée par le poids du rotor affecté au palier,  $W_0 = Mg$  ;
  - Charge dynamique représentée par la force due au Balourd,  $W_b(t)$  (*excitation dynamique synchrone*) caractérisée par l'excentricité  $e_b$ , dont le module est :  
 $|\vec{W}| = M.e_b\omega^2$  (*figure IV-2*) ;
  - Action du fluide sur l'arbre représentée par les composants,  $F_x$  et  $F_y$  ;
  - Forces d'inertie,  $M\ddot{x}$  et  $M\ddot{y}$  ;
  - Composantes  $W_x$  et  $W_y$  d'une excitation dynamique extérieure  $\vec{W}(t)$  .
- $(o_c, \bar{x}, \bar{y})$  est le repère fixe lié au coussinet tel que  $\vec{o_x}$  soit parallèle à la charge statique.
- $O_c$  est le centre géométrique de palier repéré soit par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  que les coordonnées polaires  $(e, \phi)$ .

Dans cette étude, il est plus commode d'utiliser les coordonnées cartésiennes (x, y) que les coordonnées polaires (e,  $\phi$ ) car les équations du mouvement sont plus simples à écrire.



FigureIV-1 : Schéma du système rotor-palier pour l'analyse dynamique non linéaire.



FigureIV-2 : Section droite du palier et bilan des forces statiques et dynamique agissant sur l'arbre.

## 2. Equations du problème dynamique non linéaire

### 2-1. Equation de Reynolds en variables sans dimension

Dans le deuxième chapitre, on a montré qu'en régime dynamique l'équation de Reynolds normalisées en variables sans dimensions dans le cas d'un palier lisse lubrifié par fluide newtonien en régime isotherme s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \right] + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[ \tilde{h}^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right] = 6 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{IV-1})$$

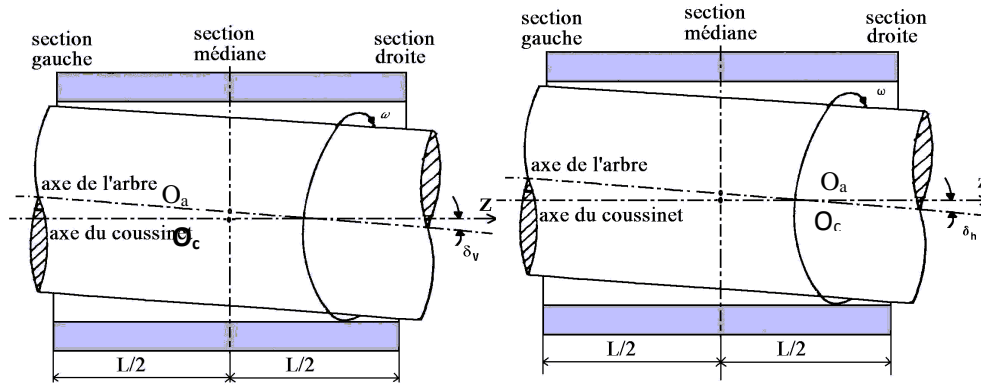
#### - Equation géométrique de film adimensionnée

Pour un palier mésaligné l'expression du film d'huile adimensionnée en coordonnées cartésiennes (x,y) est donnée par la formule suivante [1] (figure IV-3) :

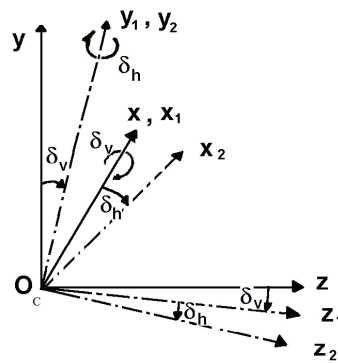
$$\tilde{h} = \left[ 1 - \tilde{x} \cos \theta - \tilde{y} \sin \theta + \tilde{z} \left( \frac{R}{C} \right) (\delta_h \cos \theta - \delta_v \sin \theta) \right] \quad (\text{IV-2})$$

Avec,  $\delta_v$  et  $\delta_h$  sont les paramètres de mésalignement adimensionnés.

- Si,  $\delta_v = 0$  et  $\delta_h \neq 0$  : il s'agit d'un mésalignement horizontal de l'arbre dans le plan perpendiculaire au plan contenant le vecteur charge (*figure IV-3-a*).
- Si,  $\delta_v \neq 0$  et  $\delta_h = 0$  : il s'agit d'un mésalignement vertical de l'arbre dans le plan axial contenant le vecteur charge (*figure IV-3-b*)



**a) Mésalignement vertical (plan  $y-z$ )    b) Mésalignement horizontal (plan  $x-z$ )**



**c) Angles de mésalignement**

**Figure IV-3 : Configuration géométrique d'un palier mésaligné.**

La connaissance à un instant ( $t$ ) donné de  $\tilde{x}, \tilde{y}, \frac{d\tilde{x}}{dt}, \frac{d\tilde{y}}{dt}$  permet de calculer  $\tilde{h}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \theta}, \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}$  et de rechercher le champ de pression qui une fois intégré, donne les valeurs des composantes de la portance hydrodynamique adimensionnées ( $\tilde{F}_x, \tilde{F}_y$ ) dans le repère fixe lié au coussinet :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_x(\tilde{t}) \\ \tilde{F}_y(\tilde{t}) \end{Bmatrix} = \int_{-1/2}^{1/2} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(\theta, \tilde{z}, \tilde{t}) \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} d\theta d\tilde{z} \quad (\text{IV-3})$$

## 2-2. Equations du mouvement de l'arbre

L'application du principe fondamental de la dynamique au mouvement de l'arbre permet d'écrire :

$$\vec{Mg} + \vec{F}(t) + \vec{W}_b(t) + \vec{W}(t) = \vec{M}\vec{\gamma} \quad (\text{IV-4})$$

Dans le cas d'absence d'une excitation dynamique extérieure ( $\vec{W}(t) = 0$ ), la projection de l'équation IV-4 sur les axes  $\vec{o}_c\vec{x}$  et  $\vec{o}_c\vec{y}$  donne :

$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg + F_x(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + Me_b\omega^2 \cos(\omega t) \\ M\ddot{y} = F_y(x, y, \dot{x}, \dot{y}) + Me_b\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (\text{IV-5})$$

### 2-2-1. Equations de mouvement en variables sans dimension

En divisant les équations IV-5 par  $M\mathcal{C}v^2$  les équations de mouvement deviennent :

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{F}_x + \frac{\varepsilon_b}{\gamma^2} \cos(\tilde{t}) \\ \tilde{y}'' = \alpha_2 \tilde{F}_y + \frac{\varepsilon_b}{\gamma^2} \sin(\tilde{t}) \end{cases} \quad (\text{IV-6})$$

Avec,  $\gamma = \frac{v}{\omega}$ ,  $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$ ,  $\alpha_1 = \frac{g}{Cv^2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{\mu_s \omega L}{Mv^2} \left(\frac{R}{C}\right)^3$  et  $(\tilde{F}_x, \tilde{F}_y) = \frac{(F_x, F_y)}{\mu \omega RL \left(\frac{R}{C}\right)^2}$

Comme le balourd est une excitation dynamique synchrone, on a,  $\gamma = \frac{v}{\omega} = 1$  ( $\gamma$  étant la fréquence d'excitation relative,  $v = \omega$ ).

Les équations IV-6 constituent un système de deux équations différentielles du second ordre.

### 3. Résolution des équations de mouvement

Le système différentiel IV-6 peut être résolu par une méthode d'intégration explicite d'Euler qui peut se présenter de la façon suivante:

$$\begin{cases} \tilde{x}'(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}'(\tilde{t}) + \tilde{x}''(\tilde{t})\Delta\tilde{t} \\ \tilde{x}(\tilde{t} + \Delta\tilde{t}) = \tilde{x}(\tilde{t}) + \tilde{x}'(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})\Delta\tilde{t} \end{cases} \quad (\text{IV-7})$$

Et des équations similaires pour la vitesse et le déplacement suivant Y.

#### - Le processus de calcul est le suivant :

- A l'instant  $\tilde{t}$ , pour une position  $(\tilde{x}(\tilde{t}), \tilde{y}(\tilde{t}))$  et des vitesses  $(\tilde{x}'(\tilde{t}), \tilde{y}'(\tilde{t}))$  données, on résout l'équation de Reynolds (IV-1) et on en déduit les forces  $\tilde{F}_x(\tilde{t})$  et  $\tilde{F}_y(\tilde{t})$  (IV-3) ;
- Le système différentiel IV-6 permet alors de calculer les composantes de l'accélération  $\tilde{x}''(\tilde{t})$  et  $\tilde{y}''(\tilde{t})$  ;
- La vitesse et la position à l'instant  $(\tilde{t} + \Delta\tilde{t})$  sont déterminées à partir du système d'équations IV-7, le processus de calcul est alors repris en (a).

Il faut souligner que le problème de l'intégration numérique est assez délicat, le choix du pas de temps est important. En effet, des pas trop petits entraînent un temps de calcul important alors que des pas plus grands rendent le processus divergent.

La valeur  $\Delta \tilde{t}$  est fonction de la nature du problème étudié, en général comprise entre  $\left(\frac{2\pi}{200}\right)$  et  $\left(\frac{2\pi}{50}\right)$ , pour la réponse à un balourd par exemple, il est difficile de le prévoir à priori[1].

Pour valider le choix du pas de temps, il faut vérifier à ce que l'excentricité relative instantanée ( $\varepsilon = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ ) soit inférieure à l'unité.

#### 4. Résolution de l'équation de Reynolds

La méthode de discrétisation retenue dans ce chapitre est celle des différences finies centrées bidimensionnelle (2D) (figure III-4). Après discrétisation de l'équation de Reynolds IV-1 s'écrit comme suit :

$$\tilde{p}_{ij} = a_{ij}\tilde{p}_{i+1,j} + b_{ij}\tilde{p}_{i-1,j} + c_{ij}\tilde{p}_{i,j+1} + d_{ij}\tilde{p}_{i,j-1} - e_{ij} \quad (\text{IV-8})$$

Où,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij} = \left[ \frac{\tilde{h}^3}{(\Delta \theta)^2} + \frac{1}{2 \Delta \theta} \frac{\partial \tilde{h}^3}{\partial \theta} \right] \frac{1}{\text{den}_{ij}} \\ b_{ij} = \left[ \frac{\tilde{h}^3}{\Delta \theta^2} - \frac{1}{2 \Delta \theta} \frac{\partial \tilde{h}^3}{\partial \theta} \right] \frac{1}{\text{den}_{ij}} \\ c_{ij} = \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left[ \frac{\tilde{h}^3}{\Delta \tilde{z}^2} + \frac{1}{2 \Delta \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{h}^3}{\partial \tilde{z}} \right] \frac{1}{\text{den}_{ij}} \\ d_{ij} = \left( \frac{R}{L} \right)^2 \left[ \frac{\tilde{h}^3}{\Delta \tilde{z}^2} - \frac{1}{2 \Delta \tilde{z}} \frac{\partial \tilde{h}^3}{\partial \tilde{z}} \right] \frac{1}{\text{den}_{ij}} \\ e_{ij} = \left[ 6 \frac{\partial \tilde{h}_{ij}}{\partial \theta} + 12 \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} \right] \frac{1}{\text{den}_{ij}} \end{array} \right.$$

$$\text{den}_{ij} = \left[ 2\tilde{h}^3 \left( \frac{1}{\Delta \theta^2} + \left( \frac{R}{L} \right)^2 \frac{1}{\Delta \tilde{z}^2} \right) \right]$$

L'utilisation de l'algorithme de Gauss-Seidel avec coefficients de sur-relaxation donne :

$$\tilde{p}_{ij}^{(K+1)} = (1 - \Omega)\tilde{p}_{ij}^{(K)} + \Omega \left[ a_{ij}\tilde{p}_{i+1,j}^{(K)} + b_{ij}\tilde{p}_{i-1,j}^{(K+1)} + c_{ij}\tilde{p}_{i,j+1}^{(K)} + d_{ij}\tilde{p}_{i,j-1}^{(K+1)} - e_{ij} \right] \quad (\text{IV-9})$$

Où,

K : numéro d'itération ;

$\Omega$  : facteur de sur-relaxation dans la valeur est comprise entre 1 et 2 ;

Si,  $\Omega = 1$ , on obtient la méthode de Gauss-Seidel classique ;

Si,  $\Omega = 2$ , la méthode de Gauss-Seidel est non convergente.

Les composantes  $\tilde{F}_x$  et  $\tilde{F}_y$  de la portance hydrodynamique adimensionnée sont évaluée à l'aide de la formule des trapèzes généralisée :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}_x \\ \tilde{F}_y \end{Bmatrix} = \Delta\theta \Delta\tilde{z} \sum_{i=2}^M \sum_{j=2}^N \tilde{p}_{ij} \begin{Bmatrix} \cos \theta_i \\ \sin \theta_i \end{Bmatrix} \quad \text{(IV-10)}$$

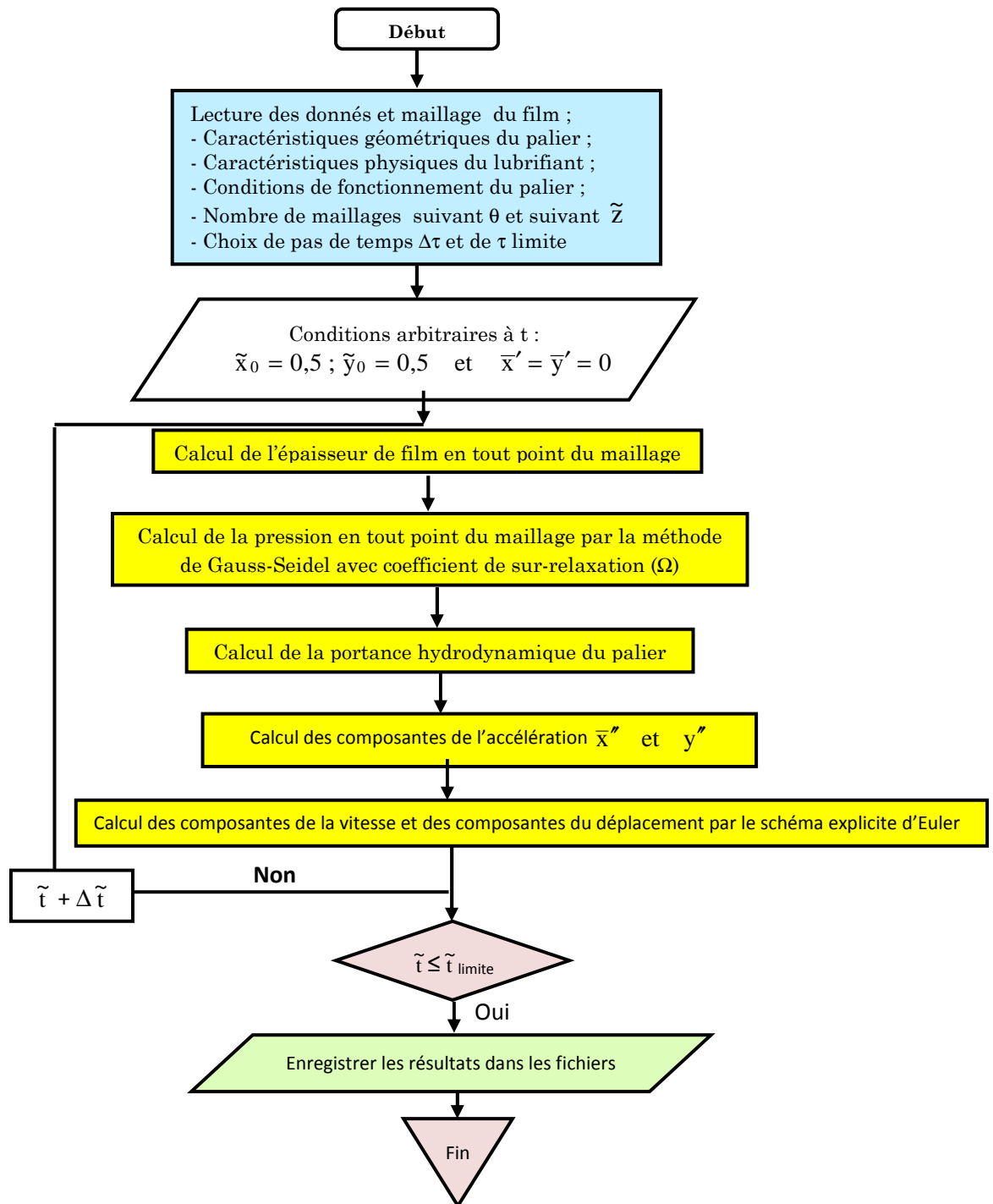
## 5. Etude paramétrique du problème

L'étude des effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur le comportement dynamique non linéaire des paliers hydrodynamiques, nous a conduit à élaborer un programme de calcul en langage MS Fortran basé sur l'approche numérique en 2D qui nous permet de déterminer:

- Les variations de la pression maximale dans le film lubrifiant et de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps ;
- Les trajectoires du centre de l'arbre dans le palier, sous charge statique (*le poids par exemple*) et / ou dynamique (*un balourd, par exemple*) ;
- Les variations des déplacements suivant les axes X et Y au cours du temps.

L'organigramme succinct du programme du calcul développé est présenté par le schéma suivant IV-4 :





**Figure IV-4 :** Organigramme du programme du calcul développé pour l'analyse dynamique non linéaire.

L'étude paramétrique menée dans cette investigation est d'étudier les effets de la présence de défaut de mésalignement de l'arbre sur les variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps et les trajectoires décrites par le centre de l'arbre d'un palier lisse cylindrique mésaligné lubrifié par fluide newtonien, afin d'éviter le contact métal-métal entre les surfaces de l'arbre et le coussinet.

Les caractéristiques géométriques, propriétés physiques du lubrifiant et conditions de fonctionnement sont portées dans le tableau IV-1.

**Tableau IV-1:** Caractéristiques géométriques et conditions de fonctionnement du palier

Caractéristiques	Symbole	Unité	Valeur
<b>A- Caractéristiques géométrique</b>			
Diamètre du palier	D=2R	m	0.05
Longueur du palier complet	L	m	0.05
Jeu radial du palier	C	m	$35 \times 10^{-5}$
<b>B- Propriétés physiques du lubrifiant ISO VG 32</b>			
Masse volumique	$\rho$	kg/m	870
Viscosité dynamique à : 40°C	$\mu$	Pa.s	0.027
<b>C- Conditions de fonctionnement</b>			
Charge appliquée sur le palier	Mg	N	20
Vitesses de rotation de l'arbre	$\omega$	rpm	4000 et 2000

Le calcul des trajectoires a été effectué pour une excentricité relative du balourd  $e_b = 0.2$  et deux vitesses de rotation de l'arbre,  $\omega = 2000 \text{ rpm}$  et  $4000 \text{ rpm}$  qui correspondent respectivement à de nombre de Reynolds modifié [2],  $R^* = \left(\frac{\rho V C}{\mu}\right) \left(\frac{C}{R}\right) = 8$  et  $R^* = 16$

On considère que la dissipation dynamique due au mouvement orbital de l'arbre sur la viscosité du lubrifiant est négligeable pour tous les calculs et le régime d'écoulement est laminaire.

Dans tous les calculs, le pas du temps sans dimension choisi dans le schéma d'Euler est  $\Delta \tilde{t} = 2\pi/75$  et le temps adimensionné qui a été fixé pour l'arrêt des calculs est  $\tilde{t}_{\text{imite}} = 200$ .

## 5-1. Résultats et discussion

### 5-1-1. Effets de mésalignement sur les trajectoires du centre de l'arbre dans le palier

Les figures IV-5 et IV-6 montrent les trajectoires du centre de l'arbre dans le palier au cours du temps dans les trois sections de palier, gauche, médiane et droite pour deux vitesses de rotation de l'arbre,  $\omega = 2000 \text{ rpm}$  (figure IV-5) et  $\omega = 4000 \text{ rpm}$  (figure IV-6).

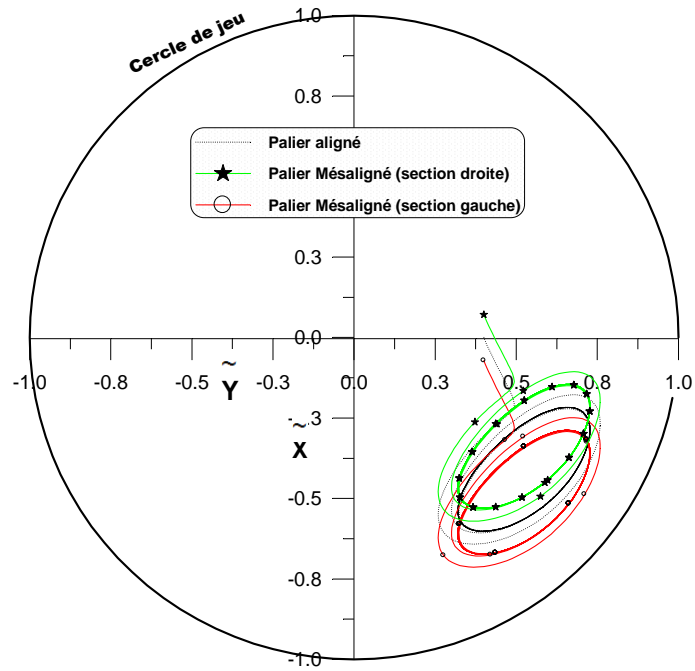
Les calculs sont effectués pour deux types de mésalignement le plus significatifs :

- Mésalignement vertical, (figures IV-5-a et IV-6-a) :  $\delta_h = 0$  et  $\delta_v = 5 \times 10^{-4} \text{ rd}$  ;

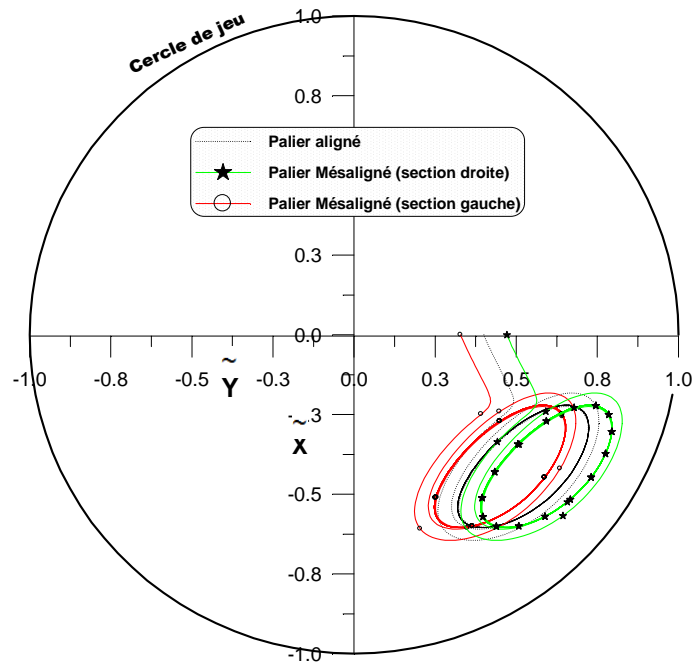
- Mésalignement horizontal, (*figure IV-5-b et IV-6-b*) :  $\delta_h = 5 \times 10^{-4}$  rd et  $\delta_v = 0$ ;

On constate, dans les deux cas de mésalignement, le contact entre l'arbre et le coussinet peut se produire dans l'une des extrémités du palier (*section gauche ou section droite*) surtout pour la vitesse de rotation de l'arbre,  $\omega = 4000$ rpm (*figure IV-6*). Cependant, dans la section médiane, les trajectoires calculées pour les deux cas du palier (*aligné ou mésaligné*) sont similaires, figures IV-5 et IV-6.

On peut conclure que le mésalignement de l'arbre dans le palier permet d'augmenter considérablement le risque de contact entre l'arbre et le coussinet (*métal-métal*) à l'une d'extrémité du palier qui peut être provoqué d'usure et d'avaries des paliers fluides.

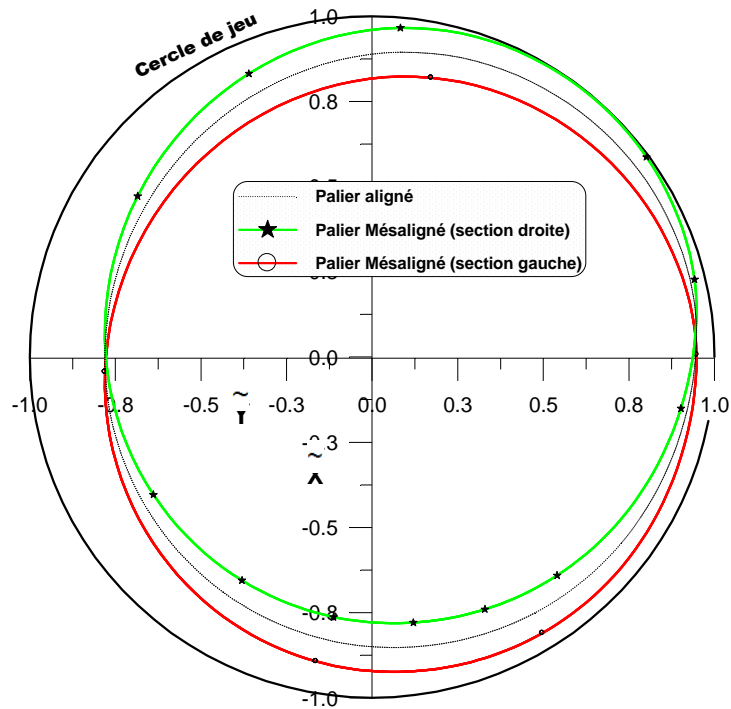


a) Mésalignement vertical :  $\delta_h = 0.0$  et  $\delta_v = 5 \times 10^{-4}$  rd .

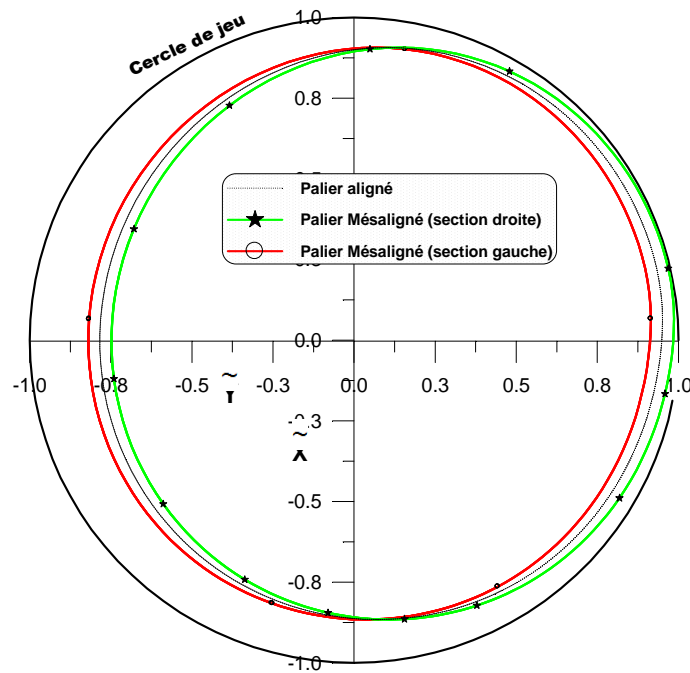


b) Mésalignement horizontal :  $\delta_h = 5 \times 10^{-4}$  rd et  $\delta_v = 0.0$  .

Figure IV-5: Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier pour,  $\omega = 2000$ rpm.



a) Mésalignement vertical :  $\delta_h = 0.0$  et  $\delta_v = 5 \times 10^{-4}$  rd



b) Mésalignement horizontal :  $\delta_h = 5 \times 10^{-4}$  rd et  $\delta_v = 0.0$  .

Figure IV-6 : Trajectoires du centre de l'arbre dans les trois sections du palier en régime établi, pour  $\omega = 4000$ rpm.

### 5-1-2. Effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur l'épaisseur minimale du film

Les figures IV-7 et IV-8 présentent les effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur la variation de la hauteur minimale du film lubrifiant en fonction du temps dans les trois sections de palier, gauche, médiane et droite pour deux vitesses de rotation de l'arbre,  $\omega = 2000\text{rpm}$  (figure IV-7) et  $\omega = 4000\text{rpm}$  (figure IV-8).

Les résultats sont effectués pour deux types de mésalignement le plus significatifs :

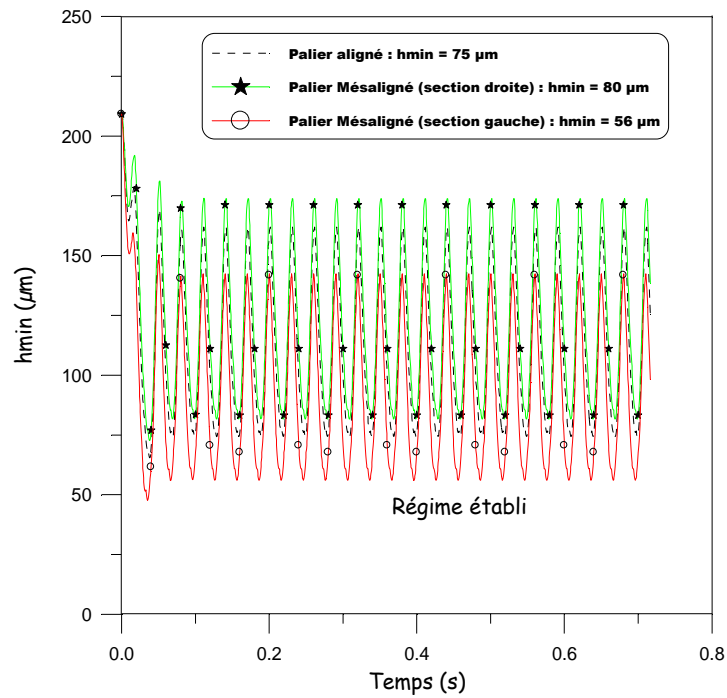
- Mésalignement vertical, (figures IV-7-a et IV-8-a) :  $\delta_h = 0$  et  $\delta_v = 5 \times 10^{-4}$  rd ;
- Mésalignement horizontal, (figure IV-7-b et IV-8-b) :  $\delta_h = 5 \times 10^{-4}$  rd et  $\delta_v = 0$  ;

Les figures montrent une diminution très importante de l'épaisseur minimale du film à l'une d'extrémité du palier pour la vitesse de rotation de l'arbre,  $\omega = 4000\text{rpm}$  (figure IV-8) qui permet de provoquer le risque de contact entre l'arbre et le coussinet, et une faible diminution de l'épaisseur minimale du film à l'une de d'extrémité du palier pour la vitesse de rotation de l'arbre,  $\omega = 2000\text{rpm}$  (figure IV-7)

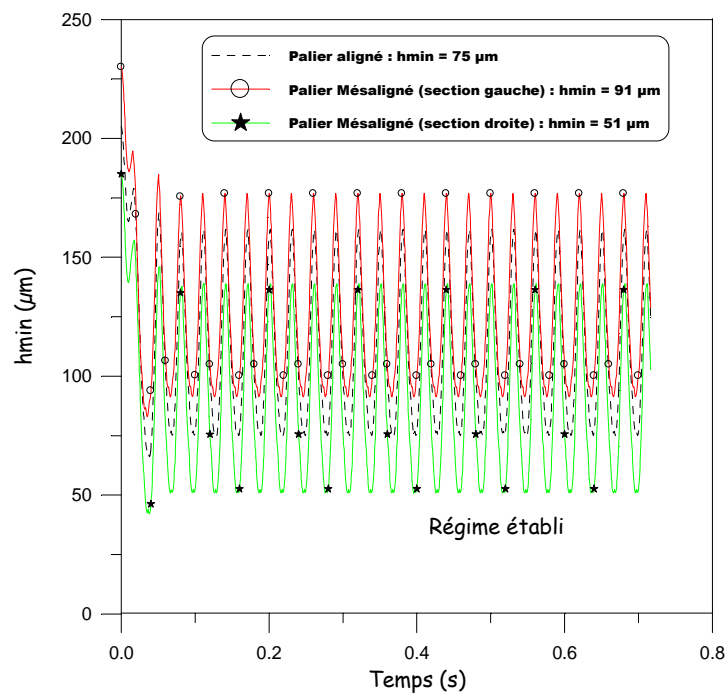
En outre, le mésalignement vertical a plus d'influence sur la valeur minimale de la hauteur minimale du film que le mésalignement horizontal. En effet, les valeurs minimales de la hauteur minimale du film calculées, dans la section droite du palier est égale à  $0.32\mu\text{m}$  dans le cas du mésalignement vertical et  $1.2\mu\text{m}$  dans le cas du mésalignement horizontal.

Il convient de noter que, la diminution importante de l'épaisseur minimale du film au cours du fonctionnement augmente considérablement les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile.

Il faut rappeler que l'épaisseur minimale du film est un paramètre important dans la conception des paliers fluides des machines tournantes.

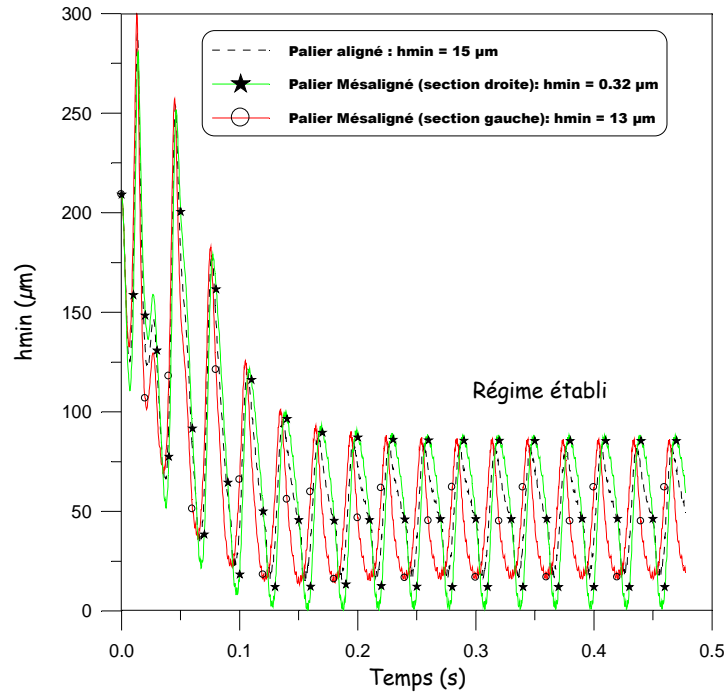


a) Mésalignement vertical :  $\delta_h = 0.0$  et  $\delta_v = 5 \times 10^{-4}$  rd .

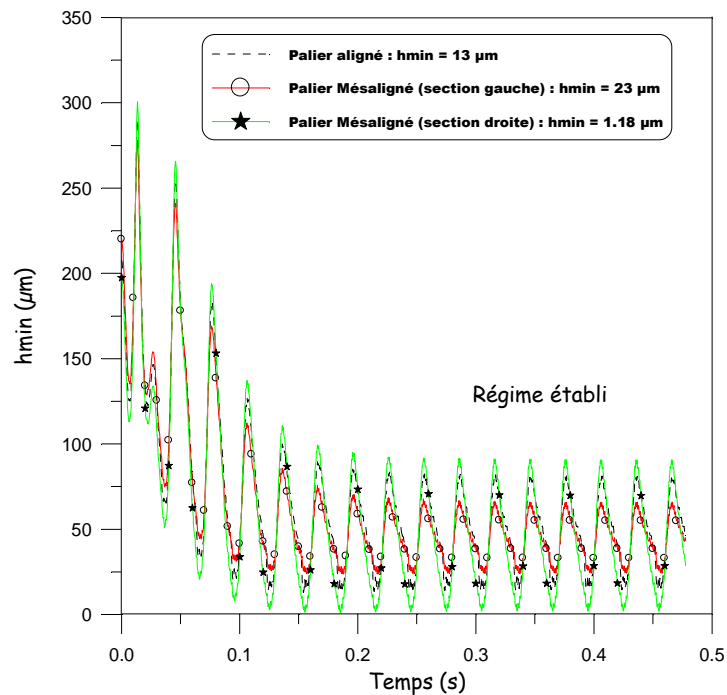


b) Mésalignement horizontal :  $\delta_h = 5 \times 10^{-4}$  rd et  $\delta_v = 0.0$  .

**FigureIV-7:** Variations de l'épaisseur minimale de film lubrifiant dans les trois sections du palier, pour  $\omega = 2000$ rpm.



a) Mésalignement vertical :  $\delta_h = 0.0$  et  $\delta_v = 5 \times 10^{-4}$  rd .



b) Mésalignement horizontal :  $\delta_h = 5 \times 10^{-4}$  rd et  $\delta_v = 0.0$  .

**FigureIV-8:** Variations de l'épaisseur minimale de film lubrifiant dans les trois sections du palier, pour  $\omega = 4000$ rpm.



## 6. Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté une étude théorique et numérique sur l'influence de la présence de défaut de mésalignement de l'arbre sur les variations de l'épaisseur minimale du film en fonction du temps et les trajectoires décrites par le centre de l'arbre dans le palier.

L'étude paramétrique menée dans cette investigation a nous permis de mettre en évidence :

- Les effets non négligeables de la présence de défaut de mésalignement sur l'épaisseur minimale du film et la trajectoire du centre de l'arbre du palier surtout pour des grandes vitesses de rotation ;
- Dans les deux cas de mésalignement, vertical ou horizontal, le contact entre l'arbre et le coussinet peut se produire dans l'une des extrémités du palier (*section gauche ou section droite*) surtout pour des grandes vitesses de rotation ;
- Dans la section médiane, les trajectoires calculées dans le cas du palier aligné et du palier mésaligné sont similaires ;
- Le défaut de mésalignement conduit à une diminution très importante de l'épaisseur minimale du film à l'une d'extrémité du palier qui permet de provoquer le risque de contact entre l'arbre et le coussinet ;

- Il convient de noter que, d'une part que le mésalignement de l'arbre dans le palier permet d'augmenter considérablement le risque de contact entre l'arbre et le coussinet (*métal-métal*) à l'une d'extrémité du palier qui provoque l'usure des paliers et d'autre part la diminution de l'épaisseur minimale du film au cours du fonctionnement augmente les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile des palier fluides.

## References bibliographies

[1] H. Boucherit, M. Lahmar et b. Bou-said, " Misalignment effects on steady-state and dynamic behaviour of compliant journal bearings lubricated with couple stress fluids", *Journal of Lubrication Science*, Vol. 20 (2008), pp. 241-268, John Wiley Editor, 2008.

[2] J. Frêne, D. Nicolas, B. Degueurce, D. Berthe, M. Godet, *Lubrification Hydrodynamique : Paliers et butées*, Collection de la Direction des Etudes et Recherches d'Electricité de France, n° 72, Edition Eyrolle. 1990.

## CONCLUSION GENERALE

Tous les systèmes mécaniques, tels que les machines tournantes, les turbines, les moteurs, etc. comportent plus ou moins des paliers fluides, ces paliers sont le siège des différents effets physiques et problèmes rencontrés, tel que le défaut de mésalignement. Dans la pratique, les causes de défaut de mésalignement peuvent être de trois natures, un défaut géométrique d'alignement des coussinets d'une même ligne d'arbre, l'existence d'un moment sur l'arbre dû par exemple à la présence d'engrenages hélicoïdaux et la flexion de l'arbre. La présence de défaut de mésalignement engendre des dommages dans la grande majorité des organes de guidage et les supports des machines tournantes au moment de leur fonctionnement dont l'intensité de cette détérioration dépend surtout de type et de degré de défaut de mésalignement. Pour améliorer le rendement et de prolonger la durée de vie des systèmes mécaniques tout en réduisant les pertes de puissance et en évitant le dysfonctionnement de ces dernières, la création de conditions favorables à leur fonctionnement est devenue indispensable ces dernières années.

Le travail réalisé dans cette investigation est permis de prédire l'impact des effets de défaut de mésalignement de l'arbre sur le comportement dynamique linéaire et non linéaire des paliers fluides.

L'étude paramétrique menée dans cette investigation a nous permis de mettre en évidence que :

- Le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier conduit à une augmentation significative du pic de pression dans le film lubrifiant ;
- La valeur de la pression maximale croît quand le degré du mésalignement augmente et son point d'application se rapproche d'une des extrémités du palier ;
- Le défaut de mésalignement de l'arbre dans le palier permet d'augmenter la capacité de charge de palier comparativement au palier aligné.
- L'angle de calage de palier diminue de façon remarquable avec l'augmentation de degré de mésalignement surtout pour un palier faiblement chargé ;
- Le débit de fuit de lubrifiant augmente avec l'augmentation de degré de mésalignement dans le cas palier faiblement chargé et reste presque le même sans changement significatif dans le cas un palier moyennement ou lourdement chargé ;

- Le mésalignement de l'arbre dans le palier fluide conduit d'augmenter sensiblement les pertes par frottement dans le film lubrifiant surtout dans le cas où le palier est fortement mésaligné.
- Le mésalignement de l'arbre dans le palier augmente sensiblement la stabilité du système rotor-palier surtout dans le cas d'un palier fortement mésaligné et faiblement chargé ;
- Le palier mésaligné même lorsqu'il est peu chargé est plus stable que celui aligné ;
- Dans les deux cas de mésalignement, vertical ou horizontal, le contact entre l'arbre et le coussinet peut se produire dans l'une des extrémités du palier (*section gauche ou section droite*) surtout pour des grandes vitesses de rotation ;
- Dans la section médiane, les trajectoires calculées dans le cas d'un palier aligné et d'un palier mésaligné sont similaires ;
- Le défaut de mésalignement conduit à une diminution très importante de l'épaisseur minimale du film à l'une d'extrémité du palier qui permet de provoquer le risque de contact entre l'arbre et le coussinet.

**Il convient de noter que, d'une part le mésalignement de l'arbre dans le palier permet d'augmenter considérablement le risque de contact entre métal-métal à l'une d'extrémité du palier qui provoque l'usure et d'autre part la diminution de l'épaisseur minimale du film au cours du fonctionnement augmente les risques de grippage et d'avaries par rupture du film d'huile des paliers fluides des machines tournantes.**

## Annexe A

### Lois de variation viscosité–pression et densité–pression

Lorsque le palier est sévèrement chargé, les hautes pressions engendrées dans le film lubrifiant ont une influence significative sur le lubrifiant et les surfaces des éléments constituant le palier (arbre, coussinet, patin). Les deux propriétés importantes du lubrifiant qui sont affectées par les pressions élevées sont la densité (*masse volumique*) et la viscosité. Plusieurs lois de variation viscosité–pression et densité–pression ont été proposées dans la littérature [1], [2]. Parmi ces lois, on cite celles qui conviennent pour l'étude des problèmes d'interaction fluide-structure en régime isotherme.

#### A.1. Lois de variation viscosité–pression [2]

Pour caractériser l'effet piézovisqueux, on peut utiliser les lois suivantes :

##### - lois de Barus établie en 1893 [3] :

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\alpha p} \quad (\text{A-1})$$

Où  $p$  est la pression,  $\mu_0$  la viscosité dynamique mesurée à la pression atmosphérique et  $\alpha$  le coefficient de piézoviscosité qui dépend de l'huile et qui est généralement compris entre 5 et 40  $\text{GPa}^{-1}$ . Les valeurs de ce coefficient pour différents fluides lubrifiants sont reportées dans le tableau (A-1) [4].

Tableau A.1 : Valeurs du coefficient de piézoviscosité pour différents fluides lubrifiants

Lubrifiant	Coefficient de piézoviscosité, $\alpha$ ( $\text{GPa}^{-1}$ )			
	20° C	40° C	60° C	80° C
Huile minérale naphénique	26.5	23.4	20.0	16.4
Huile minérale paraffinique	19.8	18.2	16.2	15.0
Polyglycol	18.7	16.0	13.2	10.5
TMP-ester	15.5	14.4	13.1	12.2
Diester	14.6	13.6	12.8	11.6
Polyalphaolefine	15.5	13.8	12.2	10.5

Les viscosimètres à haute pression permettant de déterminer l'influence de la pression sur la viscosité sont :

- le viscosimètre à chute de bille qui peut être utilisé à des pressions allant jusqu'à 30 MPa.
- le viscosimètre de Couette ou à cylindres concentriques développé pour mesurer les propriétés rhéologiques des fluides pour des pressions qui peuvent atteindre 500 MPa et des taux de cisaillement qui s'échelonnent de 0.5 à  $2 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ .

Ce coefficient est sensiblement constant pour des pressions inférieures à 70 MPa. Il peut être calculé par la relation suivante [5] :

$$\alpha = 1,216 + 4,143(\log_{10} \nu)^{3,0627} + 2,848 \times 10^{-4} \text{ m}^{5,1903} (\log_{10} \nu)^{1,5976} - 3,999(\log_{10} \nu)^{3,0975} \rho^{0,1162} \quad (\text{A-2})$$

Dans la relation (A-2),  $\alpha$  est le coefficient de piézoviscosité en  $10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ ,  $\nu$  est la viscosité cinématique à la température considérée en cSt ou  $\text{mm}^2/\text{s}$ ,  $\rho$  la masse volumique du lubrifiant en  $\text{g}/\text{cm}^3$ .  $m$  est le coefficient viscosité température défini par la relation suivante:

$$\log_0(\log_0(\nu+a)) = -m \log_0 T + n \quad (\text{A-3})$$

La relation (A-3) est due à *Mac Coull et Walther* [5]. Dans cette relation,  $\nu$  est la viscosité cinématique,  $a$ ,  $m$  et  $n$  des constantes qui dépendent du lubrifiant et  $T$  la température absolue en degrés *Kelvin* (K). La valeur de  $a$  dépend de l'unité de viscosité, si  $\nu$  est en centi-Stokes (cSt), la valeur de  $a$  est comprise entre 0,6 et 0,75.

Autre relation [2], relation de *Wooster* :

$$\alpha = (0,6 + 0,965 \log_{10} \mu_0) \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1} \quad (\text{A-4})$$

Où  $\alpha$  en ( $\text{Pa}^{-1}$ ) et  $\mu_0$  la viscosité à la pression atmosphérique en (cPo) ou (mPa.s).

### **- loi de Roelands établie en 1966**

Les effets de la pression sur la viscosité du lubrifiant sont mieux décrits par la relation de *Roelands* [6]:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left( \frac{\mu_\infty}{\mu_0} \right)^{1 - \left(1 + \frac{p}{c}\right)^Z} \quad (\text{A-5})$$

où :

$\mu_0$  : viscosité à la pression atmosphérique ( $p = 0$ )

$Z$  : indice pression-viscosité

$\mu_\infty = 6,31 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$  et  $c = 1,96 \times 10^8 \text{ Pa}$

Autre écriture de la loi de *Reynolds* [7] :

$$\mu = \mu_0 \exp \left[ \frac{p_0 \alpha}{Z} \left( \left(1 + \frac{p}{p_0}\right)^Z - 1 \right) \right] \quad (\text{A-6})$$

Où le paramètre  $Z$  est relié au coefficient de piézoviscosité  $\alpha$  et à la viscosité dynamique du lubrifiant à la pression atmosphérique  $\mu_0$  dans le système normalisé S.I par :

$$Z = \frac{\alpha p_0}{\log_e \mu_0 + 9,67} \quad (\text{A-7})$$

$p_0$  est la constante viscosité-pression de *Roelands*,  $p_0 = 1,96 \times 10^8 \text{ Pa}$ .

### **- loi de Sargent [8]**

$$\mu(p) = \mu_0 e^{\frac{Ap}{B+p}} \quad (\text{A-8})$$

Où :  $\mu$  et  $\mu_0$  sont les viscosités dynamiques en (mPa.s) mesurées respectivement à la pression  $p$  en (GPa) et à la pression atmosphérique.  $A$  et  $B$  sont des constantes dont les valeurs dépendent du fluide lubrifiant tableau A-2.  $A$  est sans dimension tandis que l'unité de  $B$  est celle de la pression.

Il est à noter que le terme  $\frac{A}{B+p}$  peut être considéré comme l'expression du coefficient de piézo-viscosité  $\alpha$  intervenant dans la loi de *Barus* (A-1). Lorsque  $p$  tend vers 0, le terme  $\frac{A}{B+p} \rightarrow \frac{A}{B}$ . Donc, la loi de *Barus* est seulement un cas particulier de la loi de *Sargent*

(A-4) lorsque  $p \rightarrow 0$  et le rapport  $\frac{A}{B}$  devient égale à  $\alpha$ .

**Tableau A-2: Valeurs des coefficients viscosité-pression [8]**

Lubrifiant	A	B (GPa)	A/B (GPa <sup>-1</sup> )	$\alpha$ (GPa <sup>-1</sup> )	Coefficient de <i>Roelands Z</i>
Huile paraffinique	34	1.54	22.1	22.2	0.663
Huile naphtéinique	49	1.62	30.2	32.4	0.867
Silicone	-14	-0.78	17.9	17.1	0.627

## A.2. Loi de variation densité-pression

Pour une huile minérale, la compressibilité du lubrifiant est modélisée par *Dowson* et *Higginson*, 1966 [1] :

- si  $p$  est exprimée en (GPa) :

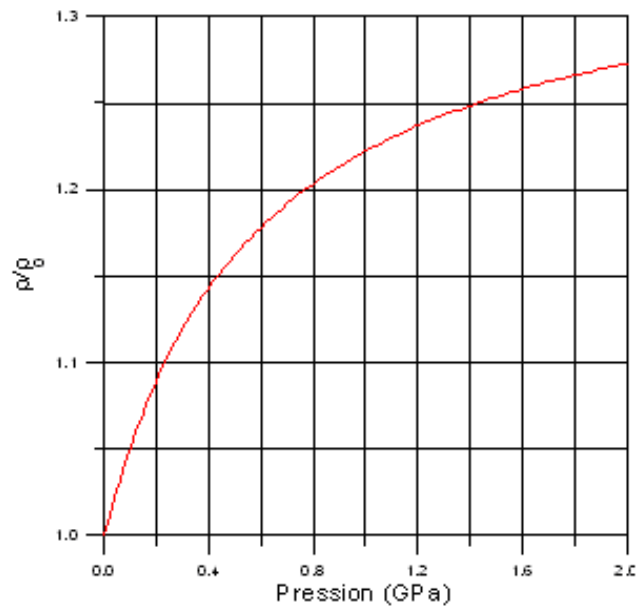
$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,6 p}{1 + 1,7 p} \quad (\text{A-9})$$

- si  $p$  est exprimée en (Pa) :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \frac{0,6 \times 10^{-9} p}{1 + 1,7 \times 10^{-9} p} \quad (\text{A-10})$$

Où  $\rho_0$  est la densité ou la masse volumique du lubrifiant à la pression atmosphérique.

La variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression est représentée sur la figure A-1.



**Figure A-1 :** *Variation de la densité relative d'une huile minérale en fonction de la pression selon la loi de Dowson et Higginson [1].*

## Annexe B

### Réponse d'un palier hydrodynamique à une excitation synchrone de type balourd

Dans le cas de vibrations de faibles amplitudes de l'arbre au voisinage de la position d'équilibre ( $O_{a0}$ ), avec un balourd de faible excentricité ( $e_b$ ) (*résiduel*), les équations de mouvement du rotor rigide s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}'' \\ \ddot{Y}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{XX} & b_{XY} \\ b_{YX} & b_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{X}' \\ \dot{Y}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{XX} & a_{XY} \\ a_{YX} & a_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = M e_b \omega^2 \begin{Bmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{Bmatrix} \quad (\text{B-1})$$

En variable sans dimension l'équation (B-1) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{m} & 0 \\ 0 & \tilde{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{X}}'' \\ \ddot{\tilde{Y}}'' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{XX} & B_{XY} \\ B_{YX} & B_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\tilde{X}}' \\ \dot{\tilde{Y}}' \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{XX} & A_{XY} \\ A_{YX} & A_{YY} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{Bmatrix} \quad (\text{B-2})$$

Avec :  $\tilde{m} = \frac{M\omega^2 C}{W_0}$  ,  $A_{ij} = a_{ij} \frac{C}{W_0}$  ,  $B_{ij} = b_{ij} \frac{C\omega}{W_0}$  ,  $\tilde{t} = \omega t$  ,  $\tilde{X} = \frac{X}{C}$  ,  $\tilde{Y} = \frac{Y}{C}$  ,  $\tilde{X}' = \frac{X'}{C\omega}$  ,  
 $\tilde{Y}' = \frac{Y'}{C\omega}$  ,  $(\tilde{X}'', \tilde{Y}'') = \frac{(X'', Y'')}{C\omega^2}$  ,  $\varepsilon_b = \frac{e_b}{C}$  .

Le vecteur solution du système d'équation (B-2) est de la forme :

$$\begin{Bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{Y}_1 \end{Bmatrix} \cos \tilde{t} + \begin{Bmatrix} \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} \sin \tilde{t} \quad (\text{B-3})$$

En remplaçant (B-3) dans le système (B-2), et en identifiant les termes en  $\cos \tilde{t}$  et  $\sin \tilde{t}$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} (A_{XX} - \tilde{m}) & B_{XX} & A_{XY} & B_{XY} \\ -B_{XX} & (A_{XX} - \tilde{m}) & -B_{XY} & A_{XY} \\ A_{YX} & B_{YX} & (A_{YY} - \tilde{m}) & B_{YY} \\ -B_{YX} & A_{YX} & -B_{YY} & (A_{YY} - \tilde{m}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{Y}_1 \\ \tilde{Y}_2 \end{Bmatrix} = \tilde{m} \varepsilon_b \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{B-4})$$

La solution du système (B-4) s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{AC + BD}{C^2 + D^2} \right) \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{BC - AD}{C^2 + D^2} \right) \\ \tilde{Y}_1 = \tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{EC + FD}{C^2 + D^2} \right) \\ \tilde{Y}_2 = -\tilde{m} \varepsilon_b \left( \frac{FC - ED}{C^2 + D^2} \right) \end{cases} \quad (\text{B-5})$$



Avec,

$$\begin{cases} A = -\tilde{m} + A_{YY} - B_{XY} \\ B = A_{XY} + B_{YY} \\ C = \tilde{m}^2 - \tilde{m}(A_{XX} + A_{YY}) + A_{XX}A_{YY} - A_{XY}A_{YX} - (B_{XX}B_{YY} - B_{XY}B_{YX}) \\ D = -\tilde{m}(B_{XX} + B_{YY}) + A_{XX}B_{YY} + A_{YY}B_{XX} - A_{XY}B_{YX} - A_{YX}B_{XY} \\ E = -A_{YX} + B_{XX} \\ F = \tilde{m} - A_{XX} - B_{YX} \end{cases}$$

### - Caractéristiques de la trajectoire du centre de l'arbre

La solution (B-3) du système (B-2) correspond à une trajectoire de forme elliptique (figure B-1) dont les caractéristiques sont les suivantes :

$a = \tilde{a}C$  : demi-grand axe de l'ellipse

$b = \tilde{b}C$  : demi-petit axe de l'ellipse

$\varphi$  : angle de déphasage entre le vecteur balourd et le vecteur déplacement

$\delta$  : l'angle qui donne l'inclinaison du demi-grand axe par rapport à l'axe X .

Ainsi, dans le repère propre de l'ellipse ( $O_{a0}, X^*, Y^*$ ), l'équation de l'ellipse s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}^* = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \\ \tilde{Y}^* = \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \end{cases} \quad (B-6)$$

$$\text{Où : } (\tilde{X}^*, \tilde{Y}^*) = \frac{(X^*, Y^*)}{C}$$

Compte tenu de la relation (B-6), la projection sur ( $O_{a0}, X, Y$ ) donne :

$$\begin{cases} \tilde{X} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (B-7)$$

Les équations (B-3) sont identiques aux équations (B-7), ce qui permet d'écrire :

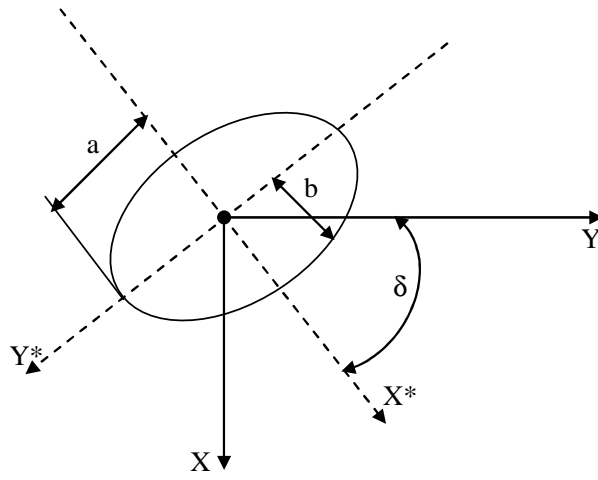
$$\begin{cases} \tilde{X}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{X}_2 \sin \tilde{t} = \tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta \\ \tilde{Y}_1 \cos \tilde{t} + \tilde{Y}_2 \sin \tilde{t} = -\tilde{a} \cos(\tilde{t} + \varphi) \sin \delta + \tilde{b} \sin(\tilde{t} + \varphi) \cos \delta \end{cases} \quad (B-8)$$

Ce système d'équations étant vérifié quelque soit le temps adimensionné ( $\tilde{t}$ ), il vient en identifiant les termes en  $\cos \tilde{t}$  et  $\sin \tilde{t}$  :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \tilde{a} \cos \delta \cos \varphi + \tilde{b} \sin \delta \sin \varphi \\ \tilde{X}_2 = -\tilde{a} \cos \delta \sin \varphi + \tilde{b} \sin \delta \cos \varphi \\ \tilde{Y}_1 = -\tilde{a} \sin \delta \cos \varphi + \tilde{b} \cos \delta \sin \varphi \\ \tilde{Y}_2 = \tilde{a} \sin \delta \sin \varphi + \tilde{b} \cos \delta \cos \varphi \end{cases} \quad (B-9)$$

La résolution des équations (B-9) permet de déterminer les caractéristiques de l'ellipse :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \tilde{a} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} + \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2}{4} + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\
 \tilde{b} = \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 + \tilde{Y}_2^2)}{2} - \sqrt{\frac{(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)^2}{4} + \frac{1}{4}(\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2)^2}} \\
 \delta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{Y}_1 + \tilde{X}_2 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_2^2 - \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right) \\
 \varphi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{-2(\tilde{X}_1 \tilde{X}_2 + \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2)}{\tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 + \tilde{Y}_1^2 - \tilde{Y}_2^2} \right)
 \end{array} \right. \quad (\text{B-10})$$



**Figure B-1 :** Caractéristiques d'une trajectoire elliptique.

### References bibliographiques

- [1]. D. Dorson, G.R. Hgginson, *Elasto-hydrodynamic lubrication*, SI Edition Prergamon int. library 1997.
- [2]. A. Cameron, C.M. Mc Ettels, *Basic lubrication theory*, 3rd edition, John wiley & sons, 1981.
- [3]. C. Barus, *isotherms, isopiestic and isometrics relative to viscosity*, *Am. J. Sci.* 45 (1893), 87-96.
- [4]. Erik Hoglund, *influence of lubricant properties on elasto-hydrodynamic, lubrication, wear*, 232, 1999, 178-184.
- [5]. O. Reynolds, *on the theory of lubrication and its application to Mr Beauchamp Tower's experiments*, *phil. Trans. Roy. Soc London series A177, Pt1*, 1886. pp. 135-217.
- [6]. C. J. A. Roelands, *correlation aspects of the viscosity-pressure relation ship of lubricating oils*, Druk V. R. B Groningen, Nether londs.
- [7]. L. chang, T. F Conry, C. cusano, *An efficient, robust, multi-level computational algorithm for the ASME*, *Jarnal of tribology*. 1988. 1-7.
- [8]. Lowirie B. Sargent, JR, *Pressure-viscosity coefficient of liquid lubricants*, *ASLE transations*. Volume 26, 1, 1-10. 1981.