

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université de 8 Mai 1945 – Guelma -

Faculté des Mathématiques, d'Informatique et des Sciences de la matière

Département d'Informatique



Mémoire de Fin d'études Master

Filière : Informatique

Option : Ingénierie des Medias

Thème :

**Modélisation de la forme 2D par le graph
squelettique en utilisant la théorie de Morse**

Encadré Par :

Mr. Derdar Salah

Présenté par :

Ghouila Fella,

Sellaoui Lwiza

Juin 2017

Résumé

La reconnaissance des formes est un sujet de recherche très animé en vision et analyse d'images et infographie, avec des applications dans de nombreux domaines différents, du contexte d'ingénierie à la médecine en passant par le divertissement, les jeux et la simulation,...etc. La reconnaissance se fait le plus souvent par des structures graphiques pour la représentation des objets dans laquelle les relations contextuelles tiennent une grande importance. Le graphe de Reeb qui est un type de ces structures offre une signature de descripteur robuste et discriminant qui permet de maintenir de manière simple les propriétés topologiques de la forme et d'intégrer simultanément les propriétés géométriques. Une nouvelle approche qui consiste à représenter les formes 2D par une structure graphique suivant la théorie de Morse est conçue. Elle suit deux algorithmes, le premier consiste à extraire les points critiques du contour des objets, alors que le deuxième algorithme est consacré à la construction du modèle topologique de squelettisation basé sur la structure de graphe de Reeb. La construction devient plus consistante et fiable si elle dépend de la nature et la position des points critiques extraits par le premier algorithme. Les tests qui sont réalisés sur une base standard des formes 2D montrent la réussite et l'efficacité de cette approche.

Table des matières

Liste des figures	4
Liste des tableaux	6
Introduction générale	7
Chapitre 1 : Les approches de squelettisation.....	9
1.1 Introduction.....	9
1.2 Approches par squelettes	9
1.2.1 Squelette par axe médiane	10
1.2.2 Squelette par surface médiane	11
1.3 Approches par graphes de squelettes ' <i>skeletal graph</i> '	11
1.4 Approches par graphe de Reeb	12
1.5 Conclusion	15
Chapitre 2 : Graphe de Reeb et théorie de Morse	16
2.1 Introduction.....	16
2.2 Graphe de Reeb.....	17
2.2.1 Définition	18
2.2.2 Applications de graphe de Reeb	20
2.3 Théorie de Morse	21
2.3.1 Les points critiques	22

2.3.2 Fonction de valeurs réelles	25
2-5 Conclusion	26
Chapitre 3 : Modélisation de l'approche	27
3.1 Introduction.....	27
3.2 Modèle topologique de squelettisation	27
3.2.1 Extraction des points de caractéristique	28
3.2.1.1 Extraction de séquence de points de contour	28
3.2.1.1 Extraction des points critiques	28
3.2.2 Construction du graphe de Reeb	29
3.2.2.1 Calcul des cercles centrés	30
3.2.2.2 Détermination des arcs circulaires et régions connexes	30
3.2.2.3 Détermination des nœuds et des arêtes du graphe	31
3.3 Algorithme de squelettisation	32
3.1 Conclusion	34
Chapitre 4 : Implémentation et résultats expérimentaux	35
4.1 Introduction.....	35
4.2 Implémentation de l'approche	35
4.2.1 Environnement de matériels	35
4.2.2 Environnement logiciel	35
4.2.2.1 Environnement de développement Eclipse	35
4.2.2.2 Présentation de JAVA	36

4.2.3 Structure du système (programme).....	36
4.2.3.1 Organisation du système.....	36
4.2.3.2 Les principales classes.....	37
4.3 Résultats expérimentaux.....	40
4.3.1 Extraction du contour est points critiques.....	42
4.3.2 Calcul des cercles centrés.....	43
4.3.3 Les arcs d'intersection circulaires.....	47
4.3.4 Graphe squelettique.....	50
4.4 Conclusion.....	53
Conclusion générale.....	54
Références bibliographiques.....	55

Liste des figures

Figure 1.1 : Transformation par axe médian produit (a) un graphe linéaire, (b) un graphe linéaire avec des artéfacts..... 10

Figure 1.2 : Modèles d'objets 3D et leur graphe de Reeb mentionné par des lignes avec une couleur verte 13

Figure 2.1 : (a) modèle 3D, (b) graphe de Reeb (arêtes en vert et nœuds en rouge). 17

Figure 2.2 : Six points critiques (un minimum, deux selles, un régulier, et un maximum) de la fonction hauteur avec son graphe de Reeb correspondant. Les points critiques qui sont calculés sur le contour de l'anneau avec pixels d'objets en blanc représentent les nœuds du graphe 18

Figure 2.3 : Une forme 2D étudiée en fonction de la fonction d'hauteur (à gauche) et son graphe de Reeb correspondant (à droite). Les lettres de a à i désignent les ensembles de niveaux ou les valeurs critiques qui correspondent aux nœuds du graphe de Reeb..... 21

Figure 2.4 : (a) le graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$. Le point $(0, 0)$ est un point critique non-dégénéré. (b) et (c) le graphe de $f(x, y) = x^3 - 3x y^2$ (un point selle) et $f(x, y) = x^3 - y^2$. Le point $(0, 0)$ est un point critique dégénéré..... 23

Figure 2.5 : Allures des surfaces au voisinage des points critiques d'une fonction à deux variables : à gauche pour $f(x,y)=x^2 + [y]^2+c$, au milieu pour $f(x,y)=x^2 - y^2+c$ et à droite pour $f(x,y)= [-x]^2 - [y]^2+c$ 24

Figure 2.6 : (a) p est maxima, (b) q est un selle, (c) r est un minima..... 25

Figure 2.7 : Exemple de fonctions de mesure : hauteur (a), distance au centre de masse (b).. 26

Figure 3.1 : forme 2D de bi-tore avec trois contours. Six points critiques extraits des trois contours avec l'application la fonction de distance centrique. 29

Figure 3.2 : Construction d'un graphe du squelette d'un bi-tore : (a) calcul des lignes de niveau (ou cercles centrés) ; (b) les arcs d'intersection des cercles et la forme (les arcs circulaires d'objet) ; (c) attribution des points de sommet ou nœuds dans le graphe..... 31

Figure 3.3 : (a) quatre régions connexes avec huit arcs circulaires d'une forme 2D, (b) graphe de Reeb correspondant avec les points de sommet et les différentes interconnexions entre ces points de sommet à travers les régions connexes	32
Figure 3.4 : diagramme de l'algorithme de squelettisation	34
Figure 4.1 : Fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE	35

Liste des tableaux

Tableau 4.1 : Deux base des formes 2D originales : (a) première base de 99 formes 2D de Kimia-99 avec les différentes variations, (b) deuxième base avec des formes 2D simples.....	41
Tableau 4.2 : contour des formes 2D avec les points critiques et le point de centre de masse mentionnés en rouge (colonne de gauche), nombre de ces points critiques (colonne de droite) pour (a) la première base, (b) la deuxième base.....	43
Tableau 4.3 : Calcul des cercles centriques, et les points d'intersection du cercle avec la forme sont mentionnés en bleu, (a) avec K fixe, (b) avec K en mode dynamique (c.-à-d., dépend de la position des points critiques) sur la première base.....	45
Tableau 4.4 : Calcul des cercles centriques, et les points d'intersection du cercle avec la forme sont mentionnés en bleu, (a) avec K fixe, (b) avec K en mode dynamique (c.-à-d., dépend de la position des points critiques) sur la deuxième base.	46
Tableau 4.5 : Les arcs d'intersection circulaires pour la première base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique, les points de centre de ces arcs sont mentionnés en bleu.	48
Tableau 4.6 : Les arcs d'intersection circulaires pour la deuxième base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique, les points de centre de ces arcs sont mentionnés en bleu	49
Tableau 4.7 : Le graph de Reeb pour la première base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique	51
Tableau 4.8 : Le graph de Reeb pour la deuxième base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique	53

Introduction générale

Le monde réel est composé essentiellement d'objets tridimensionnels. Une des tâches principales d'un système de reconnaissance des formes est de pouvoir les identifier et les classer à partir des informations reçues des modèles ou prototypes. La reconnaissance des formes a pour but d'extraire automatiquement et efficacement les informations intéressantes, pertinentes et utiles de la forme (c.-à-d. de déterminer l'identité des objets formant la forme) et de les représenter par des structures discriminantes et invariantes qu'on les appelle descripteurs de forme.

En analyse et traitement d'images et infographie, de nombreux algorithmes ont été proposés pour générer et manipuler des squelettes pour les formes 2D et 3D, dont quelques uns fournissent un squelette avec le graphe de Reeb comme structure de base. L'utilité d'employer le graphe de Reeb réside dans sa capacité de capturer la topologie d'une forme et en particulier sa connectivité. Les positions de changement en topologie représentent les nœuds de ce graphe, alors que la connectivité ou la persistante topologique de la forme représente une arête entre deux nœuds dans le graphe [1]. On peut déduire que les nœuds du graphe sont les points critiques calculés par la fonction de valeurs réelles appliquée sur la forme [1, 2].

Le graphe de Reeb qui est considéré comme une signature de descripteur robuste et discriminante est une structure puissante de représentation, de traitement, d'interprétation et d'analyse capable de maintenir les propriétés topologiques de la forme et aussi d'interpréter sa topologie en tenant en compte l'intégration des propriétés géométriques de la forme. Par exemple, dans les problèmes de squelettisation [3], de segmentation [4], ...etc. Une forme est analysée selon une fonction de valeurs réelles qui détermine les lignes de niveau de connectivité pour monter le graphe correspondant. Comme résultat, la structure du graphe de Reeb construit dépend intégralement de la fonction à valeurs réelles définie sur la forme et capture tous les changements topologiques relatifs aux lignes de niveau qui sont calculées à partir de cette fonction. Selon la théorie de Morse, une fonction de valeurs réelles est dite de Morse si elle remplit certaines conditions (une ligne de niveau de connectivité est déterminée par une seule valeur critique, sachant que cette valeur critique est déterminée par un seul point critique). Si la fonction appliquée est une fonction de Morse, alors la forme se distingue par une structure unique de graphe de Reeb. Parmi les fonctions utilisées dans la construction de graphe, on peut citer les fonctions d'hauteur, de distance centrique et de distance géodésique et d'autres.

L'objectif de notre approche est de concevoir un modèle topologique de squelettisation basé sur la structure de graphe Reeb suivant la théorie de Morse. Le choix de ce graphe se justifie par la capacité de cette structure de bien représenter la forme, de maintenir les propriétés topologiques qui caractérisent la forme traitée et aussi qu'elle est bien adaptée pour tenir en compte ces propriétés. Les graphes de Reeb qui sont des descripteurs de forme compacts très populaires, s'insère dans beaucoup de domaines de recherche, en particulier la reconnaissance et la classification des formes. Il permet d'obtenir une représentation de type squelette en conservant la structure topologique des objets. Le principal avantage de ce descripteur est qu'il permet de decrirer de manière simple la forme, fournir une structure qui code efficacement les formes en respectant les propriétés topologiques et géométriques. Le graphe de Reeb construit s'est montré être un descripteur de forme puissant, discriminant et invariant aux transformations affines et petits changements.

Le présent mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier chapitre est destiné à consulter les différentes approches de squelettisation et plus particulièrement les travaux liés à la structure de graphe de Reeb. Dans le deuxième chapitre, les concepts liés au graphe de Reeb et la théorie de Morse sont proposés. Le troisième chapitre présente l'approche de modélisation de la forme 2D par un modèle topologique de squelettisation. Le quatrième chapitre est consacré à présenter l'implémentation en java du modèle topologique et de donner les résultats de différents tests appliqués sur une base des formes 2D.

1. Introduction

La reconnaissance des formes se fait le plus souvent par une représentation topologique dans laquelle les relations contextuelles tiennent une grande importance. Un outil de représentation structurelle puissant est le graphe dont les nœuds et les arêtes représentent respectivement des objets ou des données importantes et les relations qu'on les souhaite mettre en évidence. Un des intérêts principaux d'une telle représentation est sa compacité et par voie de conséquence les gains de mémoire et de temps de calcul qui lui seront associés. Les travaux sur l'utilisation des graphes en analyse et traitement d'images et en infographie remontent au début des années 70 pour l'interprétation automatique des objets [5].

Dans ce chapitre, on va présenter les approches basées sur les squelettes et les graphes et de donner un aperçu sur les représentations mixtes (c.-à-d. les graphes squelettiques). Nous nous intéressons plus particulièrement aux travaux liés au graphe de Reeb qui repose sur des propriétés mathématiques prouvant qu'il capture dans une certaine mesure la morphologie des formes.

2. Approches par squelettes

Le squelette est une représentation d'une forme très utilisée car il peut conserver les propriétés topologiques et géométriques de la forme avec moins d'espace mémoire. La notion de squelette est apparue pour l'étude des objets minces. Le squelette est généralement défini comme étant l'ensemble des lignes médianes dans un objet 2D/3D (analogues à une ossature de l'objet), c'est-à-dire l'ensemble des points équidistants de deux points de la frontière. Pour des objets 2D, un squelette est associé à l'axe médian [6] de l'image contenant des objets 2D. Pour des objets 3D, une surface médiane est calculée [7, 8]. Les squelettes peuvent être utilisés pour les aspects importants d'un objet. En comparant aux données d'entrée originales, les squelettes exigent moins d'espace de stockage et ainsi peuvent être plus adaptables aux problèmes d'interprétation (ou rendering) [9]. Les propriétés suivantes doivent être remplies par un squelette:

- Homotopie : le squelette doit être homotopiquement équivalent à l'objet original.
- Finesse : le squelette doit avoir une dimension plus petite que l'objet original (un objet 3D est représenté par 1- ou 2-squelette).
- Centralisation : le squelette doit être localisé dans le centre de l'objet original.

- Reconstruction : l'objet original doit être reconstruit à partir du squelette (informations additionnelles sont exigées à chaque point du squelette) [9].

L'idée de squelettisation est de rétrécir (ou diminuer) un objet à une représentation de petite dimension qui encore capture les caractéristiques importantes de l'objet original. Autrement, la squelettisation consiste à centrer dans la forme un squelette qui soit significatif de l'élongation et des déformations de celle-ci. La squelettisation qui est une étape essentielle de la reconnaissance de forme a pour but de décrire chaque objet par un squelette avec un ensemble de lignes infiniment fines, réduisant sensiblement le volume d'information à manipuler.

2.1. Squelette par axe médian

L'axe médian d'un objet a été défini par Blum en 1967 comme étant l'ensemble des centres des disques maximaux inclus dans l'objet [6]. Un disque est maximal s'il n'est inclus dans aucun autre disque dans l'objet. On obtient donc un graphe linéaire en 2D, la figure 1.1 représenter une transformation par axe médian [10].

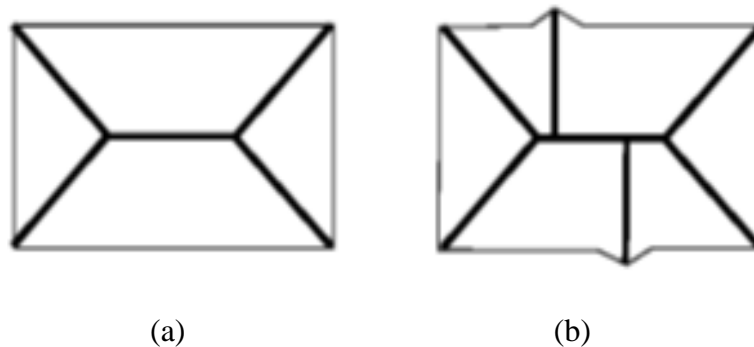


Figure 1.1 : Transformation par axe médian produit (a) un graphe linéaire, (b) un graphe linéaire avec des artéfacts.

Chaque arête du graphe est un médian, c'est-à-dire qu'il est situé au milieu d'une certaine partie de la forme et agit comme un axe de symétrie. Il existe différentes techniques pour obtenir un axe médian :

- la propagation du feu de prairie qui produit un squelette analogue à celui par disques maximaux.
- l'amincissement homotopique.
- le diagramme de voronoi.
- la carte des distances.

- transformation par axe médian 3D.

Bien que les squelettes soient des représentations compactes très riches, de haut niveau d'abstraction et très utiles dans beaucoup d'applications, il reste que les principaux problèmes des approches par transformation par axe médian sont le manque de robustesse aux déformations locales, la complexité d'extraction du squelette, et la difficulté de coder des vecteurs caractéristiques. De plus en 3D, l'axe médian est plus complexe et peut contenir des segments de surfaces. qu'on l'appelle alors une surface médiane [10].

Dans la littérature, plusieurs méthodes qui sont basées sur la géométrie computationnelle adoptent l'axe médian pour la représentation des formes [6, 11, 12]. D'après ces méthodes, le point incontournable d'employer l'axe médian est qu'il ne conduit pas à une représentation unique de la forme. Zhu et Yuille [13] présentent une méthode qui est basée sur une variante de l'axe médian.

2.2. Squelette par surface médiane

Pour la surface médiane des objets 3D, Siddiqi et al. [14] ont proposé une représentation basée sur le graphe acyclique direct pour recherche d'objets 3D en utilisant les surfaces médianes. Leur méthode emploie l'information géométrique associée à chaque nœud du graphe.

3. Approches par graphes de squelette

Les approches basées sur les représentations par graphe permettent d'extraire des informations intrinsèques à la forme générale des objets 2D et 3D, et peuvent donc être de puissants outils de recherche ou de comparaison des formes [10]. Une méthode pour la recherche et la comparaison des objets 3D est proposée dans [15]. La méthode encode l'information géométrique et topologique sous forme d'un graphe de squelette et utilise les techniques d'appariement de graphes qui appariant les squelettes et les comparent entre eux. Après les opérations de finesse et de regroupement, les points du squelette sont identifiés pour réaliser l'appariement de graphes, et ces points doivent être se convertir en un graphe acyclique direct (ou DAG).

D'autres approches d'extraction de graphes permettent d'obtenir des représentations de haut niveau, mais elles restent coûteuses et très sensibles aux bruits. L'approche de [16] permet d'extraire un graphe basé sur des ensembles de niveaux géodésiques. La

représentation obtenue caractérise bien la forme des objets mais la construction du graphe est dépendante du choix d'un point source.

Les graphes de choc sont des variantes de l'axe médian, car ils capturent son évolution dans le temps et peuvent être considérés comme un axe médian enrichi par des informations additionnelles. Cependant, il peut se produire dans une représentation unique pour une large classe de formes et est généralement considéré comme un meilleur descripteur de forme avec des variantes numériques [11]. Les graphes de choc de [17] permettent d'obtenir une description assez riche en utilisant l'orientation des arêtes des graphes obtenus par la transformation par axe médian. Ils sont utilisés en reconnaissance de forme 2D, et leur extension en 3D consiste à utiliser des graphes de choc extraits de vues 2D de l'objet 3D à décrire. Leur approche repose donc sur des extractions d'axes médians qui peuvent être initialement très bruités [10]. D'autres approches qui emploient les graphes de choc ont été détaillées dans [18]. Siddiqi et al. introduit une approche de détection des chocs basée sur la théorie de singularité pour générer un modèle de squelette. Ils comparent les formes basées sur le graphe de choc par les considérer comme des structures d'arbre et employer l'isomorphisme des sous-graphes [19] ou par trouver la clique maximale d'association des graphes [20]. Ils choisissent l'ancien choc comme le nœud racine qui n'est pas toujours le plus logique. Sebastian et al. [21] simplifient la reconnaissance des formes à travers les graphes de choc en partitionnant l'espace des formes ou ils regroupent toutes les formes de la même topologie du graphe de choc dans une classe d'équivalence. Par la suite, ils discrétisent l'espace de déformation par décrire toutes les déformations avec les mêmes transitions pour être équivalentes.

4. Approches par graphes de Reeb

Les graphes de Reeb permettent d'obtenir une représentation de type squelette en conservant la structure topologique des objets. En effet, leurs constructions reposent sur la théorie de Morse qui permet de caractériser la topologie des surfaces fermées; on retrouve donc autant de cycles dans les graphes que de trous dans les objets, la figure 1.2 représente des exemples de graphe de Reeb des objets 3D [10].

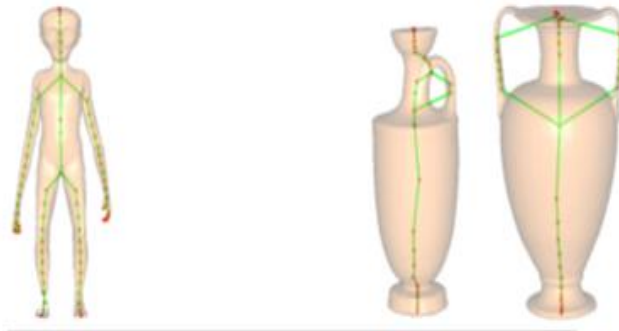


Figure 1.2 : Modèles d'objets 3D et leur graphe de Reeb mentionné par des lignes avec une couleur verte.

Les graphes de Reeb sont utilisés dans divers domaines tels que la cartographie pour la modélisation de terrain [22], la médecine pour la segmentation de scanner 3D du corps humain [23], et la reconnaissance des formes 3D [24]. Dans [25], le graphe de Reeb est utilisé dans la représentation graphique d'images pour le phénotypage des plantes. Dans [26], une indexation d'objets 3D par graphe de Reeb multi-résolution augmenté est proposée. Dans [27], un algorithme de calcul de la dissimilarité entre les chemins de graphe de Reeb pour l'appariement et la recherche d'objets 3D est proposé. Biasotti et al. [28] proposent un graphe de Reeb étendu (ou ERG) qui supporte les points critiques dégénérés, pour la compréhension et la description de la surface. Dans [29], un nouveau modèle basé sur les graphes de Reeb et leurs contours pour créer une correspondance entre des objets 3D ayant une topologie différente est proposé. Dans [30], un système de localisation automatique des signes ou des symboles céphalométriques en utilisant le graphe de Reeb est conçu. Dans [31], Le graphe de Reeb est utilisé pour l'analyse topologique de données multi-fluides dépendantes du temps. Dans [32], une approche pour la décomposition d'objets 3D basée sur les graphes de Reeb est proposée.

Un algorithme dans [2] est conçu et démontre que les graphes de Reeb sont décrits par des données binaires 2D ou 3D segmentées en utilisant une analyse basée sur une fonction de Morse. Dans [33] un algorithme de calcul du graphe de Reeb pour maillages triangulaires avec des contours actifs est implémenté.

Dans [34], un algorithme d'appariement d'objets 3D est présenté basé sur le graphe de Reeb multi-résolution (ou MRG). Le graphe MRG est calculé pour chaque objet 3D et une technique d'appariement de graphes est employée pour mettre en correspondance deux graphes MRG. Dans ce cas, la fonction de distance géodésique à tous les autres points est partitionnée en intervalles qui conduit au montage du graphe de Reeb correspondant. Dans

[27], le graphe de Reeb est introduit pour une représentation topologique d'objets 3D en utilisant la théorie de Morse. L'algorithme de squelettisation proposé encode un objet 3D en graphe de Reeb en employant une distance de mixture normalisée. Les auteurs dans [27] proposent aussi un nouvel algorithme d'appariement de graphes pour comparer les chemins courts relatifs entre les nœuds d'extrémités dans les deux graphes.

D'autres approches qui emploient le graphe de Reeb existent dans la littérature, qu'on peut les citer brièvement. Par exemple, une classification des orbites co-adjointes génériques pour les surfaces fermées est réalisée en utilisant la représentation en graphe de Reeb [35]. Un dictionnaire de topologie pour la compréhension et la classification du vidéo 3D à l'aide de graphes de Reeb est construit [36]. Une nouvelle méthode pour la construction du graphe de Reeb invariant et à haut niveau pour maillage 3D polygonale est conçue [37]. Dans [38] et [39], la structure de graphe de Reeb est utilisée respectivement dans la récupération des objets 3D avec le graphe de Reeb étendus et suivi des caractéristiques à l'aide des graphes.

Un algorithme en ligne qui construit le graphe de Reeb pour la diffusion des données est proposé [40]. Cet algorithme prend l'avantage de la cohérence de l'entrée pour construire efficacement le graphe de Reeb. Un autre algorithme d'acquisition des mouvements par le graphe de Reeb est proposé [41]. Le graphe est construit sur deux fonctions l'hauteur et la distance barycentrique. Un algorithme automatique et unifié pour la construction et la simplification de graphe de Reeb est conçu pour l'approximation des surfaces triangulées [42]. Une technique de comparaison automatique de la topologie par l'estimation de la similarité des objets 3D à l'aide de graphe de Reeb [34]. Le graphe de Reeb est employé dans un algorithme de [43]. Le graphe est construit par une distance géodésique pour la comparaison d'objets articulés. Une méthode d'ingénierie inverse pour la gestion de la maturité DMU est proposée par l'utilisation d'un graphe de Reeb fonctionnel [44]. Une méthode d'extraction et la classification des objets 3D en utilisant l'apprentissage par noyau multiple sur des graphes de Reeb étendus est réalisé [45]. L'évolution du graphe de Reeb d'une fonction continue à trois dimensions et variable dans le temps est étudiée [46]. Une méthode pour la construction de quad-angulations topologiques grossières de surfaces triangulaires fermées basées sur la théorie de Morse est proposée [47]. Une nouvelle méthode pour la construction de haut niveau du graphe de Reeb à partir des entités topologiques qui donnent un bon aperçu de la structure de la forme est présentée [48]. Une distance d'édition entre les graphes de Reeb de surfaces orientables en termes de coût pour

transformer un graphe en un autre par les opérations d'édition [49]. Une technique de compression topologique et reconstruction à partir de graphes de Reeb des formes est analysée [50]. Enfin, un algorithme de graphe de Reeb pour la céphalométrie 3D automatique est proposé [51].

5. Conclusion

La représentation par les squelettes et les graphes a beaucoup noyée divers domaines et champs d'applications en reconnaissance des formes. Pour les graphes, le graphe de Reeb qui est considéré comme un outil est utilisé de façon très diverse dans nombreuses applications. Le graphe de Reeb est caractérisé par sa capacité d'obtenir une meilleure représentation de type squelette en conservant à la fois les propriétés topologiques et géométriques des formes contenant des objets 2D ou 3D.

1. Introduction :

Le graphe de Reeb est une structure fondamentale pour analyser et représenter la topologie des formes. Un graphe de Reeb qui capture la topologie d'une forme a été largement utilisé dans un large éventail d'applications telles que l'adaptation des formes, la compression, le paramétrage de surface et la simplification, la modélisation du solide et la visualisation. Les applications de visualisation traitent les problèmes allant du calcul de similarités et de la recherche de défauts dans des modèles complexes à la sélection automatique de paramètres de visualisation [40]. Les graphes de Reeb peuvent aussi déterminer si une surface a été reconstruite correctement, indiquer des zones de probabilité et être utilisées pour encoder et animer un modèle [40], corriger les erreurs dues au segmentation d'images [52]. Ils sont particulièrement utiles dans le traitement des modèles massifs tels que ceux générés par le balayage laser à haute résolution [40].

Ce travail présente une approche basée sur la topologie différentielle qui étudie les propriétés de dérivabilité de fonctions réelles définies sur les objets de la forme le contour de ces objets pour dériver les points critiques qui aident à la génération du graphe de Reeb conjointement avec les informations géométriques. Si l'information topologique est dédiée à analyser et étudier la nature ou les propriétés des points critiques suivant la théorie de Morse, l'information géométrique aide à appliquer des fonctions réelles sur la forme et déterminer ses valeurs. Plus précisément, les points critiques dans la forme sont calculés avec la courbure sur la séquence des points de contour en utilisant le cercle d'oscillation ou les dérivations de fonction de distance centrique (distance de chaque point de contour par rapport au centre de masse). Nous commençons par une segmentation initiale et extraction des contours avec la méthode LBP [52], les points critiques sont calculés aisément avec les dérivations premières et secondaires sachant que la seconde dérivation définit la mesure de courbure. En ce qui concerne la structure du graphe de Reeb, les nœuds du graphe sont représentés par les points critiques les plus stables (positions de changement de la topologie) tandis que les arêtes représentent la persistance topologique de la connexité dans les objets de la forme. Aussi, les points critiques calculés selon la fonction de distance centrique conduisent à la subdivision dynamique de la forme en régions connexes bornées par les cercles centriques. En ce qui suit, nous abordons les concepts mentionnés précédemment qui sont le graphe de Reeb et la théorie de Morse pour l'analyse des fonctions à valeurs réelles, et cela pour préparer la piste de bien concevoir le modèle topologique de squelettisation.

2. Graphe de Reeb :

Le graphe de Reeb est une représentation structurelle qui est largement utilisé comme un descripteur de forme pertinent pour les objets 2D et 3D. Il est considéré comme un descripteur de forme compacte qui transmette des informations topologiques relatives aux ensembles de niveaux d'une fonction définie sur la forme. Les graphes de Reeb ont été proposés pour résoudre différents problèmes apparaissant en vision, analyse d'images et infographie et aujourd'hui, jouent un rôle fondamental en topologie computationnelle [1]. Les graphes de Reeb sont initialement définis pour l'espace continu, mais ont été étendus au domaine discret [53]. Le graphe de Reeb peut être aussi utilisé dans l'analyse et représentation d'objets 3D (voir la figure 2.1) [10].

Les graphes de Reeb qui sont des descripteurs de forme compacts très populaires dans le contexte calculatoire préservent les caractéristiques topologiques de la forme car ils capturent à la fois les propriétés géométriques de la forme et ses caractéristiques topologiques [54]. Pour une fonction de mesure et une forme ou variante S , les sommets du graphe de Reeb correspondent aux points critiques de cette fonction (points où la topologie de S change), les arêtes décrivent la persistance topologique. En d'autres termes, tous les nœuds ayant la même valeur critique de la fonction sont représentés par un seul nœud dans le graphe, les connexions entre les nœuds décrivent la continuité de l'espace et la persistance en topologie.

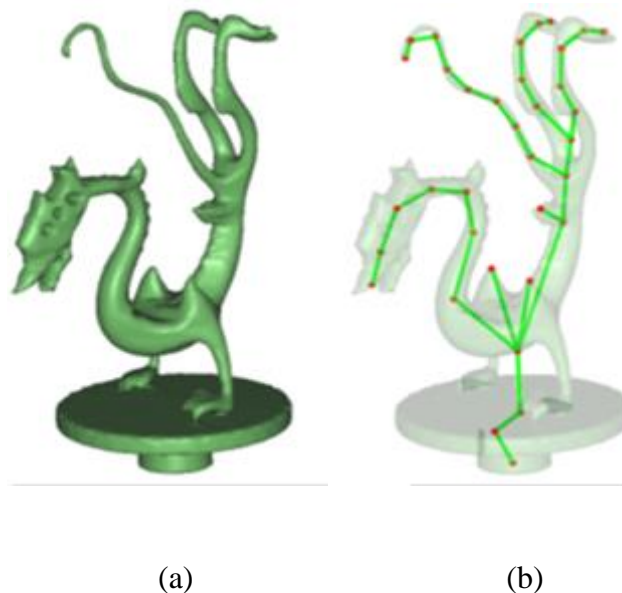


Figure 2.1 : (a) modèle 3D, (b) graphe de Reeb (arêtes en vert et nœuds en rouge).

2.1.Définition :

Le graphe de Reeb qui est une structure ou construction topologique a été défini par le mathématicien, George Reeb, dans son travail daté en 1946 et trouve ses racines dans la théorie de Morse. Avant de passer à la définition du graphe de Reeb, étant donné une variété S et une fonction de valeur réelle f définie sur S , la relation d'équivalence est définie comme suit:

Deux points p et $q \in S$ sont équivalents, i.e., $p \sim q$, s'ils appartiennent à la même composante connexe de ligne de niveau de la fonction f . Mathématiquement, $p \sim q$ si $f(p) = f(q)$ et $p \in \text{ConnComp } d(q)$, ou formellement :

$$p \sim q \Leftrightarrow \begin{cases} f(p) = f(q) \\ p \text{ et } q \text{ sont dans une même composante connexe } f^{-1}(f(p)) \end{cases}$$

Maintenant, le graphe de Reeb, plus précisément est l'espace quotient défini par la relation d'équivalence qui identifie les points appartenant à la même composante connexe des lignes de niveau de f . Sous certaines hypothèses sur S et f , Reeb a énoncé le théorème suivant, qui est en fait la définition de ce que l'on appellera le graphe de Reeb [1].

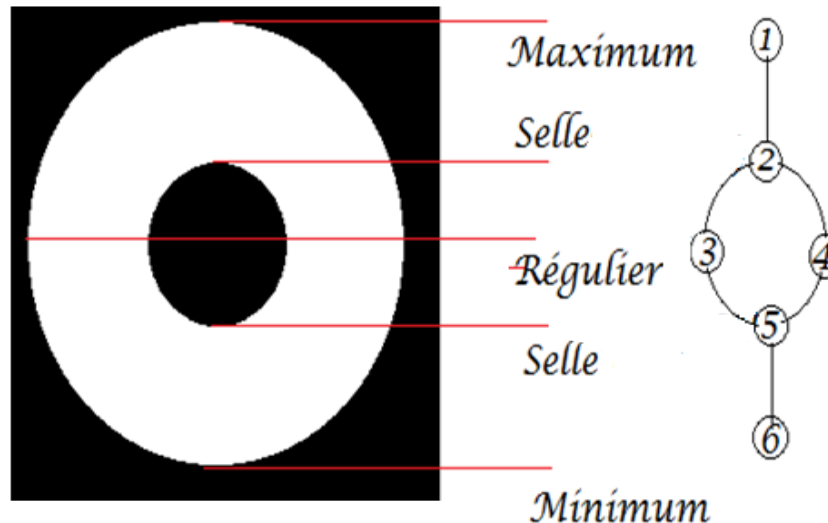


Figure 2.2: Six points critiques (un minimum, deux selles, un régulier, et un maximum) de la fonction hauteur avec son graphe de Reeb correspondant. Les points critiques qui sont calculés sur le contour de l'anneau avec pixels d'objets en blanc représentent les nœuds du graphe.

Définition 2.2 (Graphe de Reeb) : Soit $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur une variété compacte S [55]. Le graphe de Reeb de f est l'espace quotient de f dans $S \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $(p, f(p)) \sim (q, f(q))$, si et seulement si :

Soit une variété $S \subset \mathbb{R}^2$, $q \in S$, et une fonction d'hauteur f tel que $f(q(x, y)) = y$.

$\forall p_1 = (x_1, y_1) \in S$ et $p_2 = (x_2, y_2) \in S$:

- $f(p_1) = f(p_2)$ si et seulement si $y_1 = y_2$,
- $f^{-1}(f(p_1)) = f^{-1}(y_1)$ est la restriction de S à $S \cap (R \times y_1)$, donc à l'ordonnée y_1 .

Donc, deux points appartiendront à la même classe d'équivalence si et seulement s'ils ont la même ordonnée, et s'ils sont dans la même composante connexe de ligne de niveau (voir la figure 2.2).

La représentation du squelette est, par conséquent, un ensemble de toutes ces classes d'équivalence avec chaque classe d'équivalence associée à la même valeur au moyen d'une fonction de valeurs réelles [11].

Pour une implémentation algorithmique, cela signifie que pour un intervalle donné I_K , si on considère seulement la partie de l'objet dont l'image par f est dans I_K (c'est-à-dire $f^{-1}(I_K)$), il y a dans cette restriction autant de classes d'équivalence que de composantes connexes (K est le nombre de lignes de niveau qu'on appellera la résolution du graphe).

Concrètement, et en se basant sur ce qui a été présenté précédemment, le graphe de Reeb est obtenu en partitionnant itérativement l'objet suivant des intervalles réguliers de valeurs de f , et en affectant un nœud à chaque ensemble connexe. Les ensembles connexes (les nœuds) sont reliés entre-eux par des arêtes [10].

Définition 2.3 Chaque classe d'équivalence de la relation donnée par la définition 2.1 définit un nœud du graphe de Reeb discrétisé. Un nœud du graphe de Reeb correspond donc à un intervalle de f et à un sous-ensemble connexe de l'objet.

Définition 2.4 Une arête relie deux nœuds du graphe de Reeb discrétisé si et seulement si les deux sous-ensembles de l'objet qui correspondent à ces deux nœuds sont connexes.

Le principal avantage du graphe de Reeb est qu'il permet de représenter de manière simple la topologie d'un ensemble. On note que l'aspect du graphe résultant est entièrement lié au choix de la fonction f .

Afin de capturer la topologie de la forme illustrée dans l'exemple précédent de la figure 2.2, nous devons exploiter le formalisme d'une fonction de Morse ; nous concentrons sur le contour de la forme, qui est composé de deux contours disjoints S_1 et S_2 . Si nous utilisons la fonction d'hauteur comme une fonction de Morse, nous aurions pu facilement identifier les points maxima, les minima, les selles et même les réguliers. Dans l'exemple, les points critiques sont identifiés, qui sont un minima, un maxima, deux selles et deux points réguliers.

Si on prend S une variante compacte de dimension $d \geq 2$ et $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse comme dans la figure 2.3, chaque point $p \in R(f)$ est l'image d'un contour dans S . Selon la définition d'une fonction de Morse, les points critiques ont des valeurs de la fonction distinctes, ce qui implique une bijection entre les points critiques de f et les de $R(f)$. Le reste du graphe de Reeb est partitionné en arêtes reliant les nœuds. Un minimum ou minima commence un contour et correspond donc à un nœud de degré un (voir la figure 2.3) [1]. Une selle d'index un qui fusionne deux contours en un correspond à un nœud de degré trois. De manière symétrique, un maximum ou maxima correspond à un nœud de degré un et une selle d'index $(d-1)$ qui divise un contour en deux correspond à un nœud de degré trois. Tous les autres points critiques correspondent aux nœuds de degré deux. Nous notons que le graphe de Reeb est un espace topologique unidimensionnel avec des points sur les arêtes. Cependant, il n'existe aucun moyen privilégié pour dessiner le graphe dans le plan ou dans l'espace [56].

A rappeler que, l'espace quotient sur $S \times \mathbb{R}$ induit par la relation d'équivalence $\ll \sim \gg$ est un complexe simplicial fini et connecté K de dimension 1, tel que l'image de chaque sommet de K est une composante singulièrement connexe des lignes de niveau de f .

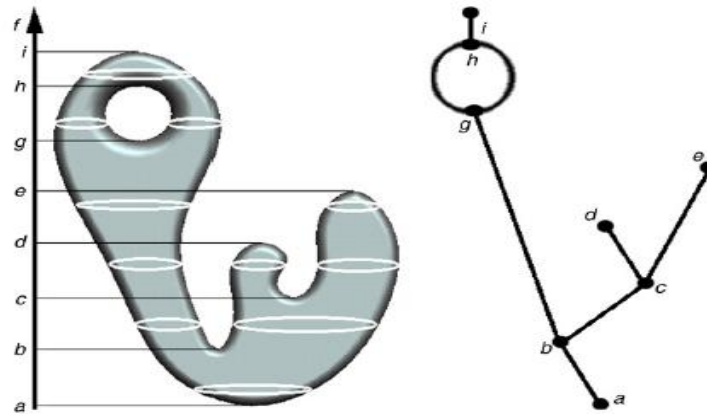


Figure 2.3 : Une forme 2D étudiée en fonction de la fonction d'hauteur (à gauche) et son graphe de Reeb correspondant (à droite). Les lettres de a à i désignent les ensembles de niveaux ou les valeurs critiques qui correspondent aux nœuds du graphe de Reeb.

2.1. Applications de graphe de Reeb :

Une des caractéristiques les plus importantes de graphe de Reeb est qu'il fournisse une structure qui code efficacement les formes avec les perspectives topologique et géométrique. La topologie signifie que la forme peut être décrite comme la configuration des parties qui sont attachées ensemble en respectant la topologie de la forme, alors que la géométrie signifie que les différentes parties correspondent à des caractéristiques de la forme noyées dans l'espace euclidien. En raison de leur capacité à extraire des traits de haut niveau des formes depuis leur introduction dans l'infographie, les graphes de Reeb ont gagné la popularité en tant qu'outil efficace pour différentes tâches d'analyse et de description de forme.

Les champs d'application liés à l'utilisation des graphes de Reeb sont l'analyse de surface et la compréhension, l'identification des quadrangulations topologiques, la simplification des données, l'animation, la segmentation du corps humain, le paramétrage de surface, la reconstruction d'objet et l'édition. De plus, la connaissance de la topologie de forme donnée par la structure graphique améliore le placage de texture à partir des lignes de contour [1].

3. Théorie de Morse :

La théorie de Morse est une partie de l'algèbre topologique. Elle s'intéresse aux effets des points critiques sur la topologie d'un ensemble. La théorie Morse est devenue une technique fondamentale pour étudier la topologie des variétés ou des formes lisses. Les résultats basiques dans cette théorie prouvent que la topologie d'une forme lisse est étroitement liée aux points critiques d'une fonction homogène sur cette forme [57]. La théorie

de Morse s'applique aux espaces de dimension infinie. Elle est utilisée dans les calculs variationnels pour établir une relation entre les points critiques d'une fonction différentiable définie sur une variété différentiable, et la topologie globale de la forme [10].

Notre intérêt central pour l'utilisation de la théorie Morse consiste à étudier comment les points critiques d'une fonction définie sur un espace affectent la forme topologique de l'espace. Si S dénote une forme compacte lisse de dimension n et sans frontière. Un point critique d'une fonction lisse $\varphi: S \rightarrow R$ est un point où la dérivation de la fonction $d\varphi$ s'annule. Si p est un point critique de φ , et un système de coordonnées local donné $x = (x_1, \dots, x_n)$, on définit la matrice Hessienne comme suit :

$$H(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.1)$$

Definition 2.5.(Point Critique) Soit $h : S \rightarrow R$ être différent sur S , $p \in S$ est un point critique si $dh(p) = 0$

Definition 2.6.(fonction de Morse) Soit $h : S \rightarrow R$ peut être différenciable en 2 sur S , h est une fonction Morse si tous ses points critiques ne sont pas dégénérés et si pour deux points critiques distincts $x \neq y$ Puis $h(x) \neq h(y)$.

La Hessienne étant la matrice des dérivées partielles du second ordre.

L'expression du déterminant de la Hessienne est la suivante :

$$\det H f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 \dots\dots\dots (2.2)$$

3.1. Les points critiques :

Un point critique est non-dégénéré si sa dérivée seconde est non-nulle ($\varphi''(x) \neq 0$).

Par exemple, L'étude les points critiques d'une fonction à une variable permet d'obtenir les maxima, minima, et points d'inflexion de cette fonction, et par définition, les points critiques sont les points x_0 satisfaisant $\varphi'(x_0) = 0$. De même, pour les fonctions à deux variables telles que $\varphi(x, y)$, les points critiques sont les points de gradient nul ($\nabla\varphi = 0$, soit $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0$). Un point critique est dit non-dégénéré pour une fonction à deux variables si le déterminant de la Hessienne de φ en ce point est non nul [10].

La figure 2.4 montre quelques exemples de points critiques non dégénérés et dégénérés [1].

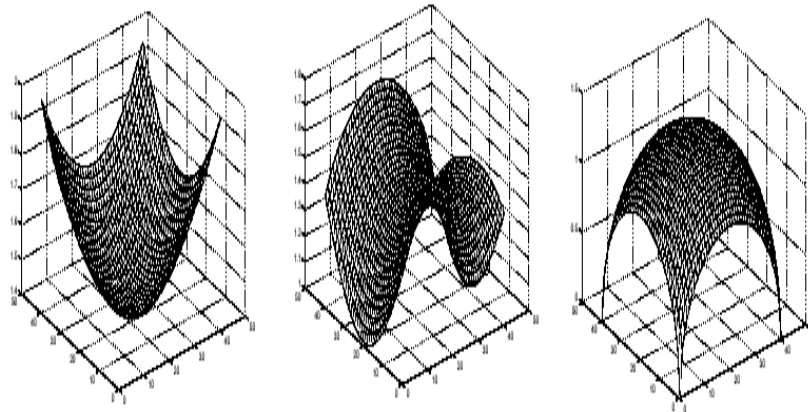


Figure 2.5 : Allures des surfaces au voisinage des points critiques d'une fonction à deux variables : à gauche pour $f(x, y) = x^2 + y^2 + c$, au milieu pour $f(x, y) = x^2 - y^2 + c$ et à droite pour $f(x, y) = -x^2 - y^2 + c$.

La topologie et la forme globale d'une variété différentiable peuvent donc être caractérisées en décomposant la surface en ces trois formes. La théorie de Morse permet alors d'obtenir des méthodes pour classer les points critiques selon leur type. En particulier, en étudiant le nombre de valeurs propres négatives de la Hessienne : un minimum n'a pas de valeurs propres négatives, un point selle en a une, et un maximum a deux valeurs propres négatives.

Un résultat classique de la théorie de Morse pour une fonction $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur une surface fermée S , est que si φ a seulement deux points critiques non-dégénérés, alors S est topologiquement équivalent à une sphère. En effet, si on considère la fonction de l' hauteur, qui est une fonction de Morse classique, définie sur une sphère, les deux points critiques existants correspondent aux deux pôles Nord et Sud de la sphère.

Plus précisément, le nombre de points critiques est équivalent au nombre d'Euler caractérisant une surface : $E = \#\text{minima} - \#\text{selles} + \#\text{maxima}$. Un autre résultat de la théorie de Morse garantit qu'entre les points critiques, la topologie de la variété reste inchangée (lemme de déformation) (voir la figure 2.6) [57]. La théorie de Morse est un outil puissant pour caractériser la topologie globale des variétés différentiables [10].

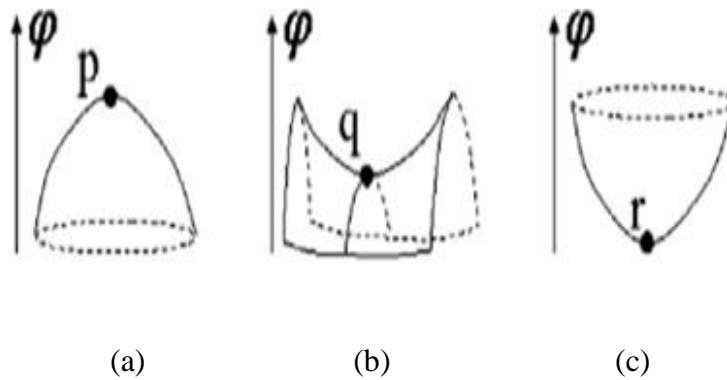


Figure 2.6 : (a) p est maxima, (b) q est un selle, (c) r est un minima.

3.2. Fonction de valeurs réelles :

Il existe différentes fonctions continues de valeurs réelles qui peuvent être utilisées comme des fonctions de Morse et qui ont les propriétés suivantes :

- Pour un point p d'un objet, la fonction de hauteur définie par $f(p) = h$ est bien adaptée pour les modèles privilégiant la verticale comme la représentation d'hauteur de l'être humain. Cette fonction est facile à implémenter et ne nécessite pas de calcul, mais par définition est totalement dépendante de l'orientation de l'objet. Par exemple, elle n'est pas adaptée aux objets dont les points sont majoritairement dispersés dans des directions perpendiculaires à l'axe parallèle à l'échelle de h , la figure 2.7(a) est une représentation de la fonction d'hauteur [10].

- La fonction définie comme la distance géodésique pour la courbure est basée sur la croissance de régions à partir de la courbure de Gaussienne locale sur des sommets (germes). Les résultats dépendent de la position des germes et nécessitent le calcul des courbures locales ce qui n'est pas toujours réaliste, spécialement pour les objets dont le maillage est géométrique très souvent de mauvaise qualité.

- La fonction centroïde définie comme la distance d'un point p au centre de masse G de l'objet $f(p) = d(G; p)$, où d est la distance Euclidienne, est simple à calculer et stable aux petites perturbations [10] (voir la figure 2.7(b)).

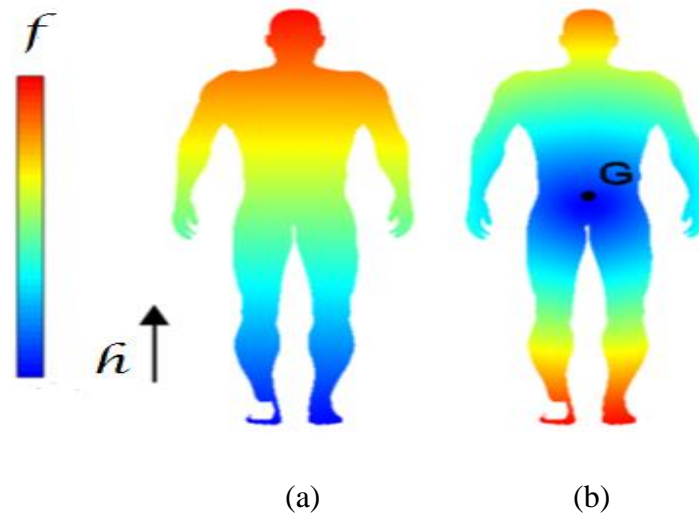


Figure 2.7 : Exemple de fonctions de mesure : hauteur (a), distance au centre de masse (b).

4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux concepts principaux : le graphe de Reeb et de la théorie de Morse. Les deux concepts qui sont auto corrélées par le biais des points critiques aident et conduisent à la génération du modèle topologique squelettique selon la structure du graphe de Reeb. Dans ce chapitre, nous avons parlé en premier lieu du graphe de Reeb (définition, domaines d'applications du graphe de Reeb). En deuxième lieu, les concepts de la théorie de Morse sont mentionnés en détails avec le choix de la fonction à valeurs réelles.

1. Introduction

L'objectif de cette approche est de fournir un système de reconnaissance basé sur un formalisme mathématique conduisant à représenter une classe des formes 2D, chacune avec une empreinte unique. Notre approche est proposée pour concevoir sur un modèle topologique spécifiquement basé sur le graphe de Reeb construit suivant des points critiques extraits de la forme. Ces points sont des points de contour de la forme 2D ayant une courbure élevée, invariants aux transformations géométriques et aux petits changements et robustes aux bruit.

Le modèle topologique conçu qui est un graphe squelettique s'est montré être un descripteur de forme intéressant, puissant, discriminant et invariant aux transformations affines et petits changements et a conduit à mieux représenter la forme 2D. Comme l'information topologique est pertinente, d'une importance capitale et capable de caractériser la forme, le modèle de graphe à concevoir est bien adapté pour tenir en compte les caractéristiques topologiques. L'objectif de concevoir ce modèle est d'employer l'information topologique et d'aboutir à un modèle offrant ainsi une signature de descripteur homotopiquement équivalent à un complexe simplicial. Le futur complexe peut être exploité dans le calcul des groupes d'homologie, de co-homologie et d'homotopie.

Dans notre approche, le profil topologique du modèle est monitoré par la théorie de Morse en calculant la structure de graphe de Reeb selon les changements topologiques qui surviennent sur les contours de la forme, c.-à-d., la position et la nature des points critiques extraits (minima local, maxima local et point selle, ...) suivant la mesure de courbure interviennent à ces changements. Pour cela, on peut dire que le nouveau modèle conçu regroupe les deux profils : la topologie et la géométrie. En ce qui suit, nous allons présenter notre approche du modèle topologique de squelettisation en définissant les différentes étapes de conception.

2. Modèle topologique de squelettisation :

L'approche proposée est de concevoir un modèle topologique de squelettisation basé sur le graphe de Reeb. Le choix de cette structure de graphe est du à son adaptation pour représenter la forme 2D et maintenir les propriétés topologiques. Notre approche suit les étapes suivantes :

A. Extraction des points prédominants :

L'extraction des points prédominants s'applique sur une séquence de points de contour qui se calcule comme suit.

A.1. Extraction de séquence de points de contour :

Généralement les formes sont extraites suivant l'opération de segmentation appliquée sur des images 2D. La phase d'extraction de séquence de points suit séquentiellement les deux étapes suivantes :

- la première étape est consacrée à extraire le contour de l'objet qui est obtenu par plusieurs opérateurs de détection de contour comme Canny, Sobel, Prewitt, Marr-Hidreth et Roberts, [58]. La détection de contour d'une forme 2D réduit significativement la quantité de données avec ignorance de l'information inutile et préservation des propriétés structurales de la forme.

- La deuxième étape de traitement de points de contour consiste à retracer les points et de les mettre en séquence. Pour cela beaucoup de techniques sont qualifiées pour réaliser cet objectif. La méthode de retraceur de voisinage de Moore est employée [59].

A.2. Extraction des points critiques :

Les points de contour en séquence tous seuls, ne suffisent pour représenter une forme 2D, un ensemble de points particuliers appelés les points de caractéristique ou les points prédominants est nécessaire pour caractériser la forme. L'ensemble des points prédominants est une collection de points identifiés ou caractérisés par une mesure de courbure calculée soit par la courbure du contour selon le cercle d'oscillation ou par la matrice d'Hessienne des dérivations d'une fonction scalaire, etc. Les points de coin, de branchement et de fin de contour sont des points prédominants avec des propriétés importantes et sont très utilisés dans la reconnaissance et classification des formes. Ces points qui représentent le contour de la forme 2D de la meilleure façon sont caractérisés par une mesure de courbure élevée.

Selon la théorie de Morse, ces points prédominants qui contiennent des informations utiles pour la description de la forme sont appelés des points critiques s'ils vérifient certaines conditions au niveau de la dérivation et représentent les frontières du changement topologique (c.-à-d., des points de minima local, de maxima local ou de selle). Pour une primitive géométrique (contour 1D, surface 2D), les points prédominants en domaine discret sont

considérés comme l'approximation des points critiques en domaine continue. Pour des formes 2D simples et moins complexes avec des contours fermés et séparés, les points de coin sont considérés comme les points critiques les plus stables et qualifiés pour la modélisation du descripteur basé sur le graphe de Reeb. La figure 3.1 montre un exemple d'extraction des points critiques sur trois contours de la forme de bi-tore en utilisant la courbure des valeurs réelles de la fonction de distance centrique (la distance d'un point de contour par rapport au point de centre de masse cg représente une valeur de cette fonction).

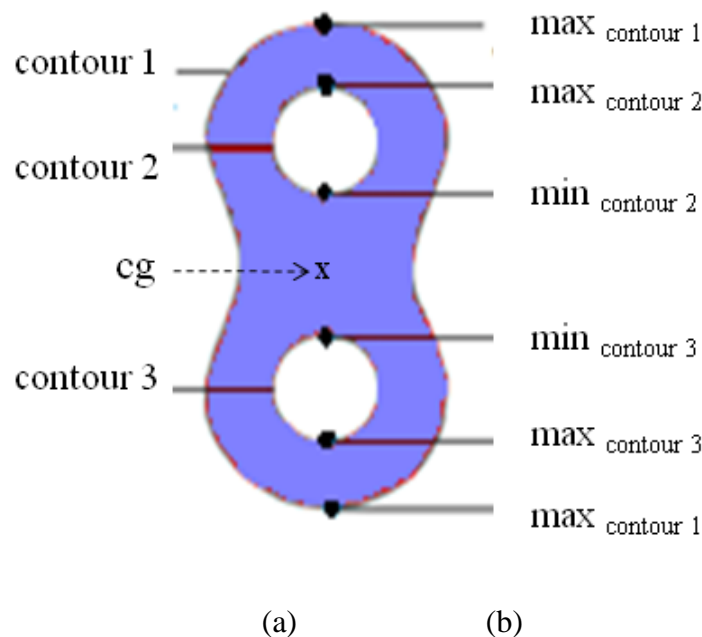


Figure 3.1 : forme 2D de bi-tore avec trois contours. Six points critiques extraits des trois contours avec l'application la fonction de distance centrique.

B. Construction du graphe de Reeb :

Le graphe de Reeb n'est pas construit de manière continue, mais de manière discrète. La distance maximale d_{max} de la fonction centrique représente l'intervalle de définition des lignes de niveau qui sera divisée en K disjoints $1, \dots, K$, ou K est la résolution du graphe. Les graphes du squelette associées à la fonction de distance centrique peut être décrit comme un espace quotient S/\sim où \sim est la relation d'équivalence.

La résolution du graphe construit est déterminée par le nombre de cercles centriques. Les cercles centriques appliqués sur la forme représentent les lignes de niveau de connectivite du graphe. On commence avec un cercle de rayon plus petit qui est progressivement augmenté. Dans le processus, nous collectons les arcs d'intersection entre un cercle et la

forme. Chaque arc d'intersection est ensuite indiqué avec un point de sommet à son centre défini comme une moyenne arithmétique des points de l'arc. La connectivité entre les sommets de centre est établie en examinant la connectivité entre les sommets de la même région connexe coincée entre deux lignes de niveau successives. Dans ce qui suit, nous montrons les différentes étapes de construction de ce graphe.

B.1. Calcul des cercles centrés :

Afin de discrétiser la forme en cercles centrés. Initialement, le nombre des cercles est supposé statique. Le choix du nombre des cercles présente un inconvénient majeur qui concerne le comportement topologique du futur modèle de squelette à générer. Pour qualifier à être topologique, les exigences de la théorie de Morse sont fortement impliquées. A ce stade, le nombre et la position des points critiques extraits du contour de la forme sont deux facteurs influents pour déterminer et positionner les cercles dans la forme. Formellement, étant donné une forme générique $S \in \mathbb{R}^2$, et la fonction de distance centrée f_d sur S , telle que :

$$f_d : S \rightarrow \mathbb{R}^+ \dots\dots\dots (3.1)$$

La fonction de distance peut donc être utilisée pour la construction des graphes de squelette (Reeb) pour l'analyse d'une forme compacte. Nous commençons à $f_d(c_g) = 0$ avec c_g est le point centre de la forme et augmentons progressivement la valeur de la fonction de distance en K étapes à une valeur maximale qui nous noterons d_{max} . L'entier K est appelé la résolution du graphe du squelette (voir la figure 3.2(a)). Plus la résolution est grande plus la précision de capture des changements topologiques entre les lignes de niveau est élevée.

B.2. Détermination des arcs circulaires et régions connexes :

En analyse topologique, l'ensemble des lignes de niveau sont géométriquement les cercles concentriques calculés par la fonction de distance centrée et leurs intersections avec la forme sont les arcs circulaires. Un cercle centré est modélisé comme étant une ligne de niveau de connectivité ou chaque ligne i du cercle centré C_i est de rayon d_i et coupe les objets de la forme en plusieurs endroits qu'on les appelle arcs circulaires. Comme résultat, l'intersection d'objet avec un cercle C_i de rayon d_i , pour tout $d_i \in [0, d_{max}]$ génère un ensemble des arcs circulaires qu'on le note $\{a_{ij}\}$ (voir la figure 3.2(b)).

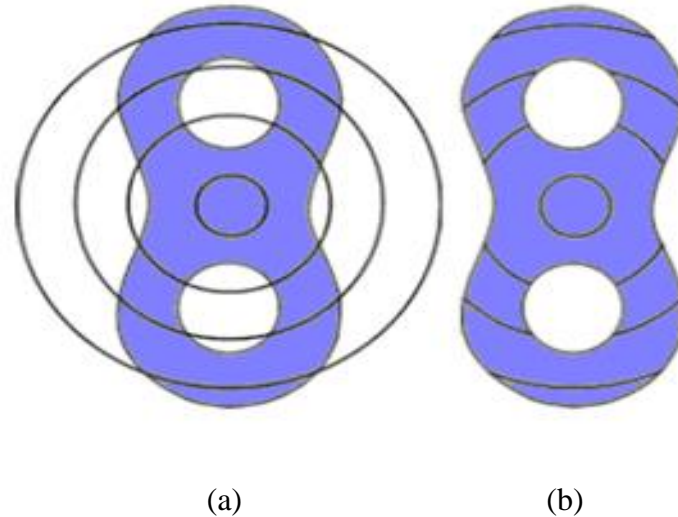


Figure 3.2 : Construction d'un graphe du squelette d'un bi-tore : (a) calcul des lignes de niveau (ou cercles concentriques); (b) les arcs d'intersection des cercles et la forme (les arcs circulaires d'objet); (c) attribution des points de sommet ou nœuds dans le graphe.

Une région connexe est une partie de l'objet coincée entre deux cercles concentriques C_i et C_{i+1} , dont tous ces points qu'elle contient sont liés ou connexes. Dans la figure 3.3(a), quatre régions connexes S_1, S_2, S_3 et S_4 sont identifiées et coincées entre les deux cercles C_2 et C_3 qui sont respectivement des lignes de niveau 2 (ou précédent) et 3 (ou courant). Dans cet exemple, l'analyse de la forme avec les cercles C_2 et C_3 donne deux ensembles d'arcs d'intersection circulaires $\{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}\}$ et $\{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4}\}$.

3. Détermination des nœuds et des arêtes du graphe :

Les nœuds et les arêtes du graphe de Reeb discrétisé sont définis selon les deux définitions (2.3 et 2.4) mentionnées dans le chapitre précédent. Une arête entre deux nœuds représente une interconnexion entre les centres d'arcs (si deux centres appartiennent à la même région connexe). Le graphe squelettique devrait avoir un ensemble des nœuds et un ensemble des arêtes et un schéma d'association entre eux. Ces deux ensembles permettent d'obtenir une représentation de type squelette qui conserve la structure topologique de la forme.

La figure 3.3(b) illustre un exemple de construction finale du graphe de squelette ou de Reeb avec quatre lignes de niveau ($K=4$). Dans l'exemple précédent, les deux ensembles d'arcs d'intersection circulaires $\{a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, a_{2,4}\}$ et $\{a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, a_{3,4}\}$ donnent respectivement deux ensembles de sommets $\{N_{a_{2j}}\}$ et $\{N_{a_{3l}}\}$ pour $j=1$ à 4 et $l=1$ à 4 qui seront

les nœuds du futur graphe. On attribue à chaque point de centre d'arc a_{ij} un sommet qui sera un nœud dans le graphe comme est illustré dans la figure 3.3(b). Afin d'établir des relations entre les deux ensembles de sommets, on inspecte les régions connexes entre les deux cercles, qui, dans cet exemple sont $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$. On remarque, qu'il y a seulement un arc du niveau courant qui est connexe à un arc du niveau précédent, via une seule région connexe. C'est seulement que $a_{3,1}$ est connexe à $a_{2,1}$ par S_1 . Cela nous permet d'ajouter une arête $(N_{a_{2,1}}, N_{a_{3,1}})$ au graphe du squelette qui connecte le sommet de l'arc du niveau courant $N_{a_{3,1}}$ au sommet de l'arc du niveau précédent $N_{a_{2,1}}$. Autres arêtes dans cet exemple sont déterminées de la même façon, c.-à-d les arêtes $\{(N_{a_{2,2}}, N_{a_{3,2}}), (N_{a_{2,3}}, N_{a_{3,3}}), (N_{a_{2,4}}, N_{a_{3,4}})\}$.

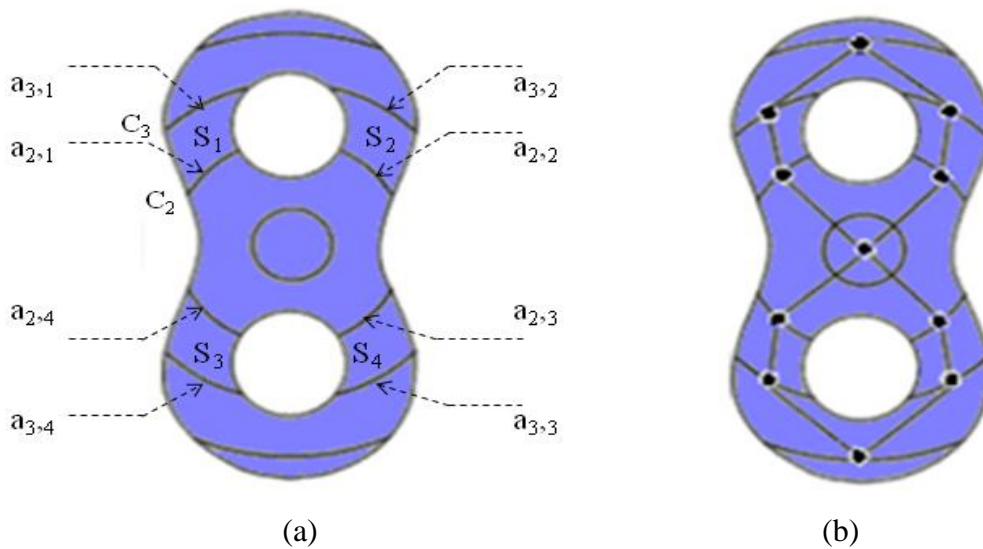


Figure 3.3 : (a) quatre régions connexes avec huit arcs circulaires d'une forme 2D, (b) graphe de Reeb correspondant avec les points de sommet et les différentes interconnexions entre ces points de sommet à travers les régions connexes.

4. Algorithme de squelettisation :

Le modèle topologique de squelettisation basé sur la structure de graphe de Reeb d'une image de forme 2D est généré selon deux algorithmes. Le premier algorithme est destiné à l'extraction des points critiques ; le second algorithme est consacré à la construction du modèle topologique de squelettisation basé sur la structure du graphe de Reeb.

L'algorithme principal de construction du modèle topologique de squelettisation utilise l'algorithme d'extraction des points critiques suivant :

Algorithme 1 : Extraction des points critiques

1. Entrée forme 2D : image binaire segmentée;
2. Extraire les contours (Canny [58] ou LBP [52]);
3. Extraire les séquences de points de contour (avec la méthode de retracement de voisinage de Moore [55] ou autres);
4. Calculer les points critiques (méthodes de courbure avec un cercle d'oscillation ou la matrice Hessienne des dérivations).

Algorithme 2: Construction du modèle topologique de squelettisation

- 1- Calculer la résolution K , le centre de masse c_g et le rayon maximal d_{max} (K est la résolution du futur graphe);
- 2- Calculer les K cercles centrés suivant le centre de masse c_g et le rayon maximal d_{max} ;
- 3- Pour chaque ligne de niveau i ,
 - calculer $r_i := i \frac{d_{max}}{K}$
 - calculer de l'ensemble des arcs d'intersection du cercle C_i avec les objets de la forme 2D $\{a_{i,j}\}$;
 - déterminer l'ensemble des sommets ou nœuds $\{N_{i,j}\}$ qui représentent les points de centre des arcs $\{a_{i,j}\}$;
- 4- Pour chaque ligne de niveau i ,
 - Interconnecter les nœuds $\{N_{i,j}\}$ du cercle C_i et ceux de $\{N_{i+1,j}\}$ du cercle C_{i+1} , s'il \exists un arc $a_{i+1,l} \in \{a_{i+1,j}\}$ du niveau $(i+1)$ qui est connexe à un arc $a_m \in \{a_{i,j}\}$ du niveau i , via une seule région connexe. Cela permet d'ajouter une arête $(N_{ai,m}, N_{ai+1,l})$ au graphe du squelette ;
5. Sortie : Graphe de Reeb composé de la structure $\{\{N_{i,j}\}, \{N_{i,j}, N_{i+1,j}\}\}, i=1,\dots,K$.

Dans la figure 3.4, l'architecture d'algorithme de squelettisation est définie comme suit :

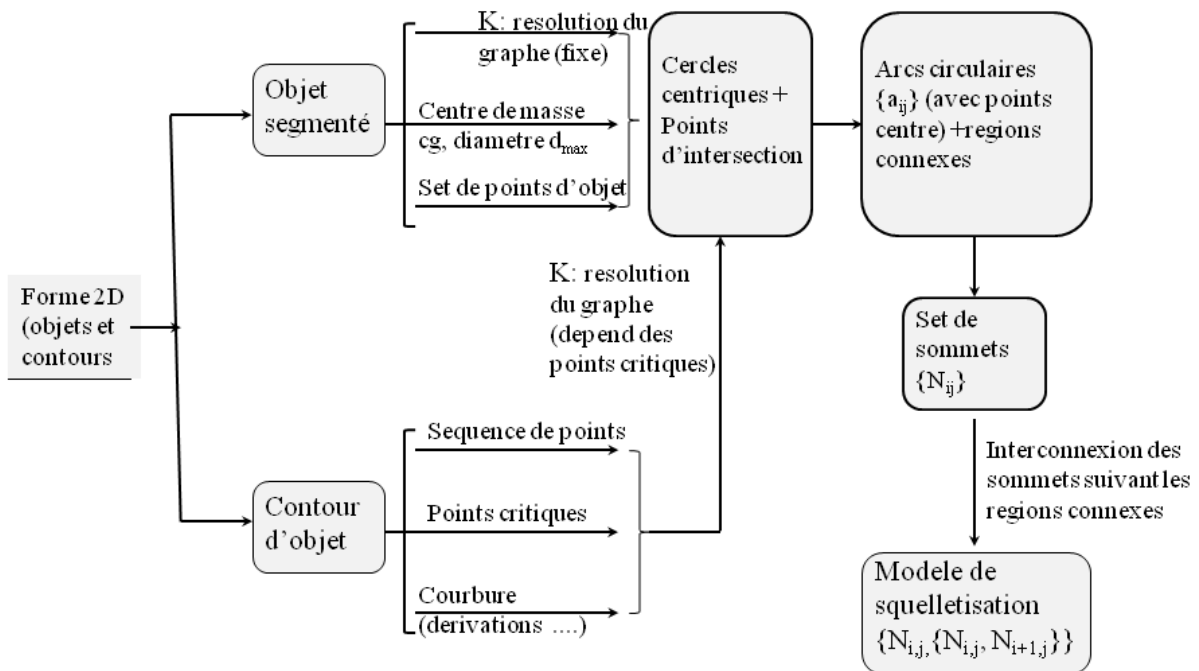


Figure 3.3 : diagramme de l'algorithme de squelettisation.

5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré un modèle topologique pour l'analyse d'une forme 2D, nous avons présenté deux algorithmes pour générer le squelette du modèle topologique suivant la structure du graphe de Reeb. Le premier algorithme qui est réservé pour l'extraction des points critiques est axé sur l'extraction de séquence des points de contour et les points critiques de la forme. Le deuxième algorithme qui adopte le premier algorithme est destiné à représenter la forme 2D par un modèle squelettique du graphe de Reeb en se basant sur des cercles centriques sur la forme qui sont calculés à travers la fonction de distance centrique (ces cercles sont des lignes de niveau selon la théorie de Morse) et l'affectation des centres des arcs circulaires comme des nœuds pour le graphe. Le un modèle squelettique du graphe de Reeb ainsi développé peut s'intégrer dans un système de reconnaissance des formes 2D sous différentes variations.

1. Introduction

Nous avons discuté et présenté dans le chapitre précédent le modèle topologique de squelettisation basé sur la structure de graphe de Reeb qui conduit à représenter efficacement la forme. Il tient en compte en premier lieu les caractéristiques topologiques qui caractérisent la forme en appliquant la théorie de Morse et en deuxième lieu les caractéristiques géométriques représentées par les points critiques extraits en utilisant la courbure sur la fonction de distance centrique. Dans ce chapitre, nous concentrons sur l'implémentation de ce modèle en java afin de tester l'efficacité de cette approche de modélisation de la forme 2D par un graphe squelettique. Ce chapitre est composé de deux sections, la première section est destinée à l'implémentation du modèle et la deuxième est consacrée à la validation de ce modèle par des tests expérimentaux sur une base standard des formes 2D.

2. Implémentation de l'approche

Cette section est consacrée à l'implémentation de notre modèle topologique par le graphe squelettique conçu dans le chapitre précédent. Cette section d'implémentation qui est réalisée en java est débutée par décrire les environnements matériels et logiciel. L'environnement logiciel englobe le développement sous Eclipse et le langage Java.

2.1. Environnement de matériels

Nous avons utilisé un ordinateur qui possède les caractéristiques suivantes :

- ❖ Processeur : 2.53 GHz.
- ❖ Disque dur : 465 Go.
- ❖ RAM : 2 Go.
- ❖ Carte graphique : 1696 MB.

2.2. Environnement logiciel

2.2.1. Environnement de développement Eclipse

Dans le contexte de l'informatique, l'Eclipse est un environnement de développement intégré (IDE) pour le développement d'applications en utilisant le langage de programmation Java et autres langages de programmation tels que C/C++ , Python, PERL, Ruby, etc.

La plate-forme Eclipse qui fournit la base de l'IDE Eclipse est composée de plug-ins et est conçu pour être extensible à l'aide de plug-ins supplémentaires. Développé à l'aide de Java, la

plate-forme Eclipse peut être utilisée pour développer des applications client riche, environnements de développement intégrés, et d'autres outils. Eclipse peut être utilisé comme un IDE pour n'importe quel langage de programmation pour lequel un plug-in est disponible [60], la figure 4.1 représente la fenêtre de démarrage d'Eclipse.



Figure 4.1 : Fenêtre de démarrage d'Eclipse IDE.

2.2.2. Langage Java

Java est un langage de programmation à usage général, évolué et orienté objet dont la syntaxe est proche du C. Ses caractéristiques ainsi que la richesse de son écosystème et de sa communauté lui ont permis d'être très largement utilisé pour le développement d'applications d'entreprises et mobiles [61].

2.3. Structure du système (programme)

2.3.1. Organisation du système

Notre programme est composé de deux modules :

- Module pour l'extraction des points critiques qui traite les tâches suivantes :
 - L'extraction des séquences de points de contour de la forme 2D.
 - L'extraction des points critiques avec mesure de courbure appliquée sur une séquence de points de contour.
- Module de génération du modèle topologique de squelettisation :

- Calcul des cercles centrés.

Deux modes de calcul des cercles centrés (statique et dynamique):

- Dynamique (nombre de cercles est variable et dépend de la position des points critiques).
- Statique (nombre de cercles est fixe).

2.3.2. Les principales classes

Le programme implémenté pour notre approche est décrit par un package composé de plusieurs classes Java. Chaque classe est caractérisée par ses propres attributs et méthodes. Les principales classes sont illustrées comme suit :

- class principale {

```
// Cette classe contient l'interface graphique du programme, et elle est dotée de la méthode main ().
```

```
}// fin classe
```

- class extraction_points_contour {

```
// Cette classe permet d'extraire le contour d'une forme 2D, et elle est caractérisée par les attributs suivants :
```

```
BufferedImage forme_originale ; // la forme 2D originale segmentée.
```

```
double seuil_courbure : // seuil de courbure pour sélectionner les points critiques ayant une courbure élevée.
```

```
ArrayList<Point>[] liste_points_contour ; // tableau de listes des points de contour des objets de la forme (plusieurs contours dans la forme).
```

```
ArrayList<Point>[] liste_sequence_points ; // tableau de listes des points de contour en séquence.
```

```
ArrayList<Point>[] liste_points_critiques ; // tableau de listes des points critiques ayant une valeur de courbure supérieure au seuil de courbure seuil_courbure.
```

```
// et les méthodes suivantes :
```

```
public ArrayList<Point>[] extraction_points_contour (BufferedImage forme_originale){
```

```
// méthode d'instance qui est basée sur la technique de LBP pour l'extraction de contour d'objet. Elle retourne une liste de points.}
```

```

public ArrayList<Point> calculer_courbure (Point p0, Point p1, Point p2, double
    seuil_courbure) {

    // méthode d'instance qui permet de distinguer les points de contour comme des
    points critiques ayant une grande valeur de courbure (courbure avec un cercle
    d'oscillation repéré avec trois points) et utilise l'attribut liste_sequence_points[i] du
    contour i. Elle retourne une liste des points critiques avec courbure supérieure à
    seuil_courbure (this.liste_points_critiques[i] du contour i) }.

public static ArrayList<Point>[] extraction_sequences_points(double[] data, int
    heigh){

    // méthode statique qui permet d'extraire les séquences de points de plusieurs
    contours depuis un tableau 1D. Elle retourne un tableau de listes des points contour
    en séquence.}

} // fin classe

```

- class objet2D{
 - // elle permet de contenir tous les points d'un objet de la forme.
 - // Attributs
 - double rayon_maximal ; // le rayon maximal de l'objet.
 - Point.Double cg; // point du centre de gravité ou de masse
 - ArrayList<Point> liste_points ; // liste des points de l'objet de la forme.
 - // Méthodes
 - public void calculer_propriétés_objet(){
 - // méthode d'instance qui permet de calculer le centre de gravité de l'objet et son rayon maximal
 - // pas de retour.}
 - public static Point calculer_rayon_maximal(ArrayList<Point> liste_points_contour, Point.Double cg) {


```
// méthode statique qui permet de calculer le rayon maximale d'un contour. Elle
retourne le point le plus distant. }

} // fin classe

• class cercle_centrique{
    // elle permet de générer le cercle centrique suivant son rayon.

    // Attributs
    double rayon ; // rayon d'un cercle centriques.

    // Méthodes
    public static Point.Double calculer_centre_gravité (ArrayList<Point>
list_point_contour ){ // méthode statique qui permet de calculer le centre de gravité
du contour représenter par liste de points de contour courant. }

    public static ArrayList<Point> extraction_points_intersection (ArrayList<Point>
liste_points_contour){ // méthode statique qui permet de calculer les points
d'intersection du contour de laforme avec le cercle centrique courant. }

} // fin classe

• class arc_circulaire {

    // attribut

    Point.Double centre_arc; // le point centre de l'arc

    Point ip1, ip2 ; // les deux points d'extrémité de l'arc

    // méthodes

    public calculer_centre_arc{// méthode d'instance qui permet de calculer le point
centre de l'arc courant}

} // fin classe

• class region_connexe {

    // attribut
```

```

int cercle_precedent; // no_cercle_precedent

int no_cercle_courant; // no_cercle_courant

ArrayList<Point> liste_points_region; // liste des points de la région connexe
courante

// méthodes

public void calculer_centre_arc (){

// méthode d'instance qui permet de calculer le point centre de l'arc courant}

public void interconnecter_arcs (arc_circulaire arc){

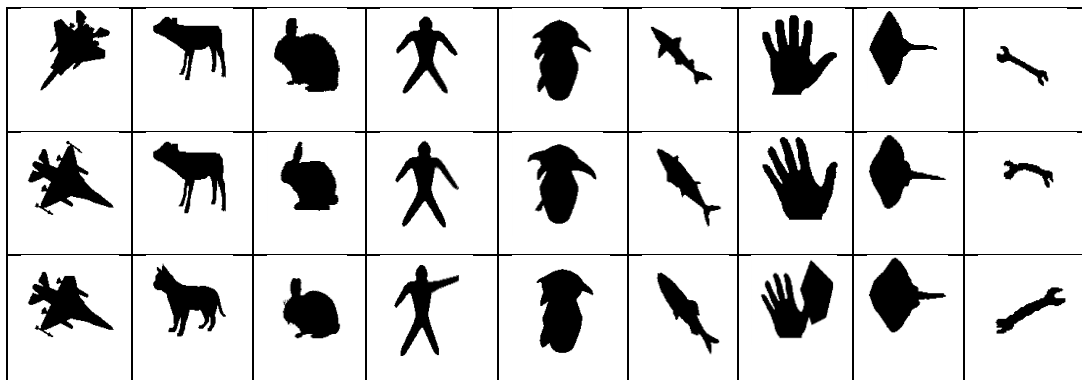
// méthode d'instance qui permet d'interconnecter l'arc courant avec l'arc en
paramètre, si les deux arcs vérifient les conditions d'interconnexion}

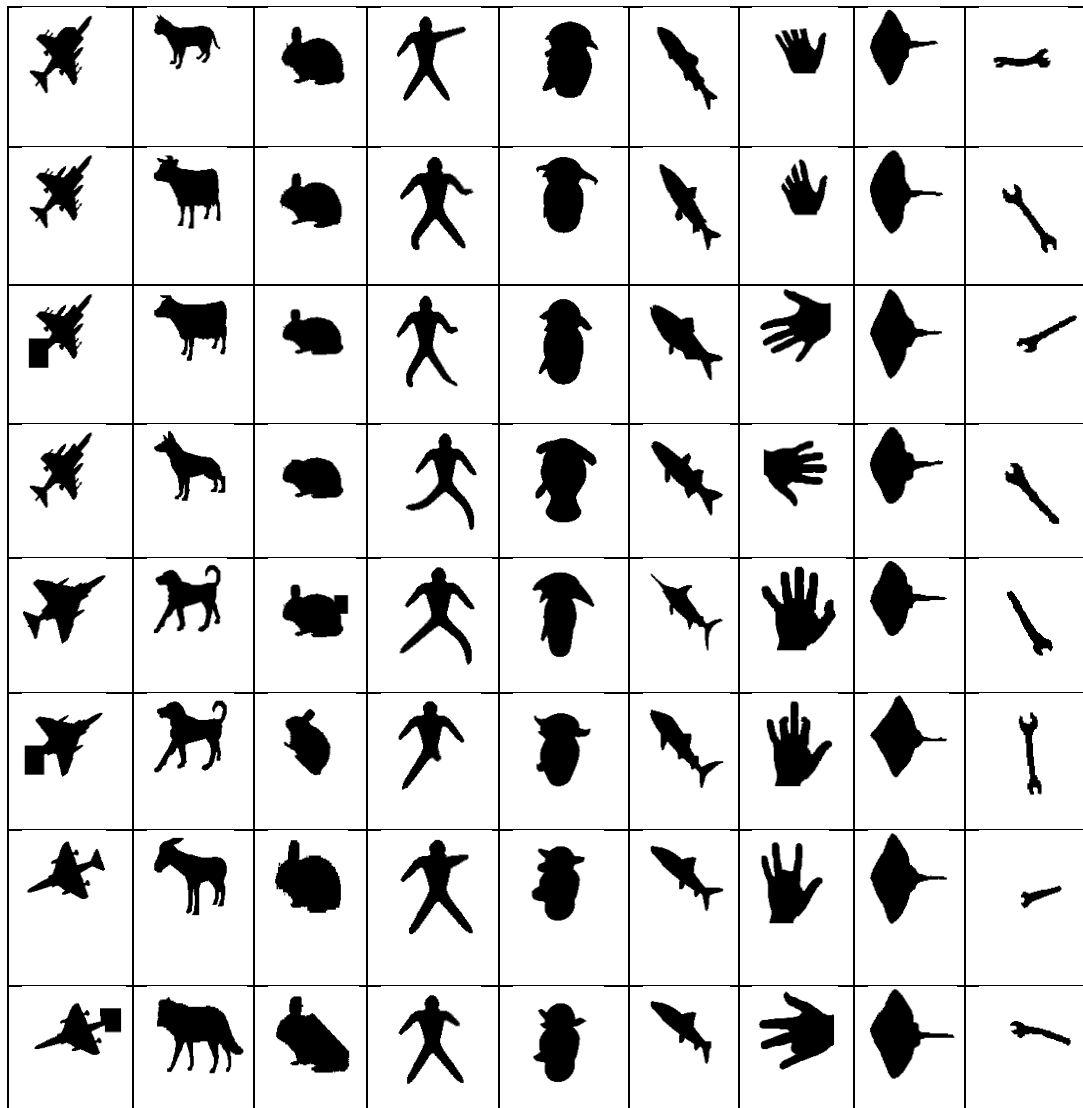
} // fin classe

```

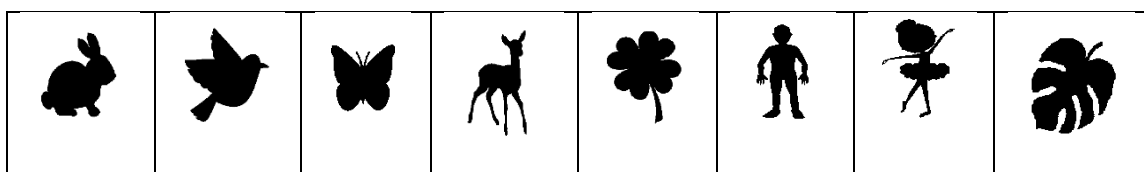
3. Résultats expérimentaux

Cette section est consacrée à donner les résultats de test pour valider ce modèle topologique de squelettisation sur une base des formes simples. Un premier test est réalisé sur une base des formes 2D standard Kimia-99 [62], composée de 9 classes de formes binaires au format 'png' avec 11 formes dans chaque classe (voir le tableau 4.1(a)). Les 9 classes sont les avions, les poissons, les mains, les lapins, etc. Des variations sur ces formes sont aussi proposées comme la distorsion, l'occlusion partielle par d'autres objets, différentes poses, styles, etc. Un deuxième test est réalisé sur une base composée de quelques formes 2D simples (voir le tableau 4.1 (b)).





(a)



(b)


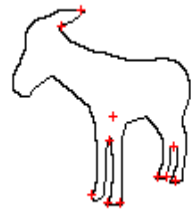

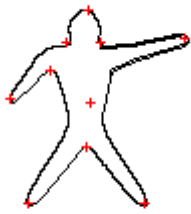



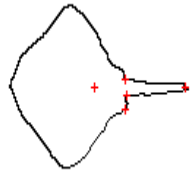

Tableau 4.1 : Deux base des formes 2D originales: (a) première base de 99 formes 2D de Kimia-99 avec les différentes variations, (b) deuxième base avec des formes 2D simples.

Nos résultats sont répartis en trois sous-sections. La première sous-section qui est chargée de l'extraction du contour et les points critiques a comme résultat le tableau 4.2. Les résultats de la deuxième sous-section qui est réservée au calcul des cercles centrés sont présentés dans le tableau 4.3 et 4.4, et des arcs d'intersection présentés dans le tableau 4.5 et

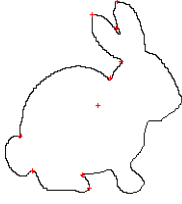
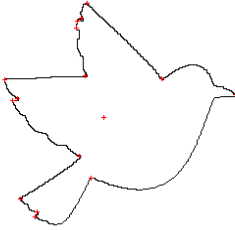
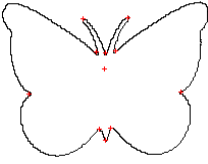
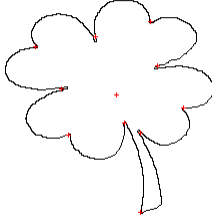
4.6. Ceux de la sous-section 3 de la construction du modèle squelettique du graphe de Reeb sont dans le tableau 4.7 et 4.8.

❖ **Extraction du contour et points critiques**

Le premier algorithme (extraction de séquence des points de contour et des points critiques) qui est appliqué sur différentes formes 2D de la base propose les résultats expérimentaux qui sont illustrés dans le tableau 4.2: (a) pour la première base et (b) pour la deuxième base.

<p>11</p> 	<p>10</p> 	<p>09</p> 
<p>09</p> 	<p>08</p> 	<p>12</p> 
<p>12</p> 	<p>04</p> 	<p>06</p> 

(a)

	09		15
	10		10

(b)

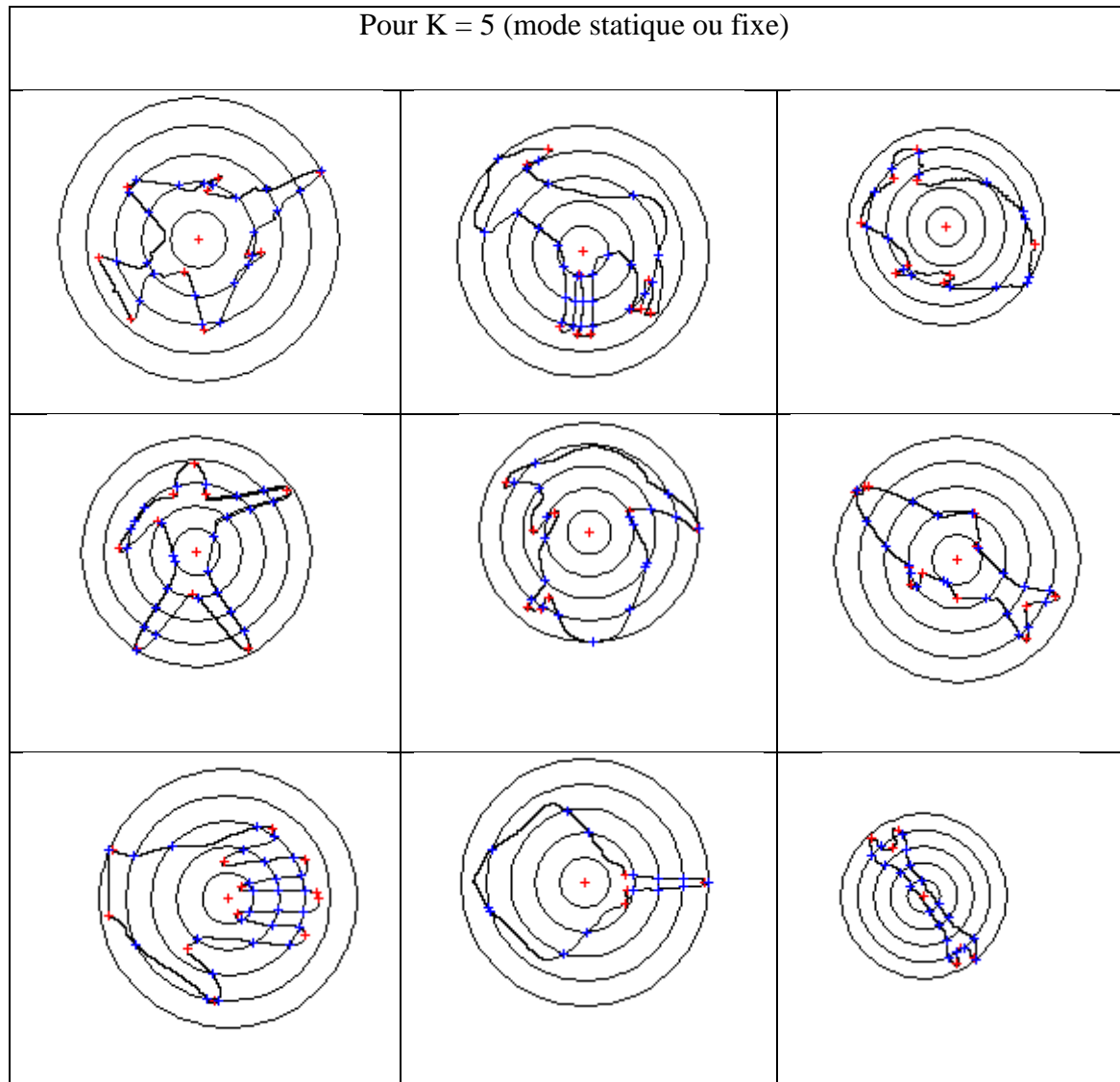
Tableau 4.2 : contour des formes 2D avec les points critiques et le point de centre de masse mentionnés en rouge (colonne de gauche), nombre de ces points critiques (colonne de droite) pour (a) la première base, (b) la deuxième base.

Le tableau 4.2 se compose de deux colonnes pour chacun. Le contour avec les points critiques et le point de centre de masse sont mentionnés en rouge dans la colonne de gauche. Le nombre de ces points critiques est indiqué dans la colonne de droite.

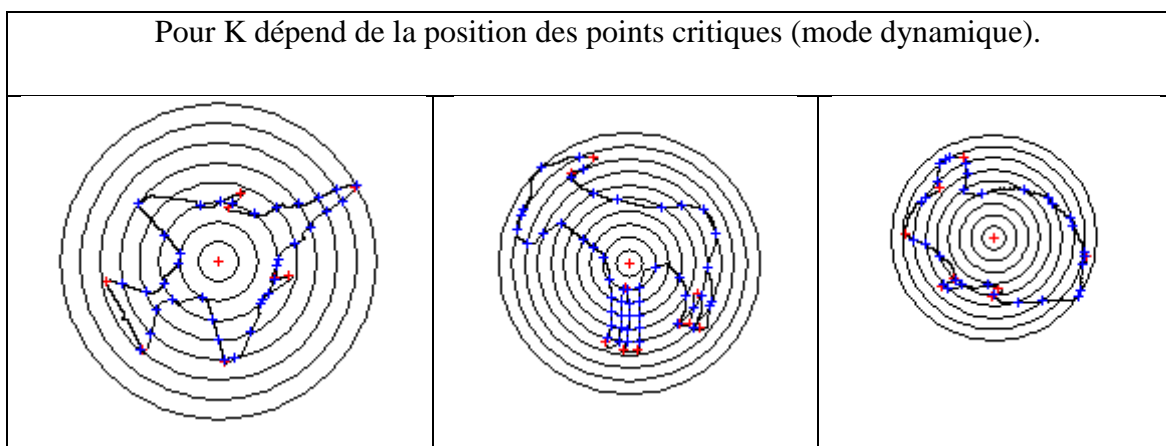
❖ Calcul des cercles centriques

- Pour la première base,

Le tableau 4.3 présente les cercles calculés sur les neuf formes 2D de la première base 4.3(a), avec $K=5$ (fixe), et 4.3(b) avec K en mode dynamique (c.-à-d., dépend de la position des points critiques). Les points d'intersection qui aident à calculer les arcs circulaires sont mentionnés en bleu. Le nombre des cercles centriques est représenté par la valeur de K dans le tableau.



(a)



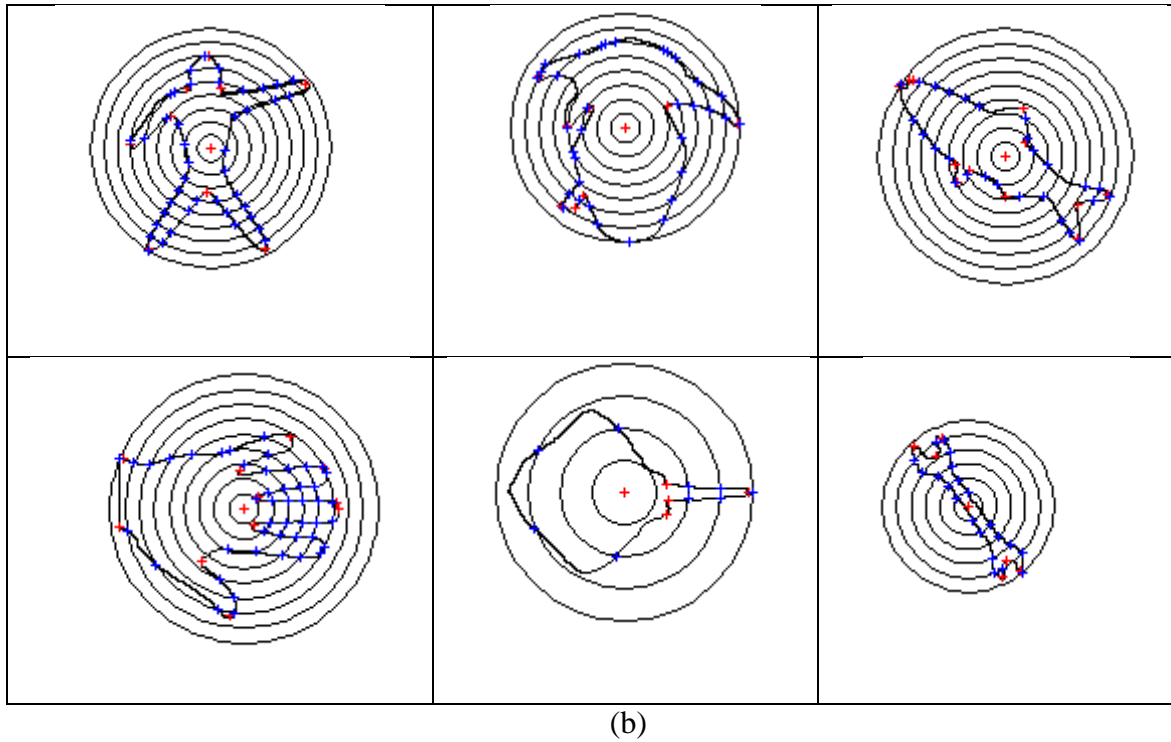
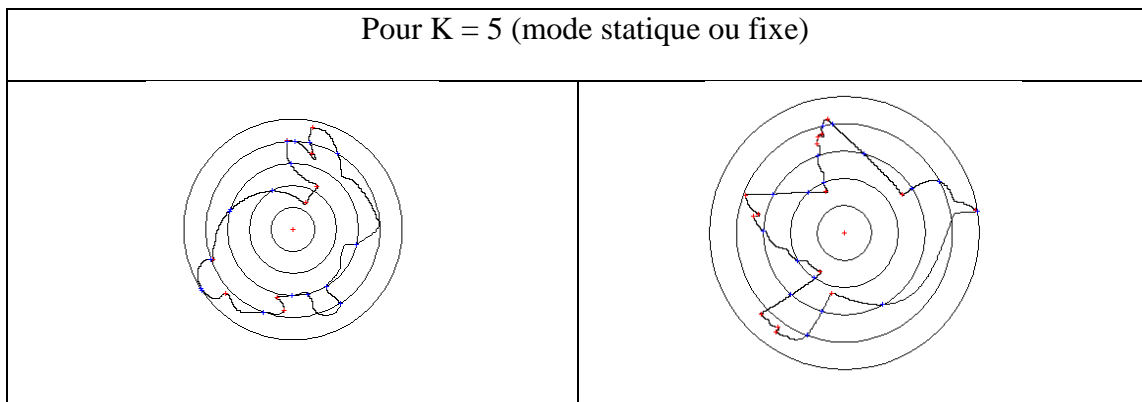
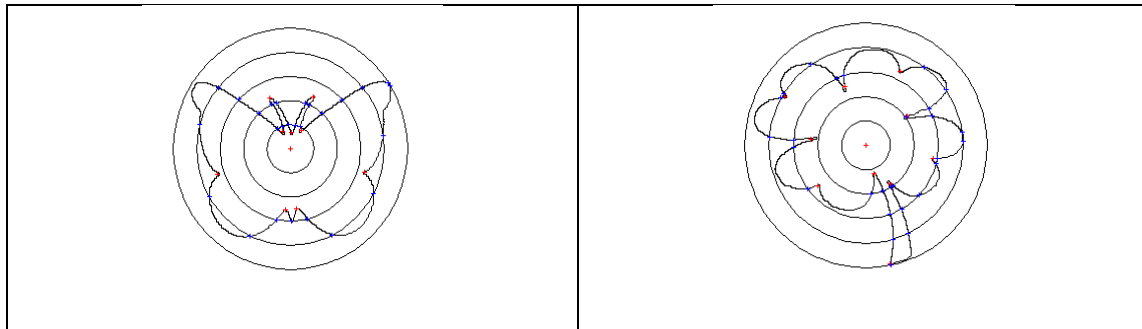


Tableau 4.3 : Calcul des cercles centriques, et les points d'intersection du cercle avec la forme sont mentionnés en bleu, (a) avec K fixe, (b) avec K en mode dynamique (c.-à-d., dépend de la position des points critiques) sur la première base.

- Pour la deuxième base,

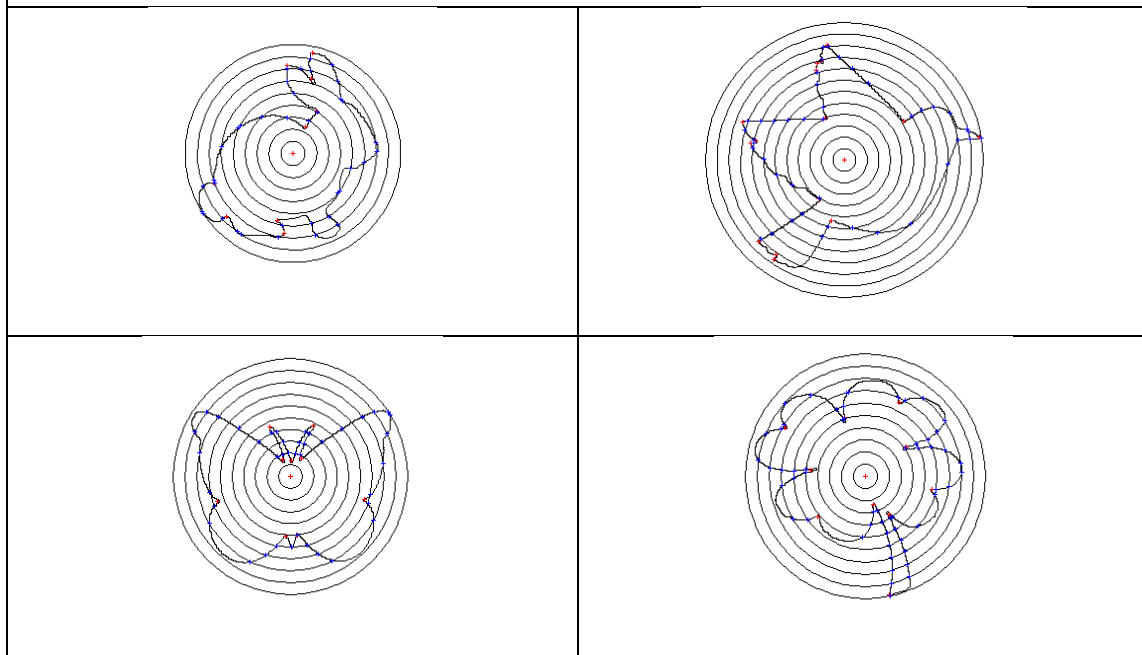
Le tableau 4.4 présente les cercles calculés sur les formes 2D de la deuxième base 4.4(a), avec $K=5$ (fixe), et 4.4(b) avec K en mode dynamique. Les points d'intersection qui aident à calculer les arcs circulaires sont mentionnés en bleu.





(a)

Pour K dépend de la position des points critiques (mode dynamique).



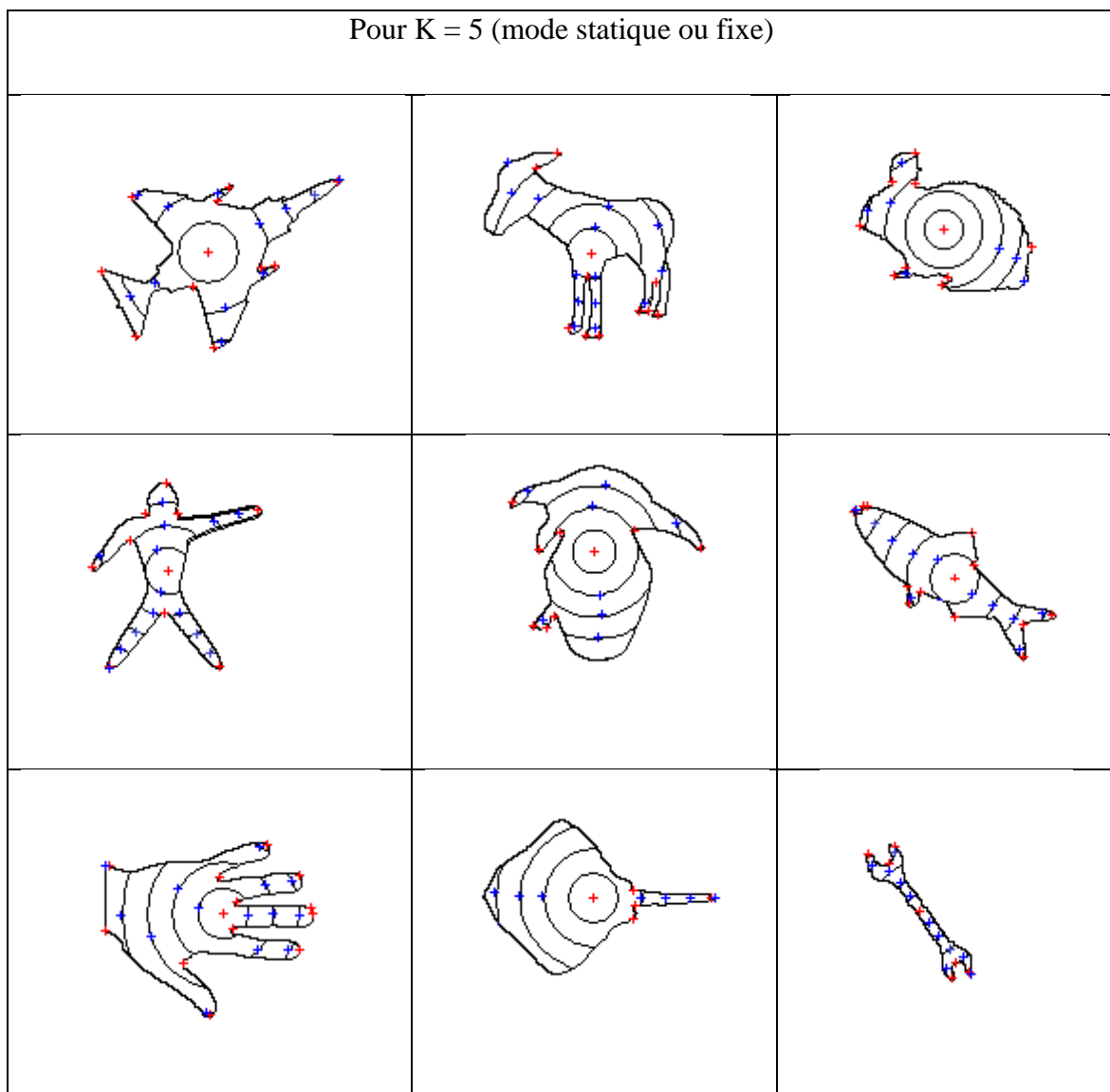
(b)

Tableau 4.4 : Calcul des cercles centriques, et les points d'intersection du cercle avec la forme sont mentionnés en bleu, (a) avec K fixe, (b) avec K en mode dynamique (c.-à-d., dépend de la position des points critiques) sur la deuxième base.

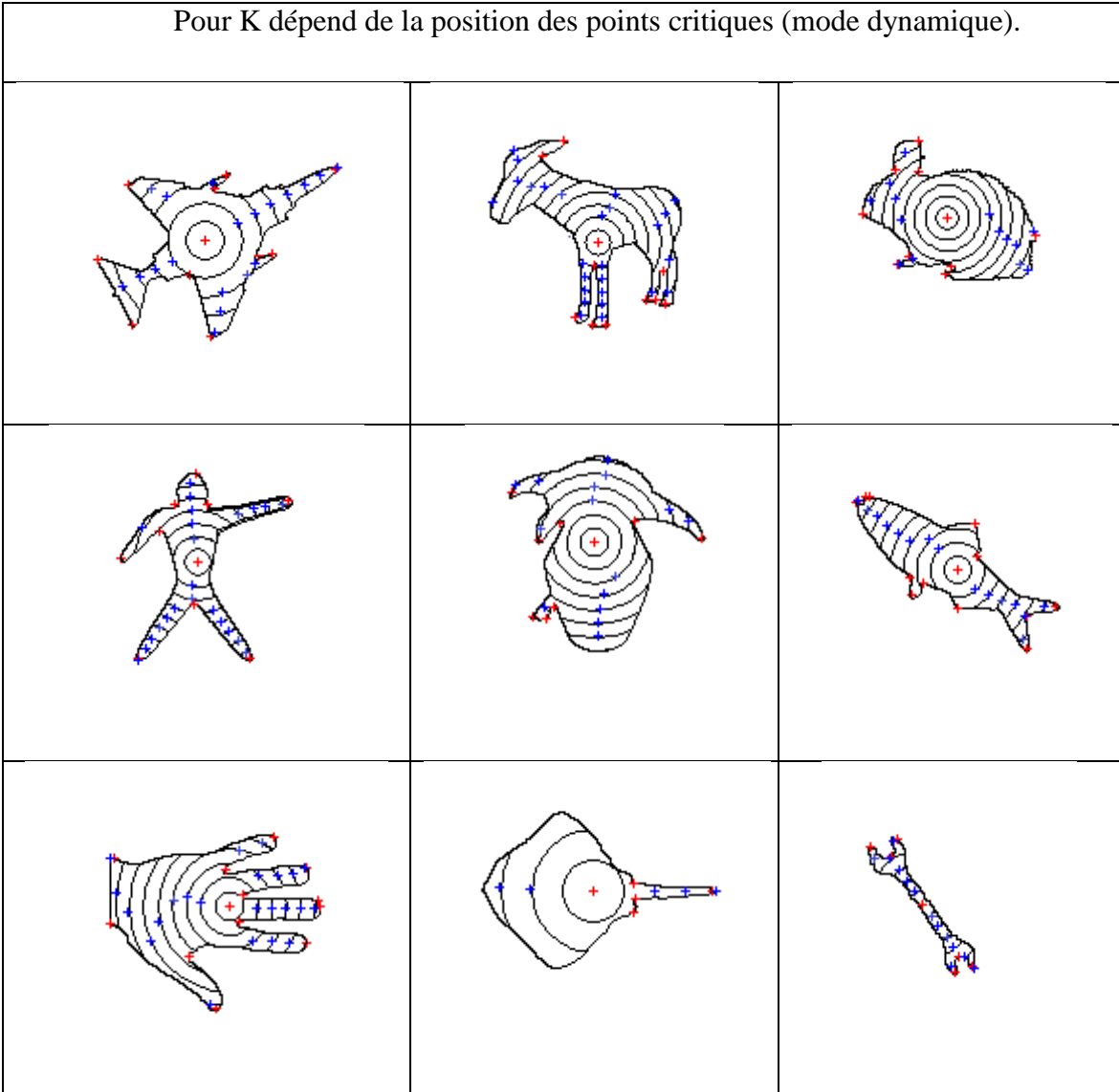
D'après les tableaux 4.3 et 4.4, nous remarquons que l'analyse des formes avec des cercles centriques qui dépendent de la position des points critiques offre plus de précision et plus d'efficacité sur la description topologique de la forme que pour le premier mode (K fixe), et donc la construction d'un modèle topologique de squelettisation plus robuste et plus crédible si K est dynamique.

❖ Les arcs d'intersection circulaires

La construction d'un graphe squelettique d'une forme 2D suivant les cercles centrés avec les arcs d'intersection circulaires est illustrée dans le tableau 4.5 pour la première base, et tableau 4.6 pour la deuxième base, les points de centre de ces arcs sont mentionnés en bleu.

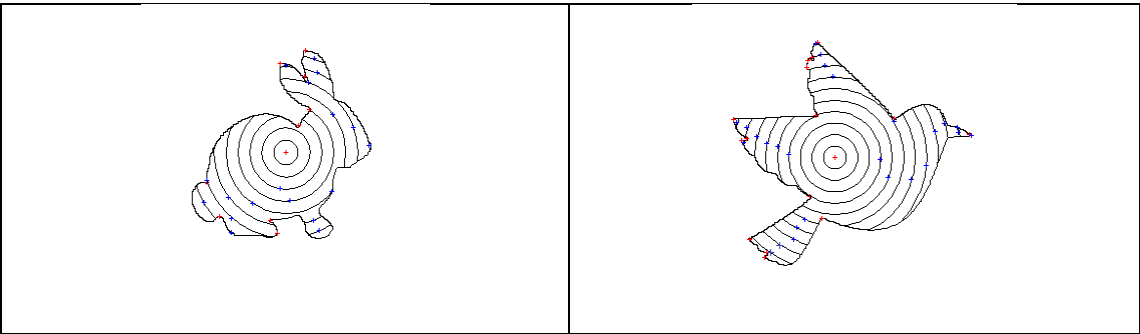


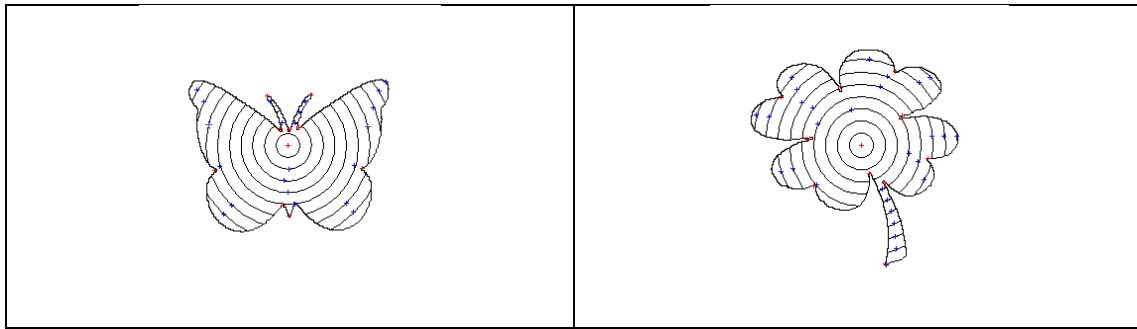
(a)



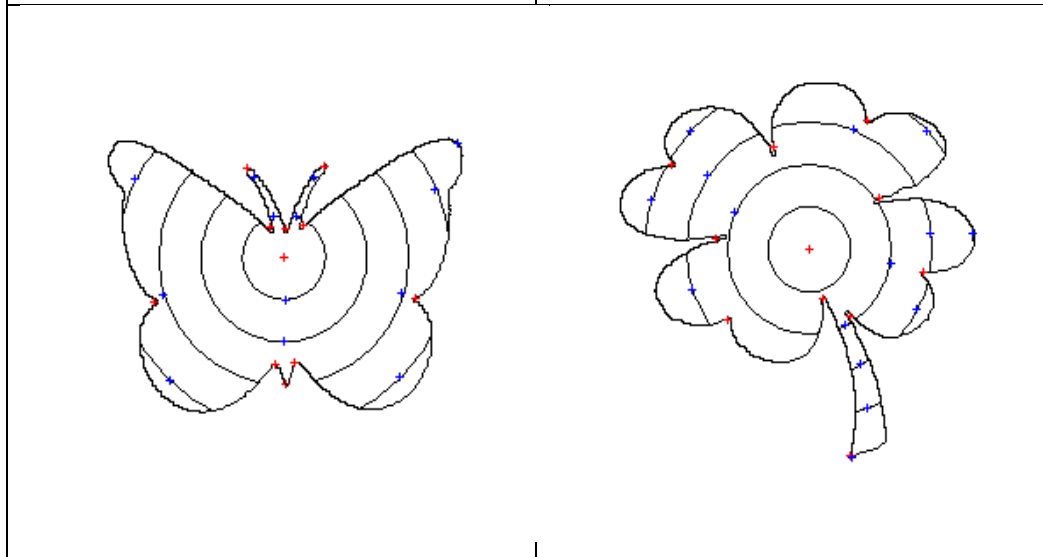
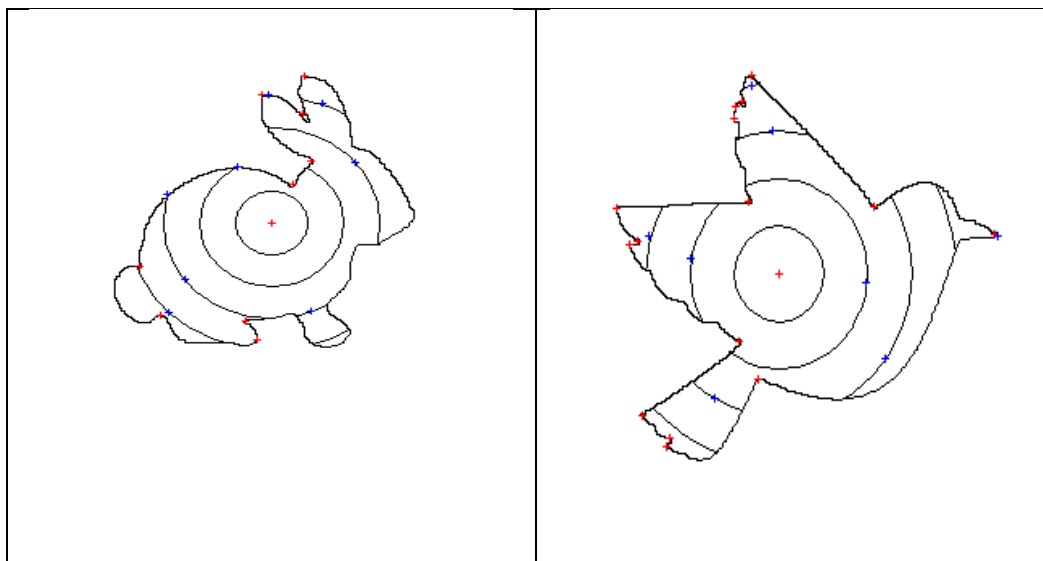
(b)

Tableau 4.5 : Les arcs d'intersection circulaires pour le premier base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique, les points de centre de ces arcs sont mentionnés en bleu.





(a)

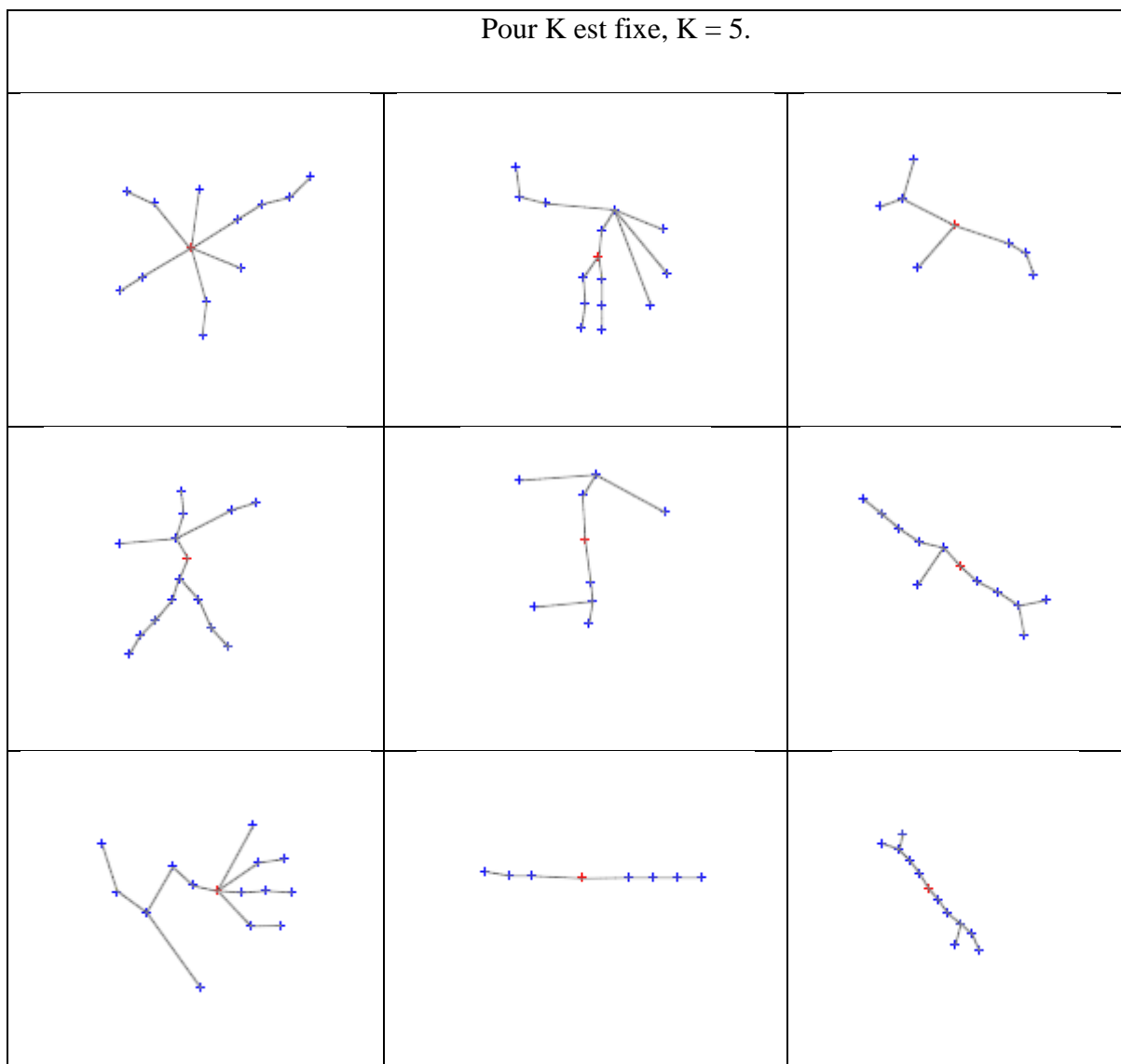


(b)

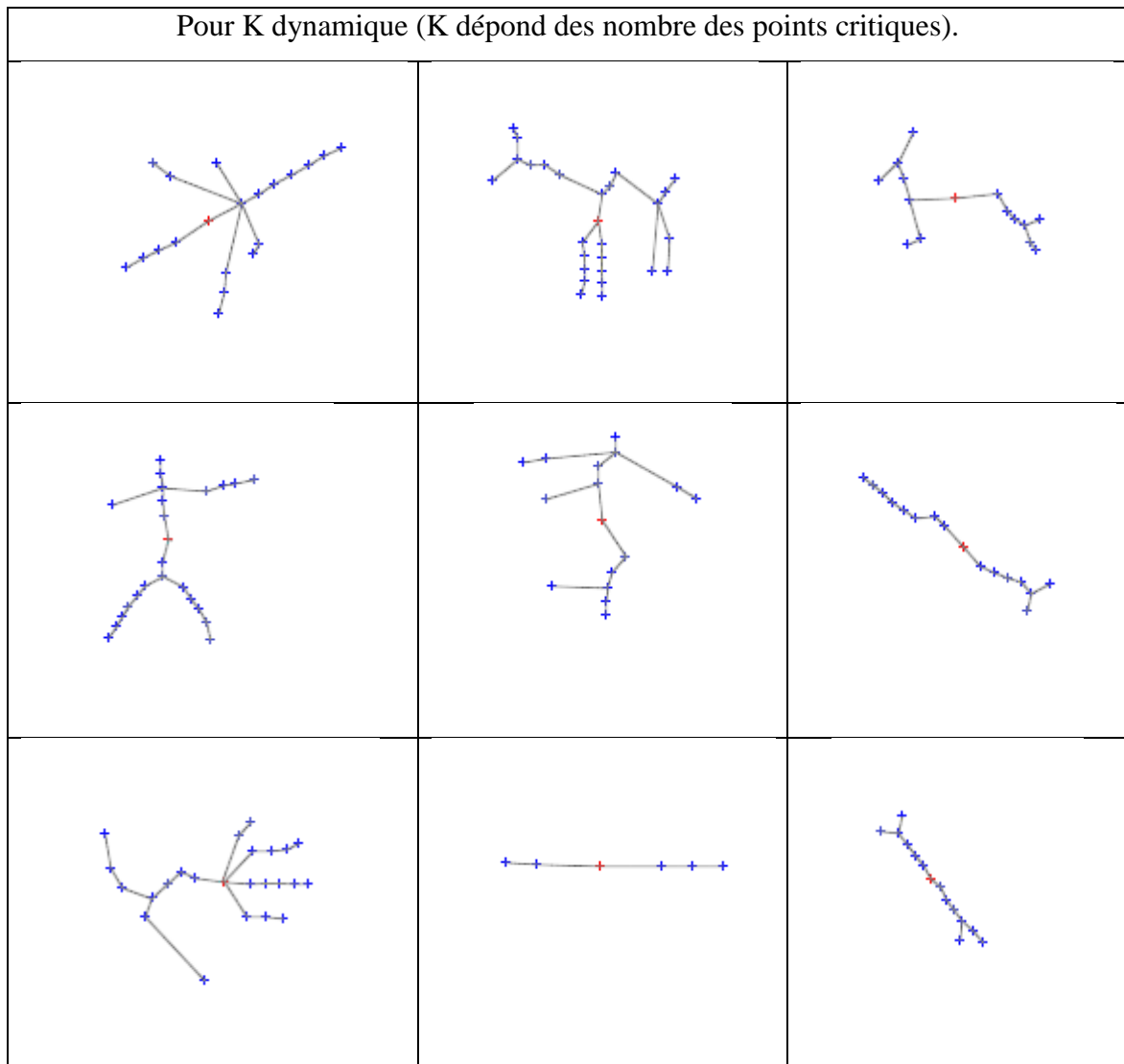
Tableau 4.6 : Les arcs d'intersection circulaires pour la deuxième base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique, les points de centre de ces arcs sont mentionnés en bleu.

❖ Graphe squelettique

La phase finale pour construire le graphe squelettique consiste à faire l'interconnexion des nœuds c.-à-d., un nœud qui correspond à un point critique de ligne de niveau courant doit se connecter à un nœud de ligne de précédente pour une arête passant par une région connexe de la forme. Les tableaux 4.7 et 4.8 présentent le graphe de Reeb squelettique final après la phase d'interconnexion. Les tableaux 4.7 et 4.8 montre respectivement les graphes sur les formes 2D de la première base, et sur celles de la deuxième base.

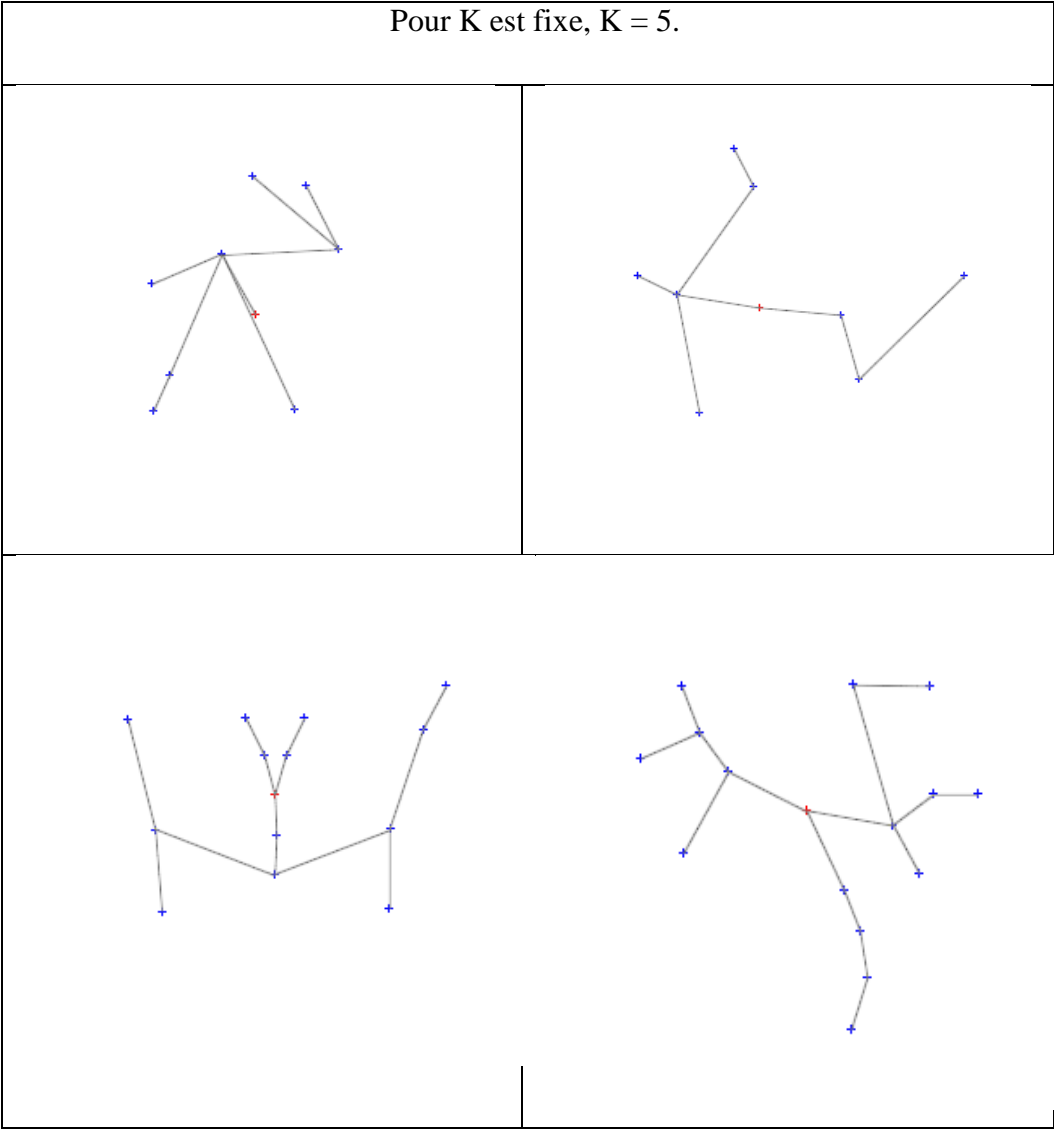


(a)



(b)

Tableau 4.7 : Le graphe de Reeb pour la première base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique.



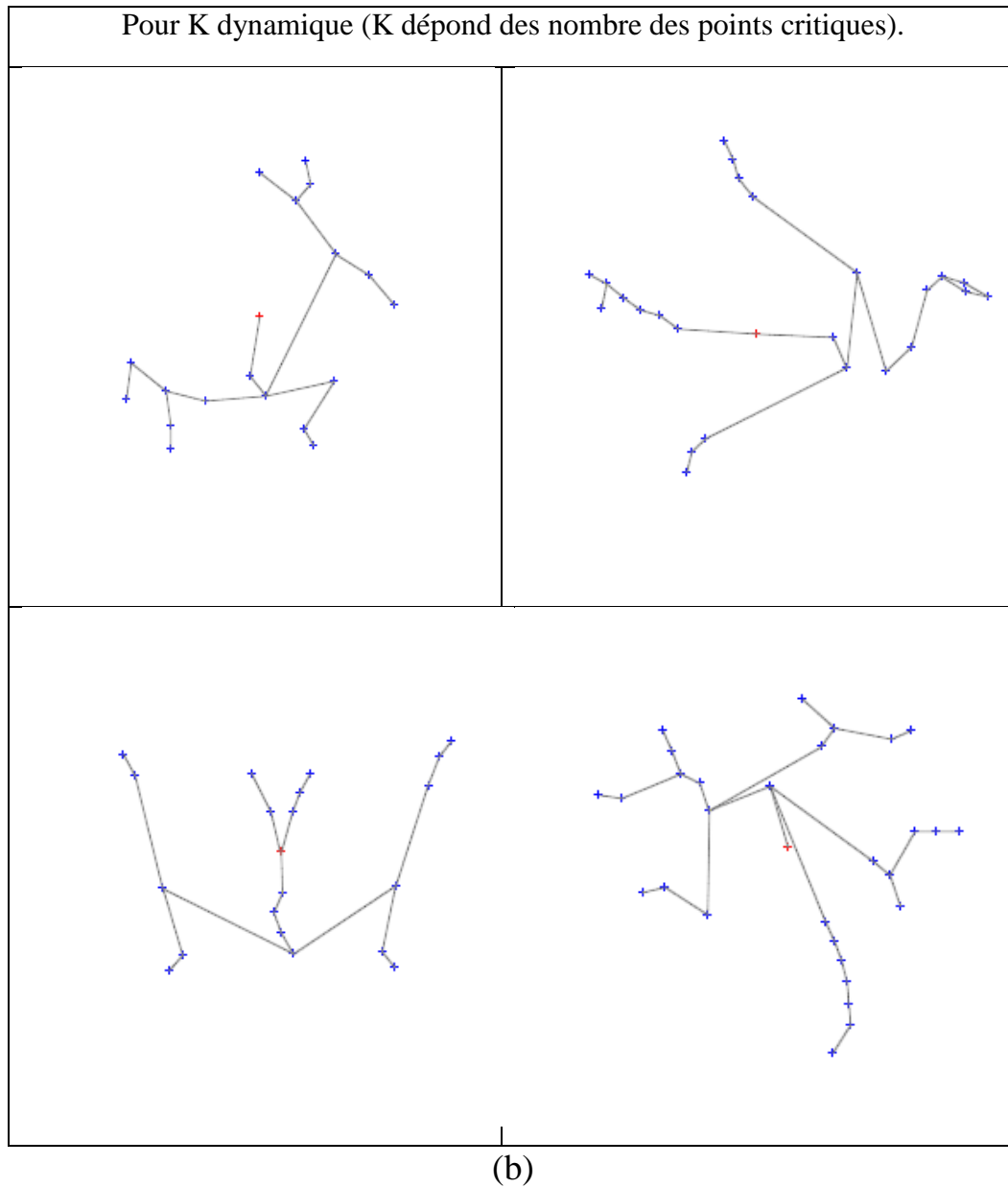


Tableau 4.8 : Le graphe de Reeb pour la deuxième base, (a) pour K est fixe, (b) pour K en mode dynamique.

D'après les tableaux 4.7 et 4.8, nous remarquons que la construction du graphe squelettique qui dépendent de la position des points critiques offre plus de précision et plus d'efficacité sur la description topologique de la forme que pour le premier mode (avec K fixe), et donc la construction d'un modèle topologique de squelettisation plus robuste et plus crédible si K est dynamique (une représentation squelettique très proche à la forme originale).

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation en premier lieu et les résultats expérimentaux en deuxième lieu pour le modèle topologique de squelettisation basé sur la structure de graphe de Reeb.

Pour les expérimentations, les deux algorithmes conçus précédemment sont testés ensemble sur deux bases des formes 2D différentes. Un premier test est réalisé sur une base des formes 2D standard Kimia-99, qui est composée de 9 classes de formes binaires avec 11 formes dans chaque classe. Un deuxième test est réalisé sur une deuxième base, qui est composée de quelques formes 2D simples. Les tests effectués prouvent la réussite et l'efficacité du modèle topologique de squelettisation conçu à la base de structure de graphe de Reeb.

Conclusion générale

L'objectif de cette approche est de concevoir un modèle topologique basé sur la structure de graphe de Reeb qui représente un éventuel prototype pour un système de reconnaissance des formes. La justification de choisir cette structure de graphe se réside dans sa capacité de bien représenter, d'extraire des caractéristiques de haut niveau qui sont les propriétés topologiques résidentes dans la forme. Depuis leur introduction dans l'infographie, les graphes de Reeb ont gagné la popularité en tant qu'outil efficace pour différentes tâches d'analyse et d'interprétation des données contenues dans les formes.

Notre approche de modélisation de la forme 2D par un graphe squelettique a conduit à utiliser deux algorithmes. Le premier est destiné à l'extraction des points critiques sur le contour des objets de la forme. Le deuxième algorithme est consacré à construire le modèle topologique de squelettisation basé sur la structure de graphe. Cette construction emploie principalement une fonction de distance centrique qui calcule les cercles centriques appelés aussi les lignes de niveau de connectivité selon la théorie de Morse. En résumé, cette nouvelle approche qui est conçue selon deux principaux algorithmes (l'extraction des points critiques de la forme et la construction du graphe squelettique de cette forme à partir des cercles centriques) et testée sur une base des formes 2D très connue réalise un modèle topologique robuste de squelettisation qui montre amplement de réussite, d'efficacité et invariance aux transformations affines et petits changements.

Bibliographies

- [1] S. Biasotti, D. Giorgi, M. Spagnuolo, B. Falcidieno, « Reeb graphs for shape analysis and applications », *Theoretical Computer Science, Italy*, vol. 392, no. 1-3, pp. 5-22, Febr, 2008.
- [2] H. Doraiswamy, V. Natarajan, « Efficient algorithms for computing Reeb graphs », *Computational Geometry, India*, vol.42, no. 6-7, pp. 606-616, Aug. 2009.
- [3] X. Ge, I. Safa, M. Belkin, Y. Wang, « Data skeletonization via Reeb graphs », *Advances in Neural Information Processing Systems 24*, pp. 837-845, 2011.
- [4] N. Werghi, Y. Xiao, J. Siebert, « A functional-based segmentation of human body scans in arbitrary postures ». *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, vol. 36, no. 1, pp 153–165, Feb. 2006.
- [5] F. Tupin, «Graphes en traitement d’images et en reconnaissance des formes». disponible sur : "<http://perso.telecom-paristech.fr/~tupin/cours/voir/poly.pdf>"
- [6] H. Blum, « A transformation for extracting new descriptors of shape », Whaten-Dunn (ed) *Models for the perception of speech and visual forms*, pp. 362–380, MIT Press, Cambridge, MA, USA,1967.
- [7] S. Bouix, K. Siddiqi, « Divergence-based medial surfaces », *European conference on computer vision, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*, pp. 603-618, 2003.
- [8] N. Amenta, S. Choi, R. Kolluri, « The power crust, unions of balls and the medial axis transform », *International Journal of Computational Geometry and its Applications*, vol. 19, no. 2–3, pp. 127-153, Jul. 2001.
- [9] S. Prohaska, « Skeleton-based visualization of massive voxel objects with network-like architecture », *Phd Thesis, University of Potsdam*, 16 Apr. 2007.
- [10] T. Tung, « Indexation 3D de bases de données d'objets par graphes de Reeb améliorés », *Thèse Phd, Laboratoire de l’informatique, Télécom ParisTech, France*, 10 Juin 2005.
-
- [11] S. H. Baloch, H. Karim, « 2D shape modeling using skeletal graphs in a Morse theoretic framework », *Statistics and Analysis of Shapes, Part of the series Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston* , DOI 10.1007/0-8176-4481-4_3 pp. 61-80, 2006.
- [12] N. Hiransakolwong, K. Vu, K. Hua KA, S. Lang, « Shape recognition based on the medial axis approach », *Proceedings of ICME’04, Taipei, Taiwan*, 27–30 Jun., 2004.
- [13] S. Zhu, A. Yuille, « FORMS: A flexible object recognition and modeling systems », *International Journal of Computer Vision*, vol. 20, no. 3, pp. 187–212, 1996.

- [14] K. Siddiqi, J. Zhang, D. Macrini, A. Shokoufandeh, S. Bouix, and S. Dickinson, «Retrieving articulated 3-D models using medial surfaces». *Machine Vision and Applications*, vol.19, no. 4, pp. 261–275, Jul. 2008
- [15] H. Sundar, D. Silver, N. Gagvani, S. Dickinson, « Skeleton based shape matching and retrieval », *Shape Modeling International*, Washington, DC, USA, pp. 130, 12-15 May 2003.
- [16] A. Verroust, F. Lazarus, « Extracting skeletal curves from 3D scattered data », *International Journal of Computer Graphics*, vol. 16, no. 1, pp. 15–25, Feb. 2000.
- [17] F. Leymarie, B. Kimia « The Shock Scaffold for Representing 3D Shape» 4th *International Workshop on Visual Form*, Italy, vol 2059, pp 216-227, May 28–30, 2001.
- [18] S. Biasotti, « Computational topology methods for shape modeling applications», Phd Thesis, Genova University, Italy, May 2004.
- [19] K. Siddiqi, A. Shokoufandeh, S.J. Dickinson, and S.W. Zucker, « Shock graphs and shape matching», *International Journal of Computer Vision*, vol. 35, no. 1, pp. 13–32, 1999.
- [20] M. Pelillo, K. Siddiqi, S. Zucker, « Matching hierarchical structures using association graphs », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 21, no. 11, pp. 1105–1120, 1999.
- [21] T.B. Sebastian, P.N. Klein, B.B. Kimia, « Recognition of shapes by editing their shock graphs», *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 26, pp. 550–571, 2004.
- [22] S. Takahashi, T. Ikeda, Y. Shinagawa, T. L. Kunii, M. Ueda, «Algorithms for extracting correct critical points and constructing topological graphs from discrete geographical elevation data », *Computer Graphics Forum*, vol. 14, no. 3, pp. 181–192, Aug. 1995.
- [23] Y. Xiao, P. Siebert, N. Werghe, « A discrete Reeb graph approach for the segmentation of human body scans », *Fourth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling*, Banff, Alberta, Canada, pp. 378-385, 6-10 Oct. 2003.
- [24] S. Biasotti, S. Marini, M. Mortara, G. Patanè, M. Spagnuolo, B. Falcidieno, « 3D Shape matching through topological structures », Nyström I., Sanniti di Baja G., Svensson S. (eds) *Discrete Geometry for Computer Imagery. DGCI 2003. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2886. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [25] I. Janusch, « Reeb graph based image representation for phenotyping of plants », Master thesis, faculty of informatics, Vienna University of Technology, Vienna, Apr. 2014.
- [26] T. Tony, S. Francis, « Indexation d'objets 3D par graphe de Reeb multirésolution augmenté », *Annales des télécommunications*, France, vol. 60, no. 11, pp.1309 – 1336, Dec. 2005.

- [27] W. Mohamed, A. Ben Hamza, « Reeb graph path dissimilarity for 3D object matching and retrieval », *The visual computer*, Springer-Verlag, vol. 28, no. 3, pp. 305-318, Mar. 2012.
- [28] S. Biasotti, B. Falcidieno, M. Spagnuolo, « Extended Reeb graphs for surface understanding and description », Borgefors G., Nyström I., di Baja G.S. (eds) *Discrete Geometry for Computer Imagery*. DGCI 2000. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1953. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [29] P. Kanonchayos, T. Nishita, S. Yoshihisa, T. L. Kunii, « Topological morphing using Reeb graphs », *First International Symposium on Cyber Worlds, 2002, Proceedings*, Tokyo, Japan, pp. 465 – 471, 6-8 Nov. 2002.
- [30] M. Mestiri, K. Hamrouni, « Reeb graph for automatic 3D cephalometry », *International Journal of Image Processing (IJIP)*, vol. 8, no. 2, pp. 17-29, Mar. 2014.
- [31] F. Chen, H. Obermaier, H. Hagen, B. Hamann, J. Tierny, V. Pascucci, « Topology analysis of time-dependent multi-fluid data using the Reeb graph », *Computer Aided Geometric Design*, Germany, vol. 30, no. 6, pp. 557-566, Jul. 2013.
- [32] S. Berretti, A. B. Bimbo, P. Pala. « 3D mesh decomposition using Reeb graphs », *Image and Vision Computing*, USA, vol. 27, no. 10, pp. 1540–1554, Sep. 2009.
- [33] L. Brandolini, M. Piastra, « Computing the Reeb graph for triangle meshes with active contours », *Proceedings of the 1st International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods*, Vilamoura, Algarve, Portugal, pp. 80-89, 2012.
- [34] M. Hilaga, Y. Shinagawa, T. Kohmura, L. T. Kunii, «Topology matching for fully automatic similarity estimation of 3D shapes », *SIGGRAPH '01 Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, ACM, New York, USA, pp. 203-212, 2001.
- [35] A. Izosimov, B. Khesin, M. Mousavi, « Coadjoint orbits of symplectic diffeomorphisms of surfaces and ideal hydrodynamics », *Annales Institut Fourier*, vol. 66, no. 6, pp. 2385-2433, 22 Apr 2015.
- [36] T. Tung, T. Matsuyama, « Topology dictionary for 3D video understanding », *IEEE Transactions Pattern Analysis Machine Intelligence*, vol. 34, no. 8, pp. 1645-1657, Aug. 2012.
- [37] J. Tierny, J. P. Vandeborre, M. Daoudi, « Invariant high level Reeb graphs of 3D polygonal meshes », *3D Data Processing, Visualization, and Transmission*, Third International Symposium on, Chapel Hill, NC, USA, pp. 105-112, 14-16 Jun. 2006;
- [38] V. Barra, S. Biasotti, « 3D shape retrieval using Kernels on Extended Reeb Graphs », *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 11, pp. 2985–2999, Nov. 2013.

-
- [39] G. Weber, P.T. Bremer, M. Day, J. Bell, V. Pascucci, « Feature tracking using Reeb graphs». *Topological Methods in Data Analysis and Visualization*, Part of the series *Mathematics and Visualization*, Springer, Berlin, Heidelberg, DOI 10.1007/978-3-642-15014-2_20, pp. 241- 253, 2011.
- [40] V. Pascucci, G. Scorzelli, P. T. Bremer, A. Mascarenhas, «Robust on-line computation of Reeb graphs : simplicity and speed», *ACM SIGGRAPH 2007 conference proceedings*, San Diego, California, vol. 26, no. 3, 05-09 Aug. 2007.
- [41] B. Michoud, « Reconstruction 3D à partir de séquence vidéo pour l'acquisition du mouvement de personnages en temps réel et sans marqueur », Thèse Phd, UFR d'Informatique, Université Claude Bernard – Lyon 1, Lyon, 30 Septembre 2009.
- [42] J. Tierny, J.P. Vandeborre, M. Daoudi, « Enhancing 3D mesh topological skeletons with discrete contour constrictions », *The Visual Computer*, vol. 24, no. 3, pp. 155–172, Mar. 2008.
- [43] J. W. H. Tangelder, R. C. Veltkamp, «A survey of content based 3D shape retrieval methods» *proceeding shape modeling applications*, Genova, Italy, vol. 39, no. 3, pp. 441-471, Sep.2008
- [44] G. Herlem, G. Ducellier, P. Adragna, A. Durupt, S. Remy, «A reverse engineering method for DMU maturity management: Use of a functional Reeb graph », *IFIP International Conference on Product Lifecycle Management*, Nantes, France, pp. 422-431, 6-10 Jul. 2013.
- [45] V. Barra, S. Biasotti, «3D shape retrieval and classification using multiple kernel learning on extended Reeb graphs», *The Visual Computer*, vol. 30, no. 11, pp. 1247–1259, Nov. 2014.
- [46] H. Edelsbrunner, J. Harer , A. Mascarenhas, V. Pascucci, « Time-varying Reeb graphs for continuous space-time data », *Computational Geometry*, vol. 41, no. 3, pp. 149-166, Nov. 2008.
- [47] F. Hetroy, D. Attali, « Topological quadrangulations of closed triangulated surfaces using the Reeb graph », *Graphical Models*, vol. 65, no. 1–3, pp. 131-148, May 2003.
- [48] J. Tierny, J.P. Vandeborre, D. Mohamed, « Invariant high level Reeb graphs of 3D polygonal meshes », *3D Data Processing, Visualization and Transmission*, Third International Symposium on, Chapel Hill, NC, USA, pp. 105-112, 14-16 Jun. 2006.
- [49] B. Di Fabio, C. Landi, « Reeb graphs of surface are stable under function perturbations », *Technical Report no.3956*, Bologna University, Feb. 2014.

- [50] S. Biasotti, M. Mortara, M. Spagnolo, «Topological compression and reconstruction from Reeb graphs», Spring Conference on Computer Graphics 2000, Lecture Notes on Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, vol . 1953 , pp. 185-197 , 2000.
- [51] M. Makram, H. Kamel, « Reeb graph for automatic 3D cephalometry », International Journal of Image Processing (IJIP), vol. 8, no. 2, pp. 17 - 29 , Mar. 2014.
- [52] J. Ines, W. G. Kropatsch, « Reeb graphs through local binary patterns», International Workshop on Graph-Based Representations in Pattern Recognition, Beijing, China, vol. 9069, 13-15 May 2015.
- [53] J. Ines, W. G. Kropatsch, W. Busch, « Reeb graph based examination of root development », 19th Computer Vision Winter Workshop, Vienna, Austria, 3–5 Feb. 2014.
- [54] B. di Fabio, C. Landy, «Stability of Reeb graphs of closed curves», Electronic Notes in Theoretical Computer Science, Italy, vol. 283, pp. 71-76, 15 Jun. 2012.
- [55] J. Tierny, J.P. Vandeborre, M. Daoudi, «Analyse topologique et géométrique de maillages 3D pour l'extraction de squelette », Journées de l'Association Francophone d'Informatique Graphique, Bordeaux, 2006.
- [56] E. Batista, J. Costa, J. N. Ballesteros, « The Reeb graph of a map germ from \mathbb{R}^3 to \mathbb{R}^2 with isolated zeros », Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, vol. 60, no. 2, pp. 319-348, Nov. 2016.
- [57] M. Allili, D. Corriveau, « Topological analysis of shapes using Morse theory », Computer Vision and Image Understanding, vol. 105, no. 3, pp. 188-199, Mar. 2007.
- [58] Frederic Devernay , «Détection de contours», disponible sur: "<http://devernay.free.fr/cours/vision/pdf/c3.pdf>".
- [59] J. Seo, S. Chae, J. Shim, D. Kim, C. Cheong, T.D. Han, « Fast Contour-Tracing Algorithm Based on a Pixel-Following Method for Image Sensors », Physical Sensors, Korea, Vol. 16, No. 3, pp. 353, 9 March 2016.
- [60] «Eclipse integrated development environment», Tutorials Point, 2015
disponible sur : "https://www.tutorialspoint.com/eclipse/eclipse_tutorial.pdf"
- [61] J. M. Doudoux, « Développons en Java avec Eclipse»
disponible sur : "http://mmontantin.free.fr/_docs/cpp_cs/Java/eclipse_V0_30.pdf"
- [62] T.B. Sebastian, P.N. Klein, B.B. Kimia, « Recognition of shapes by editing shock graphs», Computer Vision, IEEE International Conference, IEEE Computer Society, vol. 1, pp. 755–755, 2001.