

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département des Sciences de la Matière



Polycopié de Cours

Mécanique des fluides

2^{ème} année licence LMD
Département des sciences de la matière
Filière : physique

Réalisé par :

Dr. Souadkia Mourad

Polycopié de cours de mécanique des fluides

Mourad Souadkia

27 septembre 2022

Table des matières

1	Généralités	1
1.1	Introduction	1
1.2	Définition d'un fluide	2
1.3	Caractéristique du milieu fluide	3
1.4	Différents types de fluides	5
1.5	Forces subies par un fluides	5
1.5.1	Notion de particule fluide	5
1.5.2	Force de volume	6
1.5.3	Force de surface	6
1.5.4	Force de frottement	7
2	Statique des fluides	8
2.1	Introduction	8
2.2	Principe fondamental de la statique des fluides	9
2.2.1	Force de pression	9
2.2.2	Équation générale de la statique des fluides	9
2.3	Application aux fluides incompressibles : l'hydrostatique	11
2.4	Forces de poussée d'Archimède	13
2.5	Statique des gaz	16
3	Cinématique des fluides	19
3.1	Introduction	19
3.2	Description d'un fluide en mouvement	20
3.2.1	Description lagrangienne	20
3.2.2	Description eulérienne	21
3.2.3	Dérivée particulaire : accélération	21
3.2.4	Trajectoires	22
3.2.5	Lignes de courant	22
3.2.6	Lignes d'émission	23
3.3	Tenseur des déformations lois de comportement	25
3.3.1	Translation	25
3.3.2	Rotation	25
3.3.3	Translation avec déformations linéaires	26
3.3.4	Déformation quelconque d'un élément fluide	26

3.4	Écoulement rotationnel incompressible - fonction de courant	27
3.5	Écoulement irrotationnel - potentiel des vitesses	29
3.6	Expression de la circulation des vitesses	29
3.7	Exemples d'écoulements plans à potentiel des vitesses	30
3.7.1	Représentation d'écoulements par des fonctions complexes	30
3.7.2	Écoulement parallèle uniforme	30
3.7.3	Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits	32
3.7.4	Tourbillon	33
4	Dynamique des fluides parfaits	35
4.1	Introduction	35
4.2	Équations fondamentales pour un fluide parfait	36
4.3	Débit massique	37
4.4	Débit volumique	38
4.5	Équation de Bernoulli et ses applications	38
4.5.1	Interprétation physique de l'équation de Bernoulli	39
4.5.2	Cas d'un écoulement avec échange de travail	40
4.5.3	Applications	41
4.6	Étude des débitmètres	42
4.6.1	Tube de Pitot	42
4.6.2	Tube de Venturi	43
5	Dynamique des fluides visqueux	45
5.1	Introduction	45
5.2	Équation du mouvement	46
5.3	Équation de Navier-Stokes	47
5.4	Écoulements et nombre de Reynolds	48
5.5	Pertes de charges	48
5.5.1	Pertes de charges singulières	48
5.5.2	Pertes de charges linéaire	49
5.6	Théorème de Bernoulli : cas général	49
5.7	Résolution de quelques problèmes classiques instationnaires	50
5.7.1	Écoulement instationnaire sur plan en translation : problème de Stokes	50
5.7.2	Écoulement instationnaire dans un tube	51
6	Introduction à la dynamique des gaz	53
6.1	Introduction	53
6.2	Équation de Barré de Saint-Venant	54
6.3	Nombre de Mach	55
6.4	Ondes de Mach	56
6.5	État générateur	56
6.6	Écoulement dans un convergent-divergent	58
6.7	Écoulement supersonique	60

6.7.1	Ondes de choc normales	60
6.7.2	Ondes de choc obliques	61

Table des figures

2.1	Volume de fluide élémentaire, $dx dy dz$, de forme parallépipédique au repos.	11
2.2	volume élémentaire de forme cylindrique.	12
2.3	Poussée d'Archimède sur un corps immergé.	13
2.4	Poussée d'Archimède sur un corps flotte.	15
2.5	Barge flottant sur l'eau.	15
2.6	Position du métacentre M de la carène d'un bateau en fonction de l'inclinaison.	16
3.1	Tube de courant.	23
3.2	Lignes de courant (a), et (b) trajectoire.	23
3.3	Lignes d'émission relative au point A et trajectoires.	24
3.4	Mouvement de translation d'un élément de fluide avec déformation linéaire.	26
3.5	Déformation quelconque d'un élément fluide	27
3.6	Écoulement parallèle uniforme	31
3.7	Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits	33
3.8	Tourbillon	34
4.1	Lignes de charges pour l'écoulement en charge de fluide parfait.	40
4.2	Schéma de vidange d'un réservoir à surface libre.	41
4.3	Schéma du tube de Pitot.	42
4.4	Schéma du tube de Venturi.	43
5.1	Écoulement d'un fluide visqueux placé entre deux plaques, P1 est fixe et P2 est mobile.	46
6.1	Propagations des ondes sonores et nombre de Mach : (a) repos, (b) subsonique, (c) sonique et (d) supersonique.	57
6.2	Tuyère convergente-divergente : (a) Schéma de la géométrie de la tuyère ; (b) variation de la pression statique dans la tuyère.	59
6.3	Schéma de l'écoulement de choc oblique	61

Liste des tableaux

- 1.1 Masse volumique en ($Kg.m^{-3}$) et coefficient de viscosité dynamique en ($Kg.m^{-1}.s^{-1}$) et cinématique en ($m^2.s^{-1}$) de l'air (gaz) et de l'eau (liquide). 4

Avant-propos

Ce cours de mécanique des fluides est destiné aux étudiants de la deuxième année physique LMD, option physique des matériaux. Il répond au programme officiel du Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique. Le premier chapitre traite des notions fondamentales ; définition d'un fluide, les différents types des fluides, propriétés du milieu fluides,..... Le deuxième chapitre est consacré le principe fondamental de la statique et la poussée d'Archimède. Le troisième chapitre est consacré la cinématique des fluides ; description de Lagrange, d'Euler, notion de trajectoires...et nous traitons quelques exemples de l'écoulement plans. Le chapitre 4 et 5 abordent la dynamique des fluides parfaits et réels ; l'équation de Bernoulli et de Navier Stocks ,... Chapitre 6 donne une introduction de la dynamique des gaz ; nombre de Mach, ondes de choc normale et obliques.

Operateurs Differentiels gradient et divergence

Soit :

f est une fonction scalaire et \vec{A} est un vecteur.

Coordonnées Cartésiennes :

$$f = f(x, y, z)$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\text{Gradient : } \text{grad} f = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}.$$

$$\text{Divergence : } \text{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Coordonnées cylindrique :

$$f = f(\rho, \phi, z).$$

$$\vec{A} = A_\rho \vec{u}_\rho + A_\phi \vec{u}_\phi + A_z \vec{u}_z$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Coordonnées sphériques :

$$f = f(r, \theta, \phi).$$

$$\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\phi \vec{u}_\phi.$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{u}_\phi.$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}.$$

Chapitre 1

Généralités

Contents

1.1	Introduction	1
1.2	Définition d'un fluide	2
1.3	Caractéristique du milieu fluide	3
1.4	Différents types de fluides	5
1.5	Forces subies par un fluides	5
1.5.1	Notion de particule fluide	5
1.5.2	Force de volume	6
1.5.3	Force de surface	6
1.5.4	Force de frottement	7

1.1 Introduction

La mécanique des fluides est une science de la mécanique appliquée qui concerne le comportement des liquides et des gaz au repos ou en mouvement. Elle comprend deux grandes sous branches :

- statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos.
- dynamique des fluides qui étudie le fluide en mouvement.

La mécanique des fluides trouve leur applications dans de divers problèmes comme l'étude de l'écoulement sanguin, l'écoulement de pétrole, l'aéronautique, l'ingénierie naval,...

1.2 Définition d'un fluide

Un fluide est un milieu continu formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites est libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un **milieu matériel continu, déformable, sans rigidité** et qui peut **s'écouler**. Les forces de cohésion entre les particules élémentaires sont très faibles.

- **Milieu continu** : le nombre de particules physiques contenues dans un volume élémentaire à l'échelon macroscopique, est un suffisamment grand, ce concept suppose une distribution continue de la masse du système sans espace vide et aussi ses propriétés varient d'une façon continue.

Pour savoir un milieu est continu ou pas, on calcul le nombre de Knudsen sans dimension, définir par :

$$K_n = \frac{\lambda}{L} \quad (1.1)$$

où :

λ : libre parcours moyen ou encore la distance moyenne d'un point de vue statistique entre deux collisions successives des molécules, et L : la longueur caractéristique de la géométrie. Le milieu est continu si toute distance caractéristique du fluide est très grande devant le libre parcours moyen λ . Pour un milieu continue $K_n \leq 10^{-2}$. Par exemple, sous les conditions normales et pour l'air $K_n = 10^{-7}$.

- **Déformable** : il n'a pas de forme propre, les molécules peuvent facilement glisser les unes sur les autres, cette mobilité fait que le fluide prendra la forme du récipient qui le contient.

- **Peut s'écouler** : tout fluide peut s'écouler plus ou moins facilement d'un récipient à un autre ou dans une conduite : des forces de frottements qui s'opposent au glissement des particules de fluide les unes contre les autres peuvent apparaître.

L'état fluide englobe deux états : liquide et gaz. Les liquides ont la propriété d'être incompressible, n'ont pas de forme propre et ont un volume propre. Les gaz ont la propriété d'être compressible, n'ont pas de forme et de volume propres. Ils habituellement étudiés sont isotropes ; leur propriétés sont identiques dans toutes les directions.

de l'espace.

1.3 Caractéristique du milieu fluide

- **masse volumique** : est définie comme la masse par unité de volume.

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{Kg}{m^3} \quad (1.2)$$

★ pour liquides la masse volumique est constante et pour les gaz varie avec la pression.

★ $\rho_{eau} = 1000 \text{ Kg.m}^{-3}$; $\rho_{air} = 1.293 \text{ Kg.m}^{-3}$.

- **densité** : sans dimension, représente le rapport de la masse volumique d'un fluide par rapport à la masse volumique d'un fluide de référence. Dans le cas liquide, on prendra l'eau comme fluide de référence et l'air dans le cas des gaz.

$$d = \frac{\rho_{fl}}{\rho_{ref}} \quad (1.3)$$

- **poids volumique** : est définie comme le poids par unité de volume.

$$\bar{w} = \frac{p}{V} = \frac{mg}{V} = \rho \cdot g = \frac{N}{m^3} \quad (1.4)$$

- **volume massique** : est l'inverse de la masse volumique.

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{m^3}{Kg} \quad (1.5)$$

- **viscosité** : est caractérisée les frottements internes ou intermoléculaires à l'intérieur du fluide, autrement dit, sa capacité à s'écouler, les fluides de grandes viscosité résiste à l'écoulement. On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

la viscosité dynamique : caractérise l'aptitude des couches fluides à glisser les unes sur les autres, elle exprime la rigidité d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement.

Considérons deux couches fluides adjacents de distance Δz . La force de frottement f qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une

couche sur l'autre est :

$$f = \mu s \frac{\Delta v}{\Delta z} \quad (1.6)$$

avec :

f : force de glissement entre les couches en (N).

μ : viscosité dynamique en $\frac{Kg}{m.s} = Pa.s = PI^1$

s : surface de contact entre deux couches en m^2 .

Δv : écarte de vitesse entre deux couches en $\frac{m}{s}$

Δz : distance entre deux couches en (m).

Pour un gaz, la viscosité dynamique augmente avec la température, l'opposé se produisant avec les liquides.

la *viscosité cinématique* : est le temps d'écoulement d'un fluide ; à une température donnée la durée d'écoulement d'un volume connu de liquide à travers un appareil comportant un orifice est :

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.7)$$

l'unité de la viscosité cinématique est le $(\frac{m^2}{s})$, et on utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique. $1St = 10^{-4} \frac{m^2}{s}$.

TABLE 1.1: Masse volumique en $(Kg.m^{-3})$ et coefficient de viscosité dynamique en $(Kg.m^{-1}.s^{-1})$ et cinématique en $(m^2.s^{-1})$ de l'air (gaz) et de l'eau (liquide).

fluide	masse volumique	viscosité dynamique	viscosité cinématique
Eau	10^3	10^{-3}	10^{-6}
Air	1.29	$1.85 \cdot 10^{-5}$	$1.43 \cdot 10^{-5}$

1. PI : Poiseuille ; $1PI = 1Pa.s$

1.4 Différents types de fluides

Les fluides peuvent classer en deux familles :

- ★ fluides newtoniens : ont une viscosité constante ; l'air, l'eau, et la plupart des gaz,...
- ★ Fluides non newtoniens : ont une viscosité varie en fonction de la vitesse des contraintes ; le sang, les gels, les pâtes,...

Les fluides newtoniens peuvent aussi classés comme suit :

- 1- fluides parfaits : possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement.
- 2- fluides réels : ou bien fluides visqueux, les force de frottements sont prise en considération.
- 3- fluide incompressible : le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure, la masse volumique est constante ; les liquides.
- 4- fluide compressible : le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure, la masse volumique varie en fonction de la pression ; les gaz.

Ce cours de mécanique des fluides fondamentale est limité à l'étude des fluides newtoniens.

1.5 Forces subies par un fluides

1.5.1 Notion de particule fluide

On définit la particule fluide comme la particule de solide. L'étude du mouvement de fluide est faite au niveau de ces particules sur lesquelles sont appliquées les lois fondamentales de la dynamique. La particule de fluide doit posséder les propriétés du fluide en bloc. Le fluide est formés de petits éléments, sans limites mais restant toute fois un milieu continu. Une particule fluide représente un paquet de molécule entourant un point M et qui ont toutes la même vitesse, à l'instant t, elle caractérisée par sa masse volumique, sa pression et sa température.

Chaque particule d'un fluide est soumise à des forces de volume (force de pesanteur) et à des forces de surface (force de contact).

1.5.2 Force de volume

Considérons un petit volume élémentaire dV et soit dP la force élémentaire de volume (du poids) qui s'exerce sur dV . On a : $dm = \rho dV$, donc :

$$d\vec{P} = dm \vec{g} = \rho dV \vec{g} \quad (1.8)$$

Et la densité volumique de force est $f = \rho.g$.

1.5.3 Force de surface

Imaginons une surface S fictive qui au sein du fluide en deux domaines $F1$ et $F2$. Les particules qui se trouvent du côté de $F2$, mais adjacentes à S , agissant sur les particules $F1$ qui le touchent. Ces deux actions à de courte distance proportionnelles à l'aire de contact et on les appelle force de surface. Donc, la force de surface élémentaire est :

$$d\vec{F}_S = -p\vec{n}d\vec{S} \quad (1.9)$$

avec :

p : est la pression.

\vec{n} : vecteur normal unitaire orienté vers le milieu qui agit.

La densité surfacique de force est $-p\vec{n}$, on note que la pression p est une grandeur scalaire positive définie en tout point du fluide.

L'unité de la pression est le pascal ($1Pa = 1\frac{N}{m^2}$).

• $1 bar = 10^5 Pa, 1 atm = 760 mm de Hg = 760 torr = 10.33 m d'eau = 1.013 \cdot 10^5 Pa$

atm : pression atmosphérique moyenne au niveau de la mer.

Hg : Mercure.

1.5.4 Force de frottement

Pour un fluide visqueux et en mouvement non uniforme accéléré, il existe des contraintes tangentielles se manifestent par une résistance de l'écoulement. Cette force de frottement s'annule avec la vitesse, alors la statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits, mais pas dans le cas de la dynamique des fluides.

Chapitre 2

Statique des fluides

Contents

2.1	Introduction	8
2.2	Principe fondamental de la statique des fluides	9
2.2.1	Force de pression	9
2.2.2	Équation générale de la statique des fluides	9
2.3	Application aux fluides incompressibles : l'hydrostatique	11
2.4	Forces de poussée d'Archimède	13
2.5	Statique des gaz	16

2.1 Introduction

La statique des fluides s'intéresse à l'étude des fluides au repos. L'objectif est de calculer la pression en tout point du domaine fluide. Un deuxième objectif est le calcul des efforts exercés par ce fluide au repos. Le Calcul de pression hydrostatique par exemple ; la pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan, la pression de l'eau au fond d'un barrage ou bien dans les réservoirs ainsi que le calcul de la force résultante appliquée sur un objet partiellement ou complètement immergé, sont basés sur les théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

2.2 Principe fondamental de la statique des fluides

2.2.1 Force de pression

soit $\vec{dF}(M)$ la force élémentaire de surface exercée par un fluide sur un élément de surface dS entourant le point M . Cette force est perpendiculaire à la surface et orientée par sa normale extérieur à la surface, \vec{n} , s'exprime par :

$$\vec{dF}(M) = -p(M)dS\vec{n} \quad (2.1)$$

Ceci conduit d'exprimer la force totale par :

$$\vec{F} = - \iint_S p(M)dS\vec{n} \quad (2.2)$$

2.2.2 Équation générale de la statique des fluides

Considérons un élément de volume de forme parallélépipédique de volume de fluide $dV = dx dy dz$, figure 2.1, le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume :

- La force de volume : le poids (g est l'accélération de la pesanteur)

$$\vec{dP} = dm g\vec{e}_z = \rho dV g\vec{e}_z \quad (2.3)$$

- Les forces de surface dues à la pression : la résultante des actions suivants x est :

$$R_x = F_x - F_{x+dx} = [p_x - p_{x+dx}] dy dz \quad (2.4)$$

Comme dx est un infiniment petit, on peut effectuer un développement limité au premier ordre de p_{x+dx} sous la forme :

$$p_{x+dx} = p_x + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \dots \quad (2.5)$$

D'où :

$$R_x = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (2.6)$$

Par analogie sur les deux autres axes :

$$R_y = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \quad (2.7)$$

et :

$$R_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz \quad (2.8)$$

Donc la force totale résultante de la surface est :

$$\begin{aligned} \vec{R} &= R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z \\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right) dV \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'équilibre des force se traduit par :

$$d\vec{P} + \vec{R} = 0 \quad (2.10)$$

On alors suivant (oz) :

$$\rho \vec{g} - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = 0$$

Et d'une manière plus synthétique :

$$\vec{\nabla} p = \rho \vec{g} \quad (2.11)$$

La dernière relation est appelée relation fondamentale de l'hydrostatique. Cette relation est d'une grande utilité en pratique pour les manomètres, baromètres, presses hydrostatiques, etc...

L'équation fondamentale de la statique peut s'établir d'une manière plus générale, sans faire intervenir un repère particulier. La somme des forces qui s'exercent sur V est nulle (le fluide au repos) :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV - \iint_S p \vec{n} dS = \vec{0} \quad (2.12)$$

En appliquant le théorème du gradient ; on transforme l'intégrale de surface en intégrale de volume¹, il vient, quelque soit le volume V :

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV - \iiint_V \vec{\nabla} p dV = \vec{0} \quad (2.13)$$

Il en résulte, $\rho \vec{g} - \vec{\text{grad}} p = 0$, et on retrouve la relation de l'hydrostatique :

$$\vec{\text{grad}} p = \rho \vec{g} \quad (2.14)$$

1. formule de Green-Ostrogradski, et on écrit : $\iint_S p \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} p dV$ (c'est la formule utilisée ici)

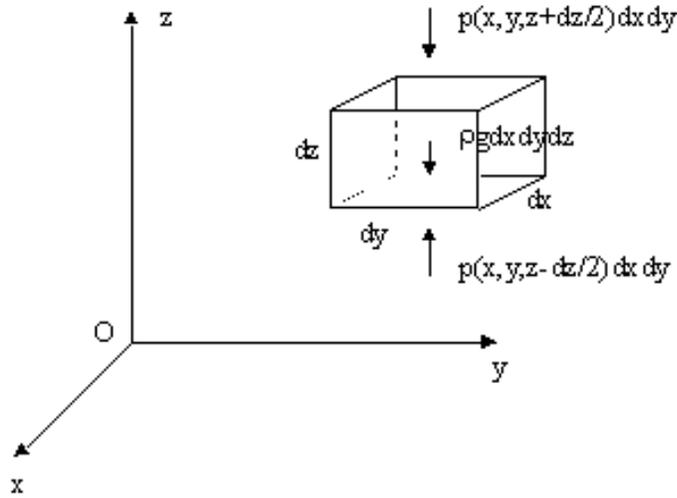


FIGURE 2.1: Volume de fluide élémentaire, $dx dy dz$, de forme parallépipédique au repos.

2.3 Application aux fluides incompressibles : l'hydrostatique

Dans un fluide incompressible, comme c'est en général le cas pour liquides, explicitons l'équation 2.14 suivant un axe vertical ascendant et intégrons, il vient :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \Rightarrow p = -\rho g z + Cte \tag{2.15}$$

Il en résulte la relation suivante entre les pressions en deux points A et B :

$$p_B - p_A = \rho g(z_A - z_B) \tag{2.16}$$

Ce résultat est connu sous le nom principe de Pascal.

Exemples

- Trouver la relation fondamentale de la statique pour une particule fluide se forme cylindrique :

Considérons une particule fluide se forme cylindrique de petites dimensions, de hauteur Δz et de base Δs , figure 2.2.

Le principe fondamental de la statique donne :

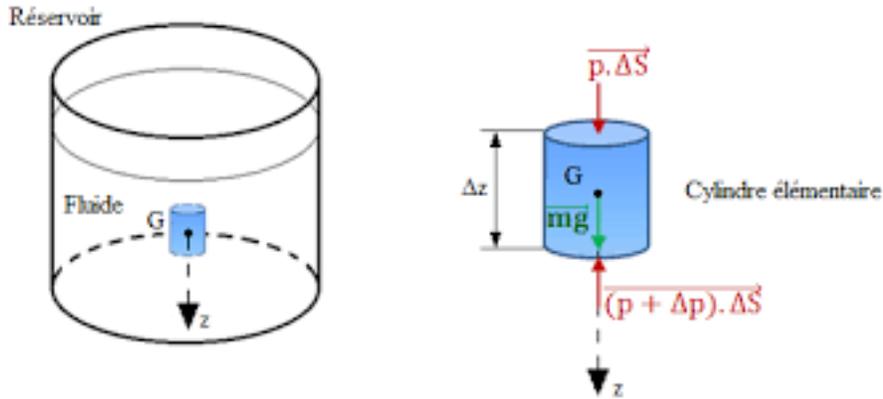


FIGURE 2.2: volume élémentaire de forme cylindrique.

$$(p + \Delta p)\Delta s\vec{z} + p\Delta s\vec{z} + mg\vec{z} = 0$$

En projetons sur la vertical z :

$$(p + \Delta p)\Delta s - p\Delta s - mg = 0 \tag{2.17}$$

et on a $m = \rho V = \rho\Delta z\Delta s$ donc l'équation 2.17 s'écrit :

$$\Delta p = \rho g\Delta z \tag{2.18}$$

tel que :

$(p + \Delta p)\Delta s$: la force en bas (exercée sur la base).

$p\Delta s$: la force en haut du cylindre.

mg : la force de pesanteur de la particule fluide.

- Trouver la pression à une profondeur $h = 10 \text{ m}$.

La pression p à une profondeur $h = 10 \text{ m}$ dans un lac est donnée par :

$$p = p_a + \rho gh = 10^5 + 10^3 \cdot 9.81 \cdot 10 = 9810 \text{ KPa}$$

2.4 Forces de poussée d'Archimède

• Enoncé

Dans une situation d'équilibre, tout corps immergé dans un fluide au repos la résultante des forces de pression exercées sur cet objet, est égale et opposés au poids du volume de fluide déplacé par l'immersion appelée poussée d'Archimède.

$$p_{Arch} = \rho_{flui} V_{imm} g \quad (2.19)$$

• Démonstration

Considérons un solide de masse volumique ρ uniforme, de surface S et de volume V (Figure 2.3).

Nous savons que la résultante des efforts exercés par le fluide sur la surface solide est :

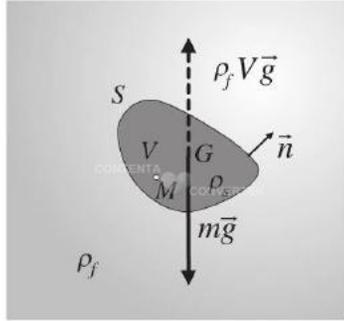


FIGURE 2.3: Poussée d'Archimède sur un corps immergé.

$$\vec{F} = - \iint_S p \vec{n} dS = - \iiint_V \vec{\nabla} p dV \quad (2.20)$$

Et d'après la relation de l'hydrostatique (2.11), on écrit :

$$\vec{\nabla} p = \rho_f \vec{g} \quad (2.21)$$

Donc :

$$\vec{F} = - \iiint_V \rho_f \vec{g} dV = -\rho_f \vec{g} V = -m_f \vec{g} \quad (2.22)$$

Cette force est opposée à la pesanteur et s'appelle la poussée d'Archimède n'est autre que le poids de la masse m_f d'eau contenue dans le volume V du solide.

• Point d'application

Corps immergé

La force totale exercée sur le corps solide est la somme de la force d'Archimède et du poids du solide :

$$\vec{R} = \vec{F} + \iiint_V \rho_s \vec{g} dV = (\rho_s - \rho_f) \vec{g} V \quad (2.23)$$

Le moment résultant en un point tel que l'origine G par exemple :

$$- \iint_S G \vec{M} \wedge p \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} p \wedge G \vec{M} dV \quad (2.24)$$

Par définition du centre d'inertie, on a :

$$\iiint_V G \vec{M} dV = \vec{0}, \quad \forall M \in V \quad (2.25)$$

D'où :

$$\vec{M}_G = \rho_f \vec{g} \wedge \iiint_V G \vec{M} dv = \vec{0} \quad (2.26)$$

cette relation démontre que le centre d'inertie coïncide avec le centre de poussée quelle que soit la forme du solide immergé totalement.

Corps flottants

Un corps flotte sur un liquide si la masse volumique du liquide de remplacement est supérieure à celle du corps ; seule une partie de ce dernier, le corps est partiellement immergé (Figure 2.4). La poussée d'Archimède s'exprime sous la forme :

$$\vec{F} = - \iiint_{V_s} \rho_s \vec{g} dV_s - \iiint_{V_f} \rho_f \vec{g} dV_f \quad (2.27)$$

On note que le point d'application de la poussée dans ce cas ne correspond plus avec le centre de gravité.

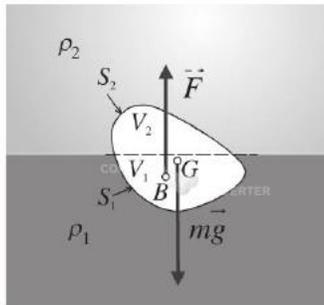


FIGURE 2.4: Poussée d'Archimède sur un corps flotte.

Exemple

Une barge flottant sur l'eau, de dimension $L = 10 \text{ m}$, $l = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$ et de masse $M = 20 \text{ t}$ (Figure 2.5).

Calculer l'hauteur h' . on a :

$$Mg - \rho_e L l h' g = 0 \implies Mg = \rho_e L l h' g \text{ donc } \implies h' = \frac{M}{\rho_e L l} = \frac{20000}{1000 \cdot 10 \cdot 4} = 0.5 \text{ m}$$

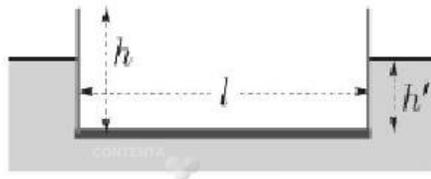


FIGURE 2.5: Barge flottant sur l'eau.

• Position du métacentre (cas de la carène d'un bateau)

Comme pour flotteur en équilibre le poids du liquide déplacé est égal au poids du flotteur. La poussée d'Archimède sera appliquée au centre de masse du volume de fluide déplacé qui sera différent du centre de masse du solide. Ceci conduit à définir le

métacentre comme le point d'intersection de la ligne de poussée avec la ligne d'action du poids à l'équilibre. Dans le cas de la carène d'un bateau (Figure 2.6). Lorsque le métacentre M rest au dessus de centre de masse G toute variation d'inclinaison de la carène tend à revenir vers la position d'équilibre stable. Lorsque le métacentre est au dessus de G , l'équilibre est stable et un moment de rétablissement tend à faire revenir la carène à l'équilibre (cas B). Dans le cas contraire le couple sera un couple de chavirement (cas C).

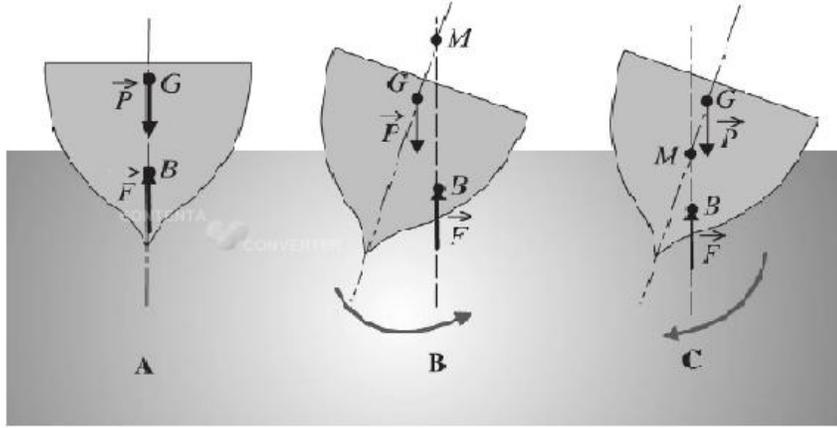


FIGURE 2.6: Position du métacentre M de la carène d'un bateau en fonction de l'inclinaison.

2.5 Statique des gaz

On appelle équation d'état d'un fluide l'équation reliant entre eux la pression p , le volume V et la température T de ce fluide. Pour simplifier l'étude, on prendra le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état est :

$$pV = nRT = \frac{m}{M}RT = mrT \quad (2.28)$$

où : $r = \frac{R}{M}$, et en introduisant la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$, on trouve :

$$p = \rho rT \implies \rho = \frac{p}{rT} \quad (2.29)$$

Pour connaître la pression en tout point du gaz, la relation fondamentale de l'hydrostatique donne :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{g}{rT}p \quad (2.30)$$

Soit :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT}dz \quad (2.31)$$

Et donc, si l'on suppose une atmosphère isotherme (la température ne dépend pas de z) :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{g}{rT} \int_{z_0}^z dz \quad (2.32)$$

Ce qui donne finalement :

$$p = p_0 \exp\left(\frac{-g}{rT}(z - z_0)\right) \quad (2.33)$$

•Exemple : atmosphère polytropique :

Dans l'atmosphère, on admet que les variables thermodynamiques vérifient les lois polytropiques suivantes :

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x-1} \quad (2.34)$$

Avec $1 \leq x \leq \gamma$. Déterminer $p(z)$, $\rho(z)$ et $T(z)$.

D'après la relation 2.34 on a :

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{x-1}{x}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{x-1} \implies \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (2.35)$$

D'après la relation de l'hydrostatique ($\vec{\nabla}p = \rho\vec{g}$) et on remplace ρ on trouve :

$$dp = -\rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{x}} g dz \quad (2.36)$$

Donc :

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{-1}{x}} dp = -\rho_0 g dz \quad (2.37)$$

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{-1}{x}} p^{\frac{-1}{x}} dp = -\rho_0 g dz \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{-1}{x}} \int_{p_0}^p p^{\frac{-1}{x}} dp = -\rho_0 g \int_0^z dz \quad (2.39)$$

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)^{\frac{-1}{x}} \left[\frac{x}{x-1} p^{\frac{x}{x-1}} \right]_{p_0}^p = -\rho_0 g [z]_0^z \quad (2.40)$$

$$\frac{x}{x-1} \left[p_0^{\frac{x}{x-1}} - p^{\frac{x}{x-1}} \right] = \rho_0 g z p_0^{\frac{-1}{x}} \quad (2.41)$$

Donc :

$$p^{\frac{x}{x-1}} = p_0^{\frac{x}{x-1}} - \frac{x-1}{x} \rho_0 g z p_0^{\frac{-1}{x}} \quad (2.42)$$

On trouve finalement :

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x-1}{x} z \frac{\rho_0 g}{p_0} \right)^{\frac{x}{x-1}} \quad (2.43)$$

On remplace la relation 2.43 dans la relation 2.34, on trouve :

$$\rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{x-1}{x} z \frac{\rho_0 g}{p_0} \right)^{\frac{1}{x-1}} \quad (2.44)$$

$$T(z) = T_0 \left(1 - \frac{x-1}{x} z \frac{\rho_0 g}{p_0} \right) \quad (2.45)$$

Chapitre 3

Cinématique des fluides

Contents

3.1	Introduction	19
3.2	Description d'un fluide en mouvement	20
3.2.1	Description lagrangienne	20
3.2.2	Description eulérienne	21
3.2.3	Dérivée particulaire : accélération	21
3.2.4	Trajectoires	22
3.2.5	Lignes de courant	22
3.2.6	Lignes d'émission	23
3.3	Tenseur des déformations lois de comportement	25
3.3.1	Translation	25
3.3.2	Rotation	25
3.3.3	Translation avec déformations linéaires	26
3.3.4	Déformation quelconque d'un élément fluide	26
3.4	Écoulement rotationnel incompressible - fonction de courant	27
3.5	Écoulement irrotationnel - potentiel des vitesses	29
3.6	Expression de la circulation des vitesses	29
3.7	Exemples d'écoulements plans à potentiel des vitesses	30
3.7.1	Représentation d'écoulements par des fonctions complexes	30
3.7.2	Écoulement parallèle uniforme	30
3.7.3	Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits	32
3.7.4	Tourbillon	33

3.1 Introduction

Cinématique des fluides est la description des écoulements sans considération de la nature des forces provoquant. Le mouvement du fluide est un phénomène complexe.

Contrairement aux solides, les éléments des fluides en mouvement peuvent se déplacer à des vitesses différentes et être soumis à des accélérations différents. Le mouvement de fluide nécessite l'introduction de la position et de la vitesse de la particule fluide qui se translate, tourne sur elle-même et se déforme quand elle s'écoule.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes d'analyse du mouvement d'un fluide, ensuite nous introduisons la fonction de courant et le potentiel des vitesses et nous donnons quelques exemples d'écoulements.

3.2 Description d'un fluide en mouvement

3.2.1 Description lagrangienne

La méthode de Lagrange¹ consiste à suivre une particule fluide individuellement au cours de son mouvement en fonction de temps.

Soit $\vec{r}(r_0, t)$ le vecteur position d'une particule donnée et r_0 sa position initiale à un instant référence donné t_0 . En coordonnées cartésiennes : $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t) \end{cases} \quad (3.1)$$

ou x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées initiales et x, y et z les coordonnées au temps t de la particule. Le vecteur vitesse \vec{v} est en fonction des deux variables r_0 et t donné par :

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{r_0} \quad (3.2)$$

L'accélération est :

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right)_{r_0} \quad (3.3)$$

la représentation de Lagrange permet de connaître la trajectoire de particule fluide, on injecte par exemple un colorant en un point de l'écoulement, à l'instant t_0 , et on suit l'évolution du colorant en fonction du temps. De plus, la conservation de la masse est toujours vérifiée. Mais en réalité, le fluide est composé d'un très grand nombre de particules, les interactions entre eux sont difficiles à décrire.

1. Joseph Louis Lagrange 1736-1813

3.2.2 Description eulérienne

Euler² se concentre sur l'évolution des propriétés du fluide en différents points et au cours du temps. Elle consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace occupé par le fluide.

L'écoulement du fluide est décrit au moyen d'un champ de vecteur vitesse ses composantes s'expriment sous la forme :

$$\begin{cases} v_x = v_x(x, y, z, t) \\ v_y = v_y(x, y, z, t) \\ v_z = v_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (3.4)$$

les composantes de champ de vitesse appelées variable d'Euler.

3.2.3 Dérivée particulaire : accélération

Soit la forme eulérienne de la vitesse $v(t) = v(x, y, z, t)$ à instant t donné. Après un instant Δt , la vitesse est $v(t + \Delta t)$. La dérivée de la vitesse dv :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz + \frac{\partial v}{\partial t} dt \quad (3.5)$$

Et l'accélération :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.6)$$

et on a :

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z \quad (3.7)$$

Donc :

$$a = v_x \frac{\partial v}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \quad (3.8)$$

Les composantes de l'accélération :

$$\begin{cases} a_x = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ a_y = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ a_z = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{cases} \quad (3.9)$$

• La dérivée de la vitesse par rapport au temps est la dérivée temporelle, représente l'accélération locale ; le changement de la vitesse en fonction du temps.

2. Leonhard Euler 1707-1783

- La dérivée de la vitesse par rapport aux coordonnées x , y et z est la dérivée convective, représente l'accélération convective c'est à dire le changement de la vitesse par rapport au position.
- $\frac{d}{dt}$: est la dérivée particulière.
- Dans le cas d'un écoulement stationnaire la dérivée temporelle est nulle, et dans le cas d'un écoulement uniforme la dérivée convective est nulle.

3.2.4 Trajectoires

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées successivement entre deux instants par une particule fluide quelconque du champ de l'écoulement.

La trajectoire est la courbe paramétrique défini par les équations :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t) \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.5 Lignes de courant

Les lignes de courant sont les lignes du champ de vecteur vitesse. Elles sont les courbes tangentes en chacun de ses points au vecteur vitesse instantanées en ce point à un instant donné.

En effet pour un déplacement infinitésimal $d\vec{r}(dx, dy, dz)$ du point M sur une ligne de courant, on a :

$$\vec{v} \wedge d\vec{r} = \vec{0} = \begin{cases} v_y dz - v_z dy \\ v_z dx - v_x dz \\ v_x dy - v_y dx \end{cases} \quad (3.11)$$

Et par conséquent :

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \quad (3.12)$$

Cette équation est constituée l'équation différentielle des lignes de courant.

On appelle **tube de courant** l'ensemble des lignes de courant s'appuyant au même instant sur un contour fermé quelconque de telle sorte qu'il n'y ait pas d'intersection

entre les lignes de courant (voir figure 3.1).

En comparaison avec la trajectoire : la trajectoire est une courbe paramétrée en temps

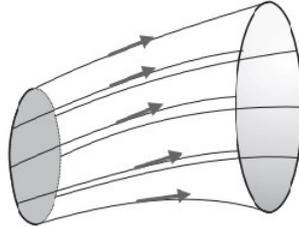


FIGURE 3.1: Tube de courant.

réfère à une même particule alors que la ligne de courant est relative à une même instant mais regroupe des particules différentes (voir figure 3.2). Par conséquent, lorsque le régime est permanent, les lignes de courant se confondent avec les trajectoires des particules.

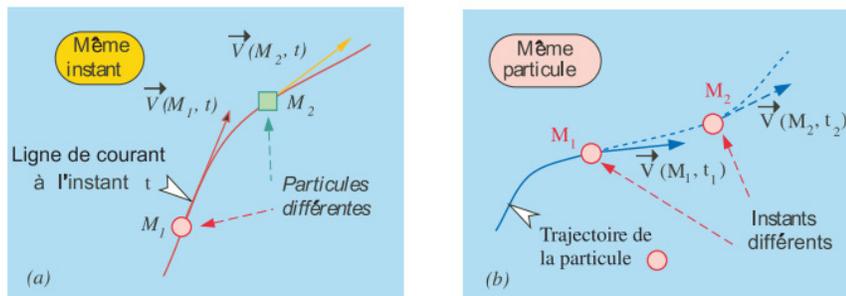


FIGURE 3.2: Lignes de courant (a), et (b) trajectoire.

3.2.6 Lignes d'émission

On appelle ligne d'émission l'ensemble des positions, à un instant t , des particules qui sont passées, à différents moments antérieurs, par un même point fixe de l'écoulement (voir figure 3.3).

La ligne d'émission est une courbe variable dans le temps et regroupe des particules

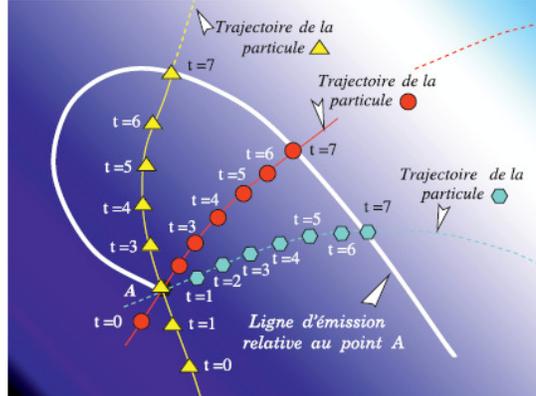


FIGURE 3.3: Lignes d'émission relative au point A et trajectoires.

différentes. L'équation de ligne d'émission pour $t = \tau$ est :

$$\begin{cases} x = x(x_0, y_0, z_0, t, \tau) \\ y = y(x_0, y_0, z_0, t, \tau) \\ z = z(x_0, y_0, z_0, t, \tau) \end{cases} \quad (3.13)$$

Dans le cas d'un écoulement stationnaire, les lignes de courant, les trajectoires et les lignes d'émission coïncident.

Exemple

Le champ de vitesse dans un milieu fluide est donné par :

$$\vec{v} = 2yt\vec{i} + x\vec{j} \quad (3.14)$$

Déterminer l'équation des lignes de courant au point (4,2) et à $t = 2s$.

D'après 3.11, on a :

$$(2yt\vec{i} + x\vec{j}) \wedge (dx\vec{i} + dy\vec{j}) = (2ytdy - xdx)\vec{k} \quad (3.15)$$

Et à $t = 2s$, on trouve :

$$4ydy = xdx \quad (3.16)$$

On intègre, on obtient :

$$2y^2 - \frac{x^2}{2} = C \quad (3.17)$$

On remplace les coordonnées (4,2) dans l'équation 3.17, on obtient la constante $C = 0$.

Et l'équation des lignes de courant :

$$x^2 = 4y^2 \quad (3.18)$$

3.3 Tenseur des déformations lois de comportement

Au sein de l'écoulement, chaque petit volume subit des changements de position, d'orientation et de déformation. Pour cela, nous allons introduire les éléments qui caractérisent ces changements. Nous allons étudier la cinématique du changement de position d'un petit volume de fluide, sous l'hypothèse de petit déplacement.

3.3.1 Translation

Le mouvement de translation pure correspond à un mouvement de translation de solide, en l'absence de déformation et de rotation. Le volume matériel initial conserve sa masse. Le vecteur vitesse est le même pour toutes les particules : $\vec{v}(x, t) = \vec{v}(t)$.

3.3.2 Rotation

Le mouvement de rotation pure d'un volume fluide sans déformation correspond le mouvement de rotation solide, toutes les particules tournent d'un même angle autour d'un axe donné. Le vecteur vitesse d'un point situé à la distance r de l'axe d'une rotation de vitesse angulaire ω dans un mouvement de rotation solide axiale s'exprime par : $\vec{v}(r) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$. Ce vecteur vitesse a ainsi pour composantes cylindrique $v_r = 0$, $v_z = 0$ et $v_\theta = \omega.r$, ce qui conduit au rotational :

$$\vec{\Omega} = r \vec{\text{rot}} \cdot \vec{v} = \Omega \vec{e}_z = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \vec{e}_z = 2\omega \vec{e}_z \quad (3.19)$$

Nous introduirons alors le vecteur tourbillon, dans le cas du rotation :

$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} \quad (3.20)$$

Et le tenseur de rotation $\overline{\overline{R}}$ est défini par :

$$\overline{\overline{R}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.21)$$

• L'écoulement est irrotationnel si $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. Les lignes d'isovorticité sont définies par :

$$\vec{\Omega} \wedge d\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \quad (3.22)$$

3.3.3 Translation avec déformations linéaires

Soit la déformation d'un élément rectangulaire, figure 3.4.

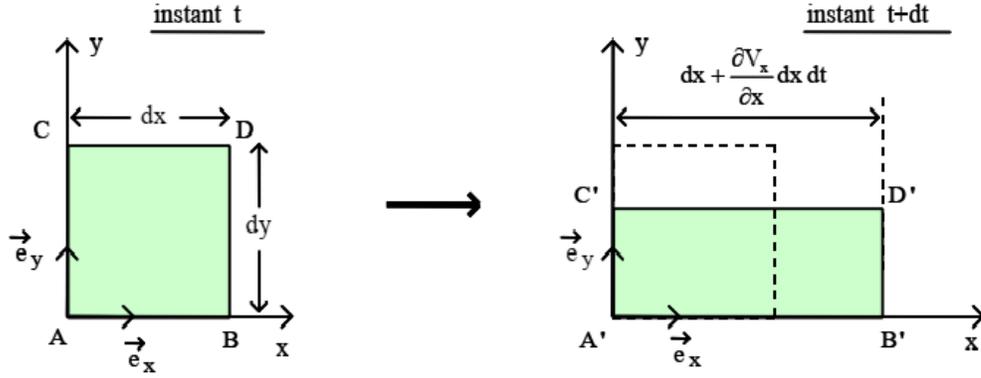


FIGURE 3.4: Mouvement de translation d'un élément de fluide avec déformation linéaire.

D'après cette figure, on observe que la longueur du segment $\dot{A}\dot{B} = dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt$. Donc, la variation relative de longueur du segment AB par unité de temps dans la direction (x) est : $[dx + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dt - dx] / dx = \frac{\partial v_x}{\partial x}$. De façon générale, on définit les vitesses de déformation linéaire dans les direction x,y et z comme :

$$\dot{D}_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \dot{D}_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \dot{D}_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- La déformation volumétrique est nulle dans le cas du fluide incompressible ; $\dot{D}_{xx} + \dot{D}_{yy} + \dot{D}_{zz} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

3.3.4 Déformation quelconque d'un élément fluide

Le taux de déformation angulaire est défini comme le taux de changement d'angle entre les segments linéaires AB et AD (voir figure 3.5) :

$$\dot{D}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) \quad (3.23)$$

D'après la figure 3.5, à la limite $\Delta t \rightarrow 0$ on a :

$$d\alpha = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt, \quad \text{et} \quad d\beta = \frac{\partial v_x}{\partial y} dt \quad (3.24)$$

Donc :

$$\dot{D}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (3.25)$$

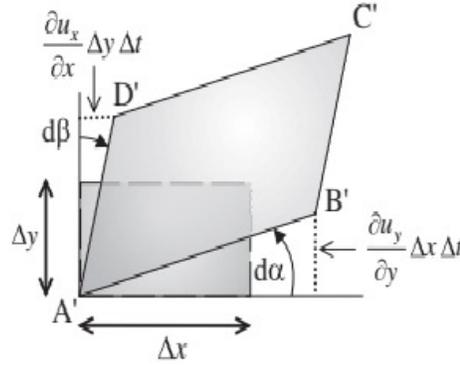


FIGURE 3.5: Déformation quelconque d'un élément fluide

Donc, et avec le même principe, on trouve le tenseur des taux de déformation ($\overline{\overline{D}}$) :

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{D}_{xx} & \dot{D}_{xy} & \dot{D}_{xz} \\ \dot{D}_{yx} & \dot{D}_{yy} & \dot{D}_{yz} \\ \dot{D}_{zx} & \dot{D}_{zy} & \dot{D}_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Ou, l'expression générale du tenseur de vitesse de déformation est :

$$\overline{\overline{D}}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.27)$$

Finalement, le tenseur du gradient de vitesse est la somme du tenseur du taux de déformation et du tenseur de taux de rotation :

$$\overline{\overline{\nabla v}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{R}} \quad (3.28)$$

3.4 Écoulement rotationnel incompressible - fonction de courant

La fonction de courant permet de ramener l'étude du champ vectoriel de vitesse à un champ scalaire d'un fluide incompressible. Pour un écoulement incompressible on

a : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. On peut alors introduire une fonction vectorielle appelée potentiel vecteur des vitesses \vec{A} telle que :

$$\vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (3.29)$$

La relation $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ se traduit alors à chaque instant t par :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (3.30)$$

D'après cette équation, il existe donc une fonction scalaire appelée fonction de courant ψ telle que :

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \text{ et } v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.31)$$

Si on considère un écoulement plan perpendiculaire à l'axe z donc on a : $v_z = 0$ et $\frac{\partial}{\partial z} = 0$, d'après l'équation 3.29 on trouve :

$$v_x = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \text{ et } v_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (3.32)$$

En identifiant l'équation 3.31 avec 3.32, on obtient :

$$\psi = A_z \quad (3.33)$$

la fonction $\psi(x, y)$ représente la composante du vecteur vitesse \vec{A} suivant la direction perpendiculaire au plan de l'écoulement.

En coordonnées polaire (r, θ) , l'équation 3.31 s'écrit :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \text{ et } v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.34)$$

Propriétés :

• On a $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, et d'après la relation 3.31 on trouve :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (3.35)$$

Donc, on conclut que $d\psi$ est une différentielle totale exacte³, et on écrit :

$$\begin{cases} d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \\ \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \end{cases} \quad (3.36)$$

3. d'après le théorème de Schwartz

- la différence entre deux valeurs de la fonction de courant ψ représente le débit volumique entre ces deux lignes de courant.

$$q_v = \int_A^B \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \psi_B - \psi_A \quad (3.37)$$

3.5 Écoulement irrotationnel - potentiel des vitesses

pour un écoulement irrotationnel on a : $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, posant $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$, ϕ est appelé potentiel des vitesses, on trouve : $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\phi) = \vec{0}, \forall \phi$.

Soit un écoulement plan, on peut donc écrire :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{cases} \quad (3.38)$$

le fluide est incompressible :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \quad (3.39)$$

ϕ vérifie l'équation de laplace. De plus, la fonction de courant pour cet écoulement, vérifie aussi l'équation de laplace $\Delta \psi = 0$.

Les équipotentielles s'obtiennent en prenant : $\phi = \text{constante}$ ou $d\phi = 0$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = v_x dx + v_y dy \quad (3.40)$$

Donc :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} \quad (3.41)$$

3.6 Expression de la circulation des vitesses

La circulation des vitesses est le long d'une courbe quelconque d'élément d'arc d'orienté \vec{dl} vaut, par définition :

$$\Gamma = \int \vec{v} \cdot \vec{dl} \quad (3.42)$$

Et on a $\vec{v} = \vec{\nabla}\phi$ donc, on trouve :

$$\Gamma = \int_A^B \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = \int_A^B d\phi = \phi_B - \phi_A \quad (3.43)$$

On note que, pour un contour fermé d'un champ d'écoulement irrotationnel $\Gamma = 0$.

3.7 Exemples d'écoulements plans à potentiel des vitesses

3.7.1 Représentation d'écoulements par des fonctions complexes

Un grand nombre d'écoulements classiques peuvent être représentés par des fonctions complexes :

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y), \text{ où } z = x + iy \quad (3.44)$$

$f(z)$: potentiel complexe des vitesses.

ϕ et ψ : fonctions potentielle et de courant, respectivement.

z : variable complexe associée à la fonction complexe $f(z)$.

Donc, on peut écrire :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\phi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = v_x \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v_y \end{cases} \quad (3.45)$$

Ce système d'équation 3.45 constitue les relations de cauchy-Riemann.

3.7.2 Écoulement parallèle uniforme

Considérons l'écoulement uniforme de vitesse v dans la direction x (voir figure 3.6).

Dans le cas d'un écoulement à deux dimensions, les composantes de vitesse s'écrivent :

$$\begin{cases} v_x = v \\ v_y = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

D'après les équations (3.31 et 3.38), on a :

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

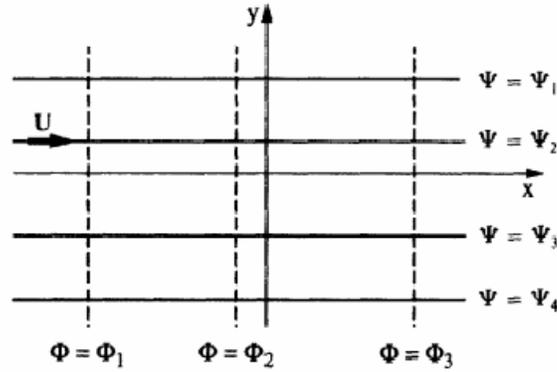


FIGURE 3.6: Écoulement parallèle uniforme

On trouve :

$$\begin{cases} \psi(x, y) = vy \\ \phi(x, y) = vx \end{cases} \quad (3.48)$$

les lignes de courant sont telles que : $\psi(x, y) = C^{ste}$, donc $\forall x, y = C^{ste}$, sont donc des droites horizontales.

Les équipotentiels sont des droites verticales, $\phi(x, y) = C^{ste}$, donc $\forall y, x = C^{ste}$.

Remarque :

- On peut modéliser cette écoulement par le potentiel complexe suivant :

$$f(z) = v(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

- On coordonnées cylindrique (r, θ, x) , ici l'écoulement est dirigé suivant ox , on obtient :

$$\begin{cases} \phi = v.x \\ \psi = -v\frac{r^2}{2} \end{cases} \quad (3.49)$$

Et on coordonnées sphériques (r, φ, θ) , on obtient :

$$\begin{cases} \phi = v.r.\cos\varphi \\ \psi = \frac{1}{2}v.r^2\sin^2\varphi \end{cases} \quad (3.50)$$

Les lignes de courant : $\psi = C^{ste}$, soit $r = C^{ste}$ en coordonnées cylindriques et $r.\sin\varphi = C^{ste}$ en coordonnées sphériques. Elles sont parallèles à la direction de la vitesse. Les équipotentiels sont les droites perpendiculaires à cette direction.

3.7.3 Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Cet écoulement est modélisé par le potentiel complexe des vitesses : $f(z) = C \ln z$ où $z = x + iy = r.e^{i\theta}$, et C : constante réelle, on remplace z dans l'expression de $f(z)$, et d'après la relation 3.44 on trouve :

$$f(z) = C \ln r + iC\theta \Rightarrow \begin{cases} \phi(r, \theta) = C \ln r \\ \psi(r, \theta) = C\theta \end{cases} \quad (3.51)$$

Les lignes de courant : $\psi(r, \theta) = C\theta = C^{ste} \Rightarrow \theta = C^{ste}, \forall r$, ce sont les droites passant par l'origine. Les équipotentielles sont des cercles centrés sur l'origine ; $\phi(r, \theta) = C^{ste} \Rightarrow r = C^{ste}, \forall \theta$.

On peut donc déterminer le champ de vitesse à partir des relations suivantes :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{C}{r} \\ v_\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r \quad (3.52)$$

Où \vec{e}_r est le vecteur unitaire suivant l'axe radial. C est une constante, si $C > 0$ l'écoulement est dirigé vers l'extérieur ; la source se trouve à l'origine. Si $C < 0$ l'écoulement est dirigé vers l'origine ; le puit est à l'origine.

Pour déterminer C , on calcule le débit volumique :

$$q_V = \oint \vec{v} d\vec{s} \quad (3.53)$$

Où $d\vec{s} = r.d\theta.\vec{e}_r$, on obtient :

$$q_V = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r.d\theta = 2\pi.C \Rightarrow C = \frac{q_V}{2\pi} \quad (3.54)$$

Donc, on écrit :

$$f(z) = \frac{q_V}{2\pi} \ln z \quad (3.55)$$

q_V est une constante réelle et z paramètre complexe, représente l'écoulement d'une source pour $q_V > 0$, et d'un puits pour $q_V < 0$ (voir figure 3.7).

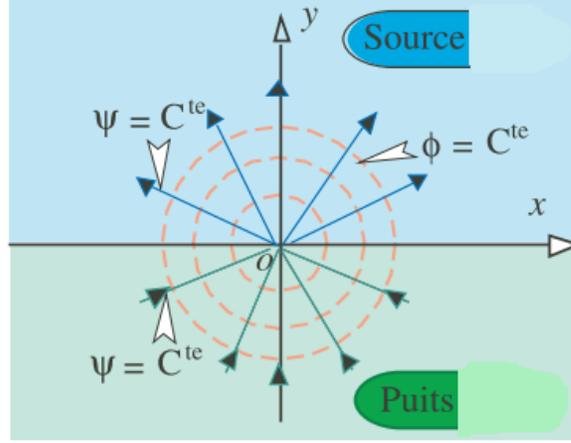


FIGURE 3.7: Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

3.7.4 Tourbillon

L'écoulement plan tourbillonnaire est un écoulement autour d'un axe perpendiculaire en O au plan xoy , modélisé par le potentiel complexe des vitesses :

$$f(z) = -i.C. \ln z \text{ avec } z = x + iy = r.e^{i\theta} \quad (3.56)$$

Donc, on a :

$$f(z) = C\theta - i \ln r \Rightarrow \begin{cases} \phi(r, \theta) = C\theta \\ \psi(r, \theta) = -C. \ln r \end{cases} \quad (3.57)$$

Les lignes de courant : $\psi(r, \theta) = -C \ln r = C^{ste} \implies r = C^{ste}, \forall \theta$, ce sont des cercles centrés sur l'origine. Les équipotentiellees sont des droites passant par l'origine ; $\phi(r, \theta) = C^{ste} \implies \theta = C^{ste}, \forall r$. Le champ de vitesse :

$$\vec{v} = \begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{C}{r} \end{cases} \Rightarrow \vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_\theta \quad (3.58)$$

Le champ de vitesse est orthoradial ; perpendiculaire à l'axe et au rayon vecteur. Pour déterminer la constante C , calculons la circulation Γ , d'après la relation 3.42 et on a $\vec{dl} = r.d\theta.\vec{e}_\theta$, on trouve :

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} r.d\theta = 2\pi.C \Rightarrow C = \frac{\Gamma}{2\pi} \quad (3.59)$$

Alors :

$$f(z) = -i \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right) \ln z \quad (3.60)$$

Γ est la circulation du tourbillon. Si $\Gamma > 0$ le tourbillon tourne dans le sens trigonométrique et tourne dans le sens horaire, si $\Gamma < 0$ (voir figure 3.8).

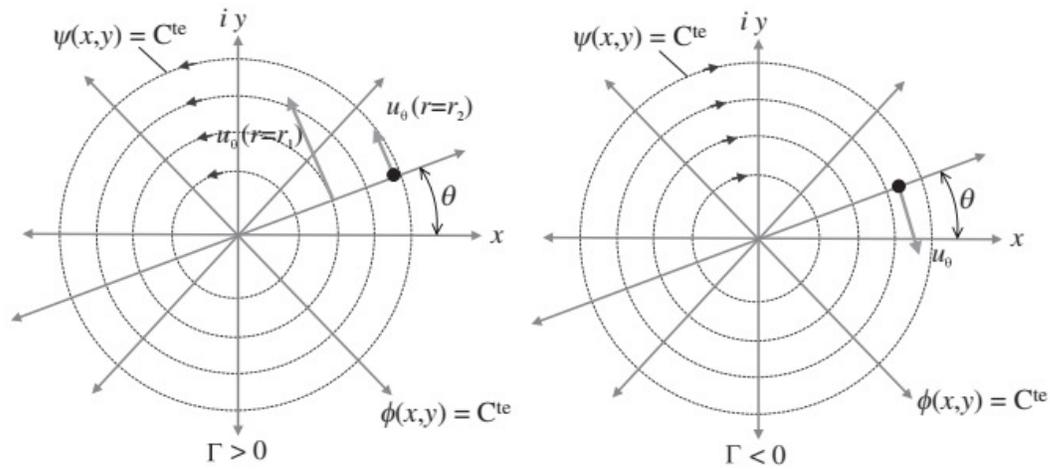


FIGURE 3.8: Tourbillon

Chapitre 4

Dynamique des fluides parfaits

Contents

4.1	Introduction	35
4.2	Équations fondamentals pour un fluide parfait	36
4.3	Débit massique	37
4.4	Débit volumique	38
4.5	Équation de Bernoulli et ses applications	38
4.5.1	Interprétation physqie de l'équation de Bernoulli	39
4.5.2	Cas d'un écoulement avec échange de travail	40
4.5.3	Applications	41
4.6	Étude des débitmètres	42
4.6.1	Tube de Pitot	42
4.6.2	Tube de Venturi	43

4.1 Introduction

La dynamique des fluides s'attache à décrire le mouvement des particules fluides au sein d'un écoulement, en le reliant aux différentes forces en présence. Nous nous limiterons dans ce chapitre aux mouvement des fluides parfaits (sans frottement ; la viscosité est nulle), et nous supposons que l'écoulement incompressible et permanent. On s'intéresse aux équations fondamentales : équation d'Euler et équation de Bernoulli et nous donnons quelques exemples d'applications de l'équation de Bernoulli.

4.2 Équations fondamentals pour un fluide parfait

Le principe fondamental de la dynamique exprime que la variation dans le temps de la quantité de mouvement d'un système matériel à nombre constante de particules est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées. La dérivée particulaire de la quantité de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures appliquées au domaine fluides.

Considérons un volume fluide V regroupant un ensemble donné de particules fluides d'un écoulement quelconque. Au cours du mouvement, ce volume de particules fluides va changer de position, de forme et de dimension mais la masse ne change pas.

- La variation dans le temps de la résultante des quantités de mouvement de particules fluides du volume V et de vitesse \vec{v} est :

$$\frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho \cdot \vec{v} \cdot dV \right) = \iiint_V \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dV \quad (4.1)$$

- Le bilan des forces qui s'appliquent sur cet élément de volume :

force de volume : $\iiint_V \rho \vec{g} dV$

force de surface : $\iint_S -p \vec{n} dS = - \iiint_V \vec{\nabla} p dV$

- Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\iiint_V \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dV = \iiint_V \rho \vec{g} dV - \iiint_V \vec{\nabla} p dV \quad (4.2)$$

On peut écrire :

$$\iiint_V \left(\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{g} + \vec{\nabla} p \right) dV = 0 \quad (4.3)$$

On obtient que :

$$\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot p \quad (4.4)$$

Cette équation est **l'équation d'Euler** pour un fluide parfait.

Et comme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{grad} \right) \vec{v} \quad (4.5)$$

Donc l'équation d'Euler pour un fluide parfait devient :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v} = \rho \cdot \vec{g} - \vec{grad} \cdot p \quad (4.6)$$

Exemple : Cas d'un écoulement unidirectionnel d'un fluide parfait incompressible.

Lorsque l'écoulement est rectiligne, on parle d'écoulement unidirectionnel ; la vitesse parallèle à une direction unique fixe. Par exemple, le cas d'un écoulement dans une canalisation cylindrique.

L'équation d'Euler s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right) &= -\vec{grad} \cdot p + \rho \cdot \vec{g} \\ &= -\vec{grad} \cdot p - \rho \cdot g \cdot \vec{grad} \cdot z \\ &= -\vec{grad} (p + \rho \cdot g \cdot z) \end{aligned}$$

Où z est l'altitude (comptée positivement suivant la verticale ascendante) et l'écoulement suivant l'axe x ; $\vec{v} = v \cdot \vec{i}$.

L'écoulement est permanent ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), on peut écrire :

$$\begin{aligned} v \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) &= -\frac{\partial}{\partial x} (p + \rho \cdot g \cdot z) \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial y} (p + \rho \cdot g \cdot z) \\ 0 &= -\frac{\partial}{\partial z} (p + \rho \cdot g \cdot z) \end{aligned}$$

Et d'après l'équation de continuité $div \cdot \vec{v} = 0$, on trouve que :

$$\vec{grad} (p + \rho \cdot g \cdot z) = 0$$

Donc, dans tout l'écoulement unidirectionnel $p + \rho \cdot g \cdot z = C^{ste}$.

4.3 Débit massique

Le débit massique à travers une section de surface S est la quantité de fluide qui traverse la section S par unité de temps noté par q_m ou \dot{m} donné par :

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{dm}{dt} = \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \\ &= \rho \cdot v \cdot S \end{aligned} \quad (4.7)$$

où : v la vitesse moyenne du fluide à travers la conduite. L'unité du débit massique q_m est ($Kg \cdot s^{-1}$).

4.4 Débit volumique

Le débit volumique est le volume de fluide par unité de temps qui traverse une section S quelconque de la conduite par une vitesse moyenne v , noté par q_V ou \dot{V} , donné par :

$$\begin{aligned} q_V &= \frac{dV}{dt} = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \\ &= S \cdot v \end{aligned} \quad (4.8)$$

L'unité de q_V est ($m^3 \cdot s^{-1}$).

D'après l'équation 4.7 et 4.8, on peut déduire la relation entre le débit volumique et le débit massique :

$$q_m = \rho \cdot q_V \quad (4.9)$$

On note que :

- Les débits sont généralement comptés positivement dans le sens de l'écoulement.
- La résultante de débit massique et volumique à travers de surface S est nulle, c'est la continuité de débit.

4.5 Équation de Bernoulli et ses applications

La relation de Bernoulli permet de calculer la pression et la vitesse sur une ligne de courant dans la configuration d'un fluide parfait. Elle peut être considérée comme un principe de conservation de l'énergie adapté aux fluide en mouvement. L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C^{ste} \quad (4.10)$$

Démonstration :

Soit un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible et la force de gravité peut s'écrire : $-\rho \cdot \vec{grad} \cdot (gz)$. L'équation d'Euler s'écrit :

$$\begin{aligned} \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \vec{g} - \vec{\nabla} \cdot p \\ &= -\rho \cdot \vec{grad} \cdot (gz) - \vec{grad} \cdot p \end{aligned} \quad (4.11)$$

Après division par ρ et multiplication scalairement l'accélération par \vec{v} , sachant que : $\vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right)$, on trouve :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -\vec{v} \cdot \vec{grad}.g.z - \vec{v} \cdot \vec{grad} \cdot \frac{p}{\rho} \quad (4.12)$$

Et on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \vec{v} \cdot \vec{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

On a l'écoulement est stationnaire $\frac{\partial}{\partial t} = 0$.

On remplace l'équation 4.13 dans 4.12. Finalement, on obtient :

$$\vec{v} \cdot \vec{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g.z \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g.z \right) = 0 \quad (4.14)$$

On conclut que, la quantité entre parenthèse est constante sur chaque ligne de courant.

4.5.1 Interprétation physique de l'équation de Bernoulli

• Dans l'équation de Bernoulli, on a différentes formes d'énergie représentées par les différents termes :

◇ $\frac{1}{2} \rho \cdot v^2 = \frac{1}{V} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \right)$: énergie cinétique par unité de volume du fluide.

◇ $\rho \cdot g \cdot z = \frac{1}{V} (m \cdot g \cdot z)$: énergie potentielle de l'unité de volume de fluide, due aux forces de pesanteur.

◇ p : pression statique, représente l'énergie potentielle due aux forces de pression.

◇ $C^{ste} = \frac{E_m}{V}$: énergie mécanique totale par unité de volume de fluide.

Alors, l'équation de Bernoulli exprime que l'énergie mécanique totale est conservée le long d'une ligne de courant.

• Dans le cas des liquides, on exprime les différents termes de l'équation de Bernoulli en hauteurs de liquide. on divise tous les termes par $\rho \cdot g$:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z = C^{ste}$$

◇ z : est l'altitude.

◇ $\frac{p}{\rho \cdot g} + z$: est la hauteur piézométrique (charge piézométrique).

◇ $\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho \cdot g} + z$: charge totale.

Donc, pendant un écoulement de fluide parfait, il n'y a pas de perte de charge (voir figure 4.1).

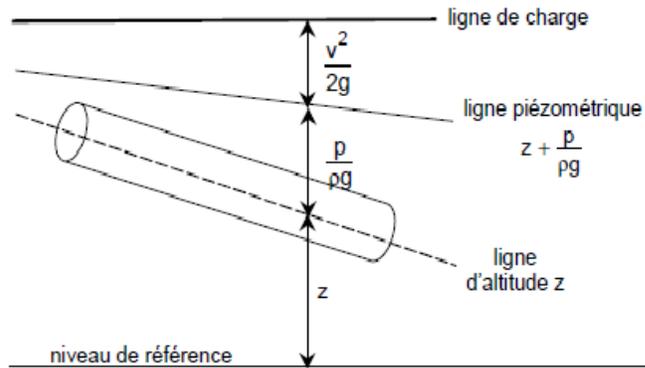


FIGURE 4.1: Lignes de charges pour l'écoulement en charge de fluide parfait.

4.5.2 Cas d'un écoulement avec échange de travail

Ce cas se rencontre lorsque, entre les positions 1 et 2 du fluide, il y a une machine ; réceptrice ou motrice, par exemple, le fluide traverse une pompe ou une turbine, il échange le travail mécanique (W_{12}) avec cette machine.

D'après l'équation 4.10, on écrit :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = W_{12} \quad (4.15)$$

• Si :

◇ $W_{12} > 0$: le travail est reçu par le fluide ; pompe.

◇ $W_{12} < 0$: le travail est fourni par le fluide ; turbine.

• Puissance nette : $P_n = \frac{dW_{12}}{dt} = W_{12} \cdot q_m$, avec q_m : débit massique. L'unité de la puissance nette est en Watts.

• Rendement : $\eta = \frac{P_n}{P_a}$ dans le cas d'une pompe et $\eta = \frac{P_u}{P_n}$ dans le cas d'une turbine.

◇ P_n : puissance nette.

- ◇ P_a : puissance absorbée par la machine (pompe).
- ◇ P_u : puissance utile sur la machine (turbine).

4.5.3 Applications

La relation de Bernoulli est à la base d'un grand nombre d'effets dans lesquels une variation de vitesse dans un écoulement. Les exemples qui suivent présentent quelques applications des effets. Nous considérons des écoulements permanents de fluides incompressible.

1- Formule de Toricelli

Il permet de calculer la vitesse v_B de vidange d'un réservoir à surface libre par un orifice de section très petite devant celle de réservoir.

Appliquons le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre un point A de surface libre et un point B du jet (voir figure 4.2).

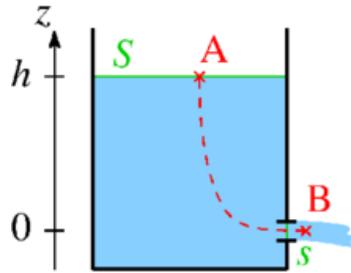


FIGURE 4.2: Schéma de vidange d'un réservoir à surface libre.

$$p_A + \rho \cdot g \cdot z_A + \frac{1}{2} (\rho \cdot v_A^2) = p_B + \rho \cdot g \cdot z_B + \frac{1}{2} (\rho \cdot v_B^2) \quad (4.16)$$

Et on a : $p_A = p_B = p_{atm}$ et $z_A - z_B = h$, on écrit :

$$\begin{aligned} \rho \cdot g \cdot (z_A - z_B) &= \rho \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2) \\ g \cdot h &= \frac{1}{2} (v_B^2 - v_A^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

le réservoir est grand, le rapport de section est suffisamment élevé, la vitesse de descente de la surface libre peut être considérée comme négligeable devant celle du fluide

s'écoulant dans le jet : $v_A \ll v_B$. L'équation 4.17 s'écrit :

$$g.h = \frac{v_B^2}{2} \quad (4.18)$$

D'où la formule de **Toricelli** :

$$v_B = \sqrt{2.g.h} \quad (4.19)$$

4.6 Étude des débitmètres

4.6.1 Tube de Pitot

Le tube de Pitot est un double tube très fine que l'on place parallèlement aux lignes de courant d'un fluide en écoulement stationnaire incompressible. Ce dispositif est constitué de deux tubes concentriques : le tube intérieur est percé d'une ouverture A à son extrémité, placée face à l'écoulement, et l'autre tube est percé d'une série de petits orifices B répartis sur une couronne. Un manomètre différentiel relié à chacun des deux tubes permet de mesurer la différence de pression Δp entre les points A et B, ce tube permet de mesurer la vitesse v du fluide à partir de la Δp (voir figure 4.3).

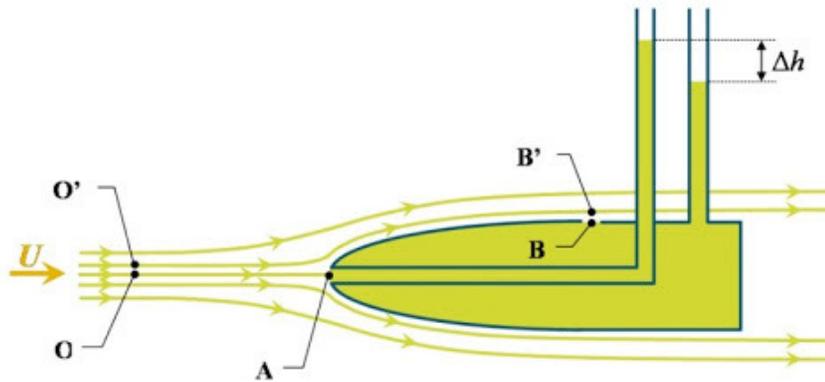


FIGURE 4.3: Schéma du tube de Pitot.

Appliquons l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant OA , le point A est le point d'arrêt où la vitesse est nulle.

$$p_O + \frac{1}{2}\rho v_O^2 = p_A \quad (4.20)$$

On a l'écoulement en O et \dot{O} est uniforme et les lignes de courant sont rectilignes et parallèle : $p_O = p_{\dot{O}}$. De même raison on a : $p_B = p_{\dot{B}}$.

Appliquons l'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant $\dot{O}\dot{B}$.

$$p_{\dot{O}} + \frac{1}{2}\rho v_{\dot{O}}^2 = p_{\dot{B}} + \frac{1}{2}\rho v_{\dot{B}}^2 \quad (4.21)$$

On peut alors faire l'hypothèse que l'écoulement est redevenu uniforme loin après le font de l'objet : $v_{\dot{B}} = v_{\dot{O}} = v_O = v$, et d'après l'équation 4.21, on trouve : $p_{\dot{O}} = p_{\dot{B}}$.

On écrit : $p_O = p_{\dot{O}} = p_{\dot{B}} = p_B$. Et l'équation 4.20 devient :

$$p_B + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_A \quad (4.22)$$

La vitesse de l'écoulement s'écrit :

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_A - p_B)} \quad (4.23)$$

4.6.2 Tube de Venturi

Le dispositif de Venturi permet de mesurer la vitesse de l'écoulement et de déterminer le débit du fluide par la mesure de la chute de pression en conduite. Il consiste à faire passer un écoulement par une contraction de façon à faire diminuer la pression (voir figure 4.4).

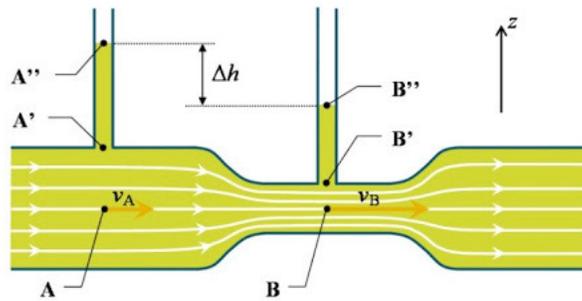


FIGURE 4.4: Schéma du tube de Venturi.

L'équation de Bernoulli le long de la ligne de courant passant par le point A et B,

s'écrit :

$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \quad (4.24)$$

Par ailleurs, l'équation de continuité s'écrit :

$$S_A \cdot v_A = S_B \cdot v_B \Rightarrow v_B = \frac{S_A}{S_B} \cdot v_A \quad (4.25)$$

Supposant : $\sigma = \frac{S_A}{S_B}$ et $\Delta p = p_A - p_B$, et d'après l'équation 4.24 et 4.25, on trouve :

$$v_A = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho \cdot (\sigma^2 - 1)}} \quad (4.26)$$

On déduit le débit massique :

$$q_m = \rho \cdot S_A \cdot \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho \cdot (\sigma^2 - 1)}} = \pi \frac{D^2}{4} \sqrt{\frac{2\rho\Delta P}{\left(\frac{D^2}{d^2}\right) - 1}} \quad (4.27)$$

où D est le diamètre de la conduite et d celui du rétrécissement.

Chapitre 5

Dynamique des fluides visqueux

Contents

5.1	Introduction	45
5.2	Équation du mouvement	46
5.3	Équation de Navier-Stokes	47
5.4	Écoulements et nombre de Reynolds	48
5.5	Pertes de charges	48
5.5.1	Pertes de charges singulières	48
5.5.2	Pertes de charges linéaire	49
5.6	Théorème de Bernoulli : cas général	49
5.7	Résolution de quelques problèmes classiques instationnaires	50
5.7.1	Écoulement instationnaire sur plan en translation : problème de Stokes	50
5.7.2	Écoulement instationnaire dans un tube	51

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, les fluides sont considérés comme réels, en incluant l'effet des forces de frottement c'est-à-dire, nous introduisons la contribution de la viscosité. L'existence des forces de viscosité peut être démontré à partir de l'expérience de Couette¹ :

On considère un fluide visqueux placé entre deux plaques $P1$ et $P2$ tel que la plaque $P1$ est fixe et la plaque $P2$ est animée d'une vitesse v , placée à la distance L de la première.

1. Maurice Couette (1858-1943) : est un physicien français dont les travaux portèrent principalement sur la mécanique des fluides et particulièrement sur la rhéologie.

Les particules fluides en contact avec la plaque P_2 se déplacent à vitesse v et celles qui se trouvent contre la plaque P_1 restent immobile (voir figure 5.1). Les particules

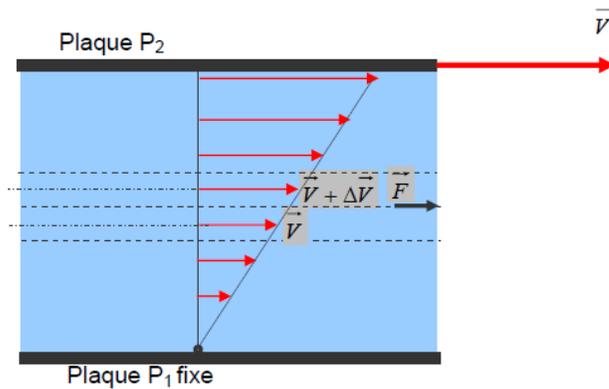


FIGURE 5.1: Écoulement d'un fluide visqueux placé entre deux plaques, P1 est fixe et P2 est mobile.

fluides se déforment et le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche de fluide est une fonction de L . Si F est la force nécessaire pour déplacer P_2 à vitesse v et S la surface de contact entre deux couches, pour un fluide newtonien la relation entre $\frac{F}{S}$ et $\frac{v}{L}$ est linéaire et on écrit :

$$\frac{F}{S} = \mu \frac{v}{L} \quad (5.1)$$

Où : μ est la viscosité dynamique.

5.2 Équation du mouvement

Au cours du mouvement, la particule fluides va changer sa position, sa forme et sa dimension mais la masse se conserve au cours du temps. Le principe de conservation de la masse est traduit l'équation de continuité : la variation de masse pendant un temps dt d'un élément de volume de fluide dV doit être égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle du fluide sortant.

- La masse d'un volume de fluide contenue dans le volume V s'écrit : $m = \iiint_V \rho dV$.
- Les masses entrantes pendant dt avec une vitesse \vec{v} à travers la surface S limitant le volume V : $m_e = - \iint_S \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt$.

La variation de masse du volume V par unité de temps ($\frac{dm}{dt}$) est égale aux masses entrantes dans V par unité de temps ($\frac{dm_e}{dt}$), soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV &= \frac{d}{dt} \left(- \iint_S \rho \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dS \cdot dt \right) \\ &= - \iiint_V \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) \cdot dV \end{aligned} \quad (5.2)$$

Donc :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) \right] dV = 0 \quad (5.3)$$

Et comme le volume de contrôle V est fixe, donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \quad (5.4)$$

C'est l'équation de continuité. Cette équation est valable en tout point du fluide. Si :

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} > 0$ le fluide est en phase de compression.
- $\frac{\partial \rho}{\partial t} < 0$ le fluide est en phase de dilatation.
- $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ le fluide est en volume constant (isovolume).
- Écoulement permanent $\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, l'équation de continuité se réduit à : $\operatorname{div}(\rho \cdot \vec{v}) = 0$.
- Fluide incompressible $\Rightarrow \rho = C^{ste}$, l'équation de continuité se réduit à : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

5.3 Équation de Navier-Stocks

Si le fluide est newtonien, son écoulement incompressible et sa viscosité constante, la force de viscosité s'écrit : $\mu \Delta v$. L'équation de continuité rest valable. L'équation d'Euler devient **l'équation de Navier-Stocks** :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{grad}) \vec{v} \right) = \rho \cdot \vec{g} - \vec{grad} \cdot p + \mu \Delta \vec{v} \quad (5.5)$$

ou encore :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\frac{1}{2} \vec{grad} \cdot v^2 + \operatorname{rot} \cdot \vec{v} \wedge \vec{v} \right) = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \vec{grad} \cdot p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \vec{v} \quad (5.6)$$

Et :

$$\mu \cdot \Delta \vec{v} = \mu \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right)$$

5.4 Écoulements et nombre de Reynolds

• **Écoulement Laminaire** : Il se produit dans le cas de fluide suffisamment visqueux, avec une vitesse moyenne faible et dans une conduite de faible dimension. Le mouvement des particules fluides se fait de façon régulière et ordonnée ; les trajectoires des particules fluides restent parallèle à la paroi.

• **Écoulement Turbulent** : Le mouvement des particules fluides se fait de façon irrégulier. Les trajectoires de la particules fluides s'enchevêtrent, s'enroulent sur eux mêmes.

• **Nombre de Reynolds** : Le nombre de Reynolds R_e est un nombre sans dimension qui permet de faire la différence entre écoulement laminaire et turbulent :

$$R_e = \frac{v.d}{\nu} \quad (5.7)$$

Avec :

v : vitesse moyenne du fluide en $m.s^{-1}$.

d : diamètre de la conduite en m .

ν : viscosité cinématique du fluide en $m^2.s^{-1}$.

Si :

$R_e < 2000$: l'écoulement est laminaire.

$2000 < R_e < 10^5$: l'écoulement turbulent lisse.

$R_e > 10^5$: l'écoulement turbulent rugueux.

5.5 Pertes de charges

5.5.1 Pertes de charges singulières

Quand la conduite subit de brusque variation de section ou de direction, il se produit des pertes de charges dites singulières, elles sont généralement mesurable et font partie des caractéristiques de l'installation. Par exemple, la présence des coudes, raccords, robinets, etc..., tous ces éléments installés le long des canalistaions constituent des obstacles qui freinent le passage du fluide et amènent des pertes de charges. On exprime

par :

$$J_s = -K_s \cdot \frac{v^2}{2} \quad (5.8)$$

où :

$s = 1, 2, 3, \dots$ indice de l'accident de formes de la conduite.

K_s Coefficient sans unité de pertes de charge. Ces valeurs données par les constructeurs.

5.5.2 Pertes de charges linéaire

C'est la perte d'énergie de fluide qui se déplace dans une conduite rectiligne de section constante. Ils résultent du frottement exercé entre le fluide et la surface intérieure de la conduite, s'exprime par :

$$J_L = -\lambda \frac{v^2}{2} \left(\frac{L}{d} \right) \quad (5.9)$$

Où :

v : vitesse moyenne de l'écoulement $\frac{m}{s}$.

L : longueur de la conduite (m).

d : diamètre de la conduite (m).

λ : coefficient de perte de charge linéaire, dépend du régime de l'écoulement :

- **Dans un régime laminaire** : $\lambda = \frac{64}{Re}$; formule de Poiseuille.

- **Dans un régime turbulent lisse** : $\lambda = 0.316 \cdot Re^{-0.25}$; formule de Blasius.

- **Dans un régime turbulent rugueux** : $\lambda = 0.79 \sqrt{\frac{\varepsilon}{d}}$; formule de Blench. avec :

ε : rugosité de la surface interne de la conduite (mm).

d : diamètre de la conduite (mm).

Parfois, on lit la valeur de λ sur une abaque établie par Nikuradse ou Moody.

5.6 Théorème de Bernoulli : cas général

Dans le cas général avec échanges d'énergie et pertes de charge le théorème de Bernoulli prend la forme générale suivante :

$$\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + \frac{1}{\rho} (p_2 - p_1) + g (z_2 - z_1) = J_{12} + \frac{p_n}{q_m} \quad (5.10)$$

Avec :

J_{12} : somme de toutes les pertes de charge linéaires et singulières entre les sections (1) et (2); $J_{12} = J_S + J_L$.

P_n : puissance mécanique échangé entre le fluide et les machines éventuellement placées entre (1) et (2).

q_m : débit massique.

5.7 Résolution de quelques problèmes calassiques instationnaires

Les équations de Navier-Stokes sont complexes. Pour certaines configurations simples, il est possible de résoudre analytiquement ces équations. Dans ce paragraphe, nous allons étudier quelques problèmes classiques instationnaires.

5.7.1 Écoulement instationnaire sur plan en translation : problème de Stokes

Une plaque plane infinie limite un demi-espace occupé par un fluide initialement au repos. La plaque est mise en mouvement de translation uniforme avec la vitesse V . Le problème consiste à calculer les fonctions du mouvement qui est induit, par viscosité, dans toute le fluide en conséquence de ce déplacement. On supposera le champ de pression uniforme. L'équation du mouvement se simplifie dans ce cas :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (5.11)$$

avec U qui varie en fonction de t , x et y .

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} U(x, y, t) = 0 & , t = 0 \\ U(x, 0, t) = V & , t > 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

L'équation 5.11 est identique à l'équation de la chaleur. On cherche des solutions similaires.

Soient les transformations suivantes :

$$\begin{cases} U = V f(\eta) \\ \eta = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \end{cases} \quad (5.13)$$

On dérive :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = -V f' \frac{y}{4\nu^{\frac{1}{2}} t^{\frac{3}{2}}} = -V f' \frac{\eta}{2t} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = V f' \frac{1}{2\sqrt{\nu t}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = V f'' \frac{1}{4\eta t} \end{cases} \quad (5.14)$$

L'équation 5.11 devient :

$$\frac{V}{4t}(f'' + 2\eta f') = 0 \quad (5.15)$$

La fonction $f(\eta)$ est alors solution de l'équation différentielle :

$$f'' + 2\eta f' = 0 \quad (5.16)$$

avec les deux conditions aux limites : $f(0) = 1$ et $f(\infty) = 0$. On obtient première intégration :

$$f'(\eta) = C \exp(-\eta^2) \quad (5.17)$$

Une deuxième intégration donne :

$$f(\eta) = C \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta + B \quad (5.18)$$

avec :

$$\begin{cases} f(0) = 1 = B \\ f(\infty) = 0 = C \int_0^\infty \exp(-\eta^2) d\eta + B \end{cases} \quad (5.19)$$

La valeur de la constante $C = \frac{-2}{\sqrt{\pi}}$, et la fonction $f(\eta)$ prend la forme :

$$f(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta = 1 - \text{erf}(\eta) \quad (5.20)$$

erf étant la fonction erreur, et l'expression du champ de vitesse sous la forme :

$$U = V \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta \right) \quad (5.21)$$

5.7.2 Écoulement instationnaire dans un tube

Soit un écoulement instationnaire d'un fluide initialement au repos dans un tube de longueur L et de rayon R . On impose le gradient de pression constant :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -G \quad (5.22)$$

On pose $V = u.e_x + v.e_r + w.e_\theta$. L'écoulement est laminaire ($v = w = 0$) et axi-symétrique ($\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$). La composante axiale de l'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-G}{p} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (5.23)$$

La solution instationnaire s'écrit :

$$u(r, t) = u_\infty - v(r, t) \quad (5.24)$$

Où u_∞ est la solution stationnaire lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$u_\infty = \frac{G}{4\mu} (R^2 - r^2) \quad (5.25)$$

En tenant compte de l'incompressibilité :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.26)$$

Le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right) \right) \\ v(R, t) = 0 \\ v(R, 0) = u_\infty \end{cases} \quad (5.27)$$

La solution générale s'écrit :

$$u(r, t) = \frac{G}{4\mu} (R^2 - r^2) - \frac{2GR^2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\lambda_n r}{R}\right)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)} \exp\left(\frac{-\lambda_n^2 \nu t}{R^2}\right) \quad (5.28)$$

Où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro et λ_n est la racine de $J_0(\lambda) = 0$

Chapitre 6

Introduction à la dynamique des gaz

Contents

6.1	Introduction	53
6.2	Équation de Barré de Saint-Venant	54
6.3	Nombre de Mach	55
6.4	Ondes de Mach	56
6.5	État générateur	56
6.6	Écoulement dans un convergent-divergent	58
6.7	Écoulement supersonique	60
6.7.1	Ondes de choc normales	60
6.7.2	Ondes de choc obliques	61

6.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux écoulement où la compressibilité du fluide est à l'origine d'effets majeurs, le cas des gaz. La masse volumique d'un gaz varie avec sa pression. La gazodynamique est la branche de la dynamique qui étudie l'écoulement compressible des fluides gazeux. Toute fois la théorie des écoulements compressible est assez compliquée, c'est la raison de supposer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (gaz parfait, type d'évolution : adiabatique, isotherme,.....).

6.2 Équation de Barré de Saint-Venant

L'équation de bilan énergétique d'un gaz s'écoulant à travers un volume de contrôle entre deux points 1 et 2 est :

$$h_1 + gz_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + Q_1 + W_1 = h_2 + gz_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + Q_2 + W_2 \quad (6.1)$$

Si on suppose un écoulement :

- sans échange de travail : $W = 0$.
- sans échange de chaleur : $Q = 0$.
- l'énergie potentielle est négligeable : $gz \leq 0$.

L'équation de bilan énergétique devient :

$$h_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}v_2^2 \quad (6.2)$$

avec : $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

Donc, on peut écrire :

$$h + \frac{1}{2}v^2 = C^{ste} \quad (6.3)$$

Si, la transformation isobare : à pression constante.

$$\Delta h = c_p \Delta T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Delta \left(\frac{p}{\rho} \right) \quad (6.4)$$

Donc, l'équation 6.3 devient :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = C^{ste} \quad (6.5)$$

Entre deux point d'un écoulement, on obtient l'équation de barré Saint-Venant :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = C^{ste} \quad (6.6)$$

Et pour un écoulement isentropique : $\frac{p}{\rho^\gamma} = C^{ste}$, cette relation s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = 0 \quad (6.7)$$

6.3 Nombre de Mach

La variation de la pression d'un fluide compressible assure dans tous les cas, la propagation d'onde infinitésimale de pression avec une célérité a définie par :

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s} = \frac{1}{\rho \cdot \chi_s} \quad (6.8)$$

Où χ_s est le coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = -\frac{1}{\delta p} \left(\frac{\delta V}{V}\right)_s = \frac{1}{\delta p} \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_s \quad (6.9)$$

La relation 6.8 montre que plus le fluide est compressible, moins la célérité de propagation d'ondes de pression est élevée. probablement cette célérité correspond à la vitesse de propagation des ondes sonores, en abrégé célérité du son. Pour un gaz parfait s'exprime par :

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T} \quad (6.10)$$

Cette expression montre que la célérité du son pour un gaz parfait dépend des conditions locales de température et de pression.

- r : constante spécifique du gaz, $r = \frac{R}{M_g}$, M_g : masse molaire du gaz et R constante de gaz parfait.
- $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$: coefficient isentropique (polytropique).

Le nombre de Mach est le paramètre dominant dans l'étude de l'écoulement compressible. Ce paramètre est le rapport entre la vitesse de l'écoulement et la célérité du son sous les mêmes conditions :

$$M = \frac{v}{a} \quad (6.11)$$

Le nombre de Mach permet de distinguer les régions de l'écoulements :

- écoulement subsonique, $M < 1$.
- écoulement sonique, $M = 1$.
- écoulement supersonique, $M > 1$.

6.4 Ondes de Mach

Lorsque la source est mobile dans un espace à trois dimensions, trois cas sont à distinguer selon sa vitesse est en module soit inférieure, supérieure ou égale à la célérité du son.

- Cas $M < 1$: les fronts d'onde se propagent à la vitesse $(a - v)$ en amont, mais $(a + v)$ en aval de l'écoulement. par conséquent, l'intervalle entre les fronts d'ondes est plus dense en amont qu'en aval (voir figure 6.1-(b)).
- Cas $M = 1$: la vitesse de propagation $(v - a)$ est nulle, et le son se propage seulement en aval de l'écoulement, en produisant une onde appelée *onde de Mach* normale à la direction de l'écoulement. Si un observateur est situé en amont de l'écoulement, il ne peut pas entendre le mouvement s'approchant (voir figure 6.1-(c)).
- Cas $M > 1$: la configuration devient alors du type illustrée au figure 6.1-(d). L'enveloppe des ondes forme le *cône de Mach* et le son est confiné dans le cône. Le demi angle (β) au sommet dit *angle de Mach* :

$$\sin \beta = \frac{a}{v} = \frac{1}{M} \quad (6.12)$$

6.5 État générateur

Par définition c'est l'état d'un fluide où les conditions dans cette état seront appelés les conditions initiales, la vitesse est nulle. Soit un écoulement isentropique d'un gaz parfait, les conditions initiales relative à cette état sont : $p_0, \rho_0, T_0, v = v_0 = 0$. En appliquant la relation de Barré de Saint-Venant entre ce point et un autre point on a :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \quad (6.13)$$

D'après la relation 6.10, on peut écrire :

$$\frac{1}{\gamma - 1} a_0^2 = \frac{1}{\gamma - 1} a^2 + \frac{1}{2} v^2 \quad (6.14)$$

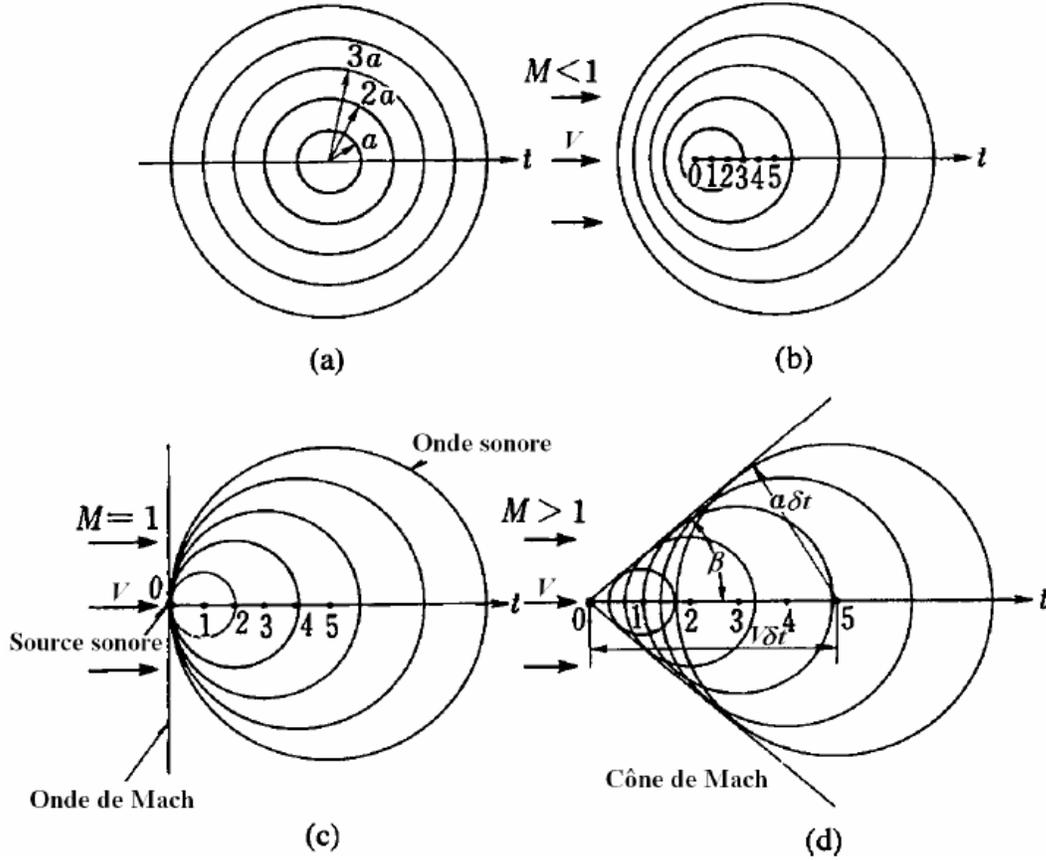


FIGURE 6.1: Propagations des ondes sonores et nombre de Mach : (a) repos, (b) subsonique, (c) sonique et (d) supersonique.

En introduisant le nombre de Mach, on obtient :

$$\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (6.15)$$

Donc la relation de Barré de Saint-Venant devient :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (6.16)$$

Et pour un processus isentropique $\Delta s = 0$, on a :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\gamma-1} = C^{ste} \quad (6.17)$$

Donc, on peut écrire :

$$\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \quad (6.18)$$

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement :

- en (1) :

$$\frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2$$

- en (2) :

$$\frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2$$

Donc :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2} \quad (6.19)$$

- Si $M = 1$, l'état de l'écoulement est appelé état critique :

$$\frac{T_0}{T_c} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} = \frac{1 + \gamma}{\gamma} \quad (6.20)$$

6.6 Écoulement dans un convergent-divergent

On considère un écoulement dans une tuyère convergente-divergente (tuyère de Laval), schématisé à la figure 6.2, (a). Ce dispositif a pour objectif d'augmenter la vitesse des gaz qui la traverse.

- Pour les cas A et B (voir figure 6.2, (b)), l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère et la pression de sortie est $p_e = p_b$. Le jet est subsonique.

- Pour le cas C, le col devient sonique et l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique. Le rapport des sections $\frac{A_e}{A_{col}}$ est égale $\frac{A_e}{A^*}$ pour un nombre de Mach subsonique à la sortie, A^* est la section critique.

- Pour le cas H, l'écoulement dans le divergent est entièrement supersonique et $p_c = p_b$. Le rapport $\frac{p_b}{p_c}$ correspond exactement au rapport $\frac{A_e}{A^*}$.

- Pour un cas se trouve entre les cas C et H, le col reste suffoqué à la valeur sonique. La valeur du débit massique est maximale. L'onde de choc normale apparaît à la sortie de la tuyère au pression du cas F en aval. Dans le cas G, l'écoulement présente des séries complexes d'onde de choc obliques jusqu'il atteint la pression p_b .

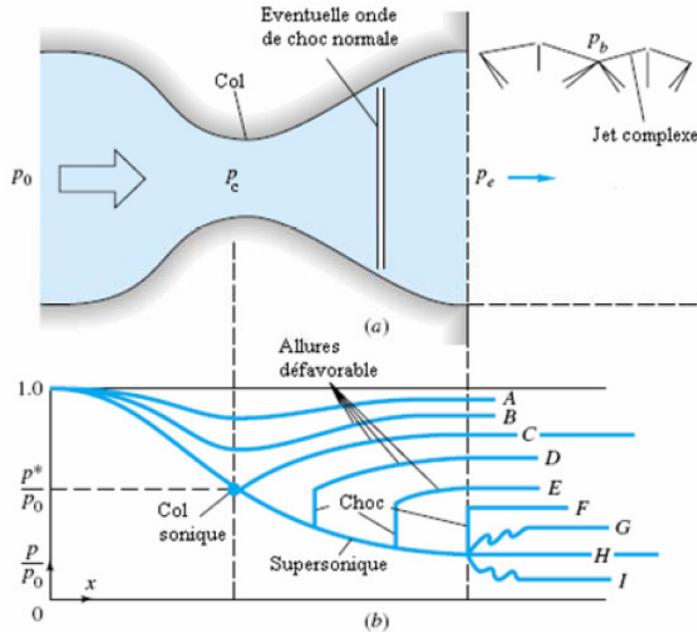


FIGURE 6.2: Tuyère convergente-divergente : (a) Schéma de la géométrie de la tuyère ; (b) variation de la pression statique dans la tuyère.

- Pour le cas I, p_b est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est soffoquée. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.

Rapport de la section de sortie à celle du col :

En utilisant les relation de lécoulement isentropique du gaz parfait et l'équation de continuité. Le débit massique est conervé sous les conditions soniques :

$$\rho V A_s = \rho^* V^* A^* \quad (6.21)$$

Et d'après les relations isentropiques, on peut conclu que :

$$\frac{A_s}{A^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_s^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}} \quad (6.22)$$

Questions :

1- calculer le rapport $\frac{\rho}{\rho^*}$.

2- calculer le rapport $\frac{V}{V^*}$.

6.7 Écoulement supersonique

6.7.1 Ondes de choc normales

Les ondes de choc sont associées d'une augmentation de pression pour l'écoulements supersoniques. La vitesse de propagation du choc est plus élevée que celle du son et la pression aussi. Les états amont et aval de l'onde de choc sont désigné par 1 et 2, respectivement. Le nombre de Mach à l'aval du choc est lié à celui de l'écoulement amont par :

$$M_2^2 = \frac{(\gamma - 1)M_1^2 + 2}{2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma} \quad (6.23)$$

Le rapport de pression où bien le saut de pression est donné par :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \quad (6.24)$$

Le saut de masse volumique est :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(1 + \gamma)M_1^2}{(\gamma - 1)M_1^2 + 2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (6.25)$$

Le saut de température est :

$$\frac{T_2}{T_1} = (2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma) \frac{[(\gamma - 1)M_1^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2} \quad (6.26)$$

Et l'équation de *Prandtl* permet de calculer la vitesse en aval de l'onde de choc normale, en connaissant les conditions en amont du choc s'écrit :

$$v_1 v_2 = a_c^2 = \frac{2\gamma RT_1}{\gamma + 1} \quad (6.27)$$

où :

a_c : est la vitesse du son critique, dont le nombre de Mach égal à l'unité.

La variation de l'entropie à travers le choc peut être calculée par la relation suivante :

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_V \ln \left[\frac{p_2}{p_1} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^\gamma \right] \quad (6.28)$$

En substituant dans cette relation les expressions 6.24 et 6.25, la variation de l'entropie en fonction de nombre de Mach s'exprime :

$$\Delta s = c_V \ln \left[\frac{(2\gamma M_1^2 + 1 - \gamma)}{\gamma + 1} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{(\gamma + 1)M_1^2} \right)^\gamma \right] \quad (6.29)$$

6.7.2 Ondes de choc obliques

Les ondes de choc peuvent se former à un angle oblique σ par rapport au courant supersonique, par exemple, lorsque l'on dispose un obstacle fixe dans un écoulement de gaz en régime supersonique à l'infini. Ce type d'ondes dévie le courant d'un angle δ dit angle de déflexion. Donc, un choc oblique est causé par un écoulement tourne selon un certain angle. Soit l'état 1 dénote l'état en amont et l'état 2 celles en aval. L'angle de choc est σ , et l'écoulement en aval de vitesse v_2 change de direction d'un angle δ qui est fonction de σ et les conditions de l'état 1 (voir figure 6.3).

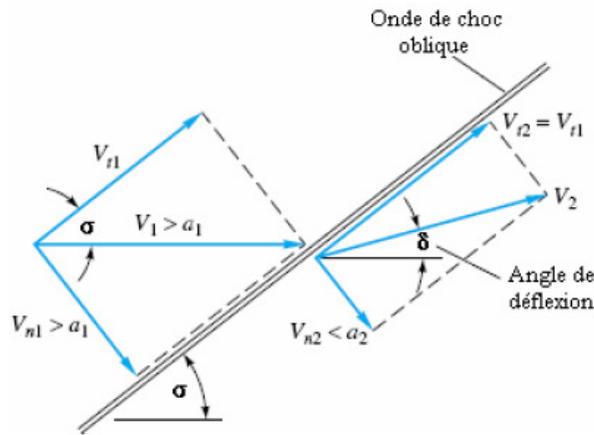


FIGURE 6.3: Schéma de l'écoulement de choc oblique

La vitesse en amont a deux composantes tangentielle et normale :

$$\vec{v}_1 = v_{t1}\vec{u}_t + v_{n1}\vec{u}_n \quad (6.30)$$

De même la vitesse en aval :

$$\vec{v}_2 = v_{t2}\vec{u}_t + v_{n2}\vec{u}_n \quad (6.31)$$

ou :

\vec{u}_t : vecteur unitaire de composante tangentielle.

\vec{u}_n : vecteur unitaire de composante normale.

Et comme, qu'il n'a pas une variation de la vitesse tangentielle à travers un choc

oblique : $v_{t1} = v_{t2} = v_t = C^{ste}$, ce qui fait que l'énergie cinétique $\frac{1}{2}v_t^2$ est constante.

Les nombres de Mach normaux s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{n1} = \frac{v_{n1}}{a_1} = \frac{v_1}{a_1} \sin \sigma = M_1 \sin \sigma. \\ M_{n2} = \frac{v_{n2}}{a_2} = \frac{v_2}{a_2} \sin(\sigma - \delta) = M_2 \sin(\sigma - \delta) \end{cases} \quad (6.32)$$

Pour un gaz parfait, les équations 6.23, 6.24, 6.25, 6.26 s'écrivent :

$$M_{n2}^2 = \frac{(\gamma - 1)M_{n1}^2 + 2}{2\gamma M_{n1}^2 + 1 - \gamma} \quad (6.33)$$

Le saut de pression est :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \sigma - 1) = \frac{1 + \gamma M_{n1}^2}{1 + \gamma M_{n2}^2} \quad (6.34)$$

Le saut de masse volumique est :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\tan \sigma}{\tan(\sigma - \delta)} = \frac{v_{n1}}{v_{n2}} = \frac{(1 + \gamma)M_1^2 \sin^2 \sigma}{(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2} \quad (6.35)$$

Le saut de température est :

$$\frac{T_2}{T_1} = (2\gamma M_1^2 \sin^2 \sigma + 1 - \gamma) \frac{[(\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \sigma + 2]}{(\gamma + 1)^2 M_1^2 \sin^2 \sigma} \quad (6.36)$$

Et l'équation de *Prandtl* pour un choc oblique devient :

$$v_{n1}v_{n2} = a_c^2 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}v_t^2 \quad (6.37)$$

Une autre forme utile de l'équation 6.37 est :

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = a_c^2 - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}v_t^2 \quad (6.38)$$

$-a_c$: est la vitesse du son critique.

Bibliographie

- [1] **Mécanique des fluides**, Élément d'un premier parcours, Patrick Chassaing, CÉPADUÈS-ÉDITION (2010).
- [2] **Hydrodynamique physique**. Étienne Guyon, Jean Pierre Hullin et Luce petit, EDP science (2001).
- [3] **Mécanique des fluides**. Skir Amiroudine. Jean Luc Battaglia, Dunod (2011).
- [4] **Notions de mécanique des fluides, cours et exercices corrigés**. Riadh Ben Hamouda. Centre de publication universitaire, (2008).
- [5] **Mécanique des fluides**, Chantal Meuris.
- [6] **Mécanique : fondamentaux et applications : avec 320 exercices et problèmes résolus**, José- Philippe Pérez, Dunod (2014).
- [7] **Mécanique appliquée**, P. Agati et N. Mattera, Dunod (1996).
- [8] **Guide de Mécanique**, Jean Louis Fanchon, Edition Nathan (1996).
- [9] **Mécanique des fluides**, Jean François SINI (2008).
- [10] **Introduction to Fluid Mechanics**, Robert W. Fox, Alan T. MacDonald and Philip J. Pritchard, SIXTH EDITION, John Wiley & sons, INC.
- [11] **Notes de cours de gazodynamique**, A. Boukhari (2008).
- [12] **Statique et dynamique des fluides**, Stéphane Chaussédent, Université d'Angers, http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_C_M02_G02/co/NLP_C_M02_C02_web.html