République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 – Guelma

Faculté de Mathématiques, de l'Informatique et des Sciences de la matière
Département des Sciences de la Matière

Polycopie de cours :

PHYSIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Cours et Exercices Résolus

Destiné aux étudiants
de la 1ère année LMD ST et SM

Réalisé par :

Dr Fares SERRADJ

Année Universitaire **: 2019/2020**

PHYSIQUE 1
MÉCANIQUE DU POINT MATÉRIEL

Cours et Exercices Résolus

Table des Matières

Chapitre 03 : Cinématique du point matériel

Chapitre 04 : Dynamique du point matériel

Chapitre 05 : Travail et Energie

Avant-propos

Le présent manuscrit sur la mécanique de point est destiné principalement aux étudiants de la première année du système LMD des licences en sciences et techniques (ST) et en sciences de la matière (SM), Ainsi qu'aux étudiants de la première année des filières techniques.

Ce document répond au programme officiel du module « Physique 1 » enseigné en première année LMD des filières citées précédemment.
Ce manuel regroupe l'ensemble des rappels de cours avec des exercices et des problèmes avec solutions.

Ce manuscrit contient cinq chapitres : Le premier porte sur les équations aux dimensions. Des rappels mathématiques et des notions sur les vecteurs et sur les différents systèmes des coordonnées sont présentés dans le deuxième chapitre. Le troisième chapitre traite de la cinématique du point matériel avec et sans changement de référentiel. La dynamique du point matériel est présentée au quatrième chapitre. Finalement, le cinquième chapitre est consacré au travail et à l'énergie.

A la fin de chaque chapitre, nous proposons des exercices avec leurs solutions détaillées.

Enfin, nous espérons que ce manuscrit sera bénéfique pour les étudiants de première année ST et SM.

Dr. Fares SERRADJ

DOMAINE SCIENCES ET TECHNOLOGIE	PROGRAMME "Physique1"	1ère ANNEE SOCLE COMMUN
	Volume horaire semestriel 67h30min Volume horaire hebdomadaire 4h30min (3h cours et 1h30 min TD) Semestre 1 (15 semaines)	Coef : 03 Crédits : 06

Programme	Nombre de Semaines
Rappels mathématiques : 1- Les équations aux dimensions 2- Calcul vectoriel	02
Chapitre I. Cinématique : 1- Vecteur-position dans les systèmes de coordonnées (cartésiennes, cylindrique, sphérique, curviligne) – loi de mouvement – Trajectoire 2- Vitesse et accélération dans les systèmes de coordonnées. 3- Applications : Mouvement du point matériel dans les différents systèmes de coordonnées. 4- Mouvement relatif.	05
Chapitre II. Dynamique : 1- Généralité : Masse - Force - Moment de force – Référentiel Absolu et Galiléen. 2- Les lois de Newton. 3- Principe de la conservation de la quantité de mouvement. 4- Equation différentielle du mouvement. 5- Moment cinétique. 6- Applications de la loi fondamentale pour des forces (constante, dépendant du temps, dépendant de la vitesse, force centrale, etc).	04
Chapitre III. Travail et énergie : 1- Travail d'une force. 2- Energie cinétique. 3- Energie potentiel – Exemples de l'énergie potentielle (pesanteur, gravitationnelle, élastique). 4- Forces conservatives et non conservatives - Théorème de l'énergie totale.	04

Syllabus

Physique 1 (Mécanique du Point Matériel)

Domaine de formation Sciences et Techniques (ST)

Objectifs :

La mécanique est une discipline des mathématiques. Mais, c'est aussi une approche de la physique qui mène vers la science de la matière, car c'est par excellence la science de base. De ce fait, elle appartient à tous. Sa richesse est d'être aussi bien théorique et formelle que physique et sensible. C'est dans cet esprit que nous cherchons dans ce recueil à éloigner la mécanique des rivages du formel, en nous appliquant à rendre, le plus tangible possible, des principes d'usage universel, qui ont nécessairement une expression abstraite, mais dont, précisément, l'aspect forme, s'il devient irréel, rebute des étudiants qui sont souvent mal à l'aise pour aller du général vers le particulier, mais sont habiles à la démarche inverse.

Objectif final du cours :

La mécanique que nous voulons enseigner est très modeste dans son contenu et la moins formelle possible, sans renoncer à l'abstraction nécessaire. Elle peut permettre une utilisation, dans un domaine quelconque des sciences physiques, de principes universels. Elle a été volontairement limitée à un aspect classique sans quantification ni relativité, parce que nous pensons que le contenu si riche qui serait apporté par ces visions des choses ne pourrait être valablement que par un étudiant qui n'aurait pas digéré d'abord les choses simples que nous avons intégré dans ce cours. Ainsi, nous incitons l'apprenant à manipuler les cas particuliers en résolvant les exercices proposés dans ce manuscrit.

Objectifs intermédiaires et programme :

1) Les équations aux dimensions, les vecteurs.
2) Rappels mathématiques et repérage des évènements.
3) Cinématique du point : Mouvement rectiligne, mouvement dans l'espace, étude des mouvements particuliers, étude des mouvements dans différents systèmes (cartésiennes, polaires, cylindriques et sphériques), mouvement relatif.
4) Dynamique du point : le principe d'inertie et les référentiels galiléens, principe de la conservation de la quantité de mouvement, définition Newtonienne de la force, lois de force.
5) Travail et énergie dans le cas d'un point matériel : énergie cinétique, énergie potentielle de gravitation et élastique, champs de forces.

01 Chapitre 01 Equations aux dimensions

1.1 Analyse Dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle est une méthode pratique permettant de vérifier l'homogénéité d'une formule physique à travers ses équations aux dimensions, c'est-à-dire la décomposition des grandeurs physiques qu'elle met en jeu en un produit de grandeurs de base : longueur, durée, masse, intensité électrique, etc., irréductibles les unes aux autres.

1.2 Unités de base :

Actuellement, le système des unités est composé de sept unités de base :

Unité de longueur : le mètre (*m*)	Unité d'intensité électrique : l'ampère (*A*)
Unité de masse : le kilogramme (*kg*)	Unité de température : le kelvin (*K*)
Unité du temps : la seconde (*s*)	Unité d'intensité lumineuse : la candela (*cd*)
Unité de quantité de la matière : la mole (*mol*)	

Tableau 1.1 : *Les unités de bases*

1.3 Equations aux dimensions

L'équation aux dimensions est celle qui ; relie la dimension d'une grandeur dérivée à aux sept grandeurs de base. Dans une équation aux dimensions, la dimension de la grandeur dérivée G est couramment notée [G].

1.4 Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur physique est définie par une expression de la forme :

$$[G] = L^{a}\, T^{b}\, M^{c}\, I^{d}\, N^{e}\, \Theta^{f}\, J^{g}$$

Où : *a, b, c, d, e, f, g* sont des entiers relatifs.

Le tableau 1.2 ci-dessus récapitulé les grandeurs physiques de base et leurs dimensions.

Grandeur physique	Dimension
Longueur	L
Temps	T
Masse	M
Température	Θ
Intensité électrique	I
Quantité de la matière	N
Intensité lumineuse	J

Tableau 1.2 : *Grandeurs de base et dimensions du SI*

On peut exprimer n'importe quelle unité en fonction des unités de base (*Tableau 1.3*).

Grandeur physique	**Dimension**	**Unité**
Longueur	L	m
Temps	T	s
Masse	M	kg
Température	Θ	K
Intensité électrique	I	A
Quantité de la matière	N	Mol
Intensité lumineuse	J	Cd
Charge électrique	TI	A.s
Potentiel électrique	$ML^2T^{-3}I^{-1}$	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-1}$
Vitesse	LT^{-1}	$m.s^{-1}$
Accélération	LT^{-2}	$m.s^{-2}$
Fréquence	T^{-1}	s^{-1}
Inductance (L)	$ML^2T^{-2}I^{-2}$	$kg.m^2.s^{-2}.A^{-2}$
Champ électrique	$MLT^{-3}I^{-1}$	$kg.m.s^{-3}.A^{-1}$
Résistance	$ML^2T^{-3}I^{-2}$	$kg.m^2.s^{-3}.A^{-2}$
Capacité (C)	$M^{-1}L^2T^{-4}I^2$	$kg^{-1}.m^2.s^{-4}.A^2$
Force	MLT^{-2}	$kg.m^2.s^{-2}.A^{-2}$
Travail –Energie	ML^2T^{-2}	$kg.m^2.s^{-2}$
Puissance	ML^2T^{-3}	$kg.m^2.s^{-3}$
Résistivité	$ML^3T^{-3}I^{-2}$	$kg.m^3.s^{-3}.A^{-2}$
Permittivité	$M^{-1}L^{-3}T^4I^2$	$kg^{-1}.m^{-3}.s^4.A^2$
Perméabilité	$MLT^{-2}I^{-2}$	$kg.m.s^{-2}.A^{-2}$
Moment d'une force	ML^2T^{-2}	$kg.m^2.s^{-2}$
Moment cinétique	ML^2T^{-1}	$kg.m.s^{-1}$
Densité de courant	$L^{-2}I$	$m^{-2}.A$
Flux magnétique	$ML^2T^{-2}I^{-1}$	$kg.m^2.s^{-2}.A^{-1}$
Moment magnétique	L^2TI	$m^2.s.A$
Moment dipolaire	LTI	m.s.A
Induction magnétique	$MT^{-2}I^{-1}$	$kg.s^{-2}.A^{-1}$

Tableau 1.3 *Grandeurs physiques, dimensions et unités du SI*

Enoncés des exercices

Exercice 1

Donner la dimension des grandeurs physiques suivantes :

1/ L'énergie cinétique E_c	4/ La résistivité électrique ρ
2/ La puissance électrique P	5/ La constante R d'un gaz parfait
3/ La pression P d'un gaz	6/ La constante de la gravitation universelle G

Exercice 2

La période T d'un pendule simple est donnée par la formule suivante : $T = 2\pi . l^{\alpha} . g^{\beta}$

D'où : l est la longueur du pendule ; g est la pesanteur.

1) Trouver les valeurs des constantes α et β.
2) Donner l'expresssion de la période T d'un pendule simple.

Exercice 3

La fréquence f d'un ressort élastique est donnée par la formule suivante : $f = \frac{1}{2\pi} . m^{\alpha} . k^{\beta}$

Avec : f est la fréquence, m est la masse du ressort, k est la constante de raideur.

1) Déterminer les valeurs des constantes α et β.
2) Donner l'expresssion de la fréquence f.

Exercice 4

Une goutte d'huile se déplace avec des vibrations, sa fréquence f de vibration peut s'écrire sous la relation : $f = k.R^{\alpha}\rho^{\beta}\zeta^{\gamma}$.

Où : R est le rayon de la goutte, ρ est sa masse volumique, ζ est la tension superficielle définie par une force par unité de longueur, k est une constante sans dimension.

1) Déterminer par une analyse dimensionnelle les valeurs des paramètres α, β et γ.
2) Donner l'expresssion de la fréquence f.

Exercice 5

La période T de la terre est donnée par la relation suivante : $T = k.\ m^{a}\ R^{b}\ G^{c}$.

Où : m est la masse du soleil, R est le rayon du cercle décrit, G est la constante de la gravitation universelle, k est une constante sans dimension.

1) Déterminer, par une analyse dimensionnelle, les valeurs de : a, b et c.
2) Déduire l'expression de la période T, lorsque : $k = 2\pi$.

Solutions des exercices

Exercice 1

On détermine la dimension des grandeurs suivantes :

1/ Dimension de l'énergie cinétique E_c

L'expression de l'énergie cinétique est : $E_c = \frac{1}{2}.m.v^2$; d'où : m : la masse, v : la vitesse.

Alors : $[E_c] = \left[\frac{1}{2}\right].[m].[v]^2 = \left[\frac{1}{2}\right].[m].\frac{[x]^2}{[t]^2} = M.L^2.T^{-2}$

2/ Dimension de la puissance électrique P

L'équation de la puissance électrique P est : $P = \frac{E}{t}$; d'où : E : l'énergie, t : le temps.

Alors : $[P] = \frac{[E]}{[t]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-2}$

3/ Dimension de la pression P d'un gaz

L'équation d'un gaz est : $P = \frac{F}{S}$. Sachant que : $F = m.\gamma$, $\gamma = \frac{d^2x}{dt^2}$ et $S = x^2$.

Et d'où : F : la force, S : la surface, m : la masse, g : l'accélération, x : la longueur.

Alors : $[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[m][\gamma]}{[x]^2} = \frac{[m][x]}{[x]^2[t]^2} = \frac{[m]}{[x][t]^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$

4/ Dimension de la résistivité électrique ρ

La relation de la résistivité électrique est : $\rho = \frac{1}{R}$ (1)

Ainsi : la relation du potentiel électrique est : $U = R.I$ (2)

et la relation de la puissance électrique est : $P = U.I$ (3)

Alors, d'après les trois relations précédentes, on obtient : $\rho = \frac{I^2}{P}$

$[\rho] = \frac{[I]^2}{[P]} = \frac{I^2}{M.L^2.T^{-2}} = M^{-1}.L^{-2}.T^2.I^2$

5/ Dimension de la constante R d'un gaz parfait

L'équation d'état du gaz parfait est : $P.V = n.R.T$ donc : $R = \frac{P.V}{n.R}$.

D'où : P : la pression, V : le volume, n : la quantité de la matière, R : la constante du gaz parfait et T : la température absolue.

On cherche la dimension de chaque paramètre :

$[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[m][\gamma]}{[x]^2} = \frac{[m][x]}{[x]^2[t]^2} = \frac{[m]}{[x][t]^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$

$[V] = [x]^3 = L^3$; $[n] = N$; $[T] = \Theta$.

On obtient alors la dimension de la constante R du gaz parfait :

$$[R] = \frac{[P][V]}{[n][T]} = \frac{M.L^{-1}.T^{-2}.L^3}{N.\Theta} = M.L^2.T^{-2}.N^{-1}.\Theta^{-1}$$

6/ Dimension de la constante de la gravitation universelle G

La troisième loi de Newton est définie par : $F = G.\frac{m.M}{r^2}$, implique : $G = \frac{F.r^2}{m.M}$

D'où : F : la force, m et M : les masses, r : la distance.

Alors : $G = \frac{[F].[r]^2}{[m].[M]} = M.L.T^{-2}.L^2.M^{-2} = M^{-1}.L^3.T^{-2}$

Exercice 2

La période T d'un pendule simple est donnée par la formule suivante : $T = 2\pi.l^{\alpha}.g^{\beta}$

d'où : l : la longueur du pendule ; g : la pesanteur.

1/ On détermine les valeurs des constantes α et β :

Nous avons : $T = 2\pi.l^{\alpha}.g^{\beta}$ (1)

L'équation (1) peut-être écrite sous la forme dimensionnelle suivante : $[T] = [2\pi].[l]^a\,[g]^b$

Tels que : $[T] = T$, $[2\pi] = 1$, $[l] = L$, $[g] = L.T^{-2}$.

On remplace les dimensions des paramètres de l'équation (1) par ses expressions dimensionnelles, on obtient alors : $T = L^{\alpha}L^{\beta}T^{-2\beta}$

Soit : $T = L^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$ (2)

L'équation (2) est valide si les exposants des paramètres de base sont nuls. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2\beta = 1 \\ \alpha+\beta = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui conduit à :} \quad \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

2/ Expression de la période T d'un pendule simple :

Remplaçons les valeurs des constantes α et β dans l'équation (1), on trouve :

$T = 2\pi.l^{1/2}\,g^{-1/2}$ alors $T = 2\pi.\sqrt{\frac{l}{g}}$.

Exercice 3

On a l'expression da la fréquence d'un ressort elastique: $f = \frac{1}{2\pi}.m^{\alpha}.k^{\beta}$ (1)

Sachant que : f est la fréquence, m est la masse du ressort, k est la constante de raideur.

1/ On détermine les valeurs des constantes α et β :

L'équation (1) est sous la forme dimensionnelle : $[f] = \left[\frac{1}{2\pi}\right].[m]^{\alpha}\,[k]^{\beta}$

Tels que : $[f] = T^{-1}$, $\left[\frac{1}{2\pi}\right] = 1$, $[m] = M$.

Trouvons la dimension de la constante de raideur k.

La raideur, notée k, exprime la relation de proportionnalité entre la force F appliquée et l'allongement ou la compression x, donc : $k = \frac{F}{x}$.

Alors : $[k] = \frac{[F]}{[x]} = \frac{[m][g]}{[x]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L} = M.T^{-2}$

On remplace les dimensions des paramètres de l'équation (1) par ses expressions dimensionnelles, on obtient alors : $T^{-1} = M^{\alpha}M^{\beta}T^{-2\beta}$

Soit : $T^{-1} = M^{\alpha+\beta}T^{-2\beta}$ (2)

Soit en identifiant les exposants des paramètres :

$$\begin{cases} -2\beta = -1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \text{ce qui conduit à : } \begin{cases} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2/ Expression de la fréquence f d'un ressort :

On remplace les constantes α et β dans l'équation (1), donc l'équation devient :

$$f = \frac{1}{2\pi}.m^{-1/2}.k^{1/2} \quad \text{alors : } f = \frac{1}{2\pi}.\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

<u>Exercice 4</u>

On a : la fréquence f de vibration d'une goutte d'eau : $f = k.R^{\alpha}\rho^{\beta}\zeta^{\gamma}$ (1)

où : k : une constante sans dimension, R : un rayon de la goutte, ρ : la masse volumique, ζ: la tension superficielle.

1/ Calcul des paramètres α, β et γ :

La forme dimensionnelle de l'équation (1) est donnée par : $[f] = [k].[R]^{\alpha}[\rho]^{\beta}[\zeta]^{\gamma}$

Sachant que : $[f] = T^{-1}$, $[k] = 1$, $[R] = L$, la masse volumique ρ est définie par une masse par unité de volume, donc : $[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = M.L^{-3}$, et la tension superficielle ζ est définie par une force par unité de longueur, alors : $[\zeta] = \frac{[F]}{[l]} = \frac{[m].[g]}{[l]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L} = MT^{-2}$

On remplace les expressions dimensionnelles des paramètres dans l'équation (1), on obtient alors : $T^{-1} = L^{\alpha}M^{\beta}L^{-3\beta}M^{\gamma}T^{-2\gamma}$

Soit : $T^{-1} = L^{\alpha-3\beta}M^{\beta+\gamma}T^{-2\gamma}$ (2)

Soit en identifiant les exposants des paramètres :

$$\begin{cases} -2\gamma = -1 \\ \alpha - 3\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \qquad \text{ce qui conduit à :} \begin{cases} \gamma = \dfrac{1}{2} \\ \beta = -\dfrac{1}{2} \\ \alpha = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2/ Expression de la fréquence *f* d'une goutte d'eau:

En remplaçant les constantes α, β et γ dans l'équation (1), on aura :

$f = k.R^{-3/2}\rho^{-1/2}\zeta^{1/2}$ on obtient finalement : $f = k.\sqrt{\dfrac{\zeta}{R^3.\rho}}$.

<u>Exercice 5</u>

La période T de la terre est donnée par l'expression :

$$T = k.\, m^a R^b G^c$$

Où : m est la masse du soleil, R est le rayon du cercle décrit, G est la constante de la gravitation universelle, k est une constante sans dimension.

1/ On détermine les valeurs des constantes *a*, *b* et *c* :

Nous avons : $T = k.\, m^a R^b G^c$ (1)

Et : $F = G.\dfrac{m.M}{r^2}$, donc : $G = \dfrac{F.r^2}{m.M}$

L'équation (1) peut-être écrite sous la forme dimensionnelle suivante :

$[T] = [k].[m]^a\ [R]^b\ [G]^c$

Tels que : $[T] = T$, $[k] = 1$, $[m] = M$, $[R] = L$, $[G] = M^{-1}.L^3.T^{-2}$

On remplace les dimensions des paramètres de l'équation (1) par ses expressions dimensionnelles, on obtient alors : $T = M^{a}L^{b}M^{-c}L^{3c}T^{-2c}$

Soit : $T = M^{a-c}L^{b+3c}T^{-2c}$ (2)

L'équation (2) est validée si les exposants des paramètres de base sont nuls. C'est-à-dire :

$$\begin{cases} -2c = 1 \\ a - c = 0 \\ b + 3c = 0 \end{cases} \quad \text{qui a pour solution :} \begin{cases} c = -\dfrac{1}{2} \\ a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

2/ Expression de la période *T*, lorsque : $k = 2\pi$.

En remplaçant les valeurs des constantes a, b et c dans l'équation (1), on trouve :

$T = 2\pi.m^{-1/2} R^{3/2} G^{-1/2} = 2\pi.\sqrt{\dfrac{R^3}{G.m}}$.

02 Chapitre 02
Vecteurs et Systèmes des coordonnées

2.1 Les vecteurs

2.1.1 Définition :

Un vecteur est une grandeur orientée dans l'espace. Un vecteur d'origine A et d'extrémité B, noté par : $\overrightarrow{AB}$ ou $\vec{V}$, est défini par quatre caractéristiques :

- Son origine : où le point d'application A (*voir figure 2.1*).
- Sa direction : celle de la droite qui porte le vecteur.
- Son sens : celui indiqué par la flèche ou orientation.
- Son module : qui est la longueur du vecteur : $\|\overrightarrow{AB}\|=\|\vec{V}\|$.

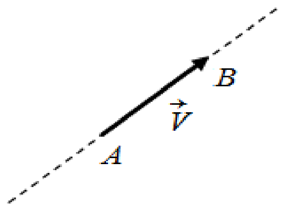


figure 2.1 : Un vecteur

2.1.2 Vecteur unitaire

On appelle vecteur unitaire $\vec{u}$ d'un vecteur $\vec{V}_1$ de longueur $\|\vec{V}_1\| > 0$, le vecteur $\vec{u} = \dfrac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|}$.

Son module est égal à l'unité $\|\vec{u}\| = 1$ et son sens est celui de $\vec{V}_1$.

2.1.3 Opérations sur les vecteurs

Vecteurs égaux : Deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont égaux s'ils ont même module, même direction et même sens, quelque soit leurs origines.

Vecteurs opposés : soit $\vec{V}$ un vecteur, on note $-\vec{V}$ le vecteur opposé à $\vec{V}$, en pratique $-\vec{V}$ est de sens contraire à $\vec{V}$.

Somme ou résultante : soit $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ deux vecteurs, alors $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_3$ qui est la diagonale issue du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ (*voir figure 2.2*).

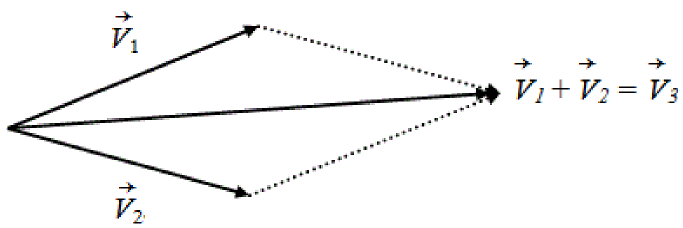


figure 2.2 : Somme de deux vecteurs

Ou bien : la somme de plusieurs vecteurs est un vecteur joignant l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier.

Soustraire : la soustraction (la différence) de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, notée $(\vec{V}_1 - \vec{V}_2)$ correspond à additionner $\vec{V}_1$ avec l'opposé $(-\vec{V}_2)$.

Produit : le produit d'un vecteur $\vec{V}_1$, par un scalaire p est le vecteur $p.\vec{V}_1$ de même direction que $\vec{V}_1$ dont sa norme est égale au produit de celle de $\vec{V}_1$ par la valeur absolue de p et dont son sens est identique ou opposé à celui de $\vec{V}_1$, selon que p est positif ou négatif (dépend du signe de p).

2.1.4 Lois de l'algèbre linéaire :

On considère les vecteurs $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ et les scalaires p et q, on aura :

loi de commutativité	$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$	*Commutatif sur l'addition*
loi d'associativité	$\vec{V}_1 + (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) + \vec{V}_3$	*Associatif sur l'addition*
loi d'associativité	$p.(q.\vec{V}_1) = (p.q).\vec{V}_1 = q.(p.\vec{V}_1)$	*Associatif sur la multiplication*
loi de distribution	$(p + q).\vec{V}_1 = p.\vec{V}_1 + q.\vec{V}_1$ $p.(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = p.\vec{V}_1 + p.\vec{V}_2$	*Distributif sur la multiplication*

2.1.5 Projection orthogonale

Soit un vecteur $\vec{V}$ dans l'espace et une droite (Δ) faisant un angle α avec le vecteur $\vec{V}$.

La projection orthogonale de $\vec{V}$ sur la droite (Δ) est : $Proj_{(\Delta)}\vec{V} = \overline{AH} = \|\vec{V}\|.\cos\alpha = scalaire.$

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ sur la droite (Δ) est défini par : $\overrightarrow{Proj}_{(\Delta)}\vec{V} = \overrightarrow{AH} = (\|\vec{V}\|.\cos\alpha).\vec{u}$

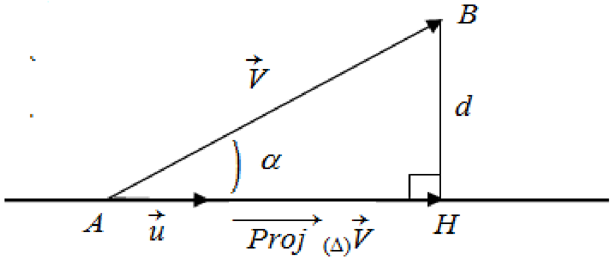


figure 2.3 : Projection orthogonale d'un vecteur

2.1.6 Composantes d'un vecteur dans un repère orthonormé

Le repère orthonormé dans l'espace est représenté par trois axes (Ox, Oy, Oz) orthogonaux, munis d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les composantes du vecteur $\vec{V}$ sont les projections orthogonales Vx, Vy et Vz sur les axes (Ox, Oy, Oz). L'expression de $\vec{V}$ est donné par :

$\vec{V} = Vx.\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz.\,\vec{k}$, ainsi son module est : $\|\vec{V}\| = \sqrt{Vx^{2} + Vy^{2} + Vz^{2}}$

D'autre part : $Vx = V\cos\alpha$, $Vy = V\cos\beta$, $Vz = V\cos\gamma$

où : $\alpha = (\vec{i}, \vec{V})$, $\beta = (\vec{j}, \vec{V})$ et $\gamma = (\vec{k}, \vec{V})$

On appelle $\cos\alpha$, $\cos\beta$ *et* $\cos\gamma$ les ***cosinus directeurs*** du support de $\vec{V}$ dans le repère (O,xyz).

Les composantes du vecteur unitaire de $\vec{V}$, noté $\vec{u}$, sont :

$$\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{Vx.\vec{i} + Vy\,.\,\vec{j} + Vz.\,\vec{k}}{\|\vec{V}\|} = \frac{Vx}{\|\vec{V}\|}.\vec{i} + \frac{Vy}{\|\vec{V}\|}.\,\vec{j} + \frac{Vz}{\|\vec{V}\|}.\,\vec{k} = \cos\alpha.\vec{i} + \cos\beta.\,\vec{j} + \cos\gamma.\,\vec{k}$$

Remarque :

Les cosinus directeurs de $\vec{V}$ sont les composantes de son vecteur unitaire.

On en déduit la relation entre les cosinus directeurs, puisque $\|\vec{u}\| = 1$:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

2.1.7 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est défini par :

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\ \|\vec{V_2}\|.\cos\alpha\ ;\ où\ (0 \le \alpha \le \pi).$$

Propriétés :

loi de commutativité	$\vec{V_1}.\vec{V_2} = \vec{V_2}.\vec{V_1}$	*Commutatif*
loi de distributivité	$\vec{V_1}.(\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1}.\vec{V_2} + \vec{V_1}.\vec{V_3}$ $p.(\vec{V_1}.\vec{V_2}) = (p.\vec{V_1}).\vec{V_2} = \vec{V_1}.(p.\vec{V_2})$ $= (\vec{V_1}.\vec{V_2}).p$	*Distributif*
orthogonalité	Si : $\vec{V_1}.\vec{V_2} = 0 \Rightarrow \vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont orthogonaux	*cas particulier*

Dans la base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un repère orthonormé, on a :

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \qquad \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

Soient les deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ dans un repère cartésien orthonormé :
$\vec{V_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$
$\vec{V_1}.\vec{V_1} = V_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ $\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

2.1.8 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteur $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ est défini par :

$$\boxed{\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \|\vec{V_1}\|.\ \|\vec{V_2}\|.\sin\alpha.\vec{u}\ ,\quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \pi}$$

Où : $\vec{u}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction de $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$.

Propriétés :

loi de non commutativité : $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1}$	*non commutatif*
loi de distributivité : $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \vec{V_3}$ $p(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) = (p\vec{V_1}) \wedge \vec{V_2} = \vec{V_1} \wedge (p\vec{V_2}) = (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}).p$	*Distributif*
Dans la base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un repère orthonormé, on a : $\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$; $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$	
Soient les deux vecteurs $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ dans un repère cartésien orthonormé : $\vec{V_1} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V_2} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$ $= (y_1.z_2 - y_2.z_1)\,\vec{i} - (x_1.z_2 - x_2.z_1)\,\vec{j} + (x_1.y_2 - x_2.y_1)\,\vec{k}$	*Utilisation du déterminant*
Si : $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = \vec{0}$, ainsi que : $\vec{V_1} \neq 0$ et $\vec{V_2} \neq 0$ alors $\vec{V_1} // \vec{V_2}$	*Cas particulier*
$\|\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}\|$ est la surface d'un parallélogramme de cotés $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$	*Sens géométrique*

2.1.9 Produit mixte et double produit vectoriel

Le produit mixte des trois vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ est défini par :

$$\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Où : $\vec{V_1} = x_1.\vec{i} + y_1.\vec{j} + z_1.\vec{k}$, $\vec{V_2} = x_2.\vec{i} + y_2.\vec{j} + z_2.\vec{k}$, $\vec{V_3} = x_3.\vec{i} + y_3.\vec{j} + z_3.\vec{k}$

La valeur absolue de produit mixte $|\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3})|$ représente le volume d'un parallélépipède de cotés $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$.

On a aussi : $\vec{V_1}.(\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = \vec{V_2}.(\vec{V_3} \wedge \vec{V_1}) = \vec{V_3}.(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2})$

Le double produit vectoriel des trois vecteurs $\vec{V_1}$,$\vec{V_2}$ et $\vec{V_3}$ est défini par :

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) = (\vec{V_1}.\vec{V_3}).\vec{V_2} - (\vec{V_1}.\vec{V_2}).\vec{V_3}$$

Comme : $(\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3} = (\vec{V_1} . \vec{V_3}) . \vec{V_2} - (\vec{V_2} . \vec{V_3}) .\vec{V_1}$

Il est clair que $\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} \wedge \vec{V_3}) \neq (\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}) \wedge \vec{V_3}$

2.1.10 Dérivés des vecteurs

Si $\varphi(u)$ est une fonction scalaire et si $\vec{V}(u)$ et $\vec{V}'(u)$ sont des fonctions vectorielles, on a alors :

$\frac{d(\varphi.\vec{V})}{du} = \varphi.\frac{d\vec{V}}{du} + \vec{V}.\frac{d\varphi}{du}$	$\frac{d(\vec{V}.\vec{V}')}{du} = \vec{V}.\frac{d\vec{V}'}{du} + \frac{d\vec{V}}{du}.\vec{V}'$
$\frac{d(\vec{V} \wedge \vec{V}')}{du} = \vec{V} \wedge \frac{d\vec{V}'}{du} + \frac{d\vec{V}}{du} \wedge \vec{V}'$	

Opération habituelle en gardant le caractère scalaire ou vectoriel du produit :

2.1.11 Moment d'un vecteur par rapport à un point

Le moment de vecteur $\vec{V}$ par rapport au point A est défini par :

$$\vec{M}_A(\vec{V}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$$

Où B est un point quelconque de la ligne d'action de vecteur $\vec{V}$.

De par les propriétés du produit vectoriel, le vecteur moment est ***perpendiculaire*** à la fois au vecteur $\vec{V}$ et au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Son sens est donné par la règle du tourne-vise.

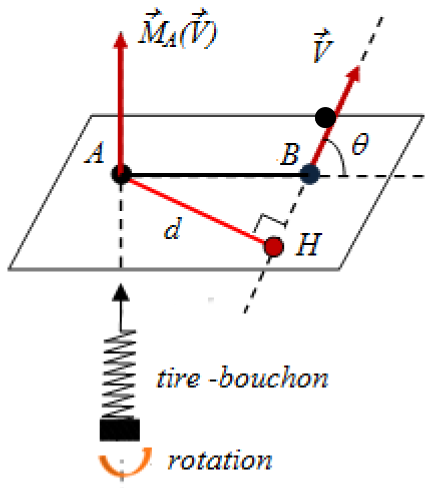


figure 2.4 : Moment d'un vecteur par rapport à un point

2.1.12 Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe orienté (Δ) est défini par :

$$M_u(\vec{V}) = \vec{u}.\vec{M}_A(\vec{V}) = \vec{u}.\,(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V})$$

Où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

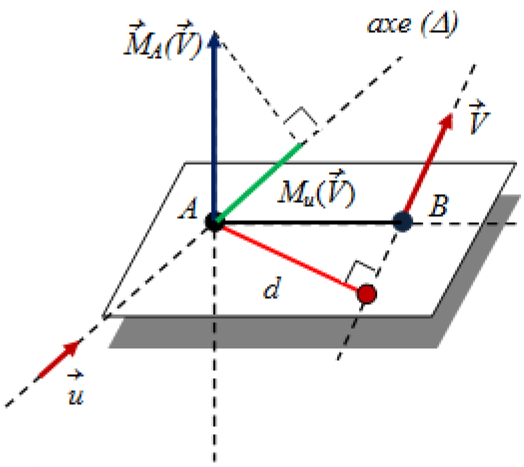


figure 2.5 : Moment d'un vecteur par rapport à un axe

Le moment d'un vecteur $\vec{V}$ par rapport à un axe, c'est donc une grandeur ***scalaire.***

2.1.13 Gradient, divergence et rotationnel

On considère une fonction vectorielle $\vec{V} = \vec{V}(X\,;Y\,;Z)$ et une fonction scalaire $\varphi\,(x, y, z)$.

Soit l'opérateur vectoriel différentiel *Nabla*, défini par : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\vec{k}$

On définit les grandeurs :

Gradient *(forme vectorielle)*	$\overrightarrow{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}.\,\varphi = (\frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}).\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.\vec{k}$
Divergence *(forme scalaire)*	$div\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}).\vec{V} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$
Rotationnel *(forme vectorielle)*	$rot\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = (\frac{\partial}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}.\vec{k}) \wedge (X.\vec{i} + Y.\vec{j} + Z.\vec{k})$ $= (\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}).\vec{i} - (\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}).\vec{j} + (\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}).\vec{k}$

Il existe deux identités remarquables :

$div(rot\vec{V}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$	$rot(\overrightarrow{grad}\,\varphi) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla}\varphi) = \vec{0}$

2.2 Les systèmes des coordonnées

2.2.1 Coordonnées cartésiennes

a) Définition

Soient trois axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ et $\overrightarrow{Oz}$ dont les vecteurs sont respectivement : $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Les coordonnées cartésiennes d'un point M de l'espace correspondent aux projections du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les trois axes.

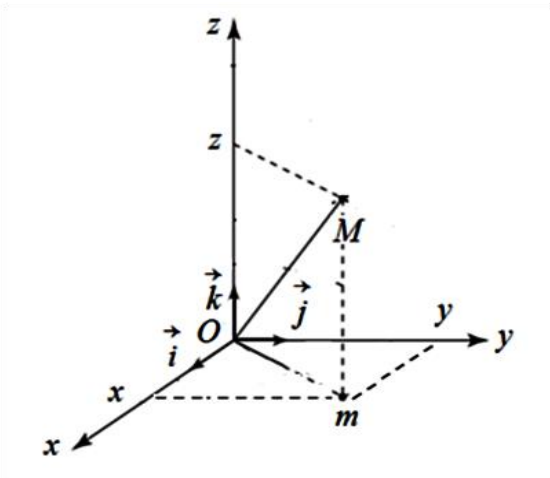


figure 2.6: Repère cartésien.

Le repère cartésien est dit normé, lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ont le même module.

Ainsi, le repère est dit orthonormé, si de plus, les axes *Ox*, *Oy* et *Oz* sont perpendiculaires.

Oxyz est un trièdre orthonormé direct, si la plus petite rotation qui amène *Ox* sur *Oy* se fait dans le sens trigonométrique direct autour de Oz.

Si $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ forme une base cartésienne : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

2.2.2 Coordonnées polaires

a) Définition

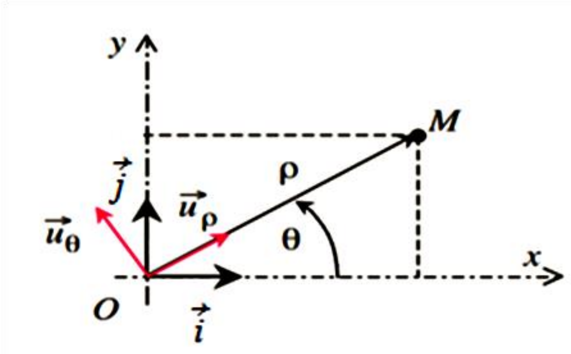


figure 2.7: Repère polaire.

La position du point mobile M dans le plan (Oxy) est définie par les variables $\rho(t)$ et $\theta(t)$, les variables ρ, θ étant les coordonnées polaires de M.

$$\begin{cases} \rho = OM & \rho \geq 0 \\ \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Le repère défini par la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ est appelé repère polaire.

$\vec{u}_\rho$ est porté par la demi-droite dirigé suivant les ρ croissants.

$\vec{u}_\rho$ est tangent à la trajectoire suivant les θ croissants.

b) Relations entre les coordonnées cartésiennes et polaires

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\cos\theta \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ \theta = arc\ tan(\frac{y}{x}) \end{cases}$$

2.2.3 Coordonnées cylindriques

a) Définition

La position du point M est déterminée à l'aide des variables ρ, θ et z. ces variables s'appellent les coordonnées cylindriques de M.

$$M \begin{cases} \rho = Om & \rho \geq 0 \\ \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z = Mm & -\infty \leq z \leq +\infty \end{cases}$$

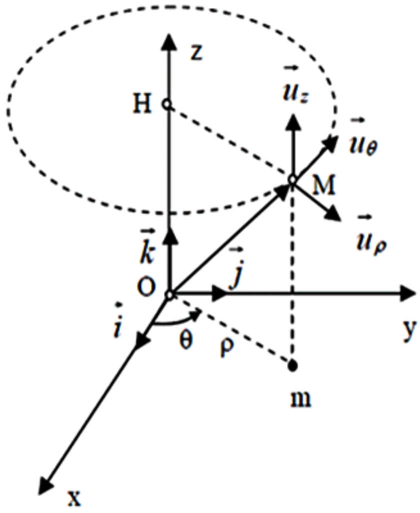


figure 2.8: Repère cylindrique.

La base cylindrique en *M* est *:* $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$.

$\vec{u}_\rho$ est porté par la demi-droite dirigé suivant les ρ croissants.

$\vec{u}_\rho$ est tangent au cercle suivant les θ croissants.

$\vec{u}_z$ est suivant la droite *mM*, dans le sens des *z* croissants.

b) Relations entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\cos\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \\ \theta = \text{arc}\tan(\dfrac{y}{x}) \\ z = z \end{cases}$$

Remarque : le repère polaire est un cas particulier du repère cylindrique avec z = 0.

2.3.4 Coordonnées sphériques

a) Définition

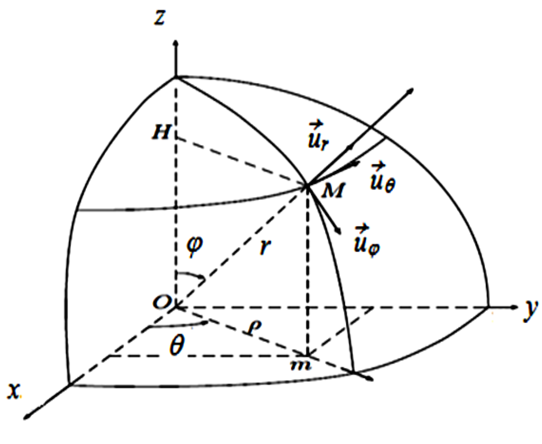


figure 2.9: Repère sphérique.

La position du point M est déterminée à l'aide des variables r, θ et φ.

r, θ et φ s'appellent les coordonnées sphériques de M. φ est appelé *colatitude*, θ est appelé *azimut* ou *longitude*.

$$M \begin{cases} r = OM & r \geq 0 \\ \theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om}) & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \varphi = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}) & 0 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

La base sphérique en M est : $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$.

$\vec{u}_r$ est radial suivant les ρ croissants.

$\vec{u}_\theta$ est tangent au cercle horizontal suivant les θ croissants.

$\vec{u}_\varphi$ est tangent au cercle vertical suivant les φ croissants.

b) Relations entre les coordonnées cartésiennes et sphériques

$$\begin{cases} x = r.\sin\varphi.\cos\theta \\ y = r.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = r.\cos\varphi \end{cases} \quad alors : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = arc\ \tan(\frac{y}{x}) \\ \varphi = arc\ \cos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

Enoncés des exercices

Exercice 01

Dans un système *(XOY)* muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ on considère les deux vecteurs :

$\overrightarrow{V}_1 = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, $\overrightarrow{V}_2 = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$.

1/ Représenter graphiquement les deux vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ dans le plan *(XOY)*.

2/ Calculer les vecteurs : $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$ et $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2$ puis les représenter.

3/ Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{V}_1 \cdot \overrightarrow{V}_2$ ainsi que le produit vectoriel $\overrightarrow{V}_1 \wedge \overrightarrow{V}_2$.

4/ Donner la projection du vecteur $\overrightarrow{S}$ sur l'axe *OX* puis sur l'axe *OY*.

Exercice 02

Dans un système des coordonnées cartésiennes de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points suivants : *A(2,2,0), B(0,2,1), C(2,0,1).*

1) Déterminer le vecteur : $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ et trouver son vecteur unitaire $\vec{u}$.

2) Déterminer les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{S}$.

3) Calculer la surface du triangle *ABC*.

4) Calculer le volume du parallélépipède formé par les vecteurs : $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

5) Donner la projection du vecteur $\overrightarrow{S}$ sur les axes *OX*, *OY* puis sur la droite (Δ) : $y = x$.

6) Calculer le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point *O*, ainsi que par rapport à la droite (Δ) définie par : $y = x$.

Exercice 03

Soit le vecteur : $\overrightarrow{W} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ avec $\theta = \omega.t$.

1) Calculer le module du vecteur $\overrightarrow{W}$, conclure.

2) Déterminer les vecteurs : $\overrightarrow{W}_1 = \dfrac{d\overrightarrow{W}}{d\theta}$ et $\overrightarrow{W}_2 = \dfrac{d\overrightarrow{W}}{dt}$.

3) Montrer que : $\overrightarrow{W}_2 \,//\, \overrightarrow{W}_1$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{W}_1$.

Exercice 04

Une droite (Δ) définie par l'équation suivante : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$

Calculer les cosinus directeurs de la droite (Δ).

Exercice 05

Dans le système des coordonnées polaires, on considère les deux vecteurs $\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{V}_2$ tels que : $\begin{cases} \overrightarrow{V}_1 = \cos\theta.\vec{u}_\rho + \sin\theta.\vec{u}_\theta \\ \overrightarrow{V}_2 = -\sin\theta.\vec{u}_\rho + \cos\theta.\vec{u}_\theta \end{cases}$

Avec : $\theta = \omega t$, ω est une constante positive.

1) Calculer la somme : $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$ et la différence : $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2$
2) Calculer le produit scalaire : $\overrightarrow{S}.\overrightarrow{D}$ et le produit vectoriel $\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D}$.
3) Calculer : $\frac{d\overrightarrow{S}}{d\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{D}}{d\theta}$.
4) Déduire la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{D}$.

Exercice 06

Soit $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base cartésienne d'un repère galiléen orthonormé direct $(Oxyz)$.

On définit les trois vecteurs : $\begin{cases} \vec{A} = -2.\vec{i} + \vec{j} + 3.\vec{k} \\ \vec{B} = 2.\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{C} = x.\vec{i} + 4.\vec{j} + z.\vec{k} \end{cases}$

Où : x et z sont des nombres réels constants.

1) Trouver x et z pour laquelle les vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{A}$ soient parallèles.
2) Trouver x et z pour laquelle le vecteur $\vec{C}$ soit orthogonal au plan $(\vec{A}.\vec{B})$.
3) On pose : $x = 1$, $z = 1$. Calculer le volume du parallélépipède formé par les trois vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

Exercice 07

I) Soient trois points : $A(1,0,2)$, $B(-2,1,4)$ et $C(0,3,5)$ repérés dans un repère cartésien orthonormé $R(O,xyz)$ muni d'une base directe $(\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k})$.

1) Calculer la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

2) Déduire les vecteurs unitaires $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ respectivement.

3) Calculer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

4) Déduire la surface du triangle *ABC*.

II) Soit un triangle quelconque *PNQ* (*voir figure 2.10*).

a) Démontrer la loi de sinus suivante :

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}.$$

b) Démontrer la relation suivante :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma}$$

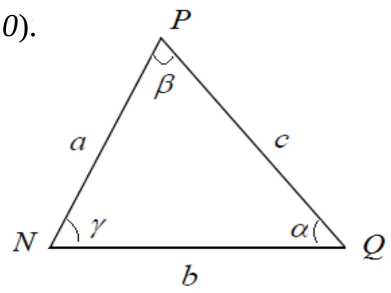


figure 2.10

Exercice 08

Un point *M* de l'espace peut être représenté par :

– Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

– Les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

– Les coordonnées sphériques (r, θ, φ) de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

1/ Exprimer l'expression des bases $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ et $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ en fonction de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2/ Calculer :

a) $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$; $\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En déduire leurs expressions dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

b) $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\varphi}$; $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}$; $\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}$; $\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{d\theta}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, ainsi dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

3/ Déterminer l'expression du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{L}$ dans les trois systèmes de coordonnées.

4/ Déduire la surface d'un disque de rayon *R* ; ainsi le volume d'une sphère de rayon *r*.

Solutions des exercices

Exercice 01

On a deux vecteurs : $\vec{V}_1 = 2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}$, $\vec{V}_2 = -\,\vec{i} + 2\,\vec{j}$, dans un système *(XOY)* muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$:

1/ Représentation du deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ dans le plan *(XOY)*.

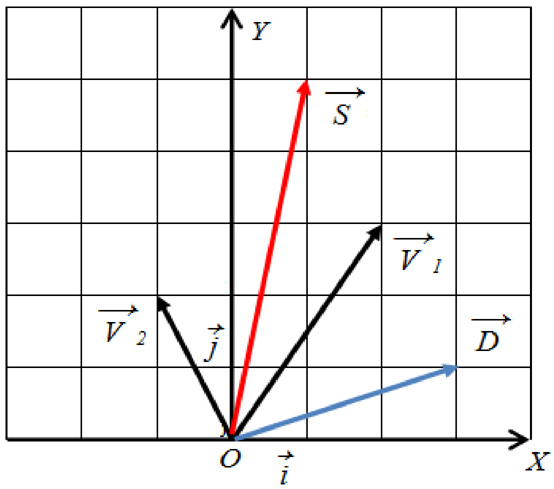


figure 2.11

2/ Calcul des vecteurs : $\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ et $\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$

$$\vec{S} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{i} + 5\,\vec{j}$$

$$\vec{D} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 3\,\vec{i} + \vec{j}$$

La représentation graphiquement des vecteurs $\vec{S}$ et $\vec{D}$ est sur la figure ci-dessus.

3/ Calcul du produit scalaire $\vec{V}_1 \,.\, \vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 \,.\, \vec{V}_2 = (2\,\vec{i} + 3\,\vec{j}).(-\,\vec{i} + 2\,\vec{j}) = -2 + 6 = 4$$

Calcul du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 7.\vec{k}$$

4/ Projection du vecteur $\vec{S}$ sur l'axe *OX* puis sur *OY*.

On a : $Proj\ \vec{S}/OX = \dfrac{\vec{S}\ .\ \vec{i}}{\|\vec{i}\ \|} = 1$

$Proj\ \vec{S}/OY = \dfrac{\vec{S}\ .\vec{j}}{\|\vec{j}\ \|} = 5$

<u>Exercice 02</u>

Nous avons les points suivants : *A(2,2,0), B(0,2,1), C(2,0,1)* repérés dans un système des coordonnées cartésiennes de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1/ On détermine le vecteur $\vec{S}$:

Si le point *O(0, 0, 0)* est l'origine du repère cartésien.

Alors : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc : $\vec{S} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\ \vec{i} + 4\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$

Trouvons son vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$\vec{u} = \frac{\vec{S}}{\|\vec{S}\ \|} = \frac{4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}{\sqrt{16+16+4}} = \frac{4\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 2\,\vec{k}}{6} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$$

2/ On détermine les cosinus directeurs du vecteur $\vec{S}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{S}\ .\vec{i}}{\|\vec{i}\ \|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{S}\ .\vec{j}}{\|\vec{j}\ \|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{S}\ .\vec{k}}{\|\vec{k}\ \|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

3/ Calcul de la surface du triangle *ABC* :

Par définition, la surface du triangle est donnée par la relation suivante :

$$S\ (triangle) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$$

Tels que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$$

Alors : $S\ (triangle)=\dfrac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}=\dfrac{\sqrt{24}}{2}$ *unités de surface.*

4/ Calcul du volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$:

Le volume du parallélépipède est donné par la relation suivante :

$$V\ (parallélépipède)=\left|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})\right|$$

$$\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$$

$$V\ (parallélépipède)=\left|\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OB}\wedge\overrightarrow{OC})\right|=\left|(2\vec{i}+2\vec{j})(2\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})\right|=8\ \text{unités de volume.}$$

5/ Projection du vecteur $\overrightarrow{S}$ suivant les axes *OX*, *OY* et *OZ* :

$$Proj\ \overrightarrow{S}/OX=\frac{\overrightarrow{S}\,.\,\vec{i}}{\|\vec{i}\|}=4$$

$$Proj\ \overrightarrow{S}/OY=\frac{\overrightarrow{S}\,.\,\vec{j}}{\|\vec{j}\|}=4$$

$$Proj\ \overrightarrow{S}/OZ=\frac{\overrightarrow{S}\,.\,\vec{k}}{\|\vec{k}\|}=2$$

La projection du vecteur $\overrightarrow{S}$ sur la droite (Δ) : *y = x*.

On choisi deux points *M* et *N* appartenant à la droite (Δ) : $y = x$, qui sont $M(0, 0)$ et $N(1, 1)$

Donc le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est défini par : $\overrightarrow{MN}=\vec{i}+\vec{j}$, maintenant on détermine son vecteur unitaire : $\vec{u}_{(\Delta)}=\dfrac{\overrightarrow{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$$Proj\ \overrightarrow{S}/(\Delta)=\frac{\overrightarrow{S}\,.\,\vec{u}_{(\Delta)}}{\|\vec{u}_{(\Delta)}\|}=(4\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}\right)=4\sqrt{2}$$

6/ Calcul du moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point *O*, ainsi que par rapport à la droite (Δ) définie par : *y = x* :

Le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au point *O* est défini par :

$$\vec{M}\,(\overrightarrow{AB}/O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Alors : $\vec{M}\,(\overrightarrow{AB}/O) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}$

Le moment du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport à la droite (Δ) définie par : $y = x$ est :

$\vec{M}\,(\overrightarrow{AB}/\Delta) = \vec{M}\,(\overrightarrow{AB}/O).\,\vec{u}_{(\Delta)}$; Sachant que : *O* appartient à (Δ).

Alors : $\vec{M}\,(\overrightarrow{AB}/\Delta) = (2\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 4\,\vec{k}).\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{j}\right) = 0$

<u>**Exercice 03**</u>

Soit le vecteur : $\overrightarrow{W} = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$ avec $\theta = \omega.t$

1/ Calcul de la norme du vecteur $\overrightarrow{W}$:

$$\|\overrightarrow{W}\| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

On conclut que la norme du vecteur $\overrightarrow{W}$ est constante par rapport au temps.

2/ On détermine les vecteurs : $\overrightarrow{W}_1 = \frac{d\overrightarrow{W}}{d\theta}$ *et* $\overrightarrow{W}_2 = \frac{d\overrightarrow{W}}{dt}$:

$$\overrightarrow{W}_1 = \frac{d\overrightarrow{W}}{d\theta} = -\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}$$

$$\overrightarrow{W}_2 = \frac{d\overrightarrow{W}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}.\frac{d\overrightarrow{W}}{d\theta} = \omega.(-\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j})$$

3/ Montrons que : $\overrightarrow{W}_1 /\!/ \overrightarrow{W}_2$ *et* $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{W}_1$:

En utilisant les propriétés du produit vectoriel : $\overrightarrow{W}_1 \wedge \overrightarrow{W}_2 = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{W}_1 /\!/ \overrightarrow{W}_2$

Donc : on calcule le produit vectoriel : $\overrightarrow{W}_1 \wedge \overrightarrow{W}_2$:

$\overrightarrow{W}_1 \wedge \overrightarrow{W}_2 = (-\,\omega.\cos\theta.\sin\theta + \omega.\cos\theta.\sin\theta) = \vec{0}$; alors : $\overrightarrow{W}_1 /\!/ \overrightarrow{W}_2$

En utilisant les propriétés du produit vectoriel : $\overrightarrow{W}\,.\,\overrightarrow{W}_1 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{W}_1$

Donc, on calcule le produit scalaire $\overrightarrow{W}\,.\,\overrightarrow{W}_1$:

$$\overrightarrow{W}\,.\,\overrightarrow{W}_1 = (\cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j})(-\sin\theta.\vec{i} + \cos\theta.\vec{j}) = -\cos\theta.\sin\theta + \cos\theta.\sin\theta = 0$$

Alors : $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{W}_1$

Exercice 04

Calcul des cosinus directeurs de la droite (Δ) définie par : $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ **:**

On a les deux points $A(0, 1)$ et $B(-\sqrt{2}, 0)$ qui appartiennent à la droite (Δ).

Donc, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est écrit comme suit : $\overrightarrow{AB} = -\sqrt{2}\,\vec{i} - \vec{j}$

Alors, les cosinus directeurs de la droite ou du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}.\,\vec{i}}{\|\vec{i}\,\|} = -\sqrt{2}$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}.\,\vec{j}}{\|\vec{j}\,\|} = -1$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{AB}.\,\vec{k}}{\|\vec{k}\,\|} = 0$$

Exercice 05

Dans le système des coordonnées polaires, on a : $\begin{cases} \overrightarrow{V}_1 = \cos\theta.\vec{u}_\rho + \sin\theta.\vec{u}_\theta \\ \overrightarrow{V}_2 = -\sin\theta.\vec{u}_\rho + \cos\theta.\vec{u}_\theta \end{cases}$

Où : $\theta = \omega t$; ω est une constante positive

1/ Calcul de la somme : $\overrightarrow{S} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2$ **et de la différence :** $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2$

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{V}_2 = (\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{u}_\rho + (\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{u}_\theta$$

$$\overrightarrow{D} = \overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2 = (\cos\theta + \sin\theta)\,\vec{u}_\rho + (\sin\theta - \cos\theta)\,\vec{u}_\theta$$

2/ Calcul du produit scalaire $\overrightarrow{S}\,.\overrightarrow{D}$ **et du produit vectoriel** $\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D}$ **:**

- ✓ *Le produit scalaire*

$$\overrightarrow{S}\,.\overrightarrow{D} = (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta) + (\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)$$

$$\overrightarrow{S}\,.\overrightarrow{D} = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (\sin^2\theta - \cos^2\theta) = 0$$

✓ <u>*Le produit vectoriel*</u>

$$\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D} = \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ (\cos\theta - \sin\theta) & (\cos\theta + \sin\theta) & 0 \\ (\sin\theta + \cos\theta) & (\sin\theta - \cos\theta) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D} = \big((\cos\theta - \sin\theta)(\sin\theta - \cos\theta) - (\cos\theta + \sin\theta)(\sin\theta + \cos\theta)\big)\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D} = \big(-\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2.\cos\theta.\sin\theta - \cos^2\theta - \sin^2\theta - 2.\cos\theta.\sin\theta\big)\vec{u}_z$$

$$\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D} = -2.\vec{u}_z$$

3/ Calcul de : $\dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta}$ *et* $\dfrac{d\overrightarrow{D}}{d\theta}$

$$\frac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} = (-\sin\theta - \cos\theta)\,\vec{u}_\rho + (\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{u}_\theta + (\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{u}_\theta - (\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} = -2(\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{u}_\rho + 2\,(\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\overrightarrow{D}}{d\theta} = (-\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{u}_\rho + (\cos\theta + \sin\theta)\,\vec{u}_\theta + (\cos\theta + \sin\theta)\,\vec{u}_\theta - (\sin\theta - \cos\theta)\,\vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\overrightarrow{D}}{d\theta} = 2(-\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{u}_\rho + 2(\cos\theta + \sin\theta)\,\vec{u}_\theta$$

4/ Déduction la surface du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{D}$:

Par définition, la surface du parallélogramme est : $S_{parallélogramme} = \|\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D}\|$

Donc : $S_{parallélogramme} = \|\overrightarrow{S} \wedge \overrightarrow{D}\| = \|-2.\vec{u}_z\| = 2$ *unités de surface*

<u>Exercice 06</u>

Dans un repère galiléen orthonormé direct *(Oxyz)* d'une base directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère

les trois vecteurs : $\begin{cases} \vec{A} = -2.\vec{i} + \vec{j} + 3.\vec{k} \\ \vec{B} = 2.\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{C} = x.\vec{i} + 4.\vec{j} + z.\vec{k} \end{cases}$; *x* et *z* sont des valeurs constantes.

1/ Valeurs de *x* et *z* pour laquelle les vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{A}$ soient parallèles :

Les vecteurs $\vec{C}$ et $\vec{A}$ soient parallèles lorsque le produit vectoriel $\vec{C} \wedge \vec{A}$ est nul ($\vec{C} \wedge \vec{A} = \vec{0}$).

On aura : $\vec{C} \wedge \vec{A} = (12 - z)\vec{i} - (3.x + 2.z)\vec{j} + (x + 8)\vec{k} = \vec{0}$

Implique : $\begin{cases} 12 - z = 0 \\ 3\,x + 2\,z = 0 \\ x + 8 = 0 \end{cases}$

On obtient les valeurs de x et z : $\begin{cases} x = -8 \\ z = 12 \end{cases}$

2/ Valeurs de x et z pour laquelle le vecteur $\vec{C}$ soit orthogonal au plan $(\vec{A}, \vec{B})$:

le vecteur $\vec{C}$ soit orthogonal au plan $(\vec{A}, \vec{B})$, lorsque : $\begin{cases} \vec{C}\cdot\vec{A} = 0 \\ \vec{C}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$

On aura, donc : $\begin{cases} \vec{C}\cdot\vec{A} = (x.\vec{i} + 4.\vec{j} + z.\vec{k}).(-2.\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}) = 0 \\ \vec{C}\cdot\vec{B} = (x.\vec{i} + 4.\vec{j} + z.\vec{k}).(2.\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}) = 0 \end{cases}$

On obtient : $\begin{cases} -2\,x + 4 + 3\,z = 0 \\ 2\,x - 4 - z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

3/ Calcul du volume du parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

On pose : $x = 1,\ z = 1.$

Le volume du parallélépipède est donné par la relation suivante :

$$V\,(parallélépipède) = \left|\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})\right|$$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$$

Implique : $V\,(parallélépipède) = \left|\vec{C}.(\vec{A} \wedge \vec{B})\right| = \left|(\vec{i} + 4\,\vec{j} + \vec{k}).(2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}\,)\right|$

$$V\,(parallélépipède) = 18 \text{ unités de volume.}$$

<u>**Exercice 07**</u>

1/ Calcul de la norme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$:

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; alors : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; alors : $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1 + 9 + 9} = \sqrt{19}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; alors : $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$

2/ Vecteurs unitaires $\vec{u}_1$; $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ respectivement :

$$\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{14}\,(-3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k})}{14}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{\sqrt{19}(-\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k})}{19}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{(2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})}{3}$$

3/ Calcul du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -3\,\vec{i} + 7\,\vec{j} - 8\,\vec{k}.$$

4/ Déduction la surface du triangle ABC :

$$S\ (Triangle) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{122}}{2} \text{ unités de surface.}$$

II/ a) Montrons la loi suivante : $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$:

On a : $S(Triangle) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \wedge \overrightarrow{QN}\|}{2} = \frac{c.b.\sin\alpha}{2}$ (1)

$S(Triangle) = \frac{\|\overrightarrow{PN} \wedge \overrightarrow{PQ}\|}{2} = \frac{a.c.\sin\beta}{2}$ (2)

$S(Triangle) = \frac{\|\overrightarrow{NP} \wedge \overrightarrow{NQ}\|}{2} = \frac{a.b.\sin\gamma}{2}$ (3)

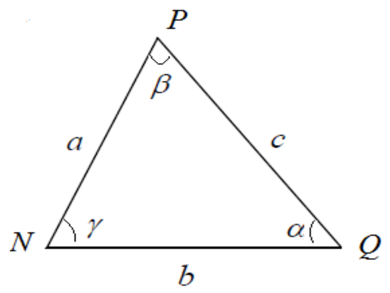


figure 2.12

D'après les trois relations (1), (2) et (3), on obtient la loi du sinus :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\ .$$

b) Démonstration de la relation suivante : $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma}$

D'après *la figure 2.12* ci-dessus et la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{NQ} - \overrightarrow{NP}$$

Donc : $(\overrightarrow{PQ})^2 = (\overrightarrow{NQ} - \overrightarrow{NP})^2 \Rightarrow PQ^2 = NQ^2 + NP^2 - 2.(\overrightarrow{NQ}.\ \overrightarrow{NP})$

$$PQ^2 = NQ^2 + NP^2 - 2.(NQ.\ NP.\cos\gamma)$$

On obtient : $c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma$

Alors : $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\gamma}$

<u>Exercice 08</u>

1/ Expression de la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ en fonction de base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = \cos\theta.\ \vec{i} + \sin\theta.\ \vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta.\ \vec{i} + \cos\theta.\ \vec{j} \\ \vec{u}_z = \vec{k} \end{cases}$$

L'expression de la base sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ en fonction de base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta.\sin\varphi\ \vec{i} + \sin\theta.\sin\varphi.\ \vec{j} + \cos\varphi.\vec{k} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta.\ \vec{i} + \cos\theta.\ \vec{j} \\ \vec{u}_\varphi = \cos\theta.\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta.\cos\varphi.\ \vec{j} - \sin\varphi.\vec{k} \end{cases}$$

2/ Calcul de :

a) $\dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}$; $\dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\sin\theta.\ \vec{i} + \cos\theta.\ \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -(\cos\theta.\ \vec{i} + \sin\theta.\ \vec{j})$$

On déduit leurs expressions dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = -\vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho$$

b) $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\varphi}$; $\dfrac{d\vec{u}_r}{d\theta}$; $\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}$; $\dfrac{d\vec{u}_\varphi}{d\theta}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ainsi que dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$:

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\varphi} = \cos\theta.\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta.\cos\varphi.\ \vec{j} - \sin\varphi.\vec{k} = \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta.\sin\varphi\ \vec{i} + \cos\theta.\sin\varphi.\ \vec{j} = \sin\varphi\ (-\sin\theta.\ \vec{i} + \cos\theta.\ \vec{j}) = \sin\varphi.\ \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi} = -\cos\theta.\sin\varphi\ \vec{i} - \sin\theta.\sin\varphi.\ \vec{j} - \cos\varphi.\vec{k} = -\vec{u}_r$$

$$\frac{d\vec{u}_\varphi}{d\theta} = -\sin\theta.\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta.\cos\varphi.\ \vec{j} = \cos\varphi.(-\sin\theta.\ \vec{i} + \cos\theta.\ \vec{j}) = \cos\varphi.\ \vec{u}_\theta$$

3/ On détermine l'expression du vecteur déplacement élémentaire $\vec{dL}$:

Dans le système des coordonnées cartésiennes :

Le vecteur-position est défini par : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Le point M se déplace dans l'espace, si on dérive l'expression du vecteur-position, on aura l'expression du vecteur déplacement élémentaire suivante : $d\overrightarrow{OM} = d\vec{L} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$

Dans le système des coordonnées cylindriques :

Par définition, le vecteur-position est : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

De même façon, si on dérive l'expression du vecteur-position, on aura l'expression du vecteur déplacement élémentaire, donc : $d\overrightarrow{OM} = d\vec{L} = dr.\vec{u}_\rho + \rho.d\theta.\vec{u}_\rho + dz.\vec{u}_z$

Dans le système des coordonnées sphériques :

Le vecteur-position est défini par : $\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r$.

Alors, l'expression du vecteur déplacement élémentaire, sera :

$d\overrightarrow{OM} = d\vec{L} = dr.\vec{u}_r + r.\sin\varphi.\,d\theta.\vec{u}_\theta + r.d\varphi.\vec{u}_\varphi$

4/ Déduction de la surface d'un disque de rayon *R*

L'expression de l'élément de surface en coordonnées polaires est la suivante : $dS = \rho.d\rho.d\theta$

Implique : $S_{(disque)} = \int\int dS = \int\int \rho.d\rho.d\theta$

Alors : $S_{(disque)} = \int_{\rho=0}^{\rho=R} d\rho.\int_{\theta=0}^{\theta=2.\pi} d\theta = \frac{R^2}{2}.2\pi$

$$S_{(disque)} = \pi.R^2$$

Déduction du volume d'une sphère de rayon *r* :

L'expression de l'élément de volume en coordonnées sphériques est la suivante :

$dV = r^2.dr.\sin\varphi.d\varphi.d\theta$

On intègre dV, donc : $V_{(sphère)} = \int\int\int dV = \int\int\int r^2.dr.\sin\varphi.d\varphi.d\theta$

$$V_{(sphère)} = \int_{r=0}^{r=r} r^2.dr.\int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin\varphi.d\varphi.\int_{\theta=0}^{\theta=2.\pi} d\theta$$

On obtient : $V_{(sphère)} = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^r.[-\cos\varphi]_0^\pi.[\theta]_0^{2\pi}$

$$V_{(sphère)} = \frac{4}{3}.\pi.r^3$$

03 Chapitre 03
Cinématique du Point Matériel

3.1 Définitions Générales

3.1.1 Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes provocantes (*les forces appliquées au point matériel*).

La cinématique doit donner la loi du mouvement qui permet de définir la position du mobile et son état de mouvement à chaque instant, donc elle a pour but de préciser les trajectoires et les lois horaires.

3.1.2 Repère

Il est nécessaire de définir un repère d'espace, pour repérer la position d'une particule.

Cela consiste à choisir une origine O et une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le trièdre $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère d'espace.

3.1.3 Référentiel

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (*repère* + *horloge*). Il est donc un objet par rapport auquel on étudie le mouvement.

Il existe plusieurs référentiels tels que : le référentiel galiléen, le référentiel terrestre, le référentiel géocentrique, le référentiel de Kepler (ou héliocentrique), le référentiel de Copernic et le référentiel barycentrique.

3.1.4 Point matériel

Un point matériel est un corps physique de masse m dont ses dimensions sont négligeables par rapport à la distance sur laquelle on considère son mouvement.

3.1.5 Trajectoire

La trajectoire d'un point matériel mobile dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble de positions successives occupées par le point au cours du temps.

3.2 Cinématique sans changement de référentiel

3.2.1 Expressions de vecteurs position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées

3.2.1.1 En système des coordonnées cartésiennes de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- *Vecteur-position* : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

  Son module : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

- *Vecteur vitesse* : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j} + \dfrac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\,\vec{i} + v_y\,\vec{j} + v_z\,\vec{k}$

Son module : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

- *Vecteur accélération :* $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} = \gamma_x\vec{i} + \gamma_y\vec{j} + \gamma_z\vec{k}$$

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}$

3.2.1.2 En système des coordonnées polaires de la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

- *Vecteur-position :* $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho$

Son module : $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho$

- *Vecteur vitesse :* $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = v_\rho.\vec{u}_\rho + v_\theta.\vec{u}_\theta$

Son module : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\theta})^2}$

- *Vecteur accélération :* $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2).\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}).\vec{u}_\theta$

$$= \gamma_\rho\vec{u}_\rho + \gamma_\theta\vec{u}_\theta$$

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2}$

3.2.1.3 En système des coordonnées cylindriques de la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

- *Vecteur-position :* $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

Son module : $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

- *Vecteur vitesse :* $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{u}_z = v_\rho.\vec{u}_\rho + v_\theta.\vec{u}_\theta + v_z.\vec{u}_z$

Son module : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho.\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$

- *Vecteur accélération :* $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2).\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}).\vec{u}_\theta + \ddot{z}.\vec{u}_z$

$$= \gamma_\rho\vec{u}_\rho + \gamma_\theta\vec{u}_\theta + \gamma_z\vec{u}_z$$

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}$

3.2.1.4 En système des coordonnées sphériques de la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

- *Vecteur-position* : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\vec{u}_r$

  Son module : $\|\overrightarrow{OM}\| = r$

- *Vecteur vitesse* : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\sin\varphi.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + r.\dot{\varphi}.\vec{u}_\varphi = v_r.\vec{u}_r + v_\theta.\vec{u}_\theta + v_\varphi.\vec{u}_\varphi$

  Son module : $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r.\sin\varphi.\dot{\theta})^2 + (r.\dot{\varphi})^2}$

- *Vecteur accélération* : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{r} - r.\dot{\varphi}^2 - r.\sin^2\varphi.\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_r$

$$+ (2r.\cos\varphi.\dot{\varphi}.\dot{\theta} + 2\dot{r}.\sin\varphi.\dot{\theta} + r.\sin\varphi.\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

$$+ (2\dot{r}.\dot{\varphi} + r.\ddot{\varphi} + r.\sin\varphi.\cos\varphi.\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\varphi$$

$$= \gamma_r\,\vec{u}_r + \gamma_\theta\,\vec{u}_\theta + \gamma_\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

  Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_\rho^2 + \gamma_\theta^2 + \gamma_z^2}$

$$= \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\sin^2\varphi.\dot{\theta}^2)^2 + (2r\cos\varphi.\dot{\varphi}.\dot{\theta} + 2\dot{r}\sin\varphi.\dot{\theta} + r\sin\varphi.\ddot{\theta})^2 + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r.\ddot{\varphi} + r\sin\varphi.\cos\varphi.\dot{\theta}^2)^2}$$

3.2.1.5 En coordonnées intrinsèques de la base de SERRET-FRENET $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{b})$

A chaque point M d'une courbe (C), il est possible d'associer le trièdre d'origine M qui est un référentiel tangent à la courbe dont les axes sont définis par les vecteurs unitaires $\vec{u}_T$, $\vec{u}_N$ et $\vec{b}$

avec: $\begin{cases} \vec{u}_T = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dS} = \dfrac{\vec{v}}{v} \\ \dfrac{d\vec{u}_T}{dS} = \dfrac{\vec{u}_N}{R} \\ \vec{b} = \vec{u}_T \wedge \vec{u}_N \end{cases}$

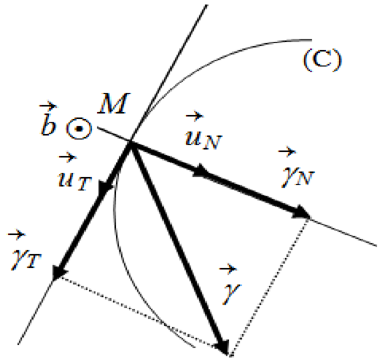


figure 3.1 : Base de SERRET-FRENET

Où : dS est la variation élémentaire de l'abscisse curviligne, $\vec{u}_T$ est le vecteur unitaire de la tangente, R est le rayon de courbure de la trajectoire, $\vec{u}_N$ est le vecteur unitaire de la normale principale, $\vec{b}$ est la bi-normale (orthogonale à $\vec{u}_T$ et à $\vec{u}_N$).

Le trièdre construit sur la base directe ($\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{b}$) est dit trièdre de ***Serret – Frenet***, et le plan contenant les vecteurs $\vec{u}_T$ et $\vec{u}_N$ est appelé plan osculateur.

- *Abscisse curviligne :* $S(t) = S(M) = \overset{\frown}{M_0M}$; l'abscisse curviligne à l'instant t, notée $S(t)$, d'un point matériel M, est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}$ de la trajectoire de M comptée à partir d'une origine M_0 à $t_0 = 0s$.

- *Vecteur vitesse :* $\vec{v} = v.\vec{u}_T = \frac{dS}{dt}.\vec{u}_T$; les composantes du vecteur vitesse sont $\vec{v}\left(\frac{dS}{dt}, 0, 0\right)$.

  Son module : $\|\vec{v}\| = v = \frac{dS}{dt}$.

- *Vecteur accélération* : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}.\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\vec{u}_N = \vec{\gamma}_T + \vec{\gamma}_N$ (*où :* $\gamma_T = \frac{dv}{dt}$, $\gamma_N = \frac{v^2}{R}$).

Les composantes du vecteur accélération sont $\vec{\gamma}\,(\gamma_T, \gamma_N, 0)$.

Son module : $\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\gamma_T^{\,2} + \gamma_N^{\,2}} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

Le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ est la somme d'un vecteur accélération tangentielle $\vec{\gamma}_T$ porté par la tangente et d'un vecteur accélération normale $\vec{\gamma}_N$ porté par la normale principale.

3.3 Mouvement rectiligne

Un mouvement est rectiligne si sa trajectoire est une ligne droite.

3.3.1 Un *mouvement rectiligne uniforme* est le mouvement d'un corps ponctuel se déplaçant en ligne droite et à vitesse constante dans le référentiel de l'observateur.

3.3.2 Un *mouvement rectiligne uniformément varié* est le mouvement lorsque la trajectoire est une portion d'une droite, la vitesse est une fonction du temps. L'accélération garde la même direction, le même sens et la même valeur.

	Mouvement rectiligne uniforme	**Mouvement rectiligne uniformément varié**
Position	$x = v.t + x_0$	$x = \frac{1}{2}.\gamma.t^2 + v_0.t + x_0$
Vitesse	$v = v_0 = cte$	$v = \gamma.t + v_0$
Accélération	$\gamma = 0$	$\gamma = \gamma_0 = cte$

3.4 Mouvement circulaire

Un mouvement est circulaire si sa trajectoire est un cercle.

Nous repérons le point sur le cercle par l'angle φ que fait la droite OM avec l'axe Ox.

3.4.1 *Un mouvement circulaire uniforme* est le mouvement si l'angle φ croit d'une manière uniforme.

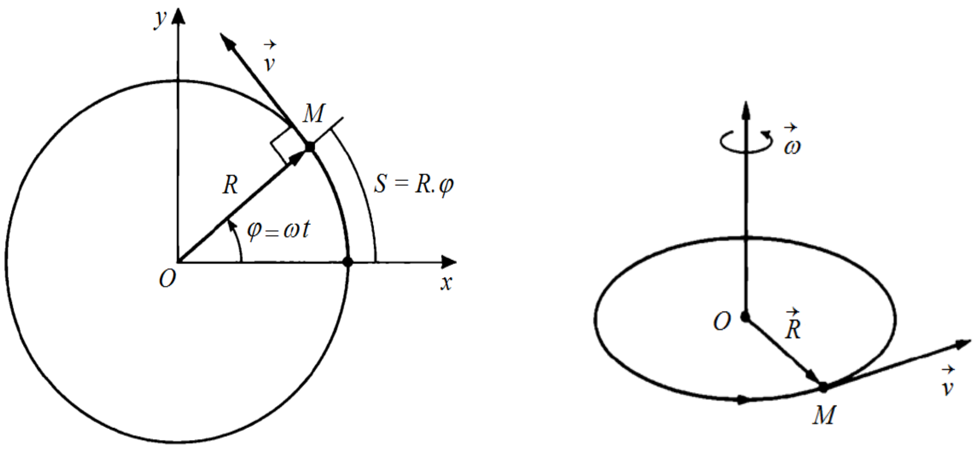


figure 3.2 : Mouvement circulaire

3.4.2 Un *mouvement circulaire uniformément varié* est caractérisé par une trajectoire *circulaire* et une accélération angulaire constante.

	Mouvement circulaire uniforme	**Mouvement circulaire uniformément varié**
Position	$\varphi = \dot{\varphi}.t + \varphi_0$	$\varphi = \frac{1}{2}\ddot{\varphi}.t^2 + \dot{\varphi}_0.t + \varphi_0$
Vitesse angulaire	$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = cte$	$\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}.t + \dot{\varphi}_0$
Accélération angulaire	$\ddot{\varphi} = 0$	$\gamma = \ddot{\varphi}_0 = cte$

3.5 Cinématique avec changement de référentiel

3.5.1 Mouvements absolu et relatif :

Soit un référentiel $(\mathscr{R})$ fixe au cours du temps, $(\mathscr{R}')$ un référentiel en mouvement (mobile) par rapport à $(\mathscr{R})$ et M un point qui se déplace par rapport à $(\mathscr{R})$ et à $(\mathscr{R}')$ (*figure 3.3*).

Le mouvement de M par rapport à $(\mathscr{R})$ est appelé mouvement *absolu*, par rapport à $(\mathscr{R}')$ est dit mouvement *relatif.*

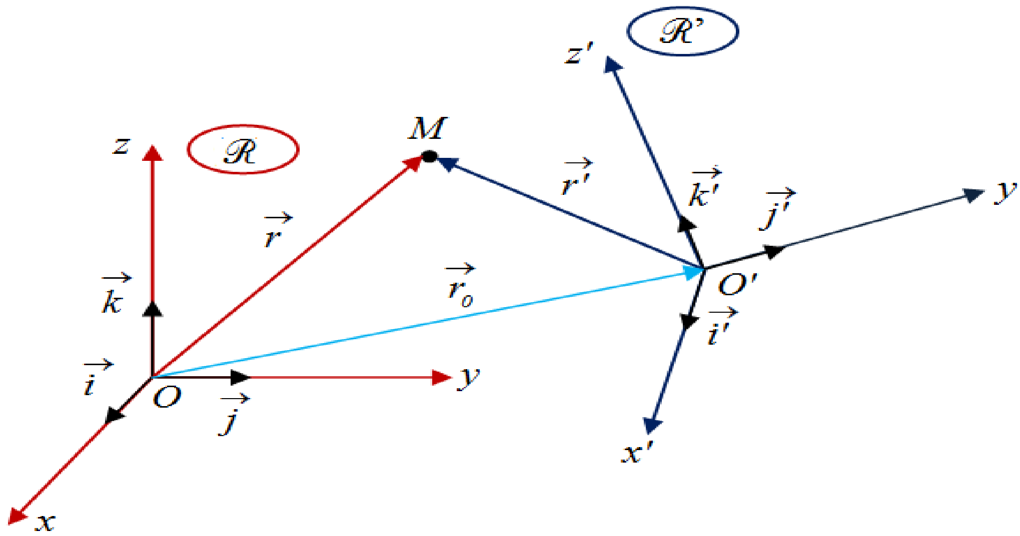


figure 3.3 : Mouvements absolu et relatif

3.5.2 Théorème de composition des vitesses :

Le vecteur vitesse absolue est égal à la somme des vecteurs vitesses relative et d'entraînement : $\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r$.

Démonstration :

On considère que (x, y, z) sont les coordonnées du point M dans le repère fixe $(\mathscr{R})(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (x', y', z') sont les coordonnées du point M dans le repère mobile $(\mathscr{R}')(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

D'après *la figure 3.3*, on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$.

Or : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$; $\overrightarrow{O'M} = x'.\vec{i}' + y'.\vec{j}' + z'.\vec{k}'$.

La dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}$, donne :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt} + \frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}'.$$

Le terme $\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + x'.\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'.\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$ est la *vitesse d'entraînement* $(\vec{v}_e)$ et représente la vitesse du repère mobile $(\mathscr{R}')$ par rapport au repère fixe $(\mathscr{R})$ (*vitesse du point coïncidant*).

Le terme $\left(\frac{dx'}{dt}.\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}.\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}.\vec{k}'\right)$ est la *vitesse relative* $(\vec{v}_r)$ qui représente la vitesse du point M dans le repère mobile $(\mathscr{R}')$.

On peut démontrer que :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \breve{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}$$

3.5.3 Théorème de composition des accélérations :

Le vecteur-accélération absolue est égal à la somme vectorielle des vecteurs-accélérations relative, d'entraînement et de Coriolis : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_a + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$.

Démonstration :

Par définition, l'accélération absolue $\vec{\gamma}_a$ sera : $\vec{\gamma}_a = \dfrac{d\vec{v}_a}{dt}$.

Si on dérive le vecteur $\vec{v}_a$ par rapport au temps, on obtient le vecteur-accélération absolue définit dans le repère fixe ($\mathscr{R}$) :

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\,\vec{v}_a}{dt} = \frac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \frac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \frac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,' + 2.\frac{dx'}{dt}.\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + 2.\frac{dy'}{dt}.\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + 2.\frac{dz'}{dt}.\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$$

$$+ x'\frac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}$$

Le terme $\left(\dfrac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + x'\dfrac{d^2\vec{i}\,'}{dt^2} + y'\dfrac{d^2\vec{j}\,'}{dt^2} + z'\dfrac{d^2\vec{k}\,'}{dt^2}\right)$ est appelé *accélération d'entraînement* $\vec{\gamma}_e$.

Le terme $\left(\dfrac{d^2x'}{dt^2}\vec{i}\,' + \dfrac{d^2y'}{dt^2}\vec{j}\,' + \dfrac{d^2z'}{dt^2}\vec{k}\,'\right)$ est appelé *accélération relative* $\vec{\gamma}_r$.

Le terme $\left(2.\left(\dfrac{dx'}{dt}.\dfrac{d\vec{i}\,'}{dt} + \dfrac{dy'}{dt}.\dfrac{d\vec{j}\,'}{dt} + \dfrac{dz'}{dt}.\dfrac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)\right)$ est appelé *accélération de Coriolis* $\vec{\gamma}_c$.

Finalement, on trouve le théorème de composition des accélérations : $\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_a + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$.

On peut démontrer que :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\,\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}).$$

$$\vec{\gamma}_c = 2.\,\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_r$$

Enoncés des exercices

Exercice 01

Dans un repère cartésien orthonormé *(XOY)* muni d'une base cartésienne $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes $M(at\ ;\ bt^2)$; où t représente le temps en (s). a et b sont des constantes.

1) Déterminer les sens physiques des constantes a et b.
2) Exprimer les vecteurs, position, vitesse et accélération du point M.
3) Trouver l'équation de la trajectoire du point M, et en déduire sa nature.

Exercice 02

Dans un repère cartésien orthonormé (Oxy), on considère un corps M qui se déplace selon les équations horaires suivantes : $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = \dfrac{1}{2}t - 2 \end{cases}$ où : x et y en mètre et t en secondes.

1) Trouver l'équation de la trajectoire du corps M.
2) Représenter la trajectoire dans les cas suivants : $t \in [0\ ;\ 2]\ s$; $t \geq 0s$, et en déduire sa nature dans les deux cas.
3) Déterminer le rayon R de courbure.

Exercice 03

L'abscisse curviligne d'une particule en mouvement est donnée par la relation suivante :

$$S(t) = t^3 + 2.t^2.$$

La norme de son accélération est : $\gamma = 16.\sqrt{2}\ (cm.s^{-2})$.

1) Trouver la norme des accélérations, tangentielle et normale à l'instant $t = 2s$.
2) Déduire le rayon de courbure à l'instant $t = 2s$.

Exercice 04

Le mouvement d'un point matériel M, se déplaçant dans le plan (Oxy) de base $(\vec{i}, \vec{j})$, est caractérisé par son vecteur donné par : $\overrightarrow{OM} = (2t + 2)\vec{i} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t + \frac{1}{2}\right)\vec{j}$

1) Donner l'équation de la trajectoire de M. Quelle est sa nature ?
2) Calculer la vitesse de M et donner sa norme.
3) Calculer l'accélération de M et donner sa norme.

4) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération du mobile *M*.
5) Déduire le rayon de courbure *R* de la trajectoire en point *M*.

Exercice 05

Un point *M* se déplace dans l'espace (*figure 3.4*).

En coordonnées cylindriques, ce point *M* est repéré par $M(\rho, \theta, z)$.

1) Exprimer l'expression du vecteur-position $\overrightarrow{OM}$.
2) Trouver le vecteur vitesse $\vec{v}$.
3) Montrer que le vecteur-accélération est donnée par la relation :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

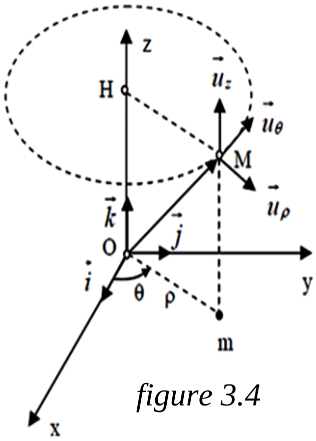


figure 3.4

Exercice 06

Les coordonnées cartésiennes d'un point matériel *M* qui se déplace dans le repère orthonormé *(XOY)* sont données par les équations : $\begin{cases} x = e^{\theta}.\cos\theta \\ y = e^{\theta}.\sin\theta \end{cases}$

Où : $\theta = \omega.t$.

1) Exprimer les vecteurs, vitesse et accélération dans la base cartésienne, et trouver leurs modules.
2) Trouver l'équation de la trajectoire du mouvement en coordonnées polaires.
3) Exprimer les vecteurs, position, vitesse et accélération en coordonnées polaires.
4) Déterminer le module de l'accélération tangentielle γ_T et normale γ_N.
5) Déduire le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant $t = 0s$.

Exercice 07

Dans le plan *(XOY)*, On considère un mouvement d'une particule *M* définit en coordonnées cartésiennes par les équations : $\begin{cases} x = L.\,(t - \sin(\omega t)) \\ y = L.\,(1 - \cos(\omega t)) \end{cases}$

Où : *L* et ω sont des constantes positives.

1) Déterminer l'expression des vecteurs, position, vitesse et accélération de cette particule dans le système des coordonnées cartésiennes.
2) Calculer l'angle formé par les vecteurs : vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$.
3) Déterminer les modules des accélérations tangentielle et normale.
4) Déduire le rayon $\mathscr{R}$ de courbure de la trajectoire à l'instant *t*.

On donne : $\sin(\omega t) = 2.\sin(\frac{\omega t}{2}).\cos(\frac{\omega t}{2})$.

Exercice 08

Un mouvement d'un point matériel M est repéré par ses coordonnées polaires $(\rho \text{ et } \theta)$:

$$\begin{cases} \rho = (1 - \sin\theta) \\ \theta = \omega.t \end{cases}$$ où : ω est une constante positive.

1) Exprimer les vecteurs, position, vitesse et accélération dans le système polaire.
2) Déterminer la norme du vecteur, position, vitesse et accélération.
3) Représenter la trajectoire du mouvement du mobile M dans l'intervalle $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$.
4) Déduire le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant $t = 0(s)$.
5) Trouver l'angle α formé entre le vecteur-vitesse et le vecteur-accélération.

Exercice 09

Dans le système des coordonnées polaires de base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. Une particule M de masse m se déplace dans le plan. Son mouvement est décrit par les équations : $\begin{cases} \rho = r_0.e^{-\frac{t}{a}} \\ \theta(t) = \dfrac{t}{a} \end{cases}$

Où : r_0 et a sont des constantes positives, et t représente le temps en (s).

1) Exprimer les vecteurs $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ en fonction de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la base cartésienne.
2) Déduire l'orthogonalité des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$.
3) Déterminer les vecteurs : position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$ de cette particule.
4) Calculer l'angle α formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$, ainsi l'angle β formé par $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$.
5) Déduire le rayon de courbure de la trajectoire à l'instant $t = 0s$.

Exercice 10

Un point M se déplace dans l'espace. Son mouvement est donné par :

$$\begin{cases} x = a.\cos\theta \\ y = a.\sin\theta \\ z = h.\theta \end{cases}$$

Où : a est le rayon de la base du cylindre de révolution sur lequel est tracée l'hélice, h est une constante positive et $\theta = t$ est l'angle que fait avec Ox la projection de $\overrightarrow{OM'}$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan (Oxy).

I/ En coordonnées cartésiennes de la base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

a) Déterminer équation de la trajectoire du point M', et en déduire sa nature.
b) Trouver la nature du mouvement du point M suivant l'axe vertical Oz.
c) Conclure la nature de la trajectoire du mobile M dans le l'espace.

II/ En coordonnées cylindriques de la base directe $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$,

a) trouver les vecteurs : vecteur-position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$.

b) montrer que le vecteur-vitesse fait avec le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$ un angle constant.

c) calculer le rayon de courbure de la trajectoire.

Exercice 11

Les coordonnées d'une particule M dans le référentiel $(\mathscr{R})$ muni d'un repère fixe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont: $\begin{cases} x(t) = t^2 + 4t \\ y(t) = -2t^3 \\ z(t) = t^2 \end{cases}$ et dans le référentiel $(\mathscr{R}')$ muni d'un repère mobile $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ par rapport à $(\mathscr{R})$ sont : $\begin{cases} x'(t) = t^2 - t + 2 \\ y'(t) = -2t^3 + 1 \\ z'(t) = t^2 - 1 \end{cases}$

On suppose que : $\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{j} = \vec{j}'$ et $\vec{k} = \vec{k}'$.

1) Exprimer le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans $(\mathscr{R})$ et le vecteur vitesse $\vec{v}'$ dans $(\mathscr{R}')$.
2) Déduire la vitesse d'entraînement.
3) Exprimer l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}$ dans $(\mathscr{R})$ et le vecteur l'accélération $\vec{\gamma}'$ dans $(\mathscr{R}')$.
4) En déduire les accélérations d'entraînement et de Coriolis.

Exercice 12

On considère un repère relatif $(\mathscr{R}')$ tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à un repère absolu $(\mathscr{R})$ fixe dans l'espace.

La vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est donnée par la relation suivante :

$$\vec{\omega} = (2.t)\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + (t+1)\,\vec{k}$$

Un point matériel M se déplace, où son vecteur-position est donné par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (t^2 + 1)\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$$

1) Déterminer la vitesse absolue du point M, ainsi son module à l'instant $t = 1s$.
2) Trouver la vitesse relative du point M, ainsi sa norme à l'instant $t = 1s$.
3) Trouver l'accélération Coriolis du point M à l'instant $t = 1s$ et en déduire sa norme.

Exercice 13

Dans une compétition de natation, les nageurs veulent parcourir ***500 m*** pour atteindre la ligne d'arrivée.

A l'instant ***t = 0s***, un nageur se trouve au point *O*. Il nage perpendiculairement à l'écoulement d'eau, avec une vitesse constante ***4 km/h*** par rapport à l'eau. La vitesse de l'écoulement d'eau par rapport au sol est ***3 km/h*** (*voir figure 3.5*).

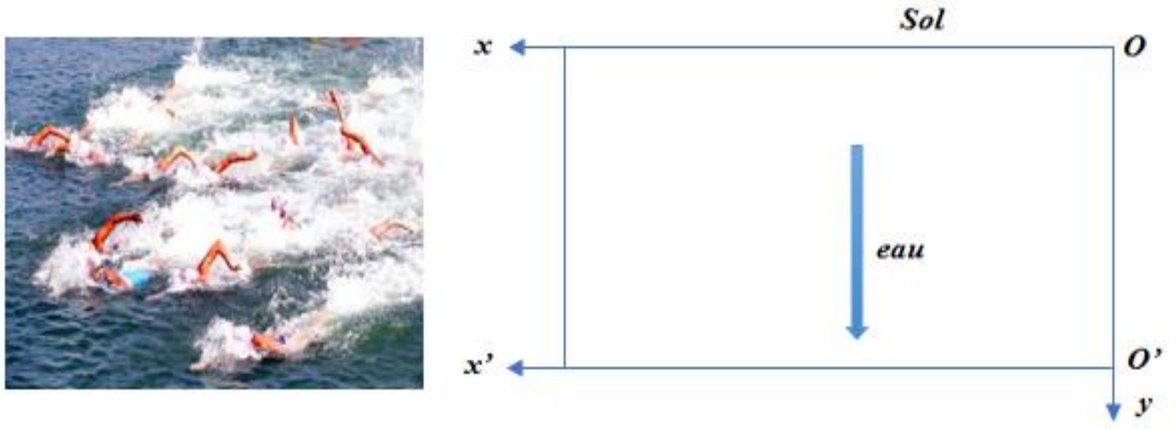


figure 3.5

1) Calculer la vitesse du nageur par rapport au sol.
2) Représenter, sur *la figure 3.5*, au point *O* les différents vecteurs vitesses (*relative, d'entraînement et absolue*).
3) Déduire la direction de la vitesse du nageur par rapport au sol.
4) Calculer la distance parcourue par le nageur pour atteindre la ligne d'arrivée.

Exercice 14

On considère un repère relatif $R(O, xyz)$ qui tourne uniformément autour du repère absolu $R_0(O_0, x_0y_0z_0)$ de telle sorte que leurs origines O et O_0 et leurs axes Oz et O_0z_0 restent confondus à tout instant t. Soit l'angle $\theta = \omega t$ entre les axes Ox et O_0x_0.

Soit une barre (D) fixée dans le repère R, parallèle à l'axe Oz et passe par le point A où :

$\overrightarrow{OA} = \alpha.\vec{j}$ (*figure 3.6*).

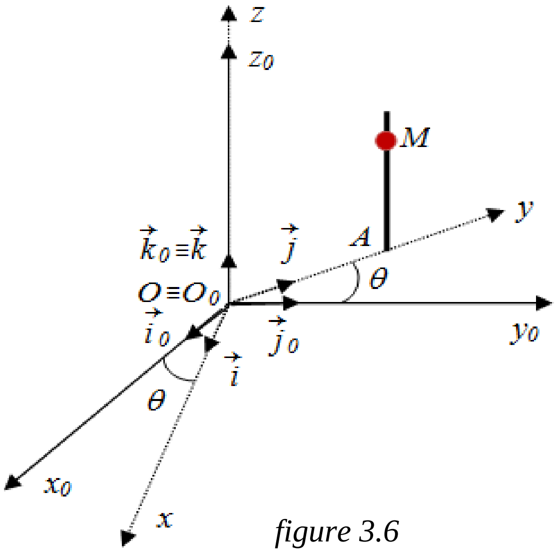


figure 3.6

Un point matériel *M* se déplace sur cette barre selon la relation suivante : $\overrightarrow{AM} = e^{-\theta}.\,\vec{k}$

1) Déterminer la vitesse et l'accélération relatives du point *M*.
2) Trouver la vitesse et l'accélération d'entraînement.
3) Calculer l'accélération Coriolis.
4) Déduire la vitesse et l'accélération absolues du point M.

<u>Exercice 15</u>

Un point matériel *M* de masse *m*, glisse sans frottement sur une tige rigide *(D) (figure 3.7)*.
La tige *(D)* tourne dans un plan horizontal *(Oxy)* autour de l'axe vertical *Oz* avec la vitesse angulaire constante $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega$ où : θ représente l'angle orienté $(\vec{i}\ ;\ \vec{i}\,')$ et $\vec{i}\,'$ un vecteur unitaire de la tige *(D)*.

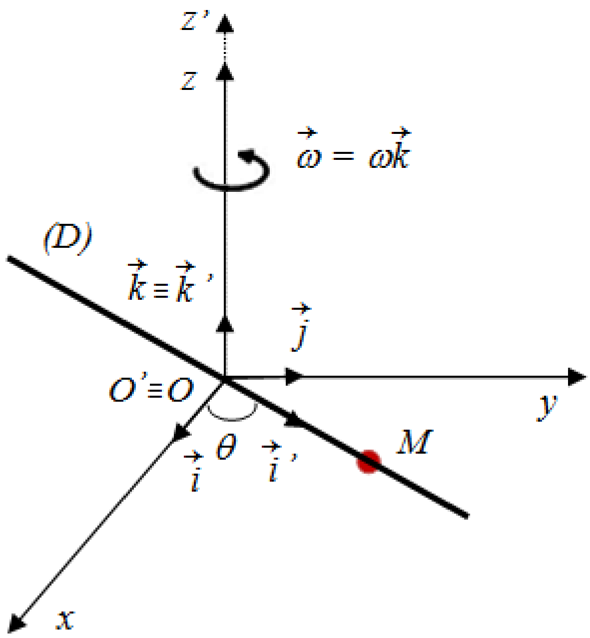


figure 3.7

Le point matériel *M* se déplace sur la droite *(D)* selon la relation :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r.\ \vec{i}\,' = r_0.(1 + \sin\omega t).\ \vec{i}\,'$$

Où r_0 est une constante positive.

1) Déterminer la vitesse et l'accélération relatives.
2) Calculer la vitesse et l'accélération d'entraînement.
3) Calculer l'accélération de Coriolis.
4) En déduire la vitesse et l'accélération absolues.

Solutions des exercices

Exercice 01

On a les équations horaires du mouvement : $\begin{cases} x = a.t \\ y = b.t^2 \end{cases}$

1/ On détermine le sens physique des constantes *a* et *b* :

En utilisant l'analyse dimensionnelle, on obtient :

$[x] = [a].[t]$ donc : $[a] = \dfrac{[x]}{[t]} = L.T^{-1}$; alors a : représente la vitesse.

$[y] = [b].[t]^2$ donc : $[b] = \dfrac{[y]}{[t]^2} = L.T^{-2}$; alors b : représente l'accélération.

2/ Vecteurs : vecteur-position, vitesse et accélération :

Le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$: $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (a.t).\vec{i} + (b.t^2).\vec{j}$

Le vecteur-vitesse $\vec{v}$: $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (a).\vec{i} + (2.b.t).\vec{j}$

Le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$: $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (2.b).\vec{j}$

3/ Equation de la trajectoire :

On a : $\begin{cases} x = a.t & (1) \\ y = b.t^2 & (2) \end{cases}$

D'après la relation (1) on a : $t = \dfrac{x}{a}$, remplaçant dans (2), on obtient l'équation de la trajectoire suivante : $y = \dfrac{b}{a^2}.x^2 \qquad (3)$

La dernière équation (3) est une équation d'une parabole. Alors la trajectoire est un arc parabolique.

Exercice 02

Nous avons les équations horaires suivantes : $\begin{cases} x = -t + 1 & (1) \\ y = \dfrac{1}{2}t - 2 & (2) \end{cases}$

1/ Equation de la trajectoire :

D'après la relation (1) on a : $t = -x + 1$, remplaçant dans (2), on obtient l'équation de la trajectoire : $y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

2/ On représente la trajectoire dans les cas suivants : $t \in [0 \; ; \; 2]$ s ; $t \geq 0s$.

1^er cas : $t \in [0 \; ; \; 2]$ s

Lorsque : $t = 0\ s$ ➡ $x = 1$ et $y = -2$

$t = 2\ s$ ➡ $x = -1$ et $y = -1$

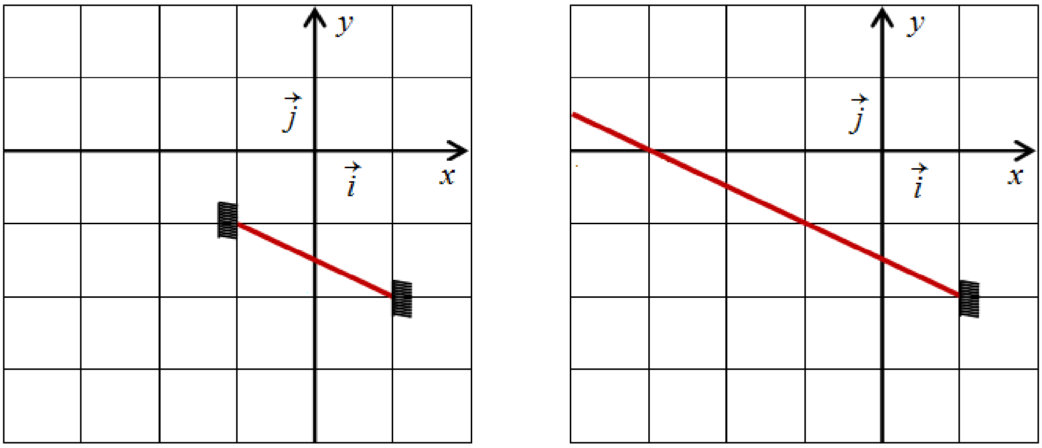
La nature de la trajectoire est un *segment d'une droite*.

2^eme cas : $t \geq 0\ s$

Lorsque : $t = 0\ s$ ➡ $x = 1$ et $y = -2$

$t \longrightarrow +\infty$ ➡ $x \longrightarrow -\infty$ et $y \longrightarrow \infty$

La nature de la trajectoire est *demi-droite*.



1^er cas *2^eme cas*

figure 3.8

3/ Déterminons le rayon R de courbure :

Premièrement, on trouve les composantes de la vitesse et de l'accélération :

Le vecteur-position : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = (-t+1).\vec{i} + (\frac{1}{2}t - 2).\vec{j}$

Le vecteur-vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\vec{i} + \frac{1}{2}.\vec{j}$

Le vecteur-accélération : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$

On calcule, maintenant, l'accélération tangentielle et normale :

Par définition : $\gamma_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$; tel que la norme de $\vec{v}$ est : $\|\vec{v}\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ donc : $\gamma_T = 0$

Ainsi : $\gamma^2 = \gamma_T^{\,2} + \gamma_n^{\,2}$ alors : $\gamma_n^{\,2} = \gamma^2 - \gamma_T^{\,2}$, on obtient : $\gamma_N = 0$

Le rayon de courbure est défini par : $R_C = \frac{v^2}{\gamma_N}$

Alors : $R_C = \frac{v^2}{\gamma_n} = +\infty$.

Exercice 03

L'abscisse curviligne d'une particule est donnée par : $S(t) = t^3 + 2.t^2$.

La norme de son accélération est : $\gamma = 16.\sqrt{2}\,(cm.s^{-2})$.

1/ Norme des accélérations, tangentielle et normale à l'instant $t = 2s$

La norme de vitesse : $v = \dfrac{dS}{dt} = 3.t^2 + 4.t$

Implique : à l'instant $t = 2s$: $v(2s) = 20\ cm/s$

L'accélération tangentielle : $\gamma_T = \dfrac{dv}{dt} = 6.t + 4$

Implique : à l'instant $t = 2s$: $\gamma_T(2s) = 16\ m/s^2$

L'accélération normale : $\gamma_N\,(2s) = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T{}^2} = 16\ cm/s^2$

2/ Déduction du rayon de courbure R_C à l'instant $t = 2s$.

Le rayon de courbure est défini par : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N}$

Alors : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_n} = \dfrac{20^2}{16} = 25\ cm.$

Exercice 04

Les équations paramétriques du point matériel M sont : $\overrightarrow{OM} = \begin{cases} x = 2.t + 2 & (1) \\ y = \dfrac{1}{2}.t^2 + t + \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$

1/ Equation de la trajectoire du point matériel *M* :

Pour déterminer l'équation de la trajectoire on élimine le temps t :

Donc, d'après l'équation (1) on a : $t = \dfrac{x-2}{2}$ $\quad (3)$

En remplaçant l'équation (3) dans l'équation (2), on obtient :

$$y = \frac{1}{2}.\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{x-2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.x^2 \qquad (4)$$

La nature de la trajectoire :

L'équation (4) est une équation d'une parabole, donc la trajectoire est un arc parabolique.

2/ Calcul de la vitesse du point matériel *M* et sa norme :

Le vecteur-vitesse est par définition : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = 2.\vec{i} + (t+1).\,\vec{j}$

Sa norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + (t+1)^2} = \sqrt{t^2 + 2.t + 5}\ m/s$

3/ Calcul de l'accélération de *M* et sa norme :

Le vecteur-accélération est par définition : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

Donc: $\vec{\gamma} = \dfrac{d(2.\vec{i} + (t+1).\vec{j})}{dt} = \vec{j}$

Sa norme est, alors : $\|\vec{\gamma}\| = 1\ m/s^2$

4/ Composantes, tangentielle et normale de l'accélération de *M*.

$$\gamma_T = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \frac{d(\sqrt{t^2 + 2.t + 5})}{dt} = \frac{2.t + 2}{2\sqrt{t^2 + 2.t + 5}} = \frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2.t + 5}}$$

$$\gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T{}^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2 + 2.t + 5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{(t+1)^2 + 4} - (t+1)}{\sqrt{(t+1)^2 + 4}}$$

5/ Rayon de courbure de la trajectoire à l'instant *t = 0s*.

Par définition on a : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N}$

Alors : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_n} = \dfrac{t^2 + 2.t + 5}{\dfrac{\sqrt{(t+1)^2 + 4} - (t+1)}{\sqrt{(t+1)^2 + 4}}}$

A l'instant $t = 0\ s$: $R_C(0) = \dfrac{5}{\dfrac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5}}} = \dfrac{5.\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = \dfrac{5}{4}.(5 + \sqrt{5})m$

<u>Exercice 05</u>

1/ Vecteur-position en coordonnées cylindriques :

Le vecteur-position est défini par : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$

2/ Vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(\rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z)}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{u}_z$$

3/ Expression du vecteur-accélération en coordonnées cylindriques :

On a : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \dfrac{d(\dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{u}_z)}{dt}$

Alors : $\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2).\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}).\vec{u}_\theta + \ddot{z}.\vec{u}_z$

<u>Exercice 06</u>

On a : $\begin{cases} x = e^\theta.\cos\theta \\ y = e^\theta.\sin\theta \end{cases}$; où : $\theta = \omega.t.$

1/ Vecteurs vitesse et accélération dans la base cartésienne :

$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = (e^\theta.\cos\theta)\,\vec{i} + (e^\theta.\sin\theta)\,\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \omega.e^{\theta}.(\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{i} + \omega.e^{\theta}.(\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2.e^{\theta}.(\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{i} - \omega^2.e^{\theta}.(\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{i}$$

$$+ \omega^2.e^{\theta}.(\sin\theta + \cos\theta)\,\vec{j} + \omega^2.e^{\theta}.(\cos\theta - \sin\theta)\,\vec{j}$$

$$\vec{\gamma} = (-2.\omega^2.e^{\theta}.\sin\theta)\,\vec{i} + (2.\omega^2.e^{\theta}.\cos\theta)\,\vec{i}$$

On déduit la norme des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\omega^2.e^{2\theta}.(\cos\theta - \sin\theta)^2 + \omega^2.e^{2\theta}.(\sin\theta + \cos\theta)^2} = \sqrt{2}.\omega.e^{\theta}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(-2.\omega^2.e^{\theta}.\sin\theta)^2 + (2.\omega^2.e^{\theta}.\cos\theta)^2} = 2.\omega^2.e^{\theta}$$

2/ Equation de la trajectoire du mouvement en coordonnées polaires :

On a : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(e^{\theta}.\cos\theta)^2 + (e^{\theta}.\sin\theta)^2}$

$\rho = e^{\theta}$

3/ Vecteurs position, vitesse et accélération en coordonnées polaires :

Le vecteur-position : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_{\rho} = e^{\theta}.\vec{u}_{\rho}$

Le vecteur-vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \omega.e^{\theta}.\vec{u}_{\rho} + \omega.\,e^{\theta}.\vec{u}_{\theta}$

Le vecteur-accélération : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = 2.\omega^2.e^{\theta}.\vec{u}_{\theta}$

4/ Module de l'accélération tangentielle γ_T et normale γ_N.

On a : $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}.\omega.e^{\theta}$ et $\|\vec{\gamma}\| = 2.\omega^2.e^{\theta}$

L'accélération tangentielle : $\gamma_T = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \sqrt{2}.\omega^2.e^{\theta}$

L'accélération normale : $\gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T^2} = \sqrt{4.\omega^4.e^{2\theta} - 2.\omega^4.e^{2\theta}}$

$\gamma_N = \sqrt{2}.\omega^2.e^{\theta}$

5/ Rayon de courbure de la trajectoire à l'instant *t* = *0s*.

Le rayon de courbure est défini par : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N}$

Implique : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N} = \dfrac{2.\omega^2.e^{2\theta}}{\sqrt{2}.\omega^2.e^{\theta}} = \sqrt{2}.e^{\theta}$

A l'instant $t = 0s$: $R_C(0) = \sqrt{2}\,m$.

Exercice 07

On a les équations horaires : $\begin{cases} x = L(\omega.t - sin(\omega t)) \\ y = L(1 - cos(\omega t)) \end{cases}$, L et ω sont des constantes positives.

1/ Vecteurs : position, vitesse et accélération dans le système des coordonnées cartésiennes :

Le vecteur-position : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} = L(\omega.t - sin\omega t)\,\vec{i} + L(1 - cos\omega t)\,\vec{j}$

Le vecteur-vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = L\omega\,(1 - cos\omega t)\,\vec{i} + (L\omega.sin\omega t)\,\vec{j}$

Le vecteur-accélération : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = (L\omega^2.sin\omega t)\,\vec{i} + (L\omega^2.cos\omega t)\,\vec{j}$

2/ Calcul de l'angle α formé par les vecteurs : vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$:

La norme des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{\gamma}$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{L^2\omega^2\,(1 - cos\omega t)^2 + (L\omega.sin\omega t)^2} = 2.L\omega.sin(\frac{\omega t}{2})$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{(L\omega^2.sin\omega t)^2 + (L\omega^2.cos\omega t)^2} = L\omega^2$$

En utilisant le produit scalaire :

$$cos\ \alpha = \frac{\vec{v}\,.\,\vec{\gamma}}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{\gamma}\|} = \frac{(L^2.\omega^3.sin(\omega t))}{(2.L^2.\omega^3.sin(\frac{\omega t}{2}))} = \frac{sin(\omega t)}{2.sin(\frac{\omega t}{2})} = \frac{2.sin(\frac{\omega t}{2}).cos(\frac{\omega t}{2})}{2.sin(\frac{\omega t}{2})} = cos(\frac{\omega t}{2})$$

Alors devient: $\alpha = \dfrac{\omega t}{2}$

3/ Module des accélérations tangentielle et normale :

L'accélération tangentielle : $\gamma_T = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = L.\omega^2.cos(\dfrac{\omega t}{2})$

L'accélération normale : $\gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T^2} = \sqrt{L^2.\omega^4 + L^2.\omega^4.\ cos^2(\dfrac{\omega t}{2})} = L.\omega^2.sin(\dfrac{\omega t}{2})$

4/ Rayon $\mathscr{R}_C$ de courbure de la trajectoire à l'instant *t* :

$$\mathscr{R}_C = \frac{v^2}{\gamma_N} = \frac{4.L^2\omega^2.sin^2(\frac{\omega t}{2})}{L.\omega^2.sin(\frac{\omega t}{2})} = 4.L.sin(\frac{\omega t}{2})$$

Exercice 08

Un mouvement d'un point matériel *M* est repéré par : $\begin{cases} \rho = (1 - sin\theta) \\ \theta = \omega.t \end{cases}$

Où : ω est une constante positive, *t* le temps en *(s)*.

1/ Vecteurs, position, vitesse et accélération dans le système polaire:

Le vecteur-position : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho = (1 + \sin\theta).\vec{u}_\rho$

Le vecteur-vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \cos\theta.\,\vec{u}_\rho + \omega.(1 + \sin\theta).\vec{u}_\theta$

Le vecteur-accélération : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\,\omega^2.(1 + 2.\,\sin\theta).\vec{u}_\rho + 2.\omega^2.\cos\theta.\vec{u}_\theta$

2/ La norme des vecteurs, position, vitesse et accélération :

La norme de $\overrightarrow{OM}$: $\|\overrightarrow{OM}\| = \rho = 1 + \sin\theta$

La norme de $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| = \omega\,.\sqrt{2 + 2.\,\sin\theta}$

La norme de $\vec{\gamma}$: $\|\vec{\gamma}\| = \omega^2.\sqrt{5 + 4.\,\sin\theta}$

3/ Représentation de la trajectoire du mouvement de *M* dans l'intervalle $\theta \in [0\,;\,2\pi]$.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1

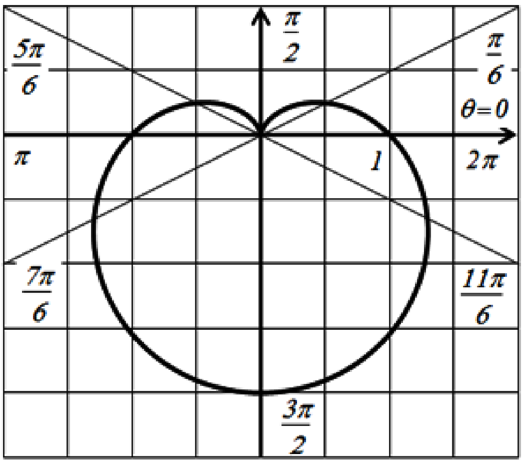


figure 3.9

4/ Calcul du rayon de courbure de la trajectoire :

Le rayon de courbure est défini par : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N}$;

Nous avons : $\gamma^2 = \gamma_T^{\,2} + \gamma_n^{\,2}$ alors : $\gamma_n^{\,2} = \gamma^2 - \gamma_T^{\,2}$

Aussi : $v^2 = \omega^2.(2 + 2.\sin\theta)$ et $\gamma_T = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \dfrac{\omega^2.\cos\theta}{\sqrt{2 + 2.\,\sin\theta}}$

Donc: $\gamma_n = \omega^2.\sqrt{5+4.\sin\theta - \dfrac{\cos^2\theta}{2+2.\sin\theta}}$

Alors : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_n} = \dfrac{\omega^2.(2+2.\sin\theta)}{\omega^2.\sqrt{5+4.\sin\theta - \dfrac{\cos^2\theta}{2+2.\sin\theta}}} = \dfrac{2+2.\sin\theta}{\sqrt{5+4.\sin\theta - \dfrac{\cos^2\theta}{2+2.\sin\theta}}}$

On déduit sa valeur à l'instant $t = 0s$: $R_C(0) = \dfrac{2.\sqrt{2}}{3}\ (m)$

5/ Calcul du produit scalaire $\vec{v}.\vec{\gamma}$:

$\vec{v}.\vec{\gamma} = (\omega.\cos\theta)(-\omega^2.(1 + 2.\sin\theta) + (\omega.(1 + \sin\theta)(2.\omega^2.\cos\theta) = \omega^3.\cos\theta$

<u>Exercice 09</u>

Un mouvement d'une particule est décrit par : $\begin{cases} \rho = r_0.e^{-\frac{t}{a}} \\ \theta(t) = \dfrac{t}{a} \end{cases}$

Où : r_0 et a sont des constantes positive, et t représente le temps en (s).

1/ Vecteurs $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$ en fonction de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de la base cartésienne :

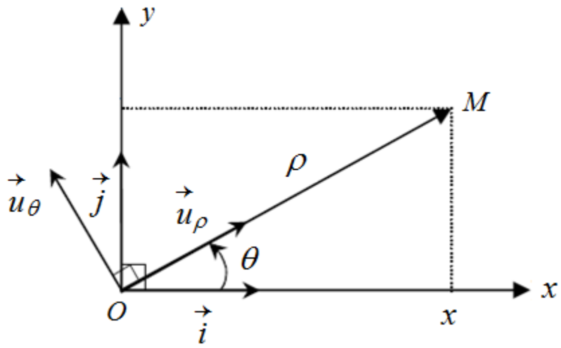


figure 3.10

D'après *la figure 3.10* ci-dessus, le vecteur unitaire $\vec{u}_\rho$ dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$, s'écrit :

$$\vec{u}_\rho = \|\vec{u}_{\rho x}\|.\vec{i} + \|\vec{u}_{\rho y}\|.\vec{j}$$

Sachant que : $\cos\theta = \dfrac{\|\vec{u}_{\rho x}\|}{\|\vec{u}_\rho\|} \Rightarrow \|\vec{u}_{\rho x}\| = \|\vec{u}_\rho\|.\cos\theta = \cos\theta$

$$\sin\theta = \dfrac{\|\vec{u}_{\rho y}\|}{\|\vec{u}_\rho\|} \Rightarrow \|\vec{u}_{\rho y}\| = \|\vec{u}_\rho\|.\sin\theta = \sin\theta$$

Alors : $\vec{u}_\rho = \cos\theta.\vec{i} + \sin\theta.\vec{j}$

De même pour le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$, il s'écrit dans le repère $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{u}_\theta = -\|\vec{u}_{\theta x}\|.\vec{i} + \|\vec{u}_{\theta y}\|.\vec{j}$$

Sachant que : $sin\theta = \dfrac{\|\vec{u}_{\theta x}\|}{\|\vec{u}_\theta\|} \Rightarrow \|\vec{u}_{\theta x}\| = \|\vec{u}_\theta\|.sin\theta = sin\theta$

$$cos\theta = \frac{\|\vec{u}_{\theta y}\|}{\|\vec{u}_\theta\|} \Rightarrow \|\vec{u}_{\theta y}\| = \|\vec{u}_\theta\|.cos\theta = cos\theta$$

Alors : $\vec{u}_\theta = -sin\theta.\vec{i} + cos\theta.\vec{j}$

2/ Déduction l'orthogonalité des vecteurs unitaires $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$:

D'après les relations des vecteurs unitaires de la base polaire en fonction des vecteurs unitaires de la base cartésienne :

$$\begin{cases} \vec{u}_\rho = cos\theta.\,\vec{i} + sin\theta.\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -sin\theta.\,\vec{i} + cos\theta.\,\vec{j} \end{cases}$$

Calcul du produit scalaire $\vec{u}_\rho.\vec{u}_\theta$:

$$\vec{u}_\rho.\vec{u}_\theta = (cos\theta.\,\vec{i} + sin\theta.\,\vec{j}).(-sin\theta.\,\vec{i} + cos\theta.\,\vec{j}) = -cos\theta.\,sin\theta + cos\theta.\,sin\theta = 0$$

Puisque le produit scalaire est nul, alors les vecteurs $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ sont orthogonaux l'un à l'autre.

3/ Vecteurs, position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{\gamma}$:

Le vecteur-position : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho = r_0.e^{-\frac{t}{a}}.\vec{u}_\rho$

Le vecteur-vitesse : $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = -\dfrac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}.\vec{u}_\rho + \dfrac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}.\vec{u}_\theta$

Le vecteur-accélération : $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \left(\dfrac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}} - \dfrac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}\right).\vec{u}_\rho + \left(-2.\dfrac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}\right).\vec{u}_\theta$

$$\vec{\gamma} = \left(-2.\frac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}\right).\vec{u}_\theta$$

2/ Norme des vecteurs, position, vitesse et accélération :

La norme de $\overrightarrow{OM}$: $\|\overrightarrow{OM}\| = r_0.e^{-\frac{t}{a}}$

La norme de $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| = \sqrt{\dfrac{r_0^2}{a^2}.e^{-\frac{2t}{a}} + \dfrac{r_0^2}{a^2}.e^{-\frac{2t}{a}}} = \sqrt{2}.\dfrac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}$

La norme de $\vec{\gamma}$: $\|\vec{\gamma}\| = 2.\dfrac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}$

4/ Calcul de l'angle α formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$:

On utilise le produit scalaire pour calculer l'angle α formé par $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$:

$\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}_\theta\|.\cos\alpha$; implique :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}_\theta}{\|\vec{v}\|.\|\vec{u}_\theta\|} = \frac{(-\frac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}.\vec{u}_\rho + \frac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}.\vec{u}_\theta).\vec{u}_\theta}{\sqrt{2}.\frac{r_0}{a}.e^{-\frac{t}{a}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ; alors : } \alpha = \frac{\pi}{4} rad$$

5/ Rayon de courbure de la trajectoire à l'instant *t=0s*.

Le rayon de courbure est défini par : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N}$;

Nous avons : $\gamma_T = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = -\sqrt{2}.\dfrac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}$

Et : $\gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T{}^2} = \sqrt{4.\dfrac{r_0^2}{a^4}.e^{-\frac{2t}{a}} - 2.\dfrac{r_0^2}{a^4}.e^{-\frac{2t}{a}}} = \sqrt{2}.\dfrac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}$

Alors : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_n} = \dfrac{2.\frac{r_0^2}{a^2}.e^{-\frac{2t}{a}}}{\sqrt{2}.\frac{r_0}{a^2}.e^{-\frac{t}{a}}} = \sqrt{2}.r_0.e^{-\frac{t}{a}}$

On déduit sa valeur à l'instant $t = 0s$: $R_C(0) = \sqrt{2}.r_0\ (m)$

<u>Exercice 10</u>

Les équations d'un mouvement est donnée par : $\begin{cases} x = a.cos\theta \\ y = a.sin\theta \\ z = h.\theta \end{cases}$

a rayon du cylindre ; *h* une constante positive et $\theta = t$ est l'angle que fait avec *Ox* la projection

de $\overrightarrow{OM}'$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur le plan *(Oxy)*.

I/ En coordonnées cartésiennes de la base directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

a/ Equation de la trajectoire du point *M'* dans le plan *(xOy)* ainsi sa nature :

Les coordonnées du point *M '* dans le plan *(xOy)* sont : $\begin{cases} x = a.cos\theta \\ y = a.sin\theta \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} x^2 = a^2.cos^2\theta & (1) \\ y^2 = a^2.sin^2\theta & (2) \end{cases}$

Nous combinons les deux relations (1) et (2), on obtient : $x^2 + y^2 = a^2$ *(3)*

L'équation (3) c'est *une équation d'un cercle de rayon a et de centre O(0, 0).*

Alors *la trajectoire est circulaire.*

b/ Nature du mouvement du point *M* suivant l'axe Oz.

L'équation horaire suivant l'axe *(Oz)* est : $z = h.\theta$, avec h est constante positive.

Alors le mouvement est *rectiligne uniforme* suivant l'axe vertical *(Oz)*.

c/ Nature de la trajectoire de *M* dans l'espace :

La trajectoire est *une hélice (voir figure 3.11).*

Le mouvement *hélicoïdal* c'est une composition d'un mouvement circulaire dans le plan *(Oxy)* et rectiligne uniforme suivant l'axe vertical *Oz*.

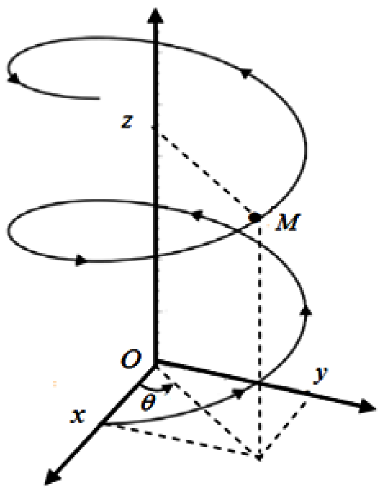


figure 3.11

II/ Dans le système des coordonnées cylindriques :

a/ Expression des vecteurs : $\overrightarrow{OM}, \vec{v}, \vec{\gamma}$ du point *M*

Le vecteur-position $\overrightarrow{OM}$: on a : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = a = constant.$

Alors : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z = a.\vec{u}_\rho + z.\vec{u}_z$.

Le vecteur-vitesse $\vec{v}$: $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a.\vec{u}_\theta + h.\vec{u}_z$

Le vecteur-accélération $\vec{\gamma}$: $\vec{\gamma} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\,a.\vec{u}_\rho$

Les modules des vecteurs : $\overrightarrow{OM}, \vec{v}, \vec{\gamma}$:

Le module de $\overrightarrow{OM}$: $\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + (h.\theta)^2}$

Le module de $\vec{v}$: $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + h^2}$

Le module de $\vec{\gamma}$: $\|\vec{\gamma}\| = a$

b/ On montre que le vecteur vitesse fait un angle constant avec le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$:

Calcul de l'angle α formé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}_\theta$:

On a le vecteur-vitesse : $\vec{v} = a.\vec{u}_\theta + h.\vec{u}_z$ et sa norme : $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + h^2}$

En utilisant la relation du produit scalaire :

$\vec{v}\,.\,\vec{u}_\theta = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}_\theta\|.\cos\alpha$; implique :

$$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\,.\,\vec{u}_\theta}{\|\vec{v}\|.\|\vec{u}_\theta\|} = \frac{(a.\vec{u}_\theta + h.\vec{u}_z).\vec{u}_\theta}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

Alors : le vecteur vitesse fait un angle constant avec le vecteur unitaire $\vec{u}_\theta$.

c/ Rayon de courbure de la trajectoire :

Le rayon de courbure est défini par : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_N}$;

Nous avons : $\gamma_T = \dfrac{d\|\vec{v}\|}{dt} = \dfrac{d(\sqrt{a^2 + h^2})}{dt} = 0$

$$\gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_T{}^2} = \gamma = a$$

Alors : $R_C = \dfrac{v^2}{\gamma_n} = \dfrac{a^2 + h^2}{a} = a + \dfrac{h^2}{a}$.

Exercice 11

Le mobile M est repéré dans le référentiel $(\mathscr{R})$ par : $\begin{cases} x(t) = t^2 + 4t \\ y(t) = -2t^3 \\ z(t) = t^2 \end{cases}$

Et repéré dans le référentiel $(\mathscr{R}')$ par : $\begin{cases} x'(t) = t^2 - t + 2 \\ y'(t) = -2t^3 + 1 \\ z'(t) = t^2 - 1 \end{cases}$

1/ Vecteur vitesse $\vec{v}$ dans $(\mathscr{R})$ et le vecteur vitesse $\vec{v}'$ dans $(\mathscr{R}')$:

$$\vec{v}\Big|_{(\mathscr{R})} = \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = 2.t + 4 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -6.t^2 \\ v_z = \dfrac{dz}{dt} = 2.t \end{cases}$$

$$\vec{v}'\Big|_{(\mathscr{R}')} = \begin{cases} v'_x = \dfrac{dx'}{dt} = 2.t - 1 \\ v'_y = \dfrac{dy'}{dt} = -6.t^2 \\ v'_z = \dfrac{dz'}{dt} = 2.t \end{cases}$$

2/ Vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$:

On a : $\begin{cases} v_x = v'_x + 5 \\ v_y = v'_y \\ v_z = v'_z \end{cases}$

D'après la loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

On trouve que : $\vec{v}_e = \vec{v}_a - \vec{v}_r = 5.\vec{i}$

Conclusion : Le repère relatif $(\mathscr{R}')$ se déplace avec une vitesse constante égale à $5\ m/s$ par rapport au repère absolu $(\mathscr{R})$.

Le déplacement du repère relatif $(\mathscr{R}')$ est suivant le vecteur $\vec{i}$ de l'axe (Ox).

3/ Expression de vecteur accélération $\vec{\gamma}$ dans le repère $(\mathscr{R})$ et de vecteur accélération $\vec{\gamma}'$ dans le repère $(\mathscr{R}')$:

$$\vec{\gamma}\Big|_{(\mathscr{R})} = \begin{cases} \gamma_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 2 \\ \gamma_y = \dfrac{dv_y}{dt} = -12.t \\ \gamma_z = \dfrac{dv_z}{dt} = 2 \end{cases}$$

$$\vec{\gamma}'\Big|_{(\mathscr{R}')} = \begin{cases} \gamma'_x = \dfrac{dv'_x}{dt} = 2 \\ \gamma'_y = \dfrac{dv'_y}{dt} = -12.t \\ \gamma'_z = \dfrac{dv'_z}{dt} = 2 \end{cases}$$

Alors, on remarque que : $\vec{\gamma}\Big|_{(\mathscr{R})} = \vec{\gamma}'\Big|_{(\mathscr{R}')}$

4/ Accélérations, d'entraînement et de Coriolis :

L'accélération d'entraînement : $\vec{\gamma}_e = \dfrac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{0}$

Pour déduire l'accélération Coriolis $\vec{\gamma}_c$, on applique la loi de composition des accélérations :

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$

Alors : L'accélération Coriolis : $\vec{\gamma}_c = \vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_r - \vec{\gamma}_e = \vec{0}$

<u>Exercice 12</u>

On a : la vitesse angulaire : $\vec{\omega} = (2.t)\,\vec{i} - t^2\,\vec{j} + (t+1)\,\vec{k}$

le vecteur-position : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = (t^2 + 1)\vec{i} - t\,\vec{j} + t^2\,\vec{k}$

1/ Vitesse absolue du point *M*, ainsi que son module à l'instant *t* = 1*s* :

$$\vec{v}_a = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Bigg|_{(\mathscr{R})} = (2.t\,)\vec{i} - \vec{j} + (2.t)\,\vec{k}$$

A l'instant : $t = 1s$: $\vec{v}_a = 2.\,\vec{i} - \vec{j} + 2.\,\vec{k}$; alors son module est : $v_a = 3\ m/s$

2/ Vitesse relative du point *M*, ainsi que sa norme à l'instant *t* = 1*s* :

On a : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$ *(loi de composition des vitesses).*

La vitesse d'entrainement : $\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2.t & -t^2 & t+1 \\ t^2+1 & -t & t^2 \end{vmatrix}$

$$= (-t^4 + t^2 + t)\,\vec{i} + (-t^3 + t^2 + t + 1)\,\vec{j} + (t^4 - t^2)\,\vec{k}$$

A l'instant : $t = 1s$: $\vec{v}_e = \vec{i} + 2.\vec{j}$; alors son module est : $v_e = \sqrt{5}\ m/s$

A l'instant : $t = 1s$: $\vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e = (2.\vec{i} - \vec{j} + 2.\vec{k}) - (\vec{i} + 2.\vec{j})$

$\vec{v}_r = \vec{i} - 3\,\vec{j} + 2.\vec{k}$; alors son module est : $v_r = \sqrt{14}\ m/s$

3/ Accélération Coriolis du point *M* à l'instant *t = 1s*

$\vec{\gamma}_C = 2.(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) = 8.\vec{i} - 4.\vec{j} - 10.\vec{k}$

On en déduit sa norme : $\gamma_C = 6\sqrt{5}\ m/s^2$

<u>Exercice 13</u>

Le repère absolu (*fixe*) c'est le sol, le repère relatif (*mobile*) c'est l'eau, le mobile c'est le nageur.

1/ Calcul de la vitesse absolue (la vitesse du nageur par rapport au sol) :

D'après la loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$

Et d'après le théorème de Pythagore on a : $v_a = \sqrt{v_r + v_e} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\ km/h.$

2/ Représentation des vecteurs vitesses relative, d'entrainement et absolue :

En utilisant l'échelle : $1\ cm \longrightarrow 2\ km/h.$

La vitesse relative est : $v_r = 4\ km/h$, alors elle représente $2\ cm$.

La vitesse d'entrainement est : $v_e = 3\ km/h$, alors elle représente $1{,}5\ cm$.

La vitesse absolue est : $v_a = 5\ km/h$, alors elle représente $2{,}5\ cm$.

figure 3.12

3/ Direction de la vitesse absolue :

D'après *la figure 3.12* ci-dessus on a : $tan\theta = \frac{v_e}{v_r} = \frac{3}{4}$, donc : $\theta = arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}87°$.

La vitesse absolue faite un angle $\theta = 36{,}87°$ par rapport au sol.

4/ La distance parcourue par le nageur pour atteindre la ligne d'arrivée :

D'après *la figure 3.12*, on a : $tan\theta = \frac{y}{x}$; alors : $y = x.\ tan\theta = 500.\frac{3}{4} = 375\ m.$

Alors, d'après le théorème de Pythagore, on calcule la distance parcourue par le nageur :

$D = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{500^2 + 375^2} = 625\ m.$

<u>Exercice 14</u>

1/ Vitesse et accélération relatives :

On a : $\overrightarrow{OA} = \alpha.\vec{j}$ et $\overrightarrow{AM} = e^{-\theta}.\vec{k}$

Le vecteur-position dans le repère relatif : $\overrightarrow{OM}\,(\mathscr{R}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \alpha.\vec{j} + e^{-\theta}.\vec{k}$

Le vecteur-vitesse relative : $\vec{v}_r = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|(\mathscr{R}) = -\,\omega.e^{-\theta}.\vec{k}$

Le vecteur-accélération relative : $\vec{\gamma}_r = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|(\mathscr{R}) = \omega^2.e^{-\theta}.\vec{k}$

2/ Vitesse et accélération d'entrainement :

Le vecteur-vitesse d'entrainement : $\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{O_0O}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{O} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \alpha & e^{-\theta} \end{vmatrix}$

$$\vec{v}_e = -\,\omega.\alpha.\vec{i}$$

Le vecteur-accélération d'entrainement : $\vec{\gamma}_e = \frac{d^2\overrightarrow{O_0O}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{O} + \vec{O} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\,\omega.\alpha & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\,\omega^2.\alpha.\vec{j}$$

3/ Accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = 2.(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) = 2.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & 0 & -\,\omega.e^{-\theta} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

4/ Vitesse et accélération absolues :

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = -\omega.\alpha.\vec{i} - \omega.e^{-\theta}.\vec{k}$

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e = -\omega^2.\alpha.\vec{j} + \omega^2.e^{-\theta}.\vec{k}$

<u>Exercice 15</u>

1/ Vitesse et accélération relatives :

On a : $r = r_0(1 + \sin\omega t)$; $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = constante$

Le vecteur-position dans le repère relatif : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r_0.(1 + \sin\omega t).\vec{i}\,'$

Le vecteur-vitesse relative : $\vec{v}_r = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = (r_0.\omega.\cos\omega t).\vec{i}\,'$

Le vecteur-accélération relative : $\vec{\gamma}_r = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (-r_0.\omega^2.\sin\omega t).\vec{i}\,'$

2/ Vitesse et accélération d'entrainement :

Le vecteur-vitesse d'entrainement : $\vec{v}_e = \dfrac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{O} + \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0(1+\sin\omega t) & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$\vec{v}_e = r_0.\omega.(1 + \sin\omega t).\vec{j}\,'$$

Le vecteur-accélération d'entrainement : $\vec{\gamma}_e = \dfrac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$$\vec{\gamma}_e = \vec{O} + \vec{O} + \begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & r_0.\omega(1+\sin\omega t) & 0 \end{vmatrix} = -r_0.\omega^2.(1 + \sin\omega t).\vec{i}\,'$$

3/ Accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = 2.(\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r) = 2.\begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \vec{u}_\theta & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_0.\omega.\cos\omega t & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2.r_0\omega^2.\cos\omega t).\vec{j}\,'$$

4/ Vitesse et accélération absolues :

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = (r_0.\omega.\cos\omega t).\vec{i}\,' + r_0.\omega.(1 + \sin\omega t).\vec{j}\,'$

$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e = (-r_0.\omega^2.\sin\omega t).\vec{i}\,' + (2.r_0\omega^2.\cos\omega t).\vec{j}\,' - r_0.\omega^2(1 + \sin\omega t).\vec{i}\,'$

$\vec{\gamma}_a = -r_0.\omega^2(1 + 2.\sin\omega t).\vec{i}\,' + (2.r_0\omega^2.\cos\omega t).\vec{j}\,'$

04	Chapitre 04 Dynamique du Point Matériel

4 Dynamique du point matériel

4.1 Définition :

La dynamique est une discipline de la mécanique classique. Elle est l'étude des causes qui provoquent les mouvements des corps solides (*les forces et les actions appliquées*).

4.2 Référentiel Galiléen ou d'inertie

Un référentiel galiléen ou d'inertie est un référentiel pour lequel un point matériel de masse *m* isolé ; soit au repos, soit en mouvement rectiligne uniforme.

Tout autre référentiel au repos, ou en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel d'inertie, est identique un référentiel d'inertie.

4.3 Lois de Newton :

Les lois de Newton sont à la base de la mécanique classique. Elles ont été postulées sans démonstrations mais elles sont en bon accord avec les expériences.

Les énoncés des trois lois de Newton sont les suivants :

- ***Première loi de Newton (loi d'inertie):*** Dans un repère galiléen, un point matériel reste immobile ou en mouvement rectiligne uniforme (sa vitesse est constante), lorsque la résultante des forces qui s'exercent sur lui est nulle.

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cte}\,.$$

- ***Deuxième loi de Newton :*** Lorsqu'un point matériel de masse constante est soumis à des forces dont la résultante est non nulle, alors le point matériel acquiert une accélération absolue donnée par l'expression suivante : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma}$.

- ***Troisième loi de Newton :*** Tout corps *A* exerçant une force sur un corps *B* subit une force d'intensité égale, de même direction et de sens opposé, exercée par le corps *B*. Cette *loi* est parfois appelée principe d'action – réaction. Alors : $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

4.4 Quantité de mouvement :

On considère, dans un repère galiléen, un point matériel *M* de masse *m* animé du vecteur vitesse $\vec{v}$. La quantité de mouvement du point *M* est le vecteur $\vec{P}$ définit par la relation :

$$\vec{P} = m.\vec{v}$$

4.5 Principe fondamental de la dynamique (P. F. D) :

Dans un repère galiléen, le principe fondamental de la dynamique (P. F. D) s'annonce sous la forme :

En l'absence de force, le vecteur de la quantité de mouvement $\vec{P}$ est invariant, en présence d'une force $\vec{F}$, il évolue conformément à l'équation : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$.

Où : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m.\vec{v})}{dt} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}.\vec{v}$

On peut écrire cette expression sous forme : $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{\gamma}$, si la masse du point matériel est constante au cours du mouvement $\left(\frac{dm}{dt} = 0\right)$.

4.6 Types des forces dans la nature

4.6.1 Forces à distance :

Les forces à distance peuvent s'exercer sans que les corps ne soient en contact. Parmi lesquelles on peut citer :

- *Force électrostatique :* $\vec{F} = k.\frac{q_1.q_2}{r^2}.\vec{u} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r^2}.\vec{u}$; *où :* q_1 et q_2 sont des charges électriques des deux particules, r est la distance entre les charges, ε_0 est la permittivité du vide, $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ N.m^2.C^{-2}$ est la constante de Coulomb, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de $\vec{F}$.
- *Force magnétique :* $\vec{F}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$. *où :* q est la charge électrique de la particule en mouvement, $\vec{v}$ est la vitesse de la particule, $\vec{B}$ est le champ magnétique.
- *La force électromagnétique :* $\vec{F} = q.(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$. *où :* q est la charge électrique de la particule en mouvement, $\vec{v}$ est la vitesse de la particule, $\vec{E}$ est le champ électrique, $\vec{B}$ est le champ magnétique.
- *Force de gravitation (d'attraction) universelle :* $\vec{F} = G.\frac{m_1.m_2}{r^2}.\vec{u}$ *où :* m_1 et m_2 sont des masses des deux particules, r est la distance entre les masses, $G = 6.67.\ 10^{-11}\ N.m^2.kg^{-2}$, $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de la force $\vec{F}$.

4.6.2 Forces de contact :

C'est des forces qui nécessitent des contacts. Elles se manifestent lorsqu'un corps est en contact avec un autre corps. Parmi ces forces, on distingue principalement :

- Les contraintes mécaniques.
- Les forces de frottements.

- Les forces de cohésion de la matière.
- Les liaisons chimiques.
- Les interactions nucléaires.

4.7 Moment cinétique

4.7.1 Moment d'une force par rapport à un point

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport au point fixe A est défini par :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}$$

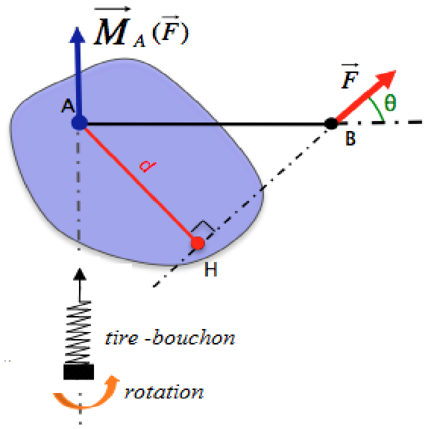


figure 4.1 : Moment d'une force par rapport à un point

Où B est un point quelconque de la ligne d'action de la force $\vec{F}$.
De par les propriétés du produit vectoriel, le vecteur moment est *perpendiculaire* à la fois à la force $\vec{F}$ et au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon.

2.1.12 Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe orienté (Δ) est défini par :

$$\vec{M}_u(\vec{F}) = \vec{u}.\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{u}.\,(\overrightarrow{AB} \wedge \vec{F})$$

Où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de l'axe (Δ).

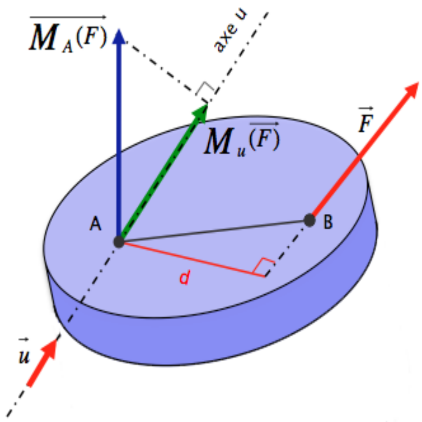


figure 4.2 : Moment d'une force par rapport à un axe

Le moment d'une force $\vec{F}$ par rapport à un axe, c'est donc une grandeur ***scalaire.***

4.7.3 Moment cinétique par rapport à un point fixe

Le moment cinétique d'un point matériel M, par rapport à un point fixe A de l'espace noté par $\vec{L}_A$, est le moment de sa quantité de mouvement $\vec{p}$. Il est donné par la relation suivante :

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}$$

4.7.4 Théorème du moment cinétique

Dans un repère galiléen, la dérivée par rapport au temps du moment cinétique par rapport à un point A fixe, est égale au moment par rapport à A de la résultante des forces extérieures appliquées au point M.

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right).$$

Démonstration :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p})}{dt} = \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{p}\right) + \left(\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p}\right) - \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge \vec{p}\right) + \left(\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right)$$

Sachant que: $\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{p}\right) = \vec{v} \wedge m.\vec{v} = \vec{0}$

Les points O et A sont fixes, $\overrightarrow{OA}$ est un vecteur constant, sa dérivée par rapport au temps est nulle, alors : $\left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \wedge \vec{p}\right) = \vec{0}$.

D'après le théorème de la quantité de mouvement : $\left(\overrightarrow{AM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \overrightarrow{AM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$

Alors : $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{p})}{dt} = \vec{M}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right)$

Remarques :

- Si : $\vec{M}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \overrightarrow{cte} \Rightarrow$ le mouvement est plan à accélération centrale et le point A consiste le centre des accélérations.
- Si : $\vec{M}_A\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{0} \Rightarrow$ le mouvement est rectiligne, la trajectoire du point matériel est une droite.

Enoncés des exercices

Exercice 01

Dans le plan *(Oxy)* du repère Galiléen *R(O, xyz)*, on s'intéresse au mouvement d'une particule *A*, de masse *m*, soumise à l'action de la force $\vec{F}$. Le mouvement est décrit en coordonnées polaires *(ρ et θ)* et en utilisant la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

1) Déterminer les composantes de l'accélération $\vec{\gamma}(A)_{/R}$ en fonction de ρ, θ et de leurs dérivées.
2) Montrer que : $\rho^2.\dot{\theta} = C$ (on considère *C*, constante des aires).
3) a– Exprimer le moment cinétique de *A* au point *O* : $\vec{M}_O(A)_{/R}$.

   b– Montrer que ce moment cinétique $\vec{M}_O(A)_{/R}$ est conservé et en déduire que son module peut s'écrire : $\|\vec{M}_O(A)_{/R}\| = m.\rho^2.\dot{\theta} = m.C$

Exercice 02

Une particule ponctuelle *M* de masse *m* est en mouvement dans un plan (*xOy*). Cette particule est soumise à deux forces $\vec{F}_1 = m.\vec{v}$ et $\vec{F}_2 = -2.\overrightarrow{OM}$.

Dans le système des coordonnées polaires de la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

1/ En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

- Trouver les équations différentielles du mouvement de la particule.
- On donne : à l'instant $t = 0$: $\rho_0 = A$, et on suppose que : $\theta = \omega t$ où : ω et *A* sont des constantes. Montrer que l'équation horaire du mouvement est donnée par : $\rho = A.e^{t/2}$

2/ En utilisant le théorème du moment cinétique :

- Retrouver l'équation horaire du mouvement : $\rho = A.e^{t/2}$

Exercice 03

Un mobile *M* de masse $m = 150\ g$, supposé ponctuel, peut glisser sur une trajectoire curviligne (demi-cercle) dont la forme est donnée par *la figure 4.3* ; le mouvement a lieu dans un plan vertical. Le mobile *M* est lancé en *A* avec une vitesse nulle $v_A = 0\ m/s$ et dirigée vers là-bas. Il glisse sans frottement ou actions motrices.

On donne : le rayon du demi-cercle $R = 1{,}36\ m$, $g = 10\ m/s^2$.

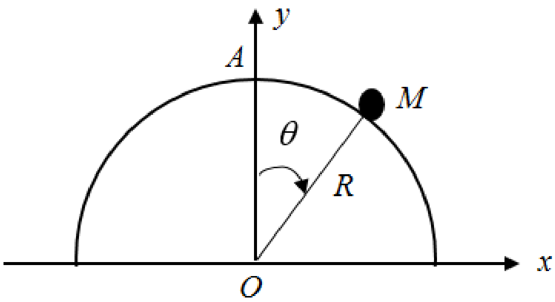


figure 4.3

Répondre aux questions ci-après, en utilisant les deux méthodes suivantes :

I– Le principe fondamental de la dynamique (*P.F.D*)

II– Le théorème du moment cinétique (*T.M.C*)

a) Etudier le mouvement du mobile dans le repère de Frénet (les coordonnées intrinsèques).

b) Trouver l'expression de la vitesse, ainsi de la force de réaction du trajet.

c) Trouver la position (l'endroit) où le mobile quitte la trajectoire circulaire.

d) Calculer alors la vitesse du mobile à cette position.

Exercice 04

Une particule M de masse m, se déplace sur l'axe Ox sous l'action d'une force : $\vec{F} = (a.t - b).\vec{i}$

D'où : a et b sont des constantes positives.

A l'instant $t = 0\ s$, $x = 0\ m$ et $v_0 = 0\ m/s$.

1/ Déterminer l'expression de l'accélération et de la vitesse de la particule M.

2/ Déduire l'expression de la quantité de mouvement ainsi que de l'équation de mouvement.

3/ Retrouver l'expression de l'accélération, de la vitesse, de la quantité de mouvement et de l'équation de mouvement, si la force prend la forme : $\vec{F} = (F_0.e^{-k.t}).\vec{i}$; avec : F_0 et k sont des constantes positives.

Exercice 05

Un pendule simple (*figure 4.4*) est constitué d'une masse m, accrochée à un fil inélastique et de masse négligeable de longueur l.

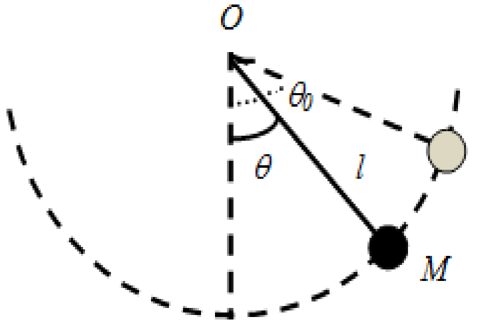


figure 4.4

A l'instant $t = 0s$, on abandonne la masse sans vitesse initiale, lorsque le fil forme un angle θ_0 avec la verticale.

1/ Trouver l'équation différentielle du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique en coordonnées polaires.

2/ Ecrire l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.

3/ Trouver l'expression de la vitesse du pendule.

4/ Déduire l'expression de la force de tension T du fil.

<u>Exercice 06</u>

Un mobile M de masse m est lancé à la vitesse v_0 à partir du point A_0 situé au bas d'une trajectoire demi circulaire de rayon R (*figure 4.5)*. On néglige toutes les forces de frottement.

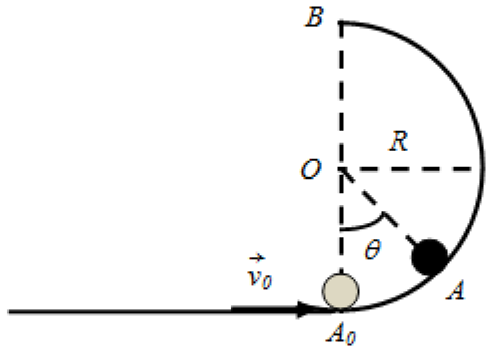


figure 4.5

1/ Etablir les équations de mouvement du mobile dans le système des coordonnées intrinsèques.

2/ Déterminer l'expression de la vitesse angulaire et la force de contact exercée par la piste sur le mobile au point A.

3/ Trouver la condition sur v_0 pour que la particule arrive au point B.

4/ Calculer l'angle θ dans le cas où la vitesse initiale du mobile est $v_0 = \sqrt{3.R.g}$.

<u>Exercice 07</u>

Deux corps A et B de masse m_A et m_B respectivement, sont reliés par un fil inextensible et de masse négligeable passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable *(figure 4.6)*.

Initialement le corps B se trouve à une hauteur h du sol, il est lâché avec une vitesse initiale quasi-nulle. Le contact entre le corps A et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique μ_s et glissement μ_g.

On donne :

$$\mu_s = 0,5\ ;\ \mu_g = 0,3\ ;\ m_A = 0,4\ kg\ ;\ h = 0,2\ m \text{ et } g = 10\ m/s^2.$$

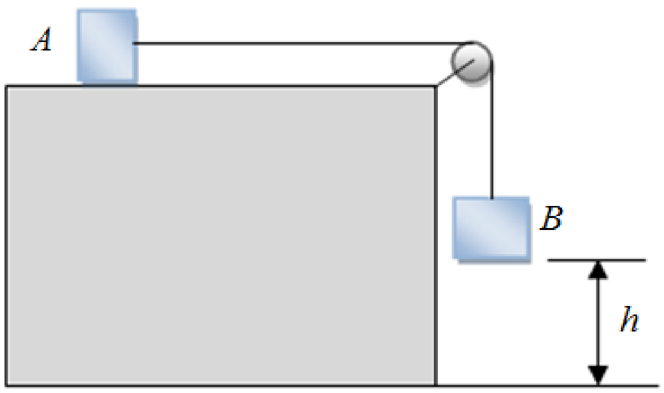


figure 4.6

1/ Trouver l'expression de la masse maximale m_B du corps B en fonction de m_A et μ_s pour que le système des corps soit en équilibre.

2/ On prend maintenant une masse $m_B = 0{,}3\ kg$, le système (*A et B*) se met en mouvement.

En considérant les deux phases du mouvement du corps *A* jusqu'à son arrêt :

a) Etablir la nature du mouvement du corps *A*.

b) Calculer l'accélération du corps *A* dans la première phase du mouvement. En déduire la vitesse du corps *A* à la fin de cette phase du mouvement.

c) Calculer l'accélération dans la deuxième phase du mouvement.

d) Déduire la distance totale *D* parcourue par le corps *A*.

<u>Exercice 08</u>

Un mobile *M*, de masse *m*, se déplace sans forces de frottement sur une tige. Il part du point *O* avec une vitesse initiale quasi-nulle. Le mobile est soumis en plus de son poids $\vec{P}$ à la force de réaction $\vec{N}$ de la tige et à une force $\vec{F}$ définie par la loi : $\vec{F} = m.\overrightarrow{MX_0}$; où : X_0 est un point fixe situé à l'abscisse *a* sur l'axe horizontal (*Ox) (voir figure 4.7)*.

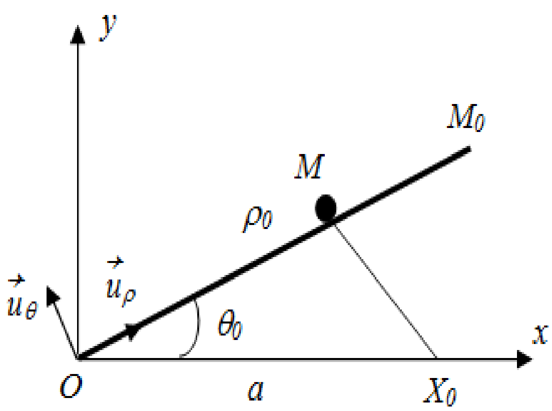


figure 4.7

1/ En utilisant le principe fondamental de la dynamique (*P.F.D*):

Etudier le mouvement du mobile M dans la base polaire ($\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$).

2/ Trouver l'expression de ρ_0 pour le mobile atteindre le point M_0.

3/ La tige, est la droite OM_0. Le point M_0 est défini par ses coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan *(Oxy)*.

Déterminer l'expression de la force de réaction $\vec{N}$ de la tige.

Solutions des exercices

Exercice 01

1/ Composantes de l'accélération $\vec{\gamma}(A)_{/R}$:

En systeme des coordonnées polaires de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$:

On a : $(\overrightarrow{OA})_{/R} = \rho.\vec{u}_\rho$ *(le vecteur-position)* et $\vec{v}(A)_{/R} = \dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$ *(le vecteur vitesse).*

Ce qui donne le vecteur accélération : $\vec{\gamma}(A)_{/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2).\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}).\vec{u}_\theta$

2/ On montre que : $\rho^2.\dot{\theta} = C$:

Le mouvement est central, donc : $\vec{F} = F(\rho).\vec{u}_\rho$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique (*PFD*) au point *A*, on aura :

$m.\vec{\gamma}(A)_{/R} = \vec{F}(\rho) = F(\rho).\vec{u}_\rho$

Ce qui implique que : $(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = F(\rho)$ $\quad (1)$

$(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) = 0$ $\quad (2)$

(2) implique : $\dfrac{1}{\rho}.\dfrac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) = 0 \;\Rightarrow\; \rho^2\dot{\theta} = Cte = C$

3/ a– Moment cinétique de *A* au point *O* : $\vec{M}_O(A)_{/R}$:

Le moment cinétique $\vec{M}_O(A)_{/R} = \overrightarrow{OA} \wedge m.\vec{v}(A)_{/R} = m.\rho^2\dot{\theta}.\,\vec{u}_z$

b/ On montre que le moment cinétique $\vec{M}_O(A)_{/R}$ est conservé :

D'autre part, comme : $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{M}_O(A)_{/R}\right) = \overrightarrow{OA} \wedge m.\vec{\gamma}(A)_{/R} = \rho.\vec{u}_\rho \wedge F(\rho).\vec{u}_\rho = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{M}_O(A)_{/R} = \overrightarrow{Cte}$$

Donc le moment cinétique est conservé (constant).

Soit : $\|\vec{M}_O(A)_{/R}\| = m.\rho^2.\dot{\theta}$

On en déduit encore que : $\rho^2.\dot{\theta} = \dfrac{\|\vec{M}_O(A)\|}{m} = Cte = C.$

Exercice 02

Une particule M soumise à deux forces $\vec{F_1} = m.\vec{v}$ et $\vec{F_2} = -2.\overrightarrow{OM}$.

1/ Equations différentielles du mouvement de la particule :

En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \ ; \ \text{donc : } \vec{F_1} + \vec{F_2} = m\vec{\gamma} \qquad (1)$$

On peut écrire les forces $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$, dans la base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$:

$$\vec{F_1} = m(\rho.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta) \qquad (2)$$

$$\vec{F_2} = -2.\rho.\vec{u}_\rho \qquad (3)$$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta \qquad (4)$$

En replaçant les équations (2), (3) et (4) dans l'équation (1), on obtient :

$$(m.\rho - 2\rho)\vec{u}_\rho + m.\rho.\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

Alors, on a deux équations : radiale et ortho-radiale, qui sont :

$$\begin{cases} m.\rho - 2\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) & \text{(l'équation radiale)} \\ m.\rho.\dot{\theta} = m(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) & \text{(l'équation ortho-radiale)} \end{cases}$$

Sachant que : $\theta = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega \Rightarrow \ddot{\theta} = 0.$

On trouvera les équations différentielles du mouvement de la particule M :

$$\begin{cases} m.\rho - 2\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) & (5) \\ \rho = 2\dot{\rho} & (6) \end{cases}$$

Montrons que l'équation horaire du mouvement est donnée par : $\rho = A.e^{t/2}$:

Pour trouver l'équation horaire du mouvement, on cherche la solution de l'équation différentielle (6).

On a : $\rho = 2\dot{\rho} \Rightarrow \dfrac{d\rho}{dt} = 2.\rho \Rightarrow \dfrac{d\rho}{\rho} = \dfrac{1}{2}dt \qquad (7)$

On intègre l'équation (7) :

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\int dt \Rightarrow ln\rho = \frac{1}{2}t + lnk \Rightarrow \rho = k.e^{\,t/2}$$

D'après les conditions initiales : à l'instant $t = 0$: $\rho_0 = A \Rightarrow k = A$

On trouvera l'équation horaire du mouvement : $\rho = A.e^{\,t/2}$.

2/ Equation horaire du mouvement $\rho = A.e^{t/2}$, en utilisant le théorème du moment cinétique :

Par définition, le théorème du moment cinétique est : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\sum \vec{F}_{ext}) = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}$

Ainsi, on a la relation du moment cinétique : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$

Donc : $\vec{L}_0 = \rho.\vec{u}_\rho \wedge m(\rho.\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}.\vec{u}_\theta) = m.\rho^2.\dot{\theta}.\vec{u}_z$

Alors : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = 2.m.\omega.\rho.\frac{d\rho}{dt}.\vec{u}_z$ (8)

On a deux forces exercées sur la particule, donc, on aura deux moments de force :

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_1 = \rho.\vec{u}_\rho \wedge \left(m(\rho.\vec{u}_\rho + \rho.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta)\right) = m\omega\rho^2.\vec{u}_z$ (9)

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_2 = \rho.\vec{u}_\rho \wedge (-2\rho.\vec{u}_\rho) = \vec{0}$ (10)

Si l'équation (8) = l'équation (9), alors :

$$2.m.\omega.\rho.\frac{d\rho}{dt}.\vec{u}_z = m\omega\rho^2.\vec{u}_z \Rightarrow 2.\frac{d\rho}{dt} = \rho \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}.dt$$

En intégrant la dernière relation, on trouve :

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}\int dt \Rightarrow ln\rho = \frac{1}{2}t + lnk \Rightarrow \rho = k.e^{t/2} \Rightarrow \rho = A.e^{t/2}.$$

Alors, nous avons obtenu le même résultat précédent.

<u>Exercice 03</u>

I/ En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

a/ Etude du mouvement du mobile *M* :

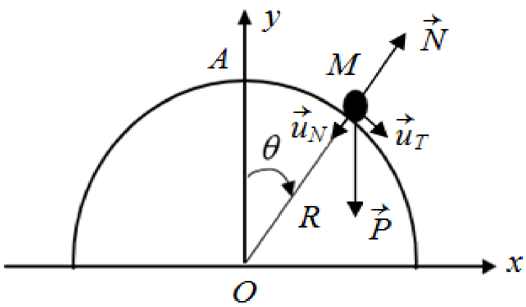


figure 4.8

Le mobile *M* de masse *m* est soumis à deux forces : son poids $\vec{P}$ et la réaction du support $\vec{N}$

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma} \quad (1)$$

On peut écrire les forces $\vec{P}$, $\vec{N}$ et l'accélération $\vec{\gamma}$, dans le système des coordonnées intrinsèques (la base de Frénet) (*voir figure 4.8*), comme suit :

$$\begin{cases} \vec{P} = mg.\sin\theta.\vec{u}_T + mg.\cos\theta.\vec{u}_N \\ \vec{N} = -N.\vec{u}_N \\ \vec{\gamma} = \dfrac{dv}{dt}.\vec{u}_T + \dfrac{v^2}{R}.\vec{u}_N \end{cases}$$

En remplaçant les expressions de $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{\gamma}$ dans la relation (1), on obtient :

$$mg.\sin\theta.\vec{u}_T + (mg.\cos\theta - N).\vec{u}_N = m.\frac{dv}{dt}.\vec{u}_T + m.\frac{v^2}{R}.\vec{u}_N \qquad (2)$$

D'après la relation (2), on a deux équations :

L'équation tangentielle : $mg.\sin\theta = m.\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = g.\sin\theta$ $\qquad (3)$

L'équation normale : $mg.\cos\theta - N = m.\dfrac{v^2}{R} \Rightarrow g.\cos\theta - \dfrac{N}{m} = \dfrac{v^2}{R}$ $\qquad (4)$

b/ Expression de la vitesse :

D'après l'équation tangentielle (3), on a : $\dfrac{dv}{dt} = g.\sin\theta \Rightarrow \dfrac{dv}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = g.\sin\theta$;

d'où : $\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \dfrac{v}{R}$

Alors : $\dfrac{v}{R}.\dfrac{dv}{d\theta} = g.\sin\theta \Rightarrow v.dv = R.g.\sin\theta.d\theta$ $\qquad (5)$

On intègre la relation (5) :

$$\int_0^v v.dv = R.g.\int_0^\theta \sin\theta.d\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = R.g.[-\cos\theta]_0^\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = R.g.(1-\cos\theta)$$

Alors la vitesse du mobile est donnée par l'expression :

$$v = \sqrt{2.R.g(1-\cos\theta)} \qquad (6)$$

On détermine la relation de la force de réaction *N* :

En remplaçant l'équation (6) dans (4), on obtient l'expression de la force de réaction :

$$N = mg.(3\cos\theta - 2)$$

c/ Position du mobile en quittant la trajectoire :

Le mobile quitte la trajectoire circulaire, lorsque : $N = 0$.

D'après la relation de la force de réaction on a :

$$mg.(3\cos\theta - 2) = 0 \Rightarrow (3\cos\theta - 2) = 0 \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3} \text{ d'où : } \theta = 48°$$

Alors : le mobile quitte la trajectoire si l'angle : $\theta = 48°$

II/ En utilisant le théorème du moment cinétique :

a/ Etude du mouvement du mobile :

Par définition, le théorème du moment cinétique est : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\sum \vec{F}_{ext}) = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}$

Ainsi, la relation du moment cinétique est : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

Alors : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = -R.\vec{u}_N \wedge mv.\vec{u}_T = R.m.v.\vec{u}_z$ *(7)*

Si on dérive l'expression (7), on obtient : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = R.m.\frac{dv}{dt}.\vec{u}_z$ *(8)*

Nous avons deux forces exercées sur le mobile, donc, on aura deux moments de force :

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = -R.\vec{u}_N \wedge \left(mg.\sin\theta.\vec{u}_T + mg.\cos\theta.\vec{u}_N\right) = R.m.g.\sin\theta.\vec{u}_z$ *(9)*

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{N} = -R.\vec{u}_N \wedge N.\vec{u}_N = \vec{0}$ *(10)*

b/ Expression de la vitesse :

D'après les relations (7), (8) et (9), on aura :

$\frac{dv}{dt} = g.\sin\theta \Rightarrow \frac{dv}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = g.\sin\theta$;

D'où : $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \frac{v}{R}$

Alors : $\frac{v}{R}.\frac{dv}{d\theta} = g.\sin\theta \Rightarrow v.dv = R.g.\sin\theta.d\theta$ *(11)*

Si on intègre la relation (11) :

$\int_0^v v.dv = R.g.\int_0^\theta \sin\theta.d\theta$

$\Rightarrow \frac{v^2}{2} = R.g.\left[-\cos\theta\right]_0^\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = R.g.(1-\cos\theta)$

Alors la vitesse du mobile sera : $v = \sqrt{2.R.g(1-\cos\theta)}$

On détermine la relation de la force de réaction *N* :

En remplaçant l'équation (6) dans (4), on obtient : $N = mg(3\cos\theta - 2)$

c/ Position du mobile en quittant la trajectoire :

Le mobile quitte la surface lorsque : $N = 0$; *alors :* $\cos\theta = \frac{2}{3}$ *d'où :* $\theta = 48°$

d/ Calcul de la vitesse lorsque le mobile quitte la trajectoire :

Le résultat de la vitesse est :

$v = \sqrt{2.R.g(1-\cos\theta)} = \sqrt{2.\ 1{,}36.\ 10(1-\cos 48°)} = 2\ m/s$

Exercice 04

On a : $\vec{F} = (a.t - b).\vec{i}$, d'où : *a* et *b* sont des constantes positives.

1/ Expression de l'accélération du point *M* en fonction du temps :

D'après le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$

Donc : $\vec{F} = m.\vec{\gamma} \Rightarrow m.\vec{\gamma} = (a.t - b).\vec{i} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{1}{m}(a.t - b).\vec{i}$

Expression de la vitesse du point *M* en fonction du temps :

Par définition : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{\gamma}.dt = \left(\frac{1}{m}(a.t - b).\vec{i}\right).dt$ (1)

Alors on intègre la relation (1) : $\int_0^v d\vec{v} = \int_0^t \left(\frac{1}{m}(a.t - b).\vec{i}\right).dt$

On obtient : $\vec{v} = \frac{1}{m}.\left(\frac{a.t^2}{2} - bt\right).\vec{i}$

2/ Expression de la quantité du mouvement :

La quantité du mouvement est définie par : $\vec{P} = m.\vec{v}$

Donc : $\vec{P} = m.\vec{v} = \left(\frac{a.t^2}{2} - bt\right).\vec{i}$

Equation du mouvement :

Par définition : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}.dt = \left(\frac{1}{m}.\left(\frac{a.t^2}{2} - bt\right).\vec{i}\right).dt$ (2)

On intègre la relation (2) : $\int_0^r d\vec{r} = \int_0^t \left(\frac{1}{m}.\left(\frac{a.t^2}{2} - bt\right).\vec{i}\right).dt$

On obtient : $\vec{r} = \frac{1}{m}.\left(\frac{a.t^3}{6} - \frac{b.t^2}{2}\right).\vec{i}$

3/ La force prend la forme : $\vec{F} = (F_0.e^{-k.t}).\vec{i}$.

1/ Expression de l'accélération du point *M* en fonction du temps :

D'après le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$

Donc : $\vec{F} = m.\vec{\gamma} \Rightarrow m.\vec{\gamma} = (F_0.e^{-k.t}).\vec{i} \Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{1}{m}(F_0.e^{-k.t}).\vec{i}$

Expression de la vitesse du point *M* en fonction du temps :

Par définition : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{\gamma}.dt = \left(\frac{1}{m}(F_0.e^{-k.t}).\vec{i}\right).dt$ (3)

Si on intègre la relation (3) : $\int_0^v d\vec{v} = \int_0^t \left(\frac{1}{m}(F_0.e^{-k.t}).\vec{i}\right).dt$

On obtient : $\vec{v} = \frac{1}{m}.\frac{F_0}{k}.(1-e^{-k.t}).\vec{i}$

Expression de la quantité du mouvement :

On a : $\vec{P} = m.\vec{v} \Rightarrow \vec{P} = \frac{F_0}{k}.(1-e^{-k.t}).\vec{i}$

Equation du mouvement :

On a : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}.dt = \left(\frac{1}{m}.\frac{F_0}{k}.(1-e^{-k.t}).\vec{i}\right).dt \qquad (4)$

Si on intègre la relation (4) : $\int_0^r d\vec{r} = \int_0^t \left(\frac{1}{m}.\frac{F_0}{k}.(1-e^{-k.t}).\vec{i}\right).dt$

On obtient : $\vec{r} = \frac{1}{m}.\frac{F_0}{k^2}.(e^{-k.t}+k.t-1).\vec{i}$

Exercice 05

1/ Equation différentielle du mouvement à l'aide du principe fondamental de la dynamique en coordonnées polaires :

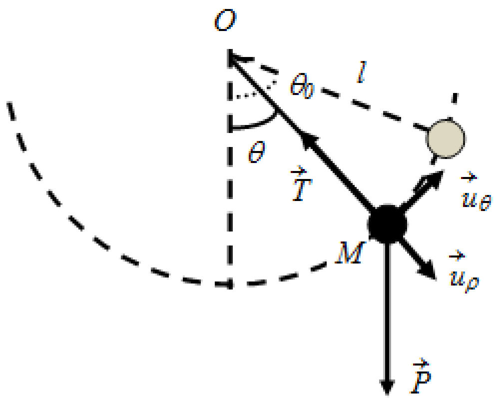


figure 4.9

En utilisant le principe fondamental de la dynamique, et d'après *la figure 4.9*, on a :

$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = m\vec{\gamma}$

Dans les coordonnées polaires, on peut écrire les relations suivantes :

$\vec{P} = mg.\cos\theta.\,\vec{u}_\rho - mg.\sin\theta.\,\vec{u}_\theta$

$\vec{T} = -T.\,\vec{u}_\rho$

$\vec{\gamma} = -l.\dot{\theta}^2.\,\vec{u}_\rho + l.\ddot{\theta}.\,\vec{u}_\theta$

Implique les équations du mouvement du mobile sont :

$$mg.\cos\theta - T = - m.l\dot{\theta}^2 \qquad (1)$$

$$- mg.\sin\theta = m.l.\ddot{\theta} \qquad (2)$$

D'après l'équation (2) on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\sin\theta = 0.$$

2/ L'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique :

Le théorème du moment cinétique est défini par : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_O(\sum \vec{F}_{ext}) = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext}$

Ainsi, la relation du moment cinétique est : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$

Sachant que dans les coordonnées polaires on a :

$\overrightarrow{OM} = l.\vec{u}_\rho$ et $\vec{v} = l.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$

Alors : $\vec{L}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = l.\vec{u}_\rho \wedge m.l.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \vec{L}_0 = l^2.m.\dot{\theta}.\vec{u}_z \qquad (3)$

On dérive l'expression (3), on obtient : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = l^2.m.\ddot{\theta}.\vec{u}_z \qquad (4)$

On aura deux moments de force ($\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$) et ($\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}$):

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = l.\vec{u}_\rho \wedge \left(mg.\cos\theta.\,\vec{u}_\rho - mg.\sin\theta.\,\vec{u}_\theta\right) = - l.m.g.\sin\theta.\vec{u}_z \qquad (5)$

$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \left(l.\vec{u}_\rho\right) \wedge \left(- T.\,\vec{u}_\rho\right) = \vec{0} \qquad (6)$

D'après les relations (4), (5) et (6), on obtient : $l^2.m.\ddot{\theta} = - l.m.g.\sin\theta$

$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}.\sin\theta = 0$ (l'équation différentielle du mouvement).

3/ Expression de la vitesse du pendule :

La relation entre la vitesse v et la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est :

$$v = l.\dot{\theta}\text{; donc : } \frac{dv}{dt} = l.\ddot{\theta}$$

Et d'après l'équation (2) on obtient : $l.\ddot{\theta} = \frac{dv}{dt} = - g.\sin\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}.\frac{dv}{d\theta} = - g.\sin\theta$

$\Rightarrow \dot{\theta}.\frac{dv}{d\theta} = - g.\sin\theta \Rightarrow v.dv = - l.g.\sin\theta.d\theta \qquad (7)$

Si on intègre l'équation (7) : on aura :

$\int_0^v v.dv = - l.g.\int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta.d\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} = l.g(\cos\theta - \cos\theta_0)$

Alors l'expression de la vitesse sera : $v = \sqrt{2.l.g.(\cos\theta - \cos\theta_0)}$

4/ Expression de la force de tension T du fil.

La relation (1), devient : $T = mg.\cos\theta + m.l\dot{\theta}^2 \Rightarrow T = mg.\cos\theta + m.l.\frac{v^2}{l^2}$

$$\Rightarrow T = m.g.\cos\theta + 2.m.g(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow T = m.g.(3.\cos\theta - 2.\cos\theta_0)$$

Exercice 06

1/ Equations du mouvement du mobile en coordonnées polaires :

En utilisant le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$

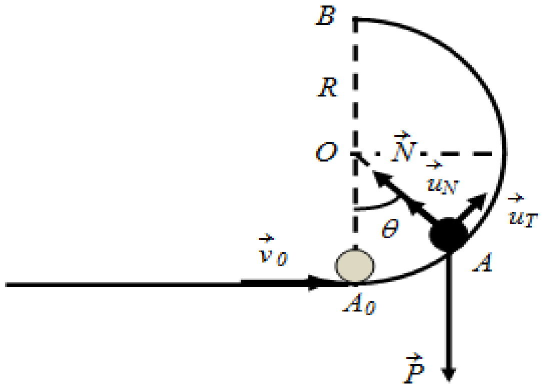


figure 4.10

D'après *la figure 4.10* on a deux forces exercées sur le mobile, donc : $\vec{P} + \vec{N} = m\vec{\gamma}$

Dans le système des coordonnées intrinsèques, on a :

$$\vec{P} = -mg.\sin\theta.\,\vec{u}_T - mg.\cos\theta.\,\vec{u}_N$$

$$\vec{N} = N.\,\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \frac{dv}{dt}.\,\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}.\,\vec{u}_N$$

Implique les équations du mouvement du mobile sont :

$$-mg.\sin\theta = m.\frac{dv}{dt} \qquad (1)$$

$$-mg.\cos\theta + N = m.\frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

2/ Expression de la vitesse angulaire du mobile au point A :

On cherche l'expression de la vitesse v :

On sait qu'en mouvement circulaire : $v = R.\dot{\theta}$, et d'après l'équation (1), on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = -g.\sin\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dt}.\frac{dv}{d\theta} = -g.\sin\theta \Rightarrow \dot{\theta}.\frac{dv}{d\theta} = -g.\sin\theta$$

$$\Rightarrow v.dv = -R.g.\sin\theta.d\theta \qquad (3)$$

Si on intègre l'équation (3) : on aura :

$$\int_{v_0}^{v} v.dv = -R.g.\int_{0}^{\theta} \sin\theta.d\theta \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = R.g(\cos\theta - 1)$$

Alors : $v = \sqrt{v_0^2 + 2.R.g(\cos\theta - 1)}$

Finalement, l'expression de la vitesse angulaire du mobile au point A devient :

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R} = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2.R.g(\cos\theta - 1)}}{R}$$

Force de contact exercée par la piste sur le mobile au point A.

D'après l'équation (1) on obtient : $N = mg.\cos\theta + m.R\dot{\theta}^2$

Alors : $N = m\left(g.\cos\theta + \dfrac{v_0^2 + 2.R.g(\cos\theta - 1)}{R}\right)$

3/ Condition sur v_0 pour que la particule arrive au point B.

Pour que le mobile M arrive au point B, il doit : $v_B \geqslant 0\ (m/s)$ et : $\theta = \pi\ (rad)$

Donc : $v_0^2 + 2.R.g(-1-1) \geqslant 0 \Rightarrow v_0^2 \geqslant 4.R.g \Rightarrow v_0^2 \geqslant \sqrt{4.R.g}$

Alors la condition sur v_0 pour que la particule arrive au point B est : $v_0 \geqslant 2.\sqrt{R.g}$

4/ Angle θ dans le cas où la vitesse initiale du mobile est $v_0 = \sqrt{3.R.g}$:

On a : $v = \sqrt{v_0^2 + 2.R.g(\cos\theta - 1)}$.

Si le mobile s'arrête, donc : $v = 0\ (m/s)$

On obtient : $v_0^2 + 2.R.g(\cos\theta - 1) = 0 \Rightarrow v_0^2 = -2.R.g(\cos\theta - 1)$

$$\Rightarrow 3.R.g = -2.R.g(\cos\theta - 1) \Rightarrow 3 = -2.(\cos\theta - 1) \Rightarrow -\frac{3}{2} = \cos\theta - 1$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 1 - \frac{3}{2} \Rightarrow \cos\theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}(rad)$$

<u>Exercice 07</u>

1/ Expression de la masse maximale de m_B pour que le système des corps soit en équilibre en fonction de m_A et μ_s :

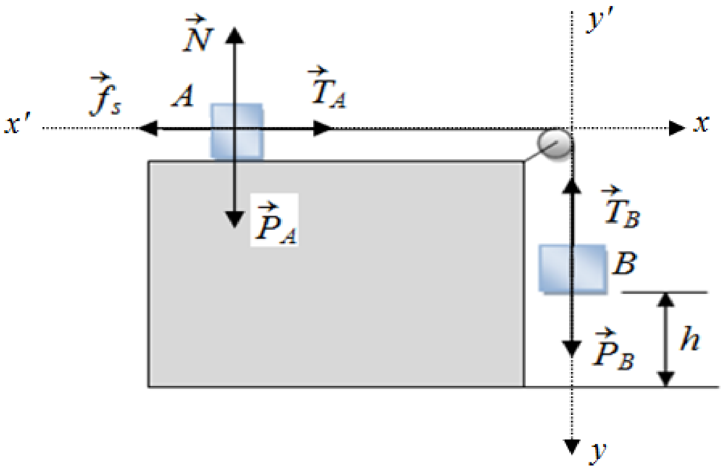


figure 4.11

En appliquant le premier principe de Newton, sur le système de deux corps (*A et B*) :

On a à l'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

Sur le corps A :

D'après *la figure 4.11*, les forces appliquées sur le corps *A* sont : $\vec{P}_A$, $\vec{T}_A$, $\vec{N}$ et $\vec{f}_s$.

Donc : $\vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{N} + \vec{f}_s = \vec{0}$

La projection de ces forces sur l'axe (*xx'*) s'écrit : $T_A + f_s = 0$ *(1)*

La projection de ces forces sur l'axe (*yy'*) s'écrit : $-P_A + N = 0$ *(2)*

Sur le corps B :

D'après *la figure 4.11* ci-avant, les forces appliquées sur le corps *B* sont : $\vec{P}_B$ et $\vec{T}_B$.

Donc : $\vec{P}_B + \vec{T}_B = \vec{0}$

La projection de ces forces sur l'axe (*yy'*) s'écrit : $P_B - T_B = 0$ *(3)*

Et comme : $T_A = T_B$ *(4)*

Sachant que, le frottement statique est par définition : $f_s = \mu_s.N$ *(5)*

D'après les relations précédentes, on a :

$P_B = m_B.g = T_B = T_A = f_s = \mu_s.N = \mu_s.P_A = \mu_s.m_A.g$

Donc, l'expression de la masse maximale de m_B pour que le système des corps soit en équilibre en fonction de m_A et μ_s sera :

$$m_{B\,max} = \mu_s.m_A$$

Alors, $$m_{B\,max} = 0{,}5.\ 0{,}4 = 0{,}2\ kg$$

2/ Le système (*A et B*) se met en mouvement lorsqu'on prend une masse $m_B = 0{,}3\ kg$.

a/ Nature du mouvement du corps *A* :

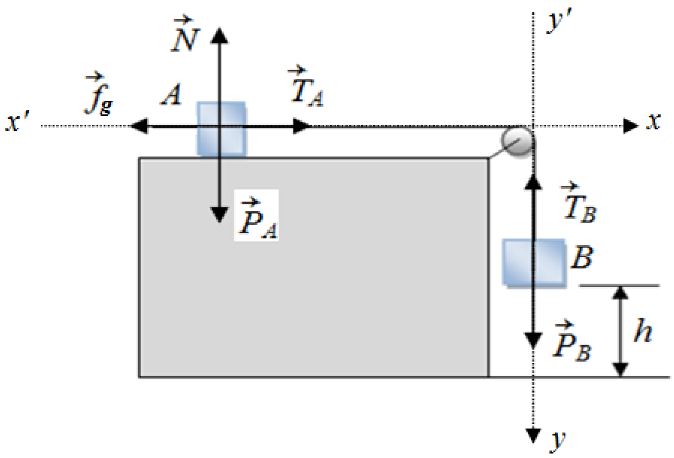


figure 4.12

On a deux étapes de mouvement du corps A jusqu'à son arrêt :

Durant la première étape, les forces exercées sur le corps *A* sont constantes, l'accélération est constante mais la vitesse augmente, donc, il s'agit d'un *mouvement rectiligne uniformément accéléré.*

Durant la deuxième étape, avec la présence des forces de frottement ainsi l'absence de la masse m_B, la vitesse diminue donc, il s'agit d'un *mouvement rectiligne uniformément retardé.*

b/ Calcul de l'accélération dans la première phase du mouvement :

En appliquant le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma}$

<u>Sur le corps A :</u>

On a : $\vec{P}_A + \vec{T}_A + \vec{N} + \vec{f}_g = m_A\vec{\gamma}_1$

La projection de ces forces sur l'axe (*xx'*) s'écrit : $T_A - f_g = m_A.\gamma_1$ *(6)*

La projection de ces forces sur l'axe (*yy'*) s'écrit : $N - P_A = 0$ *(7)*

<u>Sur le corps B :</u>

On a : $\vec{P}_B + \vec{T}_B = m_B.\vec{\gamma}_1$

La projection de ces forces sur l'axe (*yy'*) s'écrit : $P_B - T_B = m_B.\gamma_1$ *(8)*

D'après les relations (6) et (8), on obtient :

$$(6) + (8) \Rightarrow P_B - f_g = (m_A + m_B)\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = \frac{P_B - f_g}{m_A + m_B} \Rightarrow \gamma_1 = \frac{m_B - \mu_g m_A}{m_A + m_B}.\,g$$

$$\text{Alors : } \gamma_1 = \frac{0,3 - 0,3.0,4}{0,4 + 0,3}.10 = 2,57\ m/s^2$$

Déduction de la vitesse v_1 du corps *A à la fin de la première phase :*

On a l'expression suivante : $v_1^2 - v_0^2 = 2.\gamma_1.h$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2.\gamma_1.h} = \sqrt{2.2,57.0,2} = 1,01\,m/s$$

c/ Calcul de l'accélération dans la deuxième phase du mouvement :

Durant la deuxième étape le mouvement du corps *A* est rectiligne uniformément retardé.

En appliquant le principe fondamental de la dynamique, sur le corps *A* :

On obtient : $\vec{P}_A + \vec{N} + \vec{f}_g = m_A.\vec{\gamma}_2$

La projection de ces forces sur l'axe (*xx'*) s'écrit : $-f_g = m_A.\gamma_2$ *(9)*

La projection de ces forces sur l'axe (*yy'*) s'écrit : $N - P_A = 0$ *(10)*

D'après les relations (9) et (10), on aura :

$$-\mu_g.N = m_A.\gamma_2 \Rightarrow -\mu_g.m_A.g = m_A.\gamma_2$$

$$\Rightarrow \gamma_2 = -\mu_g.g = -0,3.10 = -3\ m/s^2$$

d/ Distance totale D parcourue par le corps A :

La distance d parcourue durant la deuxième phase est donnée par :

$$0 - v_1^2 = 2.\gamma_2.d \Rightarrow d = -\frac{v_1^2}{2.\gamma_2} = -\frac{1{,}01^2}{2.(-3)} = 0{,}17\ m$$

Donc la distance totale sera : $D = h + d = 0{,}2 + 0{,}17 = 0{,}37\ m$

<u>Exercice 08</u>

1/ En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

Etude du mouvement du mobile M dans la base polaire :

Par définition et d'après *la figure 4.13*, on a :

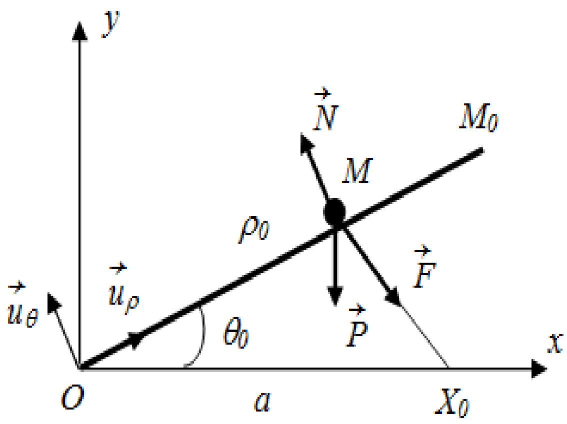


figure 4.13

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = m.\vec{\gamma}$$

Donc : $m\vec{g} + \vec{N} + m.\overrightarrow{MX_0} = m.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$

La projection des forces sur l'axe $\vec{u}_\rho$ s'écrit :

$$m.\ddot{\rho} = -mg.\sin\theta_0 + m.(a.\cos\theta_0 - \rho) \qquad (1)$$

La projection des forces sur l'axe $\vec{u}_\theta$ s'écrit :

$$0 = -mg\cos\theta_0 + N - m.a.\sin\theta_0 \qquad (2)$$

2/ Expression de ρ_0 pour que le mobile atteint le point M_0

Le mobile atteindra le point M_0 si la condition $\rho_0 \leqslant 2(-g.\sin\theta_0 + a.\cos\theta_0)$ est réalisée.

On a : $m.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{N} + m.\overrightarrow{MX_0}$

$$\Rightarrow \quad m\vec{v}.d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (m\vec{g} + \vec{N} + m.\overrightarrow{MX_0}).d\overrightarrow{OM}$$

Soit : $d(\frac{1}{2}mv^2) = (m\vec{g} + \vec{N} + m.\overrightarrow{MX_0}).d\overrightarrow{OM} = -mg.\sin\theta_0.d\rho - m.\rho d\rho + m.a.\cos\theta_0.d\rho$

Si on intègre (en tenant compte des conditions aux limites), on obtient :

$$\frac{1}{2}mv^2 = (m.a.\cos\theta_0 - mg.\sin\theta_0).\rho - \frac{1}{2}m.\rho^2$$

Le mobile atteindra le point M_0 si, sachant qu'en ce point la vitesse $v \geqslant 0$.

$$\Rightarrow (m.a.\cos\theta_0 - mg.\sin\theta_0).\rho_0 - \frac{1}{2}m.\rho_0^2 \geqslant 0 \Rightarrow \rho_0 \leqslant 2.(a.\cos\theta_0 - g.\sin\theta_0)$$

3/ Expression de la force de réaction *N* de la tige :

D'après la relation *(2)*, on trouve :

$$N = mg.\cos\theta_0 + m.a.\sin\theta_0 \Rightarrow N = m(g.\cos\theta_0 + a.\sin\theta_0)$$

05 Chapitre 05
Travail et Energie

5.1 Travail d'une force

5.1.1 Travail d'une force constante

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M dans un mouvement rectiligne est défini par le produit scalaire entre $\vec{F}$ et le vecteur de déplacement $\overrightarrow{AB}$:

$$W_{A\rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$

5.1.2 Travail d'une force variable – travail élémentaire :

Pour un petit déplacement rectiligne ou curviligne $d\vec{l}$ du point d'application M de la force $\vec{F}$, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ est le produit scalaire : $\delta W = \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}.\vec{v}.dt.$

5.2 Puissance instantanée d'une force

La puissance instantanée $\mathscr{P}$ d'une force $\vec{F}$ appliquée à un point matériel M qui se déplace à une vitesse $\vec{v}$ est définie par la dérivée du travail de cette force $W_{A\rightarrow B}(\vec{F})$ par rapport au temps : $\mathscr{P} = \dfrac{dW_{A\rightarrow B}(\vec{F})}{dt} = \vec{F}.\dfrac{d\vec{l}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$

5.3 Forces conservatives et non conservatives

- **Force conservative :** une force est dite *conservative* si le travail ne dépend pas du chemin suivi le point matériel.
- **Force non conservative :** une force est dite *non conservative* si le travail dépend du chemin suivi le point matériel.

5.4 Energie

5.4.1 Energie cinétique

Dans un référentiel ($\mathscr{R}$), l'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m et de vitesse de mouvement $\vec{v}$ à l'instant t est définie par : $E_C = \frac{1}{2}mv^2$.

5.4.2 Energie potentielle

L'énergie potentielle d'un système physique notée E_p est l'énergie liée à une interaction, qui possède un potentiel se transformant en d'autres énergies.

On dit qu'une force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, s'il existe une fonction E_p telle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_p$$

La fonction scalaire E_p est alors appelée *énergie potentielle*.

Une force qui dérive d'un potentiel est dite *conservative (centrale)*, c'est-à-dire que son travail le long de n'importe quel trajet AB dépend uniquement de la position initiale A et finale B.

Soit un point matériel M soumis à une force $\vec{F}$ dérivant d'un potentiel E_p. Le travail de $\vec{F}$ sur le trajet AB est indépendant du chemin suivi, donc :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\int dE_p$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = E_{p(A)} - E_{p(B)} = \Delta E_p$$

Où: $E_{p(A)}$ et $E_{p(B)}$ sont les énergies potentielles du point M respectivement en A et en B.

5.4.3 Énergie mécanique

L'énergie mécanique ou totale E_m d'une particule M est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle : $E_M = E_C + E_P$.

5.4.4 Théorème de l'énergie cinétique

- **Cas général :** Dans le référentiel galiléen ($\mathscr{R}$), le travail de toutes les forces (conservatives et non conservatives) extérieures appliquées au point matériel M, entre la position initiale (i) et la position finale (f), est égal à la variation de l'énergie cinétique de M : $\sum W_{i\to f}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_C = E_{C(f)} - E_{C(i)}$
- **Cas des forces conservatives :** L'énergie mécanique totale est conservée, lorsque la conservation des forces extérieures appliquées.

$$E_C + E_P = E_M = constante.$$

5.5 Impulsion

L'impulsion de la force $\vec{F}_{ext}$ appliquée à la particule, notée $\vec{I}$, est la variation de la quantité de mouvement $\Delta\vec{P}$ de cette particule durant l'intervalle de temps $[t_i - t_f]$, alors :

$$\vec{I} = \int d\vec{P} = \vec{P}(t_f) - \vec{P}(t_i) = \Delta\vec{P} = \int \vec{F}_{ext}.dt.$$

5.6 Centre d'inertie d'un solide

Un corps solide est caractérisé par son centre de d'inertie G (appelé aussi centre de masse ou centre de gravité).

Le centre d'inertie G est le barycentre défini par son vecteur position $\overrightarrow{OG}$ tel que :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int \overrightarrow{OM}.dm}{\int dm} = \frac{1}{m}.\int \overrightarrow{OM}.dm$$

Où : M est un point du solide affecté de l'élément de masse dm, O est un point fixe quelconque dans un repère galiléen, m est la masse totale du solide.

5.7 Moment d'inertie

5.7.1 Moment d'inertie d'un point matériel

Le moment d'inertie I d'un point matériel M de masse m par rapport à un axe (Δ) est défini par : $I = m.r^2$, où : r est la distance du point M à l'axe (Δ).

5.7.2 Moment d'inertie d'un solide indéformable

Le moment d'inertie I d'un solide indéformable est défini par : $I = \int r^2.dm$. où : r est la distance de l'élément de masse dm à l'axe (Δ).

5.7.3 Moment d'inertie par rapport à un axe de symétrie

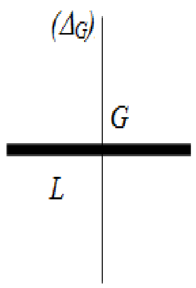
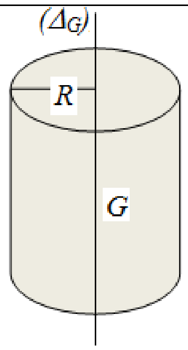
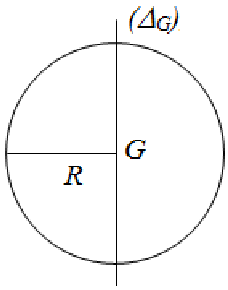
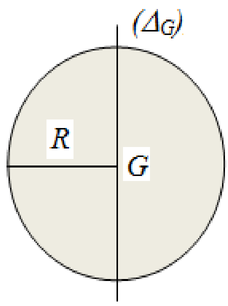
Tige mince de longueur L	Cylindre plein de rayon R	Sphère creuse de rayon R	Sphère pleine de rayon R
			
$I_{\Delta G} = \frac{1}{12}.mL^2$	$I_{\Delta G} = \frac{1}{2}.mR^2$	$I_{\Delta G} = \frac{2}{3}.mR^2$	$I_{\Delta G} = \frac{2}{5}.mR^2$

Tableau 5.1 : Moment d'inertie par rapport à un axe de symétrie

5.7.4 Théorème d'Huygens

Le moment d'inertie $I_{(\Delta)}$ d'un solide par rapport à un axe (Δ) est défini par :

$$I_{(\Delta)} = I_{(\Delta G)} + m.d^2$$

Où : $I_{(\Delta G)}$ est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe (Δ_G) passant par G, d est la distance entre (Δ) et (Δ_G), m est la masse du solide.

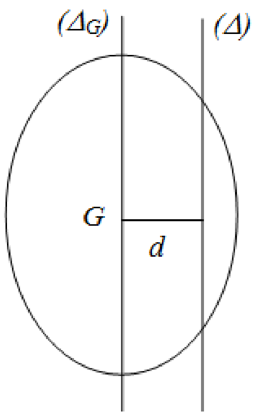


figure 5.1 : Théorème d'Huygens

Enoncés des exercices

Exercice 01

I/ Un point matériel est soumis à une force $\vec{F}$ de composantes cartésiennes suivantes :

$$\begin{cases} F_x = x^2 - y^2 \\ F_y = x.y \\ F_z = x.z \end{cases}$$

a) Calculer le travail de la force $\vec{F}$ entre les points $O(0, 0, 0)$ et $A(2, 4, 4)$ le long de la courbe C d'équations paramétriques : $x = t$; $y = t^2$ et $z = t^2$

II/ Une particule est soumise à une force $\vec{F}$ de composantes cartésiennes : $F_x = y$ et $F_y = x$.

b) Déterminer le travail de cette force lorsque le point se déplace sur sinusoïde d'équation : $y = a.\cos(2x)$ lorsque x varie de 0 à π.

Exercice 02

1/ Calculer en coordonnées cartésiennes les composantes du vecteurs moment cinétiques $(L_x ; L_y ; L_z)$ c'est à dire les moments par rapport à Ox, Oy, Oz.

2/ Exprimer ces composantes en fonction des coordonnées cylindriques ρ ; θ et z.

3/ Calculer les composantes $(L_x ; L_y ; L_z)$ en coordonnées sphériques.

Exercice 03

Un chariot est lancé avec une vitesse initiale v_0 est soumis à une force de freinage constante $F_1 = a^2.k.m$ et à la résistance de l'air $F_2 = k.m.v^2$; où : m est la masse du chariot, a et k sont des constantes positives. On donne la loi de variation de la vitesse du chariot :

$v(t) = a.\tan(\varphi_0 - a.k.t)$ avec $\varphi_0 = \arctan\left(\frac{v_0}{a}\right)$.

1) Calculer l'impulsion des forces appliquées entre les instants $t = 0s$ et t.
2) En déduire la durée du parcours nécessaire à l'arrêt complet du chariot.

Exercice 04

Un mobile se déplace dans un champ de force $\vec{F}$ selon la relation :

$$\vec{F} = (x - \lambda.y)\,\vec{i} + (2.y - 3.x)\,\vec{j}$$

1) Déterminer la valeur de λ pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel U.
2) Trouver l'expression de l'énergie potentielle U.

Exercice 05

On considère deux champs de forces : $\vec{F_1} = (2.xy).\vec{i} + (x^2 + y^2).\vec{j}$, $\vec{F_2} = (y^2 + xy).\vec{j}$.

1) Calculer le travail effectué par : $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ pour aller de l'origine à $A(1,1)$ en suivant le trajet (C_1) défini par la ligne droite $y = x$, puis le trajet (C_2) défini par la parabole $y = x^2$.
2) Est ce que les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ dérivent elles d'une énergie potentielle ?
3) Si oui, quelle est donc cette énergie potentielle ?

Exercice 06

Un mobile M de masse m se déplace sur le trajet représenté sur *la figure 5.2* ci-dessous.

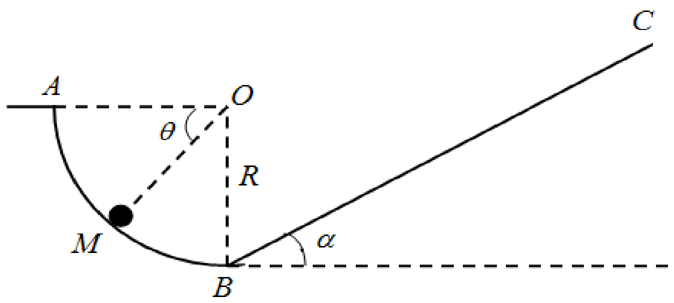


figure 5.2

A l'instant $t = 0\ s$, il est placé au point A, sans vitesse initiale. On suppose que le mouvement sur le parcours AB soit sans frottement, mais sur BC, il existe une force de frottement constante $\vec{f}$.

1) Donner l'expression de la vitesse v_M au point (M) à l'aide du théorème de l'énergie cinétique.
2) La particule s'arrete sur le parcours BC au point M'. Calculer la distance d parcourue par la particule.

   On donne : Le coefficient de frottement dynamique $\mu_d = 0,3$; $R = 0,16\ m$; $\alpha = \frac{\pi}{6} rad.$

Exercice 07

Dans le plan (xOy), un point matériel M de masse m se déplace sur la trajectoire définie par :

$$\begin{cases} x = a.sin(\omega t) \\ y = 2.a.cos(\omega t) \end{cases}$$

Où : a et ω sont des constantes positives.

1) Quelle est la nature de la trajectoire du mouvement ? Justifier.
2) Trouver les vecteurs vitesse et accélération, dans la base cartésienne ($\vec{i}$, $\vec{j}$).

3) Montrer que la force agissant sur le point matériel M est centrale.
4) Exprimer l'énergie cinétique du M en fonction du temps, en déduire la valeur maximale de l'énergie cinétique.
5) En utilisant les coordonnées cylindriques :
   a– Calculer le travail lorsque le mobile se déplace de $A(2a,0)$ à $B(0, a)$.
   b– Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.
6) Déterminer l'expression de la puissance instantanée et calculer le travail lorsque le point matériel a fait un tour. Conclure.
7) Déterminer l'énergie mécanique du point matériel.

<u>Exercice 08</u>

Dans un repère cartésien fixe $R(Oxyz)$, on considère une particule M de masse m qui se trouve dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe vertical (Oz) sur un cercle de rayon R. La position de la particule M est repérée en coordonnées polaires selon la relation suivante :
$v^2 = v_0^2(1 - \sin\theta)$, v_0 est la vitesse initiale positive.

1) Trouver la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ de M en fonction de v_0, R et θ.
2) Exprimer dans la base des coordonnées polaires, les composantes de l'accélération de M en fonction de v_0, R et θ. En déduire la force $\vec{F}$ appliquée à la particule M.
3) Calculer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.
4) En déduire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du mobile en supposant que l'énergie potentielle est nulle en A car : $\theta_A = -\frac{\pi}{2} rad$.
5) Calculer le travail de $\vec{F}$ lorsque le mobile se déplace de A à M.
6) Montrer que l'énergie mécanique totale est conservée. Conclure.

<u>Exercice 09</u>

On se propose d'étudier le mouvement, sur un axe horizontale Ox, d'une particule M de masse m accrochée à un ressorts de masse négligeables, de même raideur k et de même longueur à vide l_0. Les deux autres extrémités des ressorts sont fixées aux points A et B de l'axe Ox (on suppose que : $OA = OB = a$). Les frottements de M sur Ox sont supposés négligeables (*voir figure 5.3*). On note x le déplacement de M sur l'axe ($\overrightarrow{OM} = x.\vec{i}$).

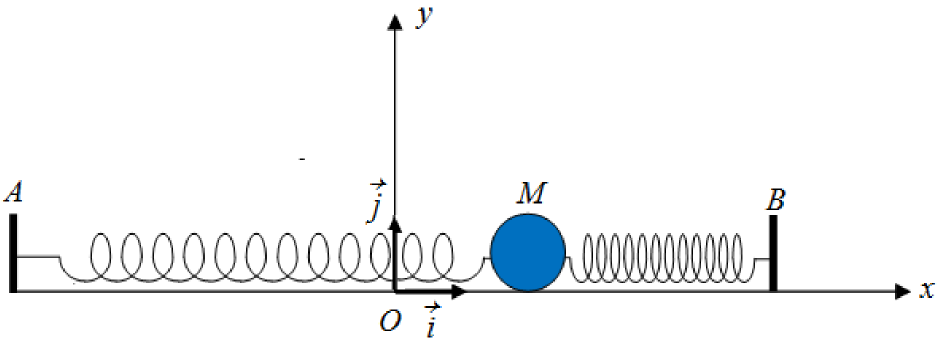


figure 5.3

1) En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

a– Etablir l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$x + \omega_0^2 x = 0$$

b/ Donner l'expression de l'impulsion ω_0 et de la période T_0.

La particule M est maintenant soumise (en plus de son poids et de la réaction de l'axe Ox) à une force d'amortissement visqueux $\vec{f}_v = -\alpha.\vec{v}$ (α : coefficient d'amortissement positif).

2/ En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

Ecrire l'équation différentielle de M dans le cas où les extrémités A et B sont fixes sur l'axe Ox.

On pose : $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \dfrac{2k}{m}$.

Solutions des exercices

Exercice 01

I/ Un point matériel est soumis à une force $\vec{F}$ de composantes cartésiennes :

$$\begin{cases} F_x = x^2 - y^2 \\ F_y = x.y \\ F_z = x.z \end{cases}$$

a/ Calcul du travail de la force $\vec{F}$ entre les points $O(0, 0, 0)$ et $A(2, 4, 4)$ le long de la courbe C d'équations paramétriques : $x = t$; $y = t^2$ et $z = t^2$:

On a : $dx = dt$; $dy = 2.t.dt$ et $dz = 2.t.dt$

L'expression du travail élémentaire est : $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = Fx.dx + Fy.dy + Fz.dz$

Alors : $W(\vec{F}) = \int_0^2 F_x.dx + \int_0^4 F_y.dy + \int_0^4 F_z.dz$

$$W(\vec{F}) = \int_0^2 (t^2 - t^4).dt + 2.\int_0^4 t^4.dt + 2.\int_0^4 t^4.dt$$

$$W(\vec{F}) = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right]_0^2 + 2.\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^4 + 2.\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^4$$

$$W(\vec{F}) = \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + \frac{2048}{5} + \frac{2048}{5} = \frac{12232}{15} \text{ joules.}$$

II/ Une particule M est soumise à une force $\vec{F}$ de composantes cartésiennes suivantes :

$F_x = y$ et $F_y = x$.

b/ Travail de la force $\vec{F}$ lorsque le point se déplace sur sinusoïde d'équation : $y = a.cos(2x)$ lorsque x varie de 0 à π.

On a : $y = a.cos(2x)$ alors on obtient : $dy = -2.a.sin(2x)dx$.

L'expression du travail élémentaire est : $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = Fx.dx + Fy.dy$

Donc : $W(\vec{F}) = \int_0^\pi y.dx + \int_0^\pi x.dy$

$$W(\vec{F}) = a.\int_0^\pi cos(2x)dx - 2.a.\int_0^\pi x.sin(2x)dx$$

Alors : $W(\vec{F}) = a\left[\frac{1}{2}.sin(2x)\right]_0^\pi - 2.a\left[-\frac{1}{2}.x.cos(2x) + \frac{1}{4}.sin(2x)\right]_0^\pi$

$$W(\vec{F}) = \pi.a \text{ joules}$$

Exercice 02

1/ Calcul des composantes du vecteur moment cinétiques *(L_x ; L_y ; L_z)* c'est à l'air les moments par rapport à *ox ; oy ; oz* en coordonnées cartésiennes :

Le moment cinétique est défini par : $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \vec{r} \wedge m.\vec{v}$.

Dans la base des coordonnées cartésiennes :

Le vecteur position s'écrit : $\vec{r} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$, ainsi

Le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \dot{x}.\vec{i} + \dot{y}.\vec{j} + \dot{z}.\vec{k}$

$$\text{Donc : } \vec{L} = \vec{r} \wedge m.\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m.\dot{x} & m.\dot{y} & m.\dot{z} \end{vmatrix} = m.(y\dot{z} - z\dot{y})\,\vec{i} + m.(z\dot{x} - x\dot{z})\,\vec{j} + m.(x\dot{y} - y\dot{x})\,\vec{k}$$

$$\text{On obtient : } \begin{cases} Lx = m.(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ Ly = m.(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ Lz = m.(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{cases}$$

2/ Composantes du vecteur moment cinétiques en fonction des coordonnées cylindriques ρ ; θ et z :

En coordonnées cylindriques on a les transformations suivantes :

$$\begin{cases} x = \rho.\cos\theta \\ y = \rho.\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho}.\cos\theta - \rho.\dot{\theta}.\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{\rho}.\sin\theta + \rho.\dot{\theta}.\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases}$$

Substituant dans l'expression de $\vec{L}$ en coordonnées cartésiennes, on obtient :

$$\begin{cases} Lx = m.[\rho.\sin\theta.\dot{z} - z.(\dot{\rho}.\sin\theta + \rho.\dot{\theta}.\cos\theta)] \\ Ly = m.[z.(\dot{\rho}.\cos\theta - \rho.\dot{\theta}.\sin\theta) - \rho.\cos\theta.\dot{z}] \\ Lz = m.[\rho.\cos\theta.(\dot{\rho}.\sin\theta + \rho.\dot{\theta}.\cos\theta) - \rho.\sin\theta.(\dot{\rho}.\cos\theta - \rho.\dot{\theta}.\sin\theta)] \end{cases}$$

3/ Composantes du vecteur moment cinétiques en fonction des coordonnées sphériques r ; θ et φ :

De la même manière en coordonnées sphériques *(r, θ, φ)* :

On a les transformations suivantes :

$$\begin{cases} x = r.\sin\varphi.\cos\theta \\ y = r.\sin\varphi.\sin\theta \\ z = r.\cos\varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}.\sin\varphi.\cos\theta + r.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\cos\theta - r.\dot{\theta}.\sin\varphi.\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}.\sin\varphi.\sin\theta + r.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\sin\theta + r.\dot{\theta}.\sin\varphi.\cos\theta \\ \dot{z} = \dot{r}.\cos\varphi - r.\dot{\varphi}.\sin\varphi \end{cases}$$

On trouvera :

$Lx = m.[(r.\sin\varphi.\sin\theta)(\dot{r}.\cos\varphi - r.\dot{\varphi}.\sin\varphi) - (r.\cos\varphi)(\dot{r}.\sin\varphi.\sin\theta + r.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\sin\theta + r.\dot{\theta}.\sin\varphi.\cos\theta)]$
$Ly = m.[(r.\cos\varphi)(\dot{r}.\sin\varphi.\cos\theta + r.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\cos\theta - r.\dot{\theta}.\sin\varphi.\sin\theta) - (r.\sin\varphi.\cos\theta)(\dot{r}.\cos\varphi - r.\dot{\varphi}.\sin\varphi)]$
$Lz = m.[(r.\sin\varphi.\cos\theta)(\dot{r}.\sin\varphi.\sin\theta + r.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\sin\theta + r.\dot{\theta}.\sin\varphi.\cos\theta) - (r.\sin\varphi.\sin\theta)(\dot{r}.\sin\varphi.\cos\theta + r.\dot{\varphi}.\cos\varphi.\cos\theta - r.\dot{\theta}.\sin\varphi.\sin\theta)]$

Exercice 03

On a les forces exercées sur le chariot : $F_1 = a^2.km$ et $F_2 = k.m.v^2$

La vitesse du chariot est donnée par : $v(t) = a.\tan(\varphi_0 - a.k.t)$ avec $\varphi_0 = \arctan(\frac{v_0}{a})$.

1/ Calcul de l'impulsion des forces appliquées entre les instants $t = 0s$ et t :

Par définition, l'impulsion d'une force est : $I = \int_0^t F(t).dt$

La résultante des forces appliquées au chariot est :

$F = -F_1 - F_2 = -a^2.km - k.m.v^2 = -a^2.km.[1 + \tan^2(\varphi_0 - a.k.t)]$

Donc l'impulsion de cette force entre les instant $t = 0s$ et t est :

$$I = \int_0^t F(t).dt = -a^2.km.\int_0^t [1 + \tan^2(\varphi_0 - a.k.t)]\,.dt = [m.a.\tan(\varphi_0 - a.k.t)]_0^t$$

Alors : $I = m.a.[\tan(\varphi_0 - a.k.t) - \tan(\varphi_0)] = m.a.\tan(\varphi_0 - a.k.t) - m.v_0$

2/ Durée du parcours nécessaire à l'arrêt complet du chariot :

L'arrêt du chariot est obtenu à l'instant t où :

$I = \delta P = -m.v_0$ soit : $\tan(\varphi_0 - a.k.t) = 0 \quad t = \frac{1}{a.k}.\varphi_0 = \frac{1}{a.k}.\arctan(\frac{v_0}{a})$

C'est bien la valeur que l'on trouve directement en annulant l'expression de la vitesse $v(t)$.

Exercice 04

Un mobile se déplace dans un champ de force selon la relation : $\vec{F} = (x - \lambda.y)\,\vec{i} + (2.y - 3.x)\,\vec{j}$

1/ Valeur de λ pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel U :

Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'un potentiel, il faut que la relation $\frac{\partial Fx}{\partial y} = \frac{\partial Fy}{\partial x}$ soit vérifiée.

On a : $\frac{\partial Fx}{\partial y} = -\lambda$ et $\frac{\partial Fy}{\partial x} = -3$

Donc, on obtient la valeur de λ : $\lambda = 3$

L'expression de la force $\vec{F}$ est alors : $\vec{F} = (x - 3.y)\,\vec{i} + (2.y - 3.x)\,\vec{j}$

2/ Expression de l'énergie potentielle *U* :

Nous savons que : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,U(x, y)$; d'après à cette relation, nous aboutissons à l'expression du potentiel dont dérive la force ci-dessus :

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = F_x = x - 3.y \quad \Rightarrow \quad -U = \frac{1}{2}.x^2 - 3.y.x + f(y)$$

$$-\frac{\partial U}{\partial y} = F_y = 2.y - 3.x \quad \Rightarrow \quad -3.x + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = 2.y - 3.x \Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y} = 2.y$$

Si on intègre la dernière relation, on trouve : $f(y) = y^2 - cte$

Finalement on aura l'expression de l'énergie potentielle :

$$U(x, y) = -\frac{1}{2}.x^2 + 3.y.x - y^2 + cte$$

<u>Exercice 05</u>

On a les forces : $\vec{F_1} = (2.xy).\vec{i} + (x^2 + y^2).\vec{j}$, $\vec{F_2} = (y^2 + xy).\vec{j}$.

1/ Calcul du travail effectué par : $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ pour aller de l'origine à *A(1,1)* en suivant le trajet (*C₁*) défini par la ligne droite *y = x* :

L'expression du travail élémentaire est : $dW = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = Fx.dx + Fy.dy + Fz.dz$, donc :

$$W_{O\to A}(\vec{F_1}) = \int_0^1 (2.xy).dx + \int_0^1 (x^2 + y^2).dy = \int_0^1 (2.x^2).dx + \int_0^1 (2.y^2).dy$$

$$W_{O\to A}(\vec{F_1}) = \left[\frac{2.x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2.y^3}{3}\right]_0^1$$

$$W_{O\to A}(\vec{F_1}) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\ joules.$$

$$W_{O\to A}(\vec{F_2}) = \int_0^1 (y^2 + xy).dy = \int_0^1 (2.y^2).dy$$

$$W_{O\to A}(\vec{F_2}) = \left[\frac{2.y^3}{3}\right]_0^1$$

$$W_{O\to A}(\vec{F_2}) = \frac{2}{3}\ joules.$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = W_{O\to A}(\vec{F_1}) + W_{O\to A}(\vec{F_2}) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2\ joules.$$

Calcul du travail effectué par : $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ et $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ pour aller de l'origine à *A(1,1)* en suivant le trajet (*C₂*) défini par la parabole : $y = x^2$:

On a : $y = x^2$ donc : $dy = 2.x.dx$.

$$W_{O\to A}(\vec{F_1}) = \int_0^1 (2.xy).dx + \int_0^1 (x^2 + y^2).dy = \int_0^1 (2.x^3).dx + \int_0^1 (x^2 + x^4).2x.dx$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}_1) = \int_0^1 (2.x^3).dx + \int_0^1 2.(x^3 + x^5).dx$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}_1) = \left[\frac{2.x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2.x^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{2.x^6}{6}\right]_0^1$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}_1) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} = \frac{4}{3} \text{ joules}$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}_2) = \int_0^1 (y^2 + xy).dy = \int_0^1 (x^4 + x^3).2.x.dx = \int_0^1 2.(x^5 + x^4).dx$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}_2) = \left[\frac{2.x^6}{6}\right]_0^1 + \left[\frac{2.x^5}{5}\right]_0^1$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}_2) = \frac{2}{6} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15} \text{ joules.}$$

$$W_{O\to A}(\vec{F}) = W_{O\to A}(\vec{F}_1) + W_{O\to A}(\vec{F}_2) = \frac{4}{3} + \frac{11}{15} = \frac{31}{15} \text{ joules.}$$

2/ Est ce que les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ dérivent elles d'une énergie potentielle ?

Pour que la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle, il faut que la relation $\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ soit vérifiée.

On a : $\vec{F}_1 = (2.xy).\vec{i} + (x^2 + y^2).\vec{j}$

Implique : $\frac{\partial F_{x1}}{\partial y} = 2.x$ et $\frac{\partial F_{y1}}{\partial x} = 2.x$

On obtient : $\frac{\partial F_{x1}}{\partial y} = \frac{\partial F_{y1}}{\partial x}$, alors la force $\vec{F}_1$ dérive d'une énergie potentielle.

Ainsi, on a : $\vec{F}_2 = (y^2 + xy).\vec{j}$

Implique : $\partial \frac{\partial F_{x2}}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial F_{y2}}{\partial x} = y$

Devient : $\frac{\partial F_{x2}}{\partial y} \neq \frac{\partial F_{y2}}{\partial x}$, alors la force $\vec{F}_2$ ne dérive pas d'une énergie potentielle.

3/ Calcul de l'énergie potentielle *Ep* :

On sait que : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\, E_P(x, y)$; d'après à cette relation, on arrive à l'expression de l'énergie potentielle dont dérive la force $\vec{F}_1$:

$$-\frac{\partial E_P}{\partial x} = F_{x1} = 2.x.y \quad \Rightarrow \quad -E_P = y.x^2 + f(y)$$

$$-\frac{\partial E_P}{\partial y} = F_{y1} = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \frac{\partial f(y)}{\partial y} = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \frac{\partial f(y)}{\partial y} = y^2$$

Si on intègre la dernière relation, on trouve : $f(y) = \frac{y^3}{3} - cte$

Finalement on aura l'expression de l'énergie potentielle :

$$E_P(x, y) = -y.x^2 - \frac{y^3}{3} + cte$$

Exercice 06

1/ L'expression de la vitesse v_M au point M à l'aide du théorème de l'énergie cinétique :

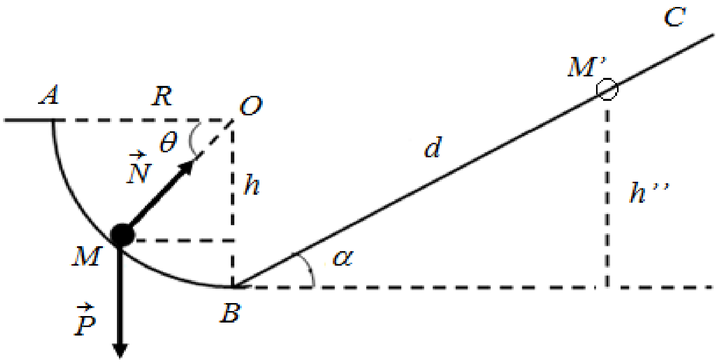


figure 5.4

En utilisant théorème de l'énergie cinétique entre les points A et M :

$$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext}) = W(\vec{F}_{ext})$$

$$\Delta E_C = E_{CM} - E_{CA} = W_{A\to M}(\vec{P}) + W_{A\to M}(\vec{N})$$

$E_{CM} = W_{A\to M}(\vec{P}) = m.g.h = m.g.R.\sin\theta$ (d'après *la figure 5.4* ; on a : $h = R.\sin\theta$).

$$\frac{1}{2}.m.v_M^2 = m.g.R.\sin\theta \Rightarrow v_M = \sqrt{2.g.R.\sin\theta}$$

2/ Calcul de la distance *d* parcourue par la particule sur *BC* :

On calcule la vitesse de la particule au point B :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{N})$$

$$E_{CB} = W_{A\to B}(\vec{P}) = m.g.h' = m.g.R$$

$$\frac{1}{2}.m.v_B^2 = m.g.R \Rightarrow v_B = \sqrt{2.g.R}$$

On suppose que la particule s'arrête au point M' sur le parcours BC.

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique entre les points B et M' :

$$\Delta E_C = E_{CM'} - E_{CB} = W_{B\to M'}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{N}) + W_{A\to B}(\vec{f})$$

$$E_{CB} = m.g.h'' + f.d$$

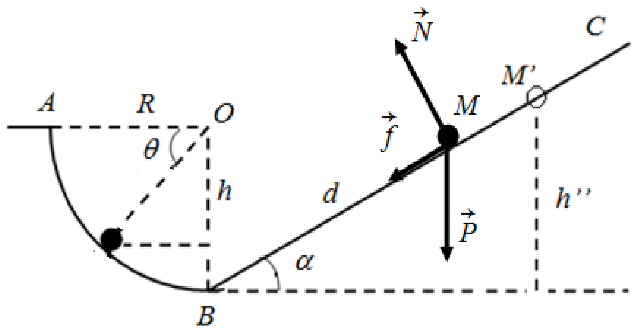


figure 5.5

D'après *la figure* 5.5 on obtient : $h'' = d.\sin\alpha$

Ainsi, on sait que : $f = \mu_d. N$; sachant que : $N = P.\cos\alpha = m.g.\cos\alpha$

On aura, donc : $\frac{1}{2}.m.v_B^2 = m.g.d.\sin\alpha + \mu_d.m.g.\cos\alpha.d$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2.g.(\sin\alpha + \mu_d.\cos\alpha).d$$

$$\Rightarrow d = \frac{v_B^2}{2.g.(\sin\alpha + \mu_d.\cos\alpha)} = \frac{2.g.R}{2.g.(\sin\alpha + \mu_d.\cos\alpha)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{R}{(\sin\alpha + \mu_d.\cos\alpha)} = \frac{0{,}16}{\sin\frac{\pi}{6} + 0{,}3.\cos\frac{\pi}{6}} = 0{,}21\ m$$

Exercice 07

1/ Nature de la trajectoire du mouvement :

On a : $\begin{cases} x = a.\sin(\omega t) \\ y = 2.a.\cos(\omega t) \end{cases}$ devient : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \sin^2(\omega t) \\ \frac{y^2}{4.a^2} = \cos^2(\omega t) \end{cases}$

Donc : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4.a^2} = 1$

Alors : La trajectoire est une ellipse.

2/ Vecteurs vitesse et accélération, dans la base cartésienne ($\vec{i}, \vec{j}$).

On a le vecteur position : $\overrightarrow{OM} = a.\sin(\omega t).\vec{i} + 2.a.\cos(\omega t).\vec{j}$

Alors le vecteur vitesse est : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = a.\omega.\cos(\omega t).\vec{i} - 2.a.\omega.\sin(\omega t).\vec{j}$

Et le vecteur accélération est : $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a.\omega^2.\sin(\omega t).\vec{i} - 2.a.\omega^2.\cos(\omega t).\vec{j}$

$$\vec{\gamma} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

3/ On montre que la force, agissant, sur le point matériel *M* est centrale :

L'application du principe fondamental de la dynamique (*P.F.D*) permet d'écrire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma} \text{ ou bien : } \vec{F} = -m.\omega^2.\overrightarrow{OM} \text{ car : } \vec{\gamma} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

En coordonnées polaires on a : $\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{u}_\rho$

On obtient : $\vec{F} = -m.\omega^2.\rho.\vec{u}_\rho$; alors : le point matériel est soumis à une force centrale.

4/ On exprime l'énergie cinétique du *M* en fonction du temps :

L'énergie cinétique est définie par : $E_C = \frac{1}{2}.mv^2$

La norme de la vitesse est : $\|\vec{v}\| = v = a.\omega.\sqrt{cos^2(\omega t) + 4.sin^2(\omega t)}$

$$= a.\omega.\sqrt{3.sin^2(\omega t) + 1}$$

Donc : $E_C = \frac{1}{2}.mv^2 = \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3.sin^2(\omega t) + 1)$

On déduit la valeur maximale de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique E_C est maximale si : $sin^2(\omega t) = 1$

d'où : $E_{C\,max} = \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3 + 1) = 2.m.a^2.\omega^2$

5/ En utilisant les coordonnées cylindriques :

a/ Calcul du travail lorsque le mobile se déplace de *A(2a, 0)* , *B(0, a)*

Le travail élémentaire s'écrit : $\delta W = \vec{F}.\overrightarrow{dl}$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \int_{\rho_A = 2a}^{\rho_B = a} -m.\omega^2.\rho.d\rho = -m.\omega^2.\left[\frac{a^2}{2} - \frac{4.a^2}{2}\right] \text{; donc :}$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \frac{3}{2}.m.\omega^2.a^2 \text{ joules.}$$

b/ Calcul du travail en utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3.\ sin^2(\frac{\pi}{2}) + 1) - \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3.sin^2(0) + 1)$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = 2.\ m.a^2.\omega^2 - \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2$$

$$W_{A\to B}(\vec{F}) = \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = \frac{3}{2}.m.a^2.\omega^2 \text{ joules.}$$

Alors on retrouve le même résultat du travail de la force $\vec{F}$.

6/ L'expression de la puissance instantanée :

La puissance instantanée est définie par : $\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v}$

$\vec{F} = -m.\omega^2.\rho.\vec{u}_\rho$

$\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\omega.\vec{u}_\theta$; où : $\rho = a.\sqrt{3.\cos^2(\omega t) + 1}$ et $\dot{\rho} = \dfrac{-6.a.\omega.\cos(\omega t).\sin(\omega t)}{2.\sqrt{3.\cos^2(\omega t) + 1}}$

Alors : $\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v} = (-m.\omega^2.\rho.\vec{u}_\rho).(\dot{\rho}.\vec{u}_\rho + \rho.\omega.\vec{u}_\theta) = -m.\omega^2.\rho.\dot{\rho}$

$$= -m.\omega^2.a.\left(\sqrt{3.\cos^2(\omega t) + 1}\right).\left(\frac{-6.a.\omega.\cos(\omega t).\sin(\omega t)}{2.\sqrt{3.\cos^2(\omega t) + 1}}\right)$$

$$= 3.m.\omega^3.a^2.\cos(\omega t).\sin(\omega t)$$

Calcul du travail lorsque le point matériel fait un tour :

Le travail élémentaire s'écrit ainsi: $\delta W = \mathscr{P}.dt$

Sachant que : $\dot{\theta}.dt = d\theta \Rightarrow dt = \dfrac{d\theta}{\dot{\theta}} = \dfrac{d\theta}{\omega}$

$$W_{B\to B}(\vec{F}) = \int_0^{2\pi} \left(3.m.\omega^2.a^2.\cos\theta.\sin\theta\right).d\theta = 3.m.\omega^2.a^2.\left[\frac{\sin^2(2\pi)}{2} - \frac{\sin^2(0)}{2}\right] = 0$$

Conclusion :

$W_{B\to B}(\vec{F})$; le travail est nul dans un cycle, donc la force $\vec{F}$ est conservative.

7/ Calcul de l'énergie mécanique du point matériel :

La force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_P ; donc : $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\ E_P$

Alors : $E_P = \dfrac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3.\cos^2(\omega t) + 1) + cte$

Par définition :

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3.\sin^2(\omega t) + 1) + \frac{1}{2}.m.a^2.\omega^2.(3.\cos^2(\omega t) + 1) + cte$$

$$E_M = E_C + E_P = \frac{5}{2}.m.a^2.\omega^2 + cte$$

L'énergie mécanique est indépendante du temps donc, elle est constante.

Exercice 08

Une particule M de masse m repérée en coordonnées polaires, sa vitesse est donnée par la relation suivante : $v^2 = v_0^2(1 - \sin\theta)$, v_0 est la vitesse initiale positive.

1/ Déterminons la vitesse angulaire ω = $\dot{\theta}$ de M en fonction de v_0, R et θ :

Dans un mouvement circulaire, le vecteur position est : $\overrightarrow{OM} = R.\vec{u}_\rho$, ainsi le vecteur vitesse est : $\vec{v} = R.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta$; d'où : $v = R.\dot{\theta} = R.\omega$

Donc la vitesse angulaire : $\omega = \dot{\theta} = \dfrac{v}{R} = \dfrac{v_0.\sqrt{1 - \sin\theta}}{R}$ $\quad (1)$

2/ Composantes de l'accélération de M en fonction de v_0, R et θ dans la base des coordonnées polaires :

Le vecteur accélération d'un mouvement circulaire s'écrit : $\vec{\gamma} = -R.\dot{\theta}^2.\vec{u}_\rho + R.\ddot{\theta}.\vec{u}_\theta$

Si on dérive la relation (1), on obtient : $\ddot{\theta} = -\dfrac{v_0^2.\cos\theta}{2.R^2}$

D'où : $\vec{\gamma} = -\dfrac{v_0^2}{2R}.\left[2(1-\sin\theta).\vec{u}_\rho + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]$

Alors les composantes de l'accélération sont : $\begin{cases} \vec{\gamma}_\rho = -\dfrac{v_0^2}{R}.(1-\sin\theta).\vec{u}_\rho \\ \vec{\gamma}_\theta = -\dfrac{v_0^2}{2R}.\cos\theta.\vec{u}_\theta \end{cases}$

On déduit la force $\vec{F}$ appliquée au mobile M.

Le principe fondamental de la dynamique *(P.F.D)* permet d'écrire :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{F} = m.\vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{m.v_0^2}{2R}.\left[2(1-\sin\theta).\vec{u}_\rho + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right]$$

3/ Calcul de la puissance instantanée de la force $\vec{F}$.

Par définition, la relation de la puissance instantanée de la force est : $\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{v}$

Alors : $\mathscr{P} = -\dfrac{m.v_0^2}{2R}.\left[2(1-\sin\theta).\vec{u}_\rho + \cos\theta.\vec{u}_\theta\right].\left[R.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta\right] = -\dfrac{m.v_0^2}{2R}.\cos\theta.R.\dot{\theta}$

$$\mathscr{P} = -\frac{m.v_0^2}{2}.\cos\theta.\dot{\theta} = -\frac{m.v_0^3}{2}.\cos\theta.\frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{R}$$

4/ L'énergie cinétique et l'énergie potentielle de la particule :

L'énergie cinétique s'écrit : $E_C = \dfrac{1}{2}.m.v^2 = \dfrac{1}{2}.m.v_0^2.(1-\sin\theta)$.

En supposant que l'énergie potentielle est nulle en position A ; sachant que : $\theta_A = -\dfrac{\pi}{2}$.

L'énergie potentielle s'écrit alors : $E_P = \dfrac{1}{2}.m.v_0^2.(1+\sin\theta)$.

5/ Calcul du travail de $\vec{F}$ lorsque la particule mobile se déplace de A à M :

Le travail élémentaire s'écrit : $\delta W = \mathscr{P}.dt$

Donc : $W_{A\to M}(\vec{F}) = \left(-\dfrac{m.v_0^2}{2}.\cos\theta.\dot{\theta}\right).\ dt$

Sachant que : $\dot{\theta}.dt = d\theta \Rightarrow dt = \dfrac{d\theta}{\dot{\theta}}$

On obtient : $W_{A\to M}(\vec{F}) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(-\frac{m.v_0^2}{2}.\cos\theta\right).d\theta$

Alors : $W_{A\to M}(\vec{F}) = -\frac{1}{2}.m.v_0^2.(1 + \sin\theta).$

6/ On montre que l'énergie mécanique totale est conservée :

L'énergie mécanique est : $E_M = E_C + E_P$

$$E_M = \frac{1}{2}.m.v_0^2.(1 - \sin\theta) + \frac{1}{2}.m.v_0^2.(1 - \sin\theta) = m.v_0^2 = constante.$$

Alors : l'énergie mécanique totale est conservée.

Conclusion : L'énergie mécanique est constante si la force $\vec{F}$ est conservative.

<u>Exercice 09</u>

1/ En utilisant le théorème de l'énergie cinétique :

a/ Equation différentielle du mouvement :

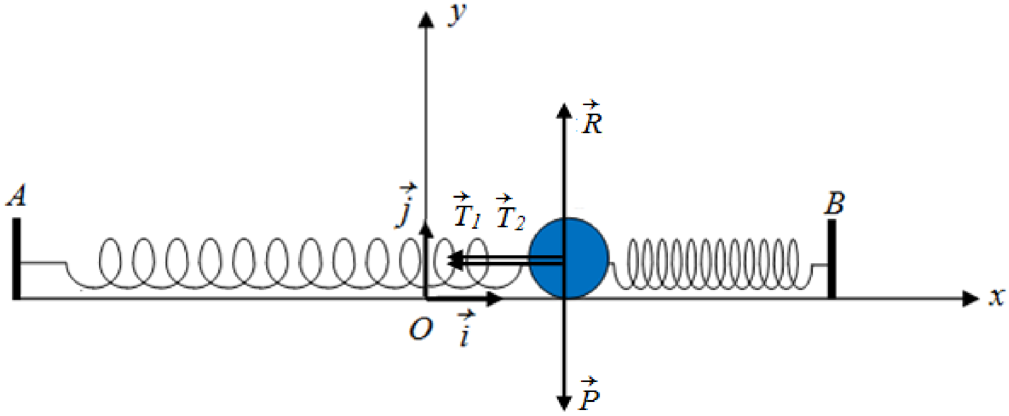


figure 5.6

Les forces exercées sur la particule M sont : le poids $\vec{P}$, la réaction du support $\vec{R}$, les tensions du ressort $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$.

D'après *la figure 5.6*, on a :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg.\vec{j} \\ \vec{R} = R.\vec{j} \\ \vec{T_1} = -k.(AO + x - l_0).\vec{i} = -k.(a + x - l_0).\vec{i} \\ \vec{T_2} = -k.(OB - x - l_0).(-\vec{i}) = +k.(a - x - l_0).\vec{i} \end{cases}$$

Par définition l'énergie cinétique est : $E_C = \frac{1}{2}.mv^2$

Donc : $E_C = \frac{1}{2}.m\,\dot{x}^2$; tel que : $\vec{v}(M) = \dot{x}(M).\,\vec{i}$

Si on dérive l'expression de l'énergie cinétique, on obtient l'équation (1) :

$$\frac{dE_C}{dt} = m.\dot{x}.\ddot{x} \qquad (1)$$

Et d'après le théorème de l'énergie cinétique, défini par : $\frac{dE_C}{dt} = \mathscr{P}(\vec{F}_{ext})$

Sachant que la puissance $\mathscr{P}(\vec{F}_{ext})$ est donnée par : $\mathscr{P}(\vec{F}_{ext}) = \vec{F}_{ext}.\vec{v}$

Donc : $\mathscr{P}(\vec{F}_{ext}) = (\vec{P}.\,\dot{x}.\,\vec{i}) + (\vec{R}.\,\dot{x}.\,\vec{i}) + (\vec{T}_1 + \vec{T}_2)\,.\dot{x}.\,\vec{i} = (\vec{T}_1 + \vec{T}_2)\,.\dot{x}.\,\vec{i} = (-2.k.x.\,\vec{i}).(\dot{x}.\,\vec{i})$

$$\mathscr{P}(\vec{F}_{ext}) = -2.k.x.\,\dot{x} \qquad (2)$$

D'après les relations (1) et (2), sachant que : $(1) = (2)$

On obtient : $m.\dot{x}.\ddot{x} = -2.k.x.\,\dot{x} \Rightarrow m.\ddot{x} + 2.k.x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2.k}{m}.x = 0$

On pose : $\omega_0^{\,2} = \frac{2.k}{m}$

On aura l'équation différentielle du mouvement de la particule M :

$$\ddot{x} + \omega_0^{\,2}.x = 0$$

b/ Expression de l'impulsion ω_0 et de la période T_0

On a : $\omega_0^{\,2} = \frac{2.k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{2.k}{m}}$ *(l'impulsion ω_0)*

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow T_0 = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{2.k}}$ *(la période T_0)*

2/ En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

Equation différentielle de M où les extrémités A et B sont fixes sur l'axe Ox :

D'après le principe fondamental de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma}$

Donc : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m.\vec{\gamma}$

La projection des forces suivant l'axe (ox) :

$$-2.k.x - \alpha.\,\dot{x} = m.\,\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}.\,\dot{x} - \frac{2.k}{m}.x = 0$$

On pose : $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$

Alors, l'équation différentielle de M sera :

$$\ddot{x} + 2.\lambda.\,\dot{x} - \omega_0^2.x = 0 \qquad (3)$$

🕮 Références Bibliographiques 🕮

- 🕮 BELFARHI. B, SERRADJ. F, Mécanique du point matériel, Cours et exercices. Université 08 Mai 1945 de Guelma, Office de publication universitaires, 2019, Algérie.
- 🕮 QUEYREL. J.L, MESPLEDE J., Précis de physique mécanique 1, 2ème édition, Bréal édition, 1995.
- 🕮 PHILIPE. J., Mécanique de Points matériels. Solides. Fluides Avec exercices et problèmes résolus, Collection Masson, 1995.
- 🕮 GENDREAU. P., L'essentiel de la mécanique du point matériel. Collection Ellipses, 1993.
- 🕮 ELBAZ E., Mécanique du point matériel, Collection ellipses, 1985.
- 🕮 BERTIN. M, FAROUX. J.P, RENAULT. J., Mécanique I ; Collection Dunod, 1979.
- 🕮 GIBAUD. A., Mécanique du point, 2eme édition, 2007.
- 🕮 FEYNMAN. R., Le cours de physique de Feynman, Mécanique 1, Paris : Dunod, 2014.
- 🕮 THABET-KHIREDDINE. D, Mécanique du point matériel, Ecole Nationale Polytechnique de Constantine (ENPC), 2015, Algérie.
- 🕮 FIZAZI. A, Mécanique du point Matériel, Rappel de cours et Exercices Corrigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5231, 2011, Algérie.
- 🕮 ZIANI. N ; BOUTAOUS. A, Mécanique du point matériel, Cours et exercices, Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, 2015, Algérie.
- 🕮 BENALLEGUE. L, DEBIANE. M, GOURARI. A, MAHAMDIA. A, Physique I ; Mécanique du point matériel, Université des sciences et de la technologie H. Boumediene, 2011, Algérie.
- 🕮 HADJIRI MEBARKI. S., Physique générale, livre 1 : Cinématique du point matériel rappel cours et exercices corrigés 1. O.P.U, Alger, 2016.
- 🕮 FREDERICK BUECHE J., Physique générale et appliquée, cours et problèmes ; Série Schaum, France 1993.
- 🕮 http://abcsite.free.fr/physique/meca/ns.html.
- 🕮 http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/claude_saintblanquet/synophys/123exdyp/123exdyp.htm