الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 08 ماي 1945 قالمة

كلية الرياضيات والإعلام الآلي وعلوم المادة

قسم الرياضيات

مذكرة تخرج لنيل شهادة ماستر أكاديمي في الرياضيات

تخصص: معادلات تفاضلية جزئية وتحليل عددي

المعنونة بـ:

حول الدّورات الحدّية المتفرعة عن مركز غير خطي بتطبيق نظرية المتوسط.

من إعداد:

سلايمية هيثم

تحت إشراف:

بوعطية ياسين

أمام أعضاء لجنة المناقشة:

الأستاذ:	غياط مراد	أ م أ	رئيسا	جامعة قالمة
الأستاذ:	بوعطية ياسين	أ م أ	مشرفا	جامعة قالمة
الأستاذة:	بادي صبرينة	أ ت ع	مناقشة	جامعة قالمة

دورة جوان 2022

شكر وَ تقديــر

بسم الله الرّحمن الرّحيم والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صل الله عليه وسلم وعلى آله وصحبه أجمعين .

إمتثالا لقوله تعالى بعد بسم الله الرحمن الرحيم " وإذ تأذن ربكم لإن شكرتم لأَزيدنَّكم" (إبراهيم 7) وفي الآية 144 من سورة الأعراف قال تعالى " فخذ ما آتيتك وكن من الشا كرين " وعملا بقول نبينا محمد صلى الله عليه وسلم : "من لايشكر الناس لا يشكر الله " .

فالحمد و الشكر لله أن مكننا وأعاننا على إنجاز هذا العمل المتواضع
كما أتقدم بالشكر والعرفان للأستاذالمشرف على توجيهه و صبره خلال هذا العمل : "د.بوعطية ياسين" .
كما لا ننسى أن نشكر كل من الأساتذة المناقشين الأستاذ :"غياط مراد" والأستاذة: " بادي صبرينة" على قبولهم مناقشة هذه المذكرة وهذا العمل المتواضع وعلى أسئلتهم المطروحة بهدف :التعليم ، الإرشاد والتوجيه.
كما أتقدم بجزيل الشكر، العرفان والامتنان لصاحبيَّ "حلاسي عماد" وخاصة "خليل فخر الاسلام" لما قدماه من مساعدات عظيمة سواء كانت مادية أو معنوية والتي لن أنساها ما حييت أبدا. كما لا أنسى عائلتي وأسرتي على تشجيعهم المتواصل

كما نتقدم بالشكر و التقدير لجميع الأساتذة و **خاصة السيدات العاملات بقسم الرياضيات** بجامعة 8 ماي 1945-قالمة- .

وأخيرا و ليس آخرا نتقدم بالشكر لكل من ساهم في هذا العمل من كبير أو صغير، قريب أو بعيد سواء كان بدعمه لنا، إبتسامة تخفف عنا أو حتى نصيحة.
لكم منا كل التقدير و الإمتنان .

إهـدَاء

بسم الله الرحمن الرحيم والصلاة والسّلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد عليه أفضل الصلاة وأزكى التسليم.

إلى كل من أعلم أنه سيفرح بهذا العمل، إلى كل من أعلم أنه سيفتخر بهذا العمل ،

إلى من نزلت في حقهم الآيتان الكريمتان في قوله تعالى « و اخفض لهما جناح الذل من الرحمة و قل ربي ارحمهما كما ربياني صغيرا » الاسراء(24) .

إلى الذي علَّمني أن لذة النجاح تُنسي تعب الطريق إلى من علّمني أن الإرادة تصنع المعجزات.

إلى **أمي الأستاذة مناصرية نجاة** التي لاطالما شجعتني وحفزتني. إلى **أبي الدكتور سلايمية عبد العالي**. حفظكما الله ورعاكما وبارك في أعماركما. إلى كامل إخوتي وأسرتي. إلى أخوي الذان لم تلدهما أمي صديقَيَّ: **عماد ونخر الإسلام**. إلى كل من نصحني، شجّعني وساعدني وقت الحاجة.

لكم مني كل الامتنان، الاحترام والتقدير.

هيثم

الملخص

قمنا في هذه المذكرة بدراسة طريقة المتوسط من الرتبة الأولى لجمل تفاضلية ذات مركز غير خطي.

ولفهم أكثر لهذه الطريقة قمنا بالتذكير ببعض المفاهيم والنظريات الأساسية انطلاقا من تعريف المعادلات التفاضلية،

الدوائر الحدية، وصولا إلى طريقة المتوسط من الرتبة الأولى ذات المركز الخطي.

ثم تطرقنا بشكل سريع لبعض البراهين والنتائج المقترحة سابقا لكلتا الحالتين ومدى استقرار المدارات وطبيعة مركزها (خطي أو غير خطي).

Abstract

We study the averaging method of some differential systems with non-linear center.

To understand more about this method, we recall some of the basic concepts and theorems. We start by defining differential equations, limit cycles,...down to the averaging method of some differential systems with linear center.

Then, we briefly mention some of the previously proposed proofs and results for both cases, the stability of the orbits and the nature of their center (linear or non-linear).

المحتويات

مقدمـــة

إنّ نمذجة الظواهر الطّبيعية الخاصة بالعلوم التطبيقية كالفيزياء، الفلك، الكيمياء... وغير ذلك، كثيرا ما تقودنا إلى التعامل مع معادلات تفاضلية مختلفة سواء كانت عادية أو بمشتقات جزئية.
سنتطرق في هذه المذكرة باذن الله إلى دراسة طريقة المتوسط من الرتبة الأولى ذات المركز الخطي وغير الخطي والتي تساعدنا على إيجاد المدارات الدورية الأكثر استقرارا، حيث قسّمنا هذه المذكرةإلى ثلاثة فصول وهي:
الفصل الأول :"مبادئ و مفاهيم أولية" والذي أشرنا فيه إلى أبرز المفاهيم التي سنحتاجها في الفصلين الآخرين.
يليه الفصل الثاني والذي تطرقنا فيه إلى:"طريقة المتوسط من الرتبة الأولى ذات المركز الخطي" والذي يمثل تمهيدا للفصل الثالث .
أما الفصل الأخير فهو:"طريقة المتوسط من الرتبة الأولى ذات المركز غير الخطي" والذي تطرقنا فيه إلى الاشكالية الأساسية وبرهان بعض النتائج والنظريات، و قد استندنا في دراستنا في هذا الفصل إلى مقال تم نشره سنة 2016 في مجلة: (Global Journal of Pure and Applied Mathematics) لـ:"حمامدة مريم" و "عمار مخلوف".

الفصل 1

مبادئ ومفاهيم أولية

تمهيد
سنستهل هذا الفصل بذكر بعض المفاهيم الأساسية والتعاريف والنظريات التي ستستخدم في الفصلين اللاحقين .

1.1 الجملة الديناميكيّة

تعريف 1 : جملة ديناميكيّة في $\mathbb{R}^n$ هي تطبيق:

$$\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

معرف على كل $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ ، بحيث:

- $\psi(.,x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ مستمر .
- $\psi(t,.) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ مستمر.
- $\psi(0,x) = x$.
- $\psi(t+s,x) = \psi(t,\psi(s,x))$ من أجل $t,s \in \mathbb{R}$ و$x \in \mathbb{R}^n$.

1.1.1 الجملة التفاضلية من الرتبة الأولى

تعريف 2 : نسمّي جملة تفاضلية من الرتبة الأولى كل جملة من الشكل:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \qquad (1.1)$$

بحيث: $x(t)=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ، $f(t,x(t))=\begin{pmatrix}f_1(t,x(t))\\ \vdots\\ f_n(t,x(t))\end{pmatrix}$ بحيث f_i تطبيقات للمتغير t معرفة ومستمرة على مفتوح Ω من $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ والتي تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$.

2.1.1 الجملة التفاضلية الذّاتية

تعريف 3 : لتكن الجملة التفاضلية التالية:

$$\dot{x}=f(x), x\in\mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

حيث العبارة f غير مرتبط بشكل صريح بـ t، نقول عن الجملة (2.1) أنها ذّاتية.

3.1.1 الجملة التفاضلية الخطية

تعريف 4 : نسمي جملة تفاضلية خطية كل عبارة من الشكل:

$$\dot{x}=Ax$$

حيث A مصفوفة مربعة $(n\times n)$، و$x\in\mathbb{R}^n$.

2.1 التدفّق

تعريف 5 : لتكن الجملة غير الخطية

$$\dot{x}=f(x), \tag{3.1}$$

مع الشرط الابتدائي $x(0)=x_0$ مع $x_0\in E$ ، E مجموعة جزئية مفتوحة من $\mathbb{R}^n$ و$f\in C^1(E)$. لتكن $\varphi(t,x_0)$ حل لـ (3.1) ، مجموعة التطبيقات φ_t معرفة بـ: $\varphi_t(x_0)=\varphi(t,x_0)$ تدعى بـ **تدفق الجملة التفاضلية (3.1)** .

ملاحظة 1 : القول عن تدفق أنه ذاتي إذا كان f مستقل عن الزمن t ، ماعدا ذلك فهو غير ذاتي

3.1 النقاط الحرجة

تعريف 6 : نقول عن النقطة $x_0\in\mathbb{R}^n$ أنها نقطة حرجة أو نقطة استقرار الجملة (3.1) إذا حققت:

$$f(x_0)=0$$

1.3.1 الجملة الخطية والنقاط الحرجة الزائدية

تعريف 7 : نسمي جملة خطية لـ(3.1) في جوار نقطة حرجة x_0 ، الجملة:

$$\dot{x} = Ax, A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \qquad (4.1)$$

حيث $Df(x_0)$ المصفوفة اليعقوبية لـ f عند النقطة x_0.

تعريف 8 : نقول عن النقطة الحرجة x_0 أنها **زائدية** إذا كانت كل القيم الذاتية للمصفوفة اليعقوبية $Df(x_0)$ لها جزء حقيقي غير معدوم.

2.3.1 استقرار النقاط الحرجة

إن دراسة استقرار نقطة حرجة يدفعنا لمعرفة سلوك المسارات القريبة من نقطة التوازن هذه.

تعريف 9 : لتكن الجملة التفاضلية:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R} \qquad (5.1)$$

فرضا أن f تحقق شروط نظرية وجود ووحدانيةالحل، وليكن $\phi(t)$ حل للجملة (5.1). نقول عن نقطة حرجة p أنها مستقرة إذا كانت $\forall\varepsilon > 0$ ، $\exists\delta > 0$ بحيث:

$$\|\phi(t_0) - p\| < \delta \Rightarrow \|\phi(t) - p\| < \delta, \forall t \geq t_0$$

. إذا وجد جوار لـ p بحيث من أجل كل x في هذاالجوار: $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = p$ إذن نقطة التوازن p مستقرة بشكل متقارب.

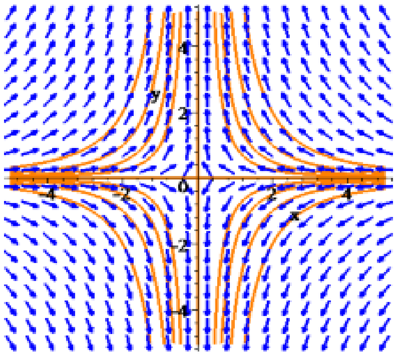
3.3.1 طبيعة النقاط الحرجة في $\mathbb{R}^2$

تعريف 10 : لتكن الجملة التفاضلية الخطية

$$\dot{x} = Bx, B = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

حيث B مصفوفة مربعة 2×2 ولتكن λ_1 وλ_2 القيم الذاتية لهذه المصفوفة. نميز مختلف الحالات حسب طبيعة هاته القيم الذاتية:

1- إذا كانت λ_1 وλ_2 أعداد حقيقية غير معدومة و من إشارتين مختلفتين، إذن النقطة الحرجة(0,0) هي: **نقطة سرج** وهي دوما غير مستقرة.(لاحظ شكل 1.1).

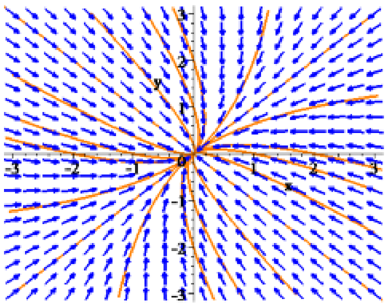


شكل 1،1: سرج

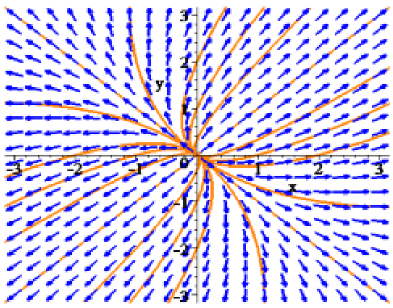
2- إذا كانت λ_1و λ_2 أعداد حقيقية غير معدومة و من نفس الاشارة، نميز ثلاث حالات:

/a إذا كانت $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ ، فإن النقطة الحرجة (0,0) هي عقدة مستقرة(لاحظ شكل 1،2).

/b إذا كانت $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ ، فإن النقطة الحرجة (0,0) هي عقدة غير مستقرة(لاحظ شكل 1،3).



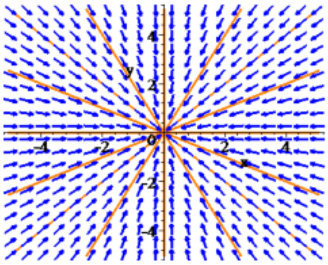
شكل 1،2: عقدة مستقرة



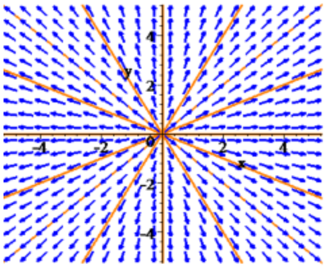
شكل 1،3: عقدة غير مستقرة

/c إذا كانت $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ، وكانت A مصفوفة قطرية، فإن النقطة الحرجة (0,0) هي عقدة ذاتية :

- مستقرة إذا كانت $\lambda < 0$.
- وغير مستقرة إذا كانت $\lambda > 0$ (لاحظ شكل 1،4و شكل 1،5).

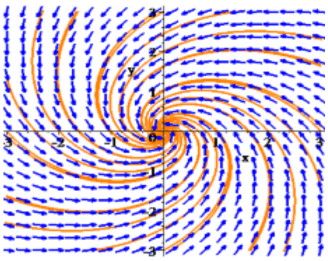


شكل 1.4: عقدة ذاتية مستقرة

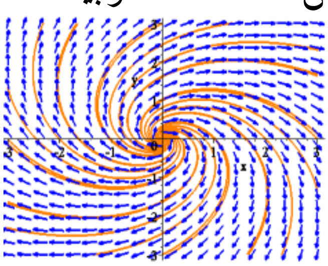


شكل 1.5: عقدة ذاتية غير مستقرة

3- إذا كانت λ_1و λ_2 أعداد مركبة مترافقة غير معدومة وجزؤها التخيلي والحقيقي غير معدومين $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0, Re(\lambda_{1,2}) \neq 0$ فإن النقطة الحرجة (0,0) تمثل نقطة لولبية، وتكون:
- مستقرة إذا كان: $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ ، وتكون غير مستقرة اذا كان: $Re(\lambda_{1,2}) > 0$ (لاحظ شكل 1.6و شكل 1.7).

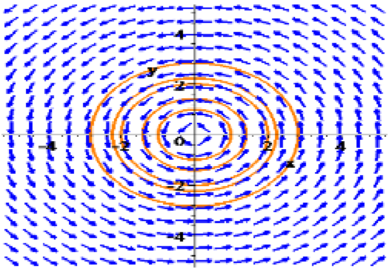


شكل 1.6: نقطة لولبية مستقرة



شكل 1.7: نقطة لولبية غير مستقرة

4- إذا كانت λ_1و λ_2 أعداد تخيلية صرفة فإن النقطة الحرجة (0,0) تمثل مركز، ويكون مستقرا، لكنه غير مستقر تقريبيا(لاحظ شكل 1.8).



1.8.png 1.bb

شكل 1.8: مركز

4.1 مخطط وصورة الموجة (Plan et portrait de phase)

تعريف 11 : لتكن الجملة التفاضلية:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{6.1}$$

صورة الموجة هي مجموعات المسارات في فضاء الموجات. بالخصوص من أجل الجمل الذاتية للمعادلات التفاضلية العادية لمتغيرين. الحلول $(x(t),y(t))$ للجملة (6.1) تمثل في المعلم (xoy) بمنحنيات تدعى بـ:**المدارات**. النقاط الحرجة للجملة هم الحلول الثابتة الشكل الكامل لمدارات هذه الجملة وكذلك هذه النقاط الحرجة تمثل صورة الموجة والمعلم (xoy) هو معلم الموجات.

5.1 الحل الدّوري

تعريف 12 : نسمي حل دوري للجملة (3.1) كل حل $\xi(t) = x(t)$ لا يكون نقطة صامدة ومن أجله يوجد عدد حقيقي $T > 0$ بحيث:

$$\forall t \in [0;T], \xi(t+T) = \xi(t).$$

أصغر عدد T يظهر يسمى ب دور هذا الحل.

6.1 الدوائر الحدية

تعريف 13 : دائرة حدّية للجملة (6.1) هي: مدار دوري معزول في مجموعة كل المدارات الدورية لهذه الجملة.

ملاحظة 2 : تظهر الدوائر الحدّية في الجمل التفاضلية غير الخطية.

1.6.1 الدوائر الحدّية الزائدية

تعريف 14 : نفرض أن الجملة(6.1) تملك مدارا دوريا $(x(t),y(t))$ دوره T . نجد:

$$\delta=\int_0^T\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)(x(t),y(t))dt.$$

إذا كان $\delta>0$ (أو $\delta<0$) فإن المدار الدوري $(x(t),y(t))$ هو دائرة حدّية غير مستقرة(مستقرة)، مدار دوري $(x(t),y(t))$ من $\delta\neq 0$ هو دائرة حدية زائدية.

7.1 الدوال بيتا وغاما

1.7.1 الدّالة غاما (Γ)

تعريف 15 تعرف دالة غاما كالتالي:

$$\Gamma(n)=\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{n-1}e^{-x}dx; n>0$$

مثال 1 مثلا لإيجاد:$\Gamma(2)$:

$$\Gamma(2)=\lim_{M\to\infty}\int_0^M x^{2-1}e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\int_0^M xe^{-x}dx=1$$

خواص 1 الدالة غاما تحقق مايلي:

1- $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$.

2- اذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فان: $\Gamma(n+1)=n!$.

3- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

ملاحظة 3 لا يمكن ايجاد $\Gamma(n)$ اذا كان n عدداً صحيحاً سالباً.

2.7.1 الدّالة بيتا (β)

تعريف 16 تعرف دالة بيتا كمايلي:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx; n>0, m>0$$

مثال 2 مثلا لإيجاد:$\beta(2,3)$:

$$\beta(2,3)=\int\limits_0^1 x^{2-1}(1-x)^{3-1}dx=\int\limits_0^1 x(1-x)^2dx=\frac{1}{12}$$

ملاحظة 4 $\beta(m,n)=\beta(n,m)$.

3.7.1 العلاقة بين الدّالّة غاما والدالة بيتا

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

مثال 3 مثلا لإيجاد:$\beta(2,3)$:

$$\beta(2,3)=\frac{1!2!}{4!}=\frac{1}{12}$$

4.7.1 تكاملات يمكن ايجادها باستعمال الدالتين بيتا و غاما :

-1 $\int\limits_0^{\pi/2}\sin^{2m-1}\theta\cos^{2n-1}\theta d\theta=\frac{1}{2}\beta(m,n)$.

-2 $0<p<1$; $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x}dx=\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}$.

الفصل 2

طريقة المتوسط من الرتبة الأولى لجمل تفاضلية ذات مركز خطي

في هذا الفصل سنقوم بشرح إحدى طرق المتوسط من الرتبة الأولى ذات المركز الخطي.

1.2 نظرية المتوسط

نعتبر الإشكالية ذات القيم الإبتدائية التالية:

$$\dot{x} = \varepsilon f(t,x) + \varepsilon^2 g(t,x,\varepsilon), \quad x(0) = x_0. \tag{1.2}$$

نفرض أن $f(t,x)$ دورية دورها T بالنسبة لـ t ونعرف القيمة المتوسطة:

$$f^0(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,x)\,dt.$$

لتكن الآن الإشكالية

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0 \tag{2.2}$$

حيث $y(t)$ يمثل حلا تقريبيا لـ $x(t)$.

نظرية 1 : لتكن الإشكاليتين ذات القيم الإبتدائية (1.2) و(2.2) حيث $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ و $t \geq 0$. نفرض أن

1- f، g و $D_x f$ مستمرة ومحدودة بثابت مستقل عن ε في $[0,+\infty[\times D$.

2- g تطبيق ليبشتزي بالنسبة لـ $x \in D$.

3- $f(t,x)$ دورية دورها T بالنسبة لـ t، T مستقل عن ε.

4- $y(t)\in D$ على سلم الزمن $\frac{1}{\varepsilon}$.

إذن $x(t)-y(t)=O(\varepsilon)$ على سلم الزمن $\frac{1}{\varepsilon}$.

الآن، نحن بصدد إعطاء توطئة مهمة حتى نتمكن من برهان النظرية 1.

توطئة 1 : (Gronwall) نفرض أنه من أجل $t_0\leq t\leq t_0+T$

$$\phi(t)\leq \delta_2(t-t_0)+\delta_1\int_{t_0}^{t}\phi(s)\,ds+\delta_3,$$

حيث $\phi(t)$ هي دالة مستمرة، $\forall t_0\leq t\leq t_0+T \quad \phi(t)\geq 0$ و δ_1، δ_2 وδ_3 هي ثوابت مع $\delta_1>0$ ، $\delta_2\geq 0$ و $\delta_3\geq 0$. إذن

$$\phi(t)\leq\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}+\delta_3\right)e^{\delta_1(t-t_0)-\frac{\delta_2}{\delta_1}}$$

من أجل $t_0\leq t\leq t_0+T$.

البرهان 1 : للنظرية 1

الفرضين (1) و(2) يضمنان لنا وجود ووحدانية حل الإشكاليتين ذات القيم الإبتدائية (1.2) و(2.2) على سلم الزمن $\frac{1}{\varepsilon}$.

نعرف

$$u(t,y)=\int_{t_0}^{t}\left(f(s,y)-f^0(y)\right)ds.$$

لدينا:

$$\|u(t,y)\|\leq 2MT \quad \text{بحيث } t\geq t_0 \text{ و } y\in D.$$

الآن، نقدم:

$$z(t)=y(t)+\varepsilon u(t,y(t)).$$

بما أن $y(t)\in D\ \forall t\geq t_0$، لدينا التقدير التالي:

$$\begin{aligned}\|x(t)-y(t)\|&\leq\|x(t)-z(t)\|+\|z(t)-y(t)\|\\&\leq\|x(t)-z(t)\|+\varepsilon\|u(t,y(t))\|\\&\leq\|x(t)-z(t)\|+2\varepsilon MT.\end{aligned}$$

نلاحظ أن:

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds$$

بحساب

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} = \varepsilon f(t, x(t)) - \varepsilon f(t, z(t)) + R$$

حيث:

$$R = \varepsilon^2 g(t, x(t), \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) f^0(y) - \varepsilon f(t, y(t)) + \varepsilon f(t, z(t))$$

لدينا:

$$\left\| f^0(y) \right\| \leq M \quad \boldsymbol{et} \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial y}(t, y(t)) \right\| \leq 2MT.$$

بفضل استمرارية ليبتشيز لـ f يكون لدينا:

$$\begin{aligned} \| f(t, z(t)) - f(t, y(t)) \| &\leq L \| z(t) - y(t) \| \\ &\leq \varepsilon L \| u(t, y(t)) \| \\ &\leq 2\varepsilon LMT. \end{aligned}$$

إذن يوجد ثابت k حيث:

$$\| R \| \leq k e^2.$$

واضح أن:

$$\begin{aligned} \| x(t) - z(t) \| &\leq \int_{t_0}^{t} \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} \right\| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^{t} \| f(t, x(t)) - f(t, z(t)) + k\varepsilon \| ds \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^{t} \| f(t, x(t)) - f(t, z(t)) \| ds + k\varepsilon^2 (t - t_0) \\ &\leq \varepsilon \int_{t_0}^{t} \| x(t) - z(t) \| ds + k\varepsilon^2 (t - t_0). \end{aligned}$$

ومن توطئة *Gronwall*

$$\| x(t) - z(t) \| \leq \varepsilon \frac{k}{L} e^{\varepsilon L (t - t_0)} - \varepsilon \frac{k}{L}.$$

وبالتالي:

$$\|x(t)-y(t)\|\leq\varepsilon\left(\frac{k}{L}e^{\varepsilon L(t-t_0)}-\frac{k}{L}+2MT\right).$$

إذا كان $\varepsilon L(t-t_0)$ محدودة بثابت مستقل عن ε، نحصل على التقريب

$$x(t)=y(t)+O(\varepsilon)\quad \text{لما}\quad \varepsilon\to 0.$$

2.2 طريقة المتوسط في الحالة الدورية

الآن، سنقوم بوضع النظريات الأساسية للتوسيط المستعملة لإنجاز أعمال هذه المذكرة.

1.2.2 نظرية المتوسط من الرتبة الأولى

لنعتبر الجملة التفاضلية التالية

$$\dot{x}=\varepsilon F(t,x)+\varepsilon G(t,x,\varepsilon) \tag{3.2}$$

مع $x\in D\subset\mathbb{R}^n$، D هو مجال محدود و $t\geq 0$. نفرض أن $F(t,x)$ و$G(t,x)$ دوال دورية دورها T بالنسبة لـ t. جملة المتوسط للجملة(3.2) هي:

$$\dot{y}=\varepsilon f^0(y),\qquad y(0)=x_0 \tag{4.2}$$

حيث:

$$f^0(y)=\frac{1}{T}\int_0^T F(s,y)\,ds. \tag{5.2}$$

نظرية 2 : لتكن الجملة(3.2)، ونفرض أن F، G، D_xF، D_x^2F وD_xG هي دوال مستمرة ومحدودة بثابت M في $[0,+\infty[\times D$ و $-\varepsilon_0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$.

F و G هي دوال دورية دورها T في t حيث T مستقل عن ε.

إذن يكون لدينا:

إذا كانت p نقطة توازن لجملةالمتوسط (4.2) حيث:

$$\det\left(D_xf^0(p)\right)\neq 0. \tag{6.2}$$

إذن من أجل $|\varepsilon|>0$ صغير بما فيه الكفاية، يوجد حل $x_\varepsilon(t)$ دوري دوره T للجملة(3.2) حيث

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x_\varepsilon(t)=p.$$

إذا كانت نقطة التوازن $y=p$ لجملة المتوسط (4.2) إهليجية، إذن من أجل $0<|\varepsilon|$ صغير بما فيه الكفاية، الحل الدوري الموافق لـ $x_{\varepsilon}(t)$ للنظام (3.2) يكون وحيدا، إهليجيا، وله نفس استقرار p.

مثال 4 : لتكن معادلة فان در بول (*Van Der Pol*) التالية:

$$\ddot{x}+x=\varepsilon\left(1-x^{2}\right)\dot{x}. \tag{7.2}$$

يمكن كتابة المعادلة (7.2) على شكل جملة بمعادلتين تفاضليتين

$$\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-x+\varepsilon\left(1-x^{2}\right)y \end{cases}. \tag{8.2}$$

بالمرور للإحداثيات القطبية:

$$x=r\cos\theta, \quad y=r\sin\theta.$$

$$\begin{cases} \dot{r}=\dfrac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta}=\dfrac{\dot{y}x-\dot{x}y}{r^{2}} \end{cases} \tag{9.2}$$

إذن يكون لدينا:(حيث يصبح المتغير θ بدل t)

$$\begin{cases} \dot{r}=\varepsilon r\sin^{2}\theta\left(1-r^{2}\cos^{2}\theta\right) \\ \dot{\theta}=-1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(1-r^{2}\cos^{2}\theta\right) \end{cases}$$

حيث:

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{\varepsilon r\sin^{2}\theta\left(1-r^{2}\cos^{2}\theta\right)}{-1+\varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(1-r^{2}\cos^{2}\theta\right)} \tag{10.2}$$

حتى نتمكن من تطبيق النظرية 1، يجب أن نكتب المعادلة (10.2) على الشكل:

$$\dot{x}=\varepsilon F(t,x)+\varepsilon^{2}R(t,x,\varepsilon)$$

نضع:

$$z=\varepsilon\cos\theta\sin\theta\left(1-r^{2}\cos^{2}\theta\right).$$

نعلم أن:

$$\frac{1}{1-z}=1+z+O\left(z^{2}\right), \quad |z|<1.$$

أين:

$$\frac{dr}{d\theta}=\varepsilon F(\theta,r)+O\left(\varepsilon^{2}\right) \tag{11.2}$$

مع

$$F(\theta, r) = -\sin^2\theta\left(1 - r^2\cos^2\theta\right).$$

نلاحظ أن F دورية دروها 2π بالنسبة لـ θ، إذا لدينا:

$$f^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta, r)\, d\theta = \frac{r}{8}\left(r^2 - 4\right).$$

ومن النظرية 1، الإشكالية (11.2) تكافئ الإشكالية:

$$\dot{r}_a = \varepsilon f^0(r_a) \tag{12.2}$$

ولدينا التقريب:

$$r(\theta) - r_a(\theta) = O(\varepsilon)$$

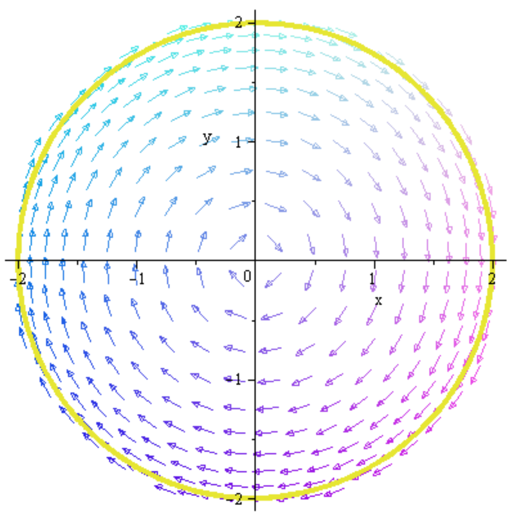
أين $r(\theta)$ و $r_a(\theta)$ هما حلين للإشكاليتين (11.2) و(12.2) على الترتيب.
تعطى الدورات الحدّية للمعادلة (7.2) بالجذور الموجبة للمعادلة:

$$f^0(r) = \frac{r}{8}\left(r^2 - 4\right) = 0. \tag{13.2}$$

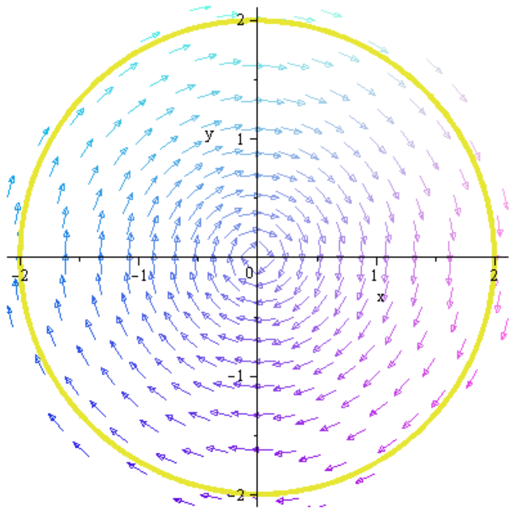
هذه المعادلة الجبرية تقبل حل وحيد موجب $r = 2$، إذن معادلة *Van Der Pol* (7.2) لها دورة حدّية بسعة $r = 2$.

1- من أجل $\varepsilon > 0$، هذه الدورة الحدّية تكون مستقرة لأن $\frac{d}{dr}f^0(2) < 0$ (انظر الشكل 2.1).

2- من أجل $\varepsilon < 0$، هذه الدورة الحدّية تكون غير مستقرة لأن $\frac{d}{dr}f^0(2) > 0$. (انظر الشكل 2.2).



شكل 2.1: دورة حدّية مستقرة من أجل $\varepsilon = 0.01$



شكل 2،2: دورة حدّية غير مستقرة من أجل $\varepsilon = -0.01$

مثال 5 : لتكن الجملةالتالية:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon\left(y^2 + xz\right) \\ \dot{y} = x + \varepsilon\left(-y + yz + z^2\right) \\ \dot{z} = \varepsilon\left(-1 + x^2 + y^2 + yz\right) \end{cases} \tag{14،2}$$

بالمرور للاحداثيات الأسطوانية نجد:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\varepsilon\left(-\sin\theta z^2 + r - rz - r^2\cos\theta - r\cos^2\theta + r^2\cos^3\theta\right) \\ \dot{\theta} = \dfrac{1}{r}\left(-\varepsilon r^2\sin\theta + \varepsilon r^2\sin\theta\cos^2\theta - \varepsilon r\cos\theta\sin\theta + r + \varepsilon z^2\cos\theta\right) \\ \dot{z} = \varepsilon\left(-1 + r^2 + rz\sin\theta\right) \end{cases}$$

أو بطريقة مكافئة:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} = \dot{r} = \left(z^2\sin\theta - r + rz + r^2\cos\theta + r\cos^2\theta - r^2\cos^3\theta\right)\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right) \\ \dfrac{dz}{d\theta} = \dot{z} = \left(-1 + r^2 + rz\sin\theta\right)\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right) \end{cases}$$

باعتبار θ المتغير بالنسبة لـ t، وهذه الجملةالأخيرة من الشكل:

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{d\theta} = F_1(r, \theta, z)\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right) \\ \dfrac{dz}{d\theta} = F_2(r, \theta, z)\varepsilon + O\left(\varepsilon^2\right) \end{cases}$$

نلاحظ أن F_1 وF_2 دوال دورية دورها 2π، إذن يمكننا الذهاب لجملةالمتوسط:

$$\begin{cases} f_1(r; z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F_1(r, \theta, z)\, d\theta = \dfrac{1}{2}r(2z - 1) \\ f_2(r; z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} F_2(r, \theta, z)\, d\theta = -1 + r^2 \end{cases}$$

لنحدد حلول الجملة

$$\begin{cases} f_1(r;z)=0 \\ f_2(r;z)=0 \end{cases} \tag{15.2}$$

نتحصل على

$$(r_1,z_1)=\left(1,\frac{1}{2}\right) \quad \text{و} \quad (r_2,z_2)=\left(-1,\frac{1}{2}\right)$$

الحل الوحيد الذي يمكنه أن يقدم دورة حدّية هو $(r_1,z_1)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ لأن r يجب أن يكون موجبا، إذا نأخذ النقطة $p=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ كنقطة توازن للجملة(15.2)، لدينا

$$\begin{aligned} D_{r,z}f^0(p) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_1(r,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial r} & \frac{\partial f_2(r,z)}{\partial z} \end{pmatrix}_{(r,z)=\left(1,\frac{1}{2}\right)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

حيث:

$$\det\left(D_{r,z}f^0(p)\right)=-2\neq 0$$

إذن، انطلاقا من النظرية 1، الجملة(14.2) لديها دورة حدّية من أجل $|\varepsilon|\neq 0$ صغير بما فيه الكفاية.
القيم الذاتية لـ $D_{r,z}f^0(p)$ هي $\pm\sqrt{2}$، نقطة التفرد لجملةالمتوسط $p=\left(1,\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة إهليجية، إذن الدورة الحدّية هي من نفس استقرار p.
القيمتين الذاتيتين من إشارتين مختلفتين إذن p هي نقطة سرج والتي تكون دائما غير مستقرة، وبالتالي الدورة الحدّية غير مستقرة.

الفصل 3

طريقة المتوسط من الرتبة الأولى لجمل تفاضلية ذات مركز غير خطي

1.3 عرض الإشكالية والنتائج الأساسية

في سنة 2005، قام كول Coll، غاسل Gasull وبروهينز Prohens (أنظر المرجع 5)، وباستعمال طريقة التكاملات الآبلية (بوانكاريه-ملنيكوف Poincarré-Melnikov)، بدراسة عدد الدورات الحدّية التي تتفرع من المدارات الدورية لمركز جملة تفاضلي مستو متعدد الحدود:

$$\dot{x} = -y^{2l-1}(1+bx) + \varepsilon P_n(x,y)$$
$$\dot{y} = x^{2k-1}(1+bx) + \varepsilon Q_n(x,y)$$

حيث $P_n(x,y)$ و$Q_n(x,y)$ هي كثيرات حدود من الدرجة n، $0 < \varepsilon \ll 1$ و $b = 0$ أو $b = l = 1$.
في سنة 2014، أثبت (ليبري Llibre ومخلوف Makhlouf)(أنظر المرجع [9]) أن جملة ليينار Liénard التفاضلية متعددة الحدود المعممة:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^{2p-1} \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} - \varepsilon f(x) y^{2n-1} \end{aligned} \tag{1.3}$$

حيث p، q وn هي أعداد صحيحة موجبة، ε هو وسيط صغير و $f(x)$ هي كثير حدود من الدرجة m يمكن أن تمتلك $\left[\frac{m}{2}\right]$ دورة حدّية.
تم دراسة الجملة (1.3) مع $p = q = n = 1$ في سنة 1977 من طرف لينز Lins والبقية ، و تم دراسة نفس الجملة حيث $p = n = 1$ وq افتراضي في سنة 1993 من طرف أوربينا Urbina والبقية.
في هذا الفصل سنهتم بالعدد الأعظمي للدورات الحدّية والذي نرمز له بـ $\tilde{H}(p,q,l)$ الذي يمكن أن

تمتلكه جملة ليينار Liénard التفاضلية كثير الحدود المعمم:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^{2p-1} \\ \dot{y} &= -x^{2q-1} - \varepsilon f(x,y) \end{aligned} \tag{2.3}$$

حيث p و q هي أعداد صحيحة موجبة، ε هو وسيط صغير، و$f(x,y)$ هي كثير حدود من الدرجة m

$$f(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j.$$

نلاحظ أن الجملة (2.3) أكثر تعميما من الجملة (1.3) وأن العدد الأعظمي للدورات الحدّية المتحصل عليه من أجل الجملة (1.3) باستعمال نظرية المتوسط من الرتبة الأولى يعتمد فقط على الدرجة m، لكن النتيجة المتحصل عليها من الجملة (2.3) باستعمال نفس النظرية تعتمد على m ، p و q، النتائج كانت كالتالي:

نظرية 3 : ليكن:

$$l = \begin{cases} m & \text{كان إذا } m \text{ فردي} \\ m-1 & \text{كان إذا } m \text{ زوجي} \end{cases}$$

من أجل $\varepsilon \neq 0$ صغير بما يكفي، العدد الأعظمي للدورات الحدّية للجملة (2.3) يكون محدود بـ $\tilde{H}(p,q,l) = \left[\dfrac{l.\max(p,q) - q}{2}\right]$.

لازمة 1 : ليكن $p = q = 1$ و$f(x,y)$ كثير حدود من الدرجة $m = 5$

$$\begin{aligned} f(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 \\ + a_{40}x^4 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y + a_{05}y^5. \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{aligned} &a_{00} = 2, \quad a_{10} = -0.25, \quad a_{01} = 1.9, \quad a_{12} = 1.2, \quad a_{21} = -2.5, \\ &a_{03} = -1.2, \quad a_{23} = 0.8, \quad a_{40} = 3.2, \quad a_{41} = 0.6, \quad a_{05} = 0.2. \end{aligned}$$

من أجل $\varepsilon \neq 0$ صغير بما يكفي، الجملة (2.3) يمتلك دورتين حدّيتين تتشعبان من المدارات الحدّية الدورية للجملة غير المضطربة (الجملة (2.3) مع $\varepsilon = 0$)، في هذه الحالة يتم الوصول للحد.

لازمة 2 : نعتبر الجملة (2.3) مع $p = 1$، $q = 2$ و$m = 6$

$$\begin{aligned} f(x,y) = a_{01}y + a_{21}x^2y + +a_{03}y^3 + a_{23}x^2y^3 + a_{41}x^4y \\ + a_{05}y^5 + a_{33}x^3y^3 + a_{60}x^6 + a_{06}y^6. \end{aligned}$$

حيث

$$a_{01} = 9.7, \quad a_{21} = -73.7, \quad a_{23} = -44.26, \quad a_{03} = 28.3,$$
$$a_{33} = 2, \quad a_{41} = 14.1, \quad a_{05} = 2.07, \quad a_{60} = 0.1, \quad a_{06} = 4.$$

من أجل $\varepsilon \neq 0$ صغير بما يكفي، الجملة (2،3) يمتلك أربع دورات حدّية تتشعب من المدارات الحدّية الدورية للجملة غير المضطربة، في هذه الحالة أيضا يتم الوصول للحد.

2،3 براهين النتائج

في هذا الجزء، سننجز العمل باستعمال الإحداثيات القطبية المعممة لليابونوف Liapunov المقدمة باستعمال الدوال $(p,q)-$مثلثية $z(\theta) = Cs(\theta)$، $w(\theta) = Sn(\theta)$ كحلول للإشكالية ذات القيم الإبتدائية

$$\dot{z} = -w^{2p-1}$$
$$\dot{w} = z^{2p-1}$$
$$z(0) = p^{-\frac{1}{q}}, w(0) = 0.$$

من أجل $p = q = 1$، هذه الدوال ليست إلا دوالا مثلثية كلاسيكية

$$Sn(\theta) = \sin\theta \text{ و } Cs(\theta) = \cos\theta$$

ويمكننا بكل سهولة إثبات أن $Cs(\theta)$ و$Sn(\theta)$ تحققان العلاقة

$$pCs^{2q}(\theta) + qSn^{2p}(\theta) = 1$$

وأن هذه الدوال هي دوال $T-$دورية حيث

$$T = 2p^{-\frac{1}{2q}}q^{-\frac{1}{2p}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)+\Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{2q}\right)},$$

حيث Γ هي الدالة غاما.
سنتطرق أولا إلى توطئتين سنحتاجهما لاحقا:

توطئة 2 لتكن الدالتان المثلثيتان: Sn وCs، ليكن T مجال تعريفهما، وليكن p و q ثابتين طبيعيين. لدينا مايلي:

-1 $\int Sn\theta Cs^q\theta d\theta = -\dfrac{Cs^{q+1}\theta}{q+1} + c.$

-2 $\int Sn^p\theta Cs^{2n-1}\theta d\theta = \dfrac{Sn^{p+1}\theta}{p+1} + c.$

-3 $\int Sn^p\theta Cs^q\theta d\theta = -\dfrac{Sn^{p-1}\theta Cs^{q+1}\theta}{(p-1)n+q+1} + \dfrac{p-1}{(p-1)n+q+1}\int Sn^{p-2}\theta Cs^q\theta d\theta.$

-4 $\int Sn^p\theta Cs^q\theta d\theta = \dfrac{nSn^{p+1}\theta Cs^{q-2n+1}\theta}{(p-1)n+q+1} + \dfrac{q-2n+1}{(p-1)n+q+1}\int Sn^p\theta Cs^{q-2n}\theta d\theta.$

-5 يوجد كثير حدود بمتغيرين $E(x,y)$، وثابت حقيقي A بحيث:

$$\int Sn^p\theta Cs^q\theta d\theta = E(Sn\theta, Cs\theta) + A\int Cs^r\theta d\theta$$

مع $r \equiv q[2n]$
زيادة على ذلك، الثابت A ليس جذرا إذا وفقط إذا كان p عددا زوجيا و$q \not\equiv 0[2n]$.

-6 $\int\limits_0^T Sn^p\theta Cs^q\theta d\theta = 0$ حيث p أو q فردي.

-7

$$\int\limits_0^T Sn^p\theta Cs^q\theta d\theta = \frac{2\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2n})}{n^{\frac{p+1}{2}}\Gamma(\frac{p+1}{2}+\frac{q+1}{2n})}$$

حيث p و q زوجيان.

النتيجة السابقة تتيح التحصل على عبارة ظاهرية بسيطة لـ $Sn^p\theta Cs^q\theta$: في عبارات الدوال $Cs\theta$ و $Sn\theta$ فقط لما يكون p فردي.
إذا كان p زوجي، التوطئة أيضا تعطي نتائج بسيطة في عبارات الدوال $\int Cs^r\theta d\theta$ مع $r < 2n$.
هذه الحقيقة تدفع إلى ظهور الدوال التالية:

$$\psi_r(\theta) = \int\limits_0^\theta Cs^r\phi d\phi - \frac{\int\limits_0^T Cs^r\phi d\phi}{T}\theta$$

من أجل أي $r = 1, 2, \cdots, 2n-1$، والتي هي أيضا دورية-T .
باستعمال هذه الدوال الجديدة كل العبارات البسيطة لـ $Sn^p\theta Cs^q\theta$ و كذلك العبارات البسيطة لـ $\psi_r^m(\theta)Sn^p\theta Cs^q\theta$ يمكن حسابها كما يظهر في التوطئة التالية:

توطئة 3 باستعمال نفس المعطيات والرموز من التوطئة السابقة وm عدد طبيعي، العبارات التالية صحيحة:

1- يوجد كثير حدود بمتغيرين $E(x,y)$ وثابتين حقيقيين A وB حيث

$$\int Sn^{p}\theta Cn^{q}\theta d\theta = E\left(Sn\theta, Cn\theta\right) + A\psi_{r}\left(\theta\right) + B\theta$$

حيث $0 < r < 2n$ و $r \equiv q\left[2n\right]$، بالإضافة إلى ذلك يكون B غير معدوم إذا وفقط إذا كان p وq عددين زوجيين.

2- يوجد كثيري حدود بمتغيرين $E(x,y)$ و$F(x,y)$ ومتغير حقيقي B (نفس E وB المذكورين في الفقرة السابقة) حيث

$$\int \psi_{r}^{m}\left(\theta\right) Sn^{p}\theta Cn^{q}\theta d\theta = \psi_{r}^{m+1}\left(\theta\right) + \psi_{r}^{m}\left(\theta\right) E\left(Sn\theta, Cn\theta\right) + \int \psi_{r}^{m-1}\left(\theta\right) F\left(Sn\theta, Cn\theta\right) d\theta + BG\left(\theta\right)$$

حيث $G(\theta)$ هي دالة غير معروفة

1.2.3 برهان النظرية 3

جملة ليينار Liénard التفاضلية كثير الحدود المعمم (2.3) مع $\varepsilon = 0$ هو جملةهاملتوني بمؤثر هاملتوني

$$H\left(x,y\right) = \frac{1}{2q}x^{2q} + \frac{1}{2p}y^{2p}.$$

يمتلك الجملة (2.3) غير المضطرب $(\varepsilon = 0)$ مركز هو المبدأ $(0,0)$.
نعتبر الـ (p,q) –احداثيات قطبية لليابونوف (r,θ) المعرفة بـ

$$x = r^{p}Cs\left(\theta\right) \quad \text{و} \quad y = r^{q}Sn\left(\theta\right).$$

يمكن كتابة الجملة (2.3) بالإحداثيات القطبية (r,θ) بالصيغة

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon r^{1-q}Sn\left(\theta\right) f\left(r^{p}Cs\left(\theta\right), r^{q}Sn\left(\theta\right)\right) \\ \dot{\theta} &= -r^{2pq-p-q} - \varepsilon p r^{-q}Cs\left(\theta\right) f\left(r^{p}Cs\left(\theta\right), r^{q}Sn\left(\theta\right)\right). \end{aligned} \tag{3.3}$$

نعتبر أن θ متغير مستقل، الجملة(3.3) تصبح

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\theta} &= \varepsilon r^{-2pq+p+1}Sn^{2p-1}\left(\theta\right) f\left(r^{p}Cs\left(\theta\right), r^{q}Sn\left(\theta\right)\right) + O\left(\varepsilon^{2}\right) \\ &= \varepsilon F_{1}\left(\theta, r\right) + O\left(\varepsilon^{2}\right). \end{aligned}$$

نطبق نظرية المتوسط من الرتبة الأولى (النظرية 2) مع

$$x = y = r, \qquad t = \theta, \qquad F_{1}\left(t,x\right) = F_{1}\left(\theta, r\right)$$

حيث

$$F_1(\theta,r)=r^{-2pq+p+1}Sn^{2p-1}(\theta)\sum_{i+j=0}^{m}a_{ij}r^{pi+qj}Cs^i(\theta)Sn^j(\theta). \tag{4.3}$$

إذن، نحصل على

$$\mathcal{F}(r)=r^{-2pq+p+1}\sum_{i+j=0}^{m}a_{ij}r^{pi+qj}\int_0^T Cs^i(\theta)Sn^{j+2p-1}(\theta)\,d\theta.$$

نضع

$$I_{i,j}=\int_0^T Cs^i(\theta)Sn^j(\theta)\,d\theta,$$

يكون لدينا

$$\mathcal{F}(r)=r^{-2pq+p+1}\sum_{i+j=0}^{m}a_{ij}r^{pi+qj}I_{i,j+2p-1}$$

ليكن

$$l=\begin{cases} m & \text{كان إذا } m \text{ فردي} \\ m-1 & \text{كان إذا } m \text{ زوجي}\end{cases}$$

بما أن $I_{i,j}=0$ إذا كان i أو j فرديا و$I_{i,j}>0$ إذا كان i وj زوجيان، إذن لدينا

$$\mathcal{F}(r)=r^{-2pq+p+1}\sum_{\substack{i+j=0\\ i:\ \text{زوجي}\\ j:\ \text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+qj}$$

$$=r^{-2pq+p+2}\sum_{\substack{i+j=1\\ i:\ \text{زوجي}\\ j:\ \text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+qj-1}$$

حيث

$$\tilde{a}_{i,j}=a_{i,j}I_{i,j+2p-1}.$$

وبتبسيط هذه الصيغ مرة أخرى نحصل على

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(r) &= r^{-2pq+p+2}(\tilde{a}_{01}r^{q-1}+\sum_{\substack{i+j=2\\ i:\text{زوجي}\\ j:\text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+qj})\\ &= r^{-2pq+p+q+1}(\tilde{a}_{01}+\sum_{\substack{i+j=2\\ i:\text{زوجي}\\ j:\text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+q(j-1)})\\ &= r^{-2pq+p+q+1}\sum_{\substack{i+j=1\\ i:\text{زوجي}\\ j:\text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+q(j-1)}\end{aligned}$$

للإجابة على سؤالنا، يجب علينا معرفة عدد الجذور الموجبة التي يمكن أن تقبلها المعادلة الجبرية

$$\mathcal{F}(r)=\sum_{\substack{i+j=1\\ i:\text{زوجي}\\ j:\text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+q(j-1)}=\tilde{a}_{0,1}+\sum_{\substack{i+j>1\\ i:\text{زوجي}\\ j:\text{فردي}}}^{l}\tilde{a}_{i,j}r^{pi+q(j-1)}=0. \tag{5.3}$$

درجة $\mathcal{F}(r)$ هي القيمة العظمى للأسس $pi+q(j-1)$ دون أن ننسى أن $i+j\leq l$ حيث i زوجي و j فردي، لهذا لدينا:

$$\begin{aligned}pi+qj-q &\leq \max(p,q).i+\max(p,q).j-q\\ &\leq \max(p,q)(i+j)-q\\ &\leq l.\max(p,q)-q\end{aligned}$$

إذن درجة $\mathcal{F}(r)$ محدودة بـ $l.\max(p,q)-q$.

بما أن $r=0$ ليس حلا بإمكانه إعطاء دورات حدّية وجب علينا إزالته.

نلاحظ أن المتغير r أصبح في المعادلة (5.3) على صيغة r^2 لأن كل القوى $pi+q(j-1)$ هي أعداد زوجية. إذن، إذا كان $r^*\neq 0$ حلا للمعادلة (5.3) فإن $-r^*$ أيضا حل لها، نزيل هذا الأخير لأننا فقط نهتم بالحلول الموجبة.

إذن المعادلة (5.3) يمكن أن تمتلك $\left[\frac{l.\max(p,q)-q}{2}\right]$ حلا موجبا. بالتالي يمكن أن تمتلك الجملةالتفاضلية (2.3) على الأكثر $\left[\frac{l.\max(p,q)-q}{2}\right] = \tilde{H}(p,q,l)$ دورة حدية، وهذا ينهي برهان النظرية 3.

2.2.3 برهان اللازمة 1

:

نعتبر الجملةالتفاضلي (2.3) مع $p=q=1$ و$m=5$. من النظرية 3، الجملة (2.3) يمكن أن يمتلك $\left[\frac{5\times 1-1}{2}\right]$ أي 2 دورتين حديتين على الأكثر ولدينا

$$\mathcal{F}(r) = \tilde{a}_{01} + (\tilde{a}_{21}+\tilde{a}_{03})\, r^2 + (\tilde{a}_{23}+\tilde{a}_{41}+\tilde{a}_{05})\, r^4$$

حيث

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{ij} &= a_{ij} I_{i,j+1}\\ &= a_{ij}\int_0^T Cs^i(\theta) + Sn^{j+1}(\theta)\, d\theta.\end{aligned}$$

من أجل $p=q=1$ لدينا

$$Cs(\theta)=\cos(\theta) \quad \text{و} \quad Sn(\theta)=\sin(\theta) \quad \text{مع} \quad T=2\pi.$$

بحساب التكاملات نجد:

$$I_{0,2}=\pi,\quad I_{2,2}=\frac{1}{4}\pi,\quad I_{0,4}=\frac{3}{4}\pi,\quad I_{2,4}=I_{4,2}=\frac{1}{8}\pi,\quad I_{0,6}=\frac{5}{8}\pi.$$

إذن

$$\tilde{a}_{01}=5.969026043,\quad \tilde{a}_{21}=-1963495409,\quad \tilde{a}_{03}=-2.827433388,$$
$$\tilde{a}_{23}=0.3141592654,\quad \tilde{a}_{41}=0.2356194490,\quad \tilde{a}_{05}=0.3926990818.$$

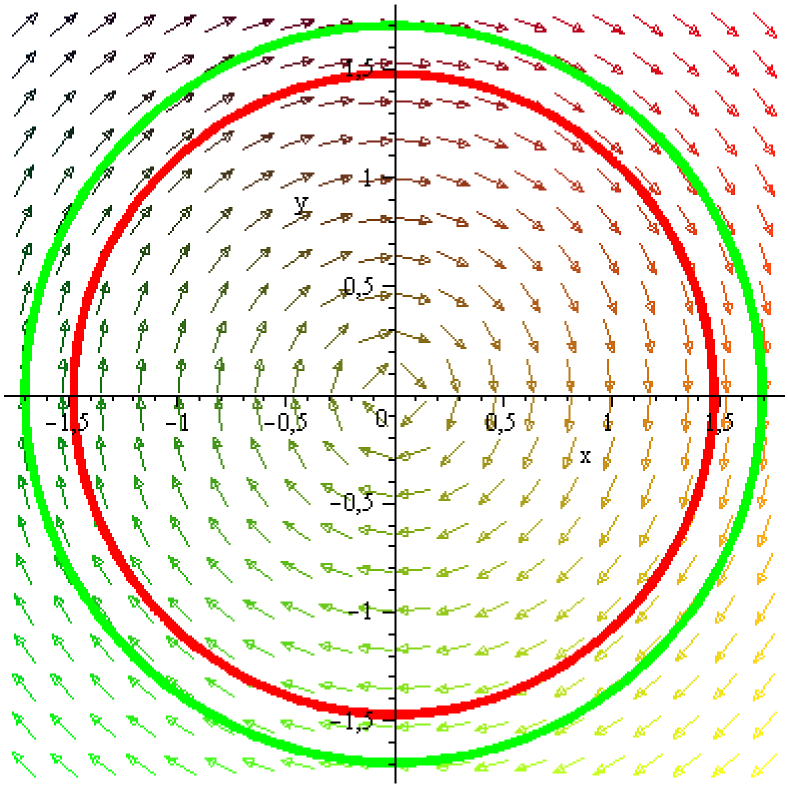
في هذه الحالة، المعادلة الجبرية $\mathcal{F}(r)=0$ تمتلك حلين موجبين:

$$r_1=1.478399984 \quad \text{و} \quad r_2=1.702253454$$

يحققان

$$\left.\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\right|_{r=r_1} = -1.98414430 \neq 0$$
$$\left.\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\right|_{r=r_2} = 2.28457558 \neq 0.$$

إذن، تمتلك الجملة (2.3) بالتحديد دورتين حديتين تتشعبان من المدارات الحدّية للجملة غير المضطربة، انظر الشكل 3.1.



شكل 3.1: دورتين حديتين من أجل $\varepsilon = 0.001$

3.2.3 برهان اللازمة 2:

من النظرية 3، الجملة (2.3) مع $p = 1$، $q = 2$ و$m = 6$ يمكن أن تمتلك $\left[\frac{(6-1)\times 2 - 2}{2}\right]$ أي 4 دورات حدّية على الأكثر، والدالة الجبرية تعطى كالتالي

$$\mathcal{F}(r) = \tilde{a}_{01} + \tilde{a}_{21}r^2 + (\tilde{a}_{03} + \tilde{a}_{41})\, r^4 + \tilde{a}_{23}r^6 + \tilde{a}_{05}r^8$$

في هذه الحالة وبالرجوع إلى ليابونوف، $Cs(\theta)$ و$Sn(\theta)$ هي دوال إهليليجية

$$Cs(\theta) = Cs(\theta) \quad \text{و} \quad Sn(\theta) = Sn(\theta)\, dn(\theta) \text{ بـ مضروب } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

بالدور

$$T = 2\,(p)^{-\frac{1}{2q}}\,(q)^{-\frac{1}{2p}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right) + \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2q}\right)} = 7.416298712.$$

وبمساعدة برمجية Maple ، وهي برمجية حساب ترميزي، كانت النتائج كالتالي:

$$I_{i,j+1} = \int_0^T cn^i(\theta)\left(sn(\theta)\, dn(\theta)\right)^{j+1} d\theta$$

و:

$$I_{0,2} = 2.472099570, \quad I_{2,2} = 0.6777704678, \quad I_{0,4} = 1.059471244,$$
$$I_{2,4} = 0.2259234893, \quad I_{4,2} = 0.3531570814, \quad I_{0,6} = 0.4815778383.$$

ومنه

$$\tilde{a}_{01} = 23.97936583, \quad \tilde{a}_{21} = -49.95168348, \quad \tilde{a}_{03} = 29.98303621,$$
$$\tilde{a}_{23} = -9.999373636, \quad \tilde{a}_{41} = 4.979514848, \quad \tilde{a}_{05} = 0.9968661253.$$

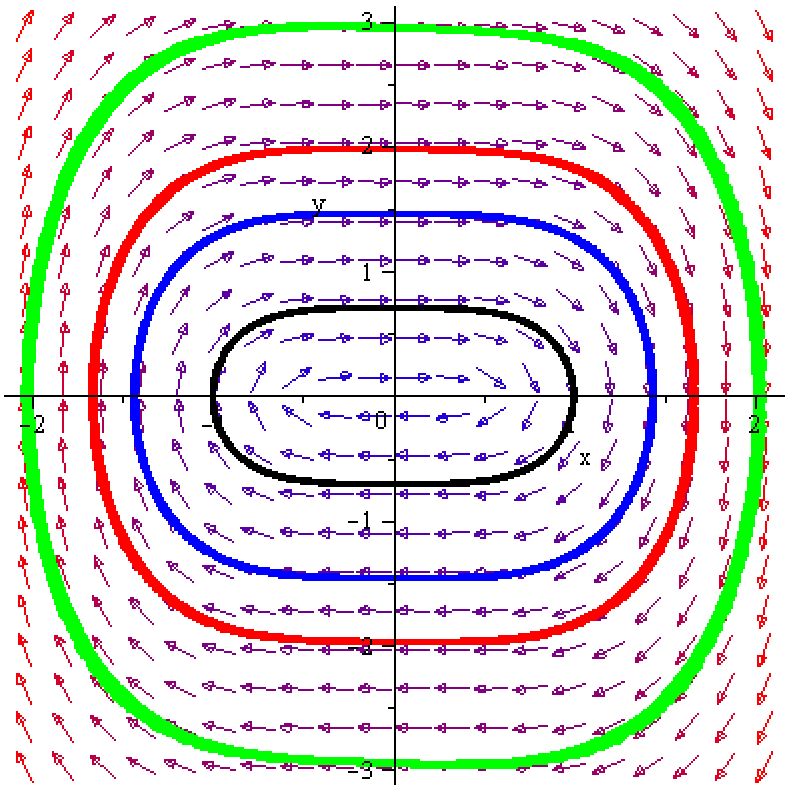
أي المعادلة $\mathcal{F}(r) = 0$ تقبل أربع حلول موجبة هي

$$r_1 = 0.9989866774, \quad r_2 = 1.438456003,$$
$$r_3 = 1.67128889, \quad r_4 = 2.042173432.$$

تحقق

$$\left.\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\right|_{r=r_1} = -12.15098498$$
$$\left.\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\right|_{r=r_2} = 4.6739814$$
$$\left.\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\right|_{r=r_3} = -5.9652117$$
$$\left.\frac{d\mathcal{F}(r)}{dr}\right|_{r=r_4} = 37.382648.$$

بما أن هذه المشتقات كلها ليست معدومة فإن الجملة (2.3) يمتلك بالتحديد أربع دورات حدية، (انظر الشكل 3.2).



شكل 3.2: أربع دورات حدّية من أجل $\varepsilon = 0.001$

3.3 مثال عن طريقة من إحدى طرق المتوسط من الرتبة الأولى لجملة تفاضلية ذات مركز غير خطي

مثال 6 لتكن الجملة (3،1) المثلثية التالية:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \varepsilon x f(x,y) \\ \dot{y} = x^5 - \varepsilon 3 y f(x,y) \end{cases} \quad *$$

حيث:

$$f(x,y) = 2x^3 + x^2 y - 7.2365x^2 + 5y^2 - 0.5x + 0.7605$$

في هذه الحالة، $Cs\theta$ و $Sn\theta$ دوال T-دورية دورها $T = 8,4131$. انطلاقا من المعادلة (*)، نجد:

$$f^0(r) = \frac{1}{T \times r}\left(A_{0.0} + A_{1.0}r^2 + A_{0.1}r^6\right)$$

باستعمال (**)، نجد:

$$\alpha_{0,0} = 8.4131, \ \alpha_{2,0} = 3.6276 \text{ و } 3b1_{0,2} = 2.1033.$$

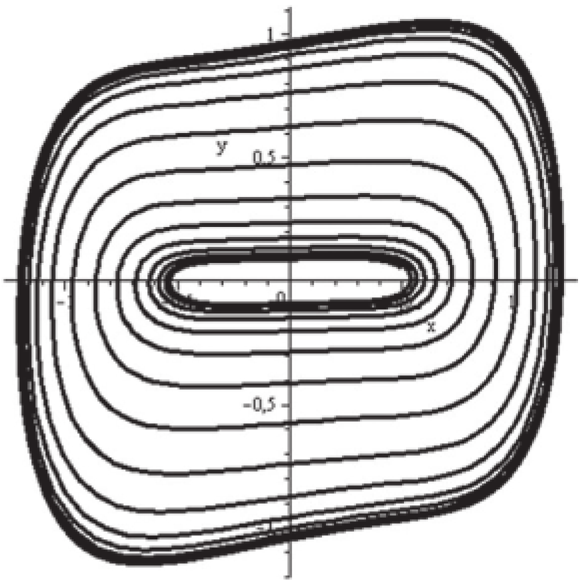
إذن:

$$f^0(r) = -\frac{1}{8.4131r}\left(6.3982 - 26.251r^2 + 10.517r^6\right).$$

كثير الحدود يملك جذرين موجبين، $r_1 = 0.5$ و$r_2 = 1.2$.
هذه الجملة تملك دورتين بالضبط حدّيتين تتفرع إلى مدارات دورية ذات المركز $\dot{y} = x^5,\ \dot{x} = -y,$ نستعمل طريقة المتوسط من الرتبة الأولى. (لاحظ الشكل (3،3)).

$$T = 2\,(1)^{-\frac{1}{6}}\,(3)^{-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)} = 8.4131$$

$$\int_0^T Cs^i\theta Sn^j\theta d\theta = 2\,(3)^{-\left(j+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(i+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(i+j+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)} \quad **$$



شكل 3،3: دورات حدّية للجملة من أجل $\varepsilon = 0.01$

الخاتمة

في هذه الدراسة المقترحة من قبل، تمت دراسة طريقة من طرق المتوسط من الرتبة الأولى ذات المركز غير الخطي ، وقد تم الحصول على نتائج و تقديرات للحل واستقراره من أجل قيم معينة بموجب إفتراضات محددة مسبقا للحل الدقيق.

وتبين بعض النتائج العددية أن طريقة المتوسط المقترحة فعالة و مستقرة وبالإضافة إلى ذلك هذه الطريقة المقترحة سهلة للتوسيع والبحث إذ يمكن توسيعها ودراساتها من أجل رتب عليا.

المراجع العلمية

[1] E. I. Abouelmagd and J. L. G. Guirao, On the perturbed restricted three-body problem, Applied Mathematics and Nonlinear Sciences 1(1) (2016); 123 - 144.

[2] R. Abraham and J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd edn,Benjamin- Cummings; 1978.

[3] D. Bocaletti and G. Pucacco, Theory of Orbits, Volume 1 and 2, (1996); Sprin- ger New York.

[4] A. Buica, J. P. Francoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear perio- dic differential systems with a small parameter, Communications on Pure and Applied Analysis 6 (2007); 103 - 111.

[5] B. Coll, A. Gasull and R. Prohens. Bifurcation of limit cyles from two families of centrs. Dynamics of continuous, Discret and Impulsiv sys- tems. Series A. Mathematical analysis 12 : (2005), 275-287.

[6] A. Khaireddine, Z. Abdenour, Cycles limites des systèmes diférentiells non linéaires dépendant d'un petit paramètre, Mémoire de fin d'études Pour l'obtention du diplôme de MASTER, Université Larbi Tébessi - Tébessa Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie Département: Mathématiques et Informatique.

[7] A. M. Liapunov. Stability of motion in Mathematics in science and en- gineering. Academic Press, vol 30 : 1966.

[8] A. Lins, W. De Melo and C. C. Pugh. On Liénard s equation. Lecture Notes in math. Springer, 597 : (1977), 335-357.

[9] J. Llibre and A. makhlouf. Limit cycles of a class of generalized Liénard polynomial equation. J Dyn Control Syst. DOI 10.1007/s10883-014- 9253-4

[10] H. Meriem, Cycles limites d une classe des équations différentielles du troisième ordre, Thèse Doctorat, option: mathématiques aplliquées, univercity BADJI MOKHTAR-ANNABA.

[11] J. A. Sanders, F. Verhulst. Averaging Method in Nonlinear Dynamical Systems. Applied Mathematical Siences 59, Springer, 1985.

[12] A. M. Urbina, G. L. de la Barra, G. León, ML. de la Barra, M. Cañas. Li- mit cycles of Liénard equations with nonlinear damping. Canad Math Bull. 36 : (1993), 251-256.