République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Équations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{lle}. BOUSSAHA Nesrine

Intitulé

Étude d'une équation hyperbolique non linéaire à exposants variables.

Dirigé par : Dr. REZGUI Nassima

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BOUAFIA Mousaab	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	Dr. REZGUI Nassima	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	Dr. AZZOUZA Noureddine	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Table des matières

ملخص

هذه المذكرة مخصصة لدراسة معادلة زائدية لزجة مطاطية لاخطية ذات أسس متغيرة. نذكر ببعض المفاهيم الأساسية للتحليل الوظيفي، ولا سيما فضاءات باناخ وفضاءات سوبوليف. بعد ذلك، نقوم بإدخال فضاءات الدوال من النوع أوغليكز-سوبوليف ونقدم وصفًا موجزًا لخصائصها الأساسية.

باستخدام طريقة جاليركين، نبرهن وجود حلول ضعيفة بالإضافة إلى انفجارها، هذه الأخيرة تنشأ وفقًا لافتراضات مناسبة لشروط كافية على الأسس المتغيرة m و p والبيانات الأولية.

الكلمات المفتاحية: المعادلة الزائدية اللزجة غير اللاخطية، طريقة جاليركين، الأسس المتغيرة، الحلول الضعيفة.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'une équation hyperbolique viscoélastique non linéaire à exposants variables. Nous rappelons quelques notions de bases fondamentales d'analyse fonctionnelle, en partculier les espaces de Banach et les espaces de Sobolev. Ensuite, nous introduisons les espaces de fonctions de type Orlicz-Sobolev et nous donnons une brève description de leurs propriétés essentielles.

En utilisant la méthode de Galerkin, nous montrons l'existence de solutions faibles ainsi que leurs explosions, cette dernière est établie sous des hypothèses appropriées des conditions suffisantes sur m, p et des données initiales.

Mots cléfs : Equation hyperbolique viscoélastique non linéaire, méthode de Galerkin, exposants variables, solutions faibles.

Abstract

This work is devoted to the study of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation with variable exponents. We recall some basic notions of functional analysis, in particular Banach spaces and Sobolev spaces. Then, we introduce the function spaces of Orlicz-Sobolev and we give a brief description of their main properties. Using Galerkin's method, we prove the existence of weak solutions as well as their explosion, the latter being established under appropriate assumptions of sufficient conditions on m, p and initial data.

Key words : Viscoelastic hyperbolic nonlinear equation, Galerkin's method, variable exponents, weak solutions, blow up.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires modélisent la pluspart des phénomènes physiques, mécaniques, chimiques et biologiques,..etc. L'étude de ces équations nécéssite la connaissance de leurs proprietés qualitatives et les différents problèmes qu'elles modélisent, par exemple, les équations de type elliptique interviennent souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaire c-à-d n'évoluant pas au cours du temps, l'équation de Laplace est l'exemple le plus simple. Les équations de type parabolique et hyperbolique modélisent des phénomènes dépendant du temps, les exemples modèles sont l'équation de la chaleur, l'équation de transport et l'équation des ondes.

Dans les problèmes réels, des fois on peut avoir les trois catégories en même temps comme pour le système de Navier-Stokes. Ainsi, en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant les conditions, parfois, en ajoutant des exposants ou d'autres termes, comme une intégrale dans l'équation ou dans les conditions, on obtient une nouvelle équation qui correspond au problème voulu.

Bien que la résolution directe des équations aux dérivées partielles trouve des difficultés considérables, l'utilisation des méthodes numériques a pris une grande importance dans la recherche de solutions approchées des problèmes considérés. Pour contribuer au développement de ces sciences, il est nécessaire de bien comprendre les propriétés des solutions de ces équations.

Il existe de nombreuses méthodes d'approximation numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles, parmi lesquelles la méthode de Galerkin, celle ci est très utile d'un point de vu théorique.

Dans ce mémoire, nous cherchons à établir l'existance et l'explosion de solutions faibles d'une équation hyperbolique viscoélastique non linéaire à exposants variables, définie de la manière suivante

$$\begin{cases} |u_t|^{\rho} u_{tt} + \Delta u + \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u\,(s)\,ds + |u_t|^{m(x)-2}u_t = |u|^{p(x)-2}u, \quad (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un domaine borné Lipchitzien, $Q_T = \Omega \times\ (0,T]$, $0 < T < \infty$, et S_T désigne la limite latérale du cylindre Q_T.

Le cas ou les exposants m, p sont des constantes, de nombreux résultats concernant l'existence et les propriétés d'explosion de solutions ont été etablit comme dans $[[8]-[28]]$.

Ces dernières années, une grande importance a été portée à l'étude des modèles mathématiques de fluides électro-rhéologiques. Ces modèles comprènent des équations hyperboliques, paraboliques ou elliptiques qui sont non linéaires par rapport au gradient de la solution cherchée et avec des exposants variables de non-linéarité ; comme dans les références$([6]-[15]-[18]-[26]-[27])$. On peut mentionner que les questions d'existence, d'unicité et de régularité de solutions faibles des équations paraboliques et elliptiques ont été étudiées par de nombreux auteurs sous des conditions diverses sur les données et par différentes méthodes $[[4],[5]]$.

A notre connaissance, il n'existe que quelques travaux sur les équations hyperboliques viscoélastiques avec des exposants variables de non-linéarité. Dans [7], les auteurs ont étudié l'explosion en temps fini des solutions d'équations hyperboliques viscoélastiques et dans [8], les auteurs n'ont discuté que le problème hyperbolique viscoélastique avec des exposants constants. Motivés par les travaux de [[7], [8]], nous allons étudier l'existence et l'explosion des solutions de notre problème.

Notre mémoire est répartie en trois chapitres.

Au premier chapitre, nous rappelons des notions d'analyse fonctionnelle ainsi que quelques définitions et théorèmes utiles. Nous introduisons les espaces de fonctions de type Orlicz-Sobolev et une brève description de leurs propriétés éssentielles.

Dans le deuxième chapitre, nous montrons l'existence de solutions faibles du problème considéré en utilisant la méthode de Galerkin.

Dans le dernier chapitre, on établit la propriété d'explosion de solutions faibles sous des hypothèses appropriées des conditions suffisantes sur m, p et des données initiales.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur quelques notions de bases fondamentales d'analyse fonctionnelle, définitions élémentaires et lemmes essentiels. Le choix étant réduit aux définitions et aux propriétés introduites dans ce mémoire.

La majorité des rappels énoncés dans ce chapitre sont tirés des références [[1], [2] et [3]].

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.1 Espaces de Banach

Définition 1.1 *Une application* $\|.\| : X \to \mathbb{R}_+$ *est une norme si elle vérifie les conditions suivantes*

$$\begin{cases} \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0, \forall u \in X. \\ \|\lambda.u\| = |\lambda| \, \|u\| \, , \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in X. \\ \forall u, v \in X : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \, . \end{cases} \tag{1.1}$$

Le couple $(X, \|.\|)$ *est alors appelé un espace vectoriel normé.*

Définition 1.2 *(Suite de Cauchy) On dit qu'une suite* (u_n) *d'éléments d'un espace normé* X *est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}; \ \forall \, (p, q) \in \mathbb{N}^2, \ p \geq N \ et \ q \geq N \Rightarrow \|u_p - u_q\| \, .$$

Définition 1.3 *L'espace vectoriel normé* $(X, \|.\|)$ *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* X *est convergente.*

Définition 1.4 *On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.5 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* (u, v) *et qui est complet pour la norme* $(u, v)^{\frac{1}{2}}$.

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.6 *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$ *; on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.7 *On pose*

$$L^{\infty}(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

On note

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \inf \{ C;\ |u(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \},$$

la norme correspondante.

Théorème 1.1 [1] *(Fischer-Riesz)* L^P *est un espace de Banach pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Définition 1.8 *On définit l'espace* $L^2(\Omega)$ *des fonctions mesurables de carrée sommable dans* Ω*. Muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) \, v(x) \, dx.$$

$L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert. On note*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

la norme correspondante.

Définition 1.9 *(Dérivation faible) Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $v_i \in L^2(\Omega)$, pour $i \in \{1, ..., N\}$, telles que, pour toute fonction $\phi \in C_C^\infty(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \, dx = -\int_\Omega v_i(x) \phi(x) \, dx.$$

Chaque v_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de v_i et notée par $\frac{\partial u}{dx_i}$.

Définition 1.10 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall\ i \in \{1, ..., n\},\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}. \qquad (1.2)$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée partielle faible de u.

Proposition 1.1 [2] *Muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{L^2}, \qquad (1.3)$$

et de la norme

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = \left(\| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.11 *L'espace $H_0^1(\Omega)$ est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions qui s'annulent sur le bord $\partial\Omega$. Il est définit aussi comme l'adhérence de $C_C^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, tel que $C_C^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.*

Remarque 1.1 *Nous utiliserons l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ pour $2 \leq p \leq 2n/(n-2)$ si $n \geq 3$ ou $p \geq 2$ si $n = 1, 2$. La constante d'injection notée par C_* est donnée par*

$$\| u \|_p \leq C_* \| \nabla u \|_2 . \tag{1.4}$$

Définition 1.12 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) ; \exists\ v \in L^p(\Omega) \ \text{ tel que } \int_I u\varphi' = -\int_I v\varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(\Omega) \right\}. \tag{1.5}$$

L'espace $W^{1,p}$ muni du produit scalaire

$$\| u \|_{W^{1,p}} = \| u \|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \| \frac{\partial u}{\partial x_i} \|_{L^p} . \tag{1.6}$$

On désigne par $W_0^{1,p}(\Omega)$ la fermture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.

1.3 Espaces de Boschner

On definit les espaces de Banach suivants

1- $C(I, L^2(\Omega)) = \{u : I \to L^2(\Omega)$ qui associe à $t,\ u(t) \in L^2(\Omega)$ continue$\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{C(I,L^2(\Omega))} = max\,\|u\|_{L^2(\Omega)}\,. \tag{1.7}$$

2- $L^2(I, L^2(\Omega)) = \{u : I \to L^2(\Omega)$ à carrée intégrable$\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} = \int_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega))}\,dt. \tag{1.8}$$

3-$L^\infty(I, H\,{}^1_0(\Omega)) = \{u : I \to H^1_0(\Omega)$ essentiellement bornées$\}$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty\left(I,H\,{}^1_0(\Omega)\right)} = \sup \|u\|_{H\,{}^1_0(\Omega)}\,. \tag{1.9}$$

1.4 Espaces de Orlicz-Sobolev

Définition 1.13 *On pose*

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{u(x) : u\ est\ mesurable\ dans\ \Omega,\ A_{P(.)}(u) = \int_\Omega \mid u(x)\mid^{p(x)} dx < \infty\right\}, \tag{1.10}$$

avec la norme de type Luxembourg

$$\parallel u \parallel_{p(.)} = inf\left\{\lambda \geq 0, A_{p(.)}(u\diagup\lambda) \leq 1\right\}. \tag{1.11}$$

Définition 1.14 *On pose*

$$W^{1,p(.)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(.)}(\Omega) \text{ tel que } \nabla u \text{ existe et } |\nabla u| \in L^{p(.)}\Omega \right\}. \qquad (1.12)$$

Cet espace est un espace de Banach par rapport à la norme :

$$\| u \|_{W^{1,p(.)}(\Omega)} = \| u \|_{p(.)} + \| \nabla u \|_{p(.)} .$$

Nous définissons l'espace $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ comme étant la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(.)}(\Omega)$.

Nous notons ici que l'espace $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ est généralement défini d'une manière différente pour le cas de l'exposant variable. Cependant, les deux définitions sont équivalentes (voir [13]).

Le dual de $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ est défini comme $W_0^{-1,p'(.)}(\Omega)$; de la même manière que les espaces de Sobolev classiques, où $\frac{1}{p(.)} + \frac{1}{p'(.)} = 1$.

1.5 Propriétés essentielles

Lemme 1.1 *([6]) Pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, les relations suivantes sont verifiées :*

1. $$\| \ u \|_{p(.)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow A_{p(.)}(u) < 1 (= 1; > 1); \tag{1.13}$$

2. $$\| \ u \|_{p(.)} < 1 \Rightarrow \| \ u \|_{p(.)}^{p+} \leq A_{p(.)}(u) \leq \| \ u \|_{p(.)}^{p-};$$

   $$\| \ u \|_{p(.)} > 1 \Rightarrow \| \ u \|_{p(.)}^{p+} \geq A_{p(.)}(u) \geq \| \ u \|_{p(.)}^{p-}; \tag{1.14}$$

3. $$\| \ u \|_{p(.)} \to 0 \Leftrightarrow A_{p(.)}(u) \to 0; \| \ u \|_{p(.)} \to \infty \Leftrightarrow A_{p(.)}(u) \to \infty. \tag{1.15}$$

Lemme 1.2 *([29]) Pour tout $u \in W_0^{1,p(.)}(\Omega)$, si p satisfait la condition (2.2), la $p(.)$-inégalité de Poincaré*

$$\| \ u \|_{p(x)} \leq C \ \| \ \nabla u \|_{p(x)} \ . \tag{1.16}$$

est vérifiée, où la constante positive C dépend de p et de Ω.

Remarque 1.2 *Notons que l'inégalité suivante*

$$\int_\Omega |u|^{p(x)} dx \leq C \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} dx, \tag{1.17}$$

n'est pas vérifiée en générale.

Lemme 1.3 *([13]) Soit Ω un domaine ouvert (qui peut être non borné) dans $\mathbb{R}^n$. Si*

$p(x) : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue de Lipschitz satisfaisant

$$\begin{aligned} 1 \quad &< \quad p^- \leq p^+ < \frac{n}{k}, && (1.18) \\ \textit{et } r(x) \quad &: \quad \bar{\Omega} \to \mathbb{R} \textit{ est mesurable et satisfait.} && (1.19) \end{aligned}$$

$$p(x) \leq r(x) \leq p^*(x) = \frac{np(x)}{n - kp(x)} p.p. \; x \in \bar{\Omega}, \tag{1.20}$$

alors il existe une injectiotion continue $W^{k,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$.

Chapitre 2

Existence de solutions faibles

2.1 Description du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ un domaine borné Lipchitzien et $Q_T = \Omega \times (0, T]$, $0 < T < \infty$, considérons le problème suivant

$$\begin{cases} |u_t|^\rho u_{tt} + \Delta u + \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u\,(s)\,ds + |u_t|^{m(x)-2}u_t = |u|^{p(x)-2}u, \quad (x,t) \in Q_T \\ u(x,t) = 0, (x,t) \in S_T, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \ x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où S_T désigne la limite latérale du cylindre Q_T.

Nous supposons que les exposants $m(x)$ et $p(x)$ verifient les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} 1 &< m^{-} = ess\inf_{x\in\ \Omega} m\left(x\right) \leq m\left(x\right) \leq m^{+} = ess\sup_{x\in\ \Omega} m\left(x\right) < \infty, \qquad (2.2)\\ 1 &< p^{-} = ess\inf_{x\in\ \Omega} p\left(x\right) \leq p\left(x\right) \leq p^{+} = ess\sup_{x\in\ \Omega} p\left(x\right) < \infty. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

De plus $m(x)$ et $p(x)$ sont continus sur Ω avec un module logarithmique de continuité :

$$\forall z, \xi \in \Omega, \mid z - \xi \mid < 1, \mid m\left(z\right) - m\left(\xi\right) \mid + \mid p\left(z\right) - p\left(\xi\right) \mid \leq \omega\left(\mid z - \xi \mid\right), \qquad (2.4)$$

où

$$\lim_{\tau\to 0^{+}} \sup \omega\left(\tau\right) \ln \frac{1}{\tau} = C < +\infty. \qquad (2.5)$$

Nous supposons aussi que

(H_1) : ρ est une constante qui satisfait

$$\begin{aligned} 0 &< \rho \leq \frac{2}{n-2} \text{ si } n \geq 3\\ \text{et } \rho &> 0 \text{ si } n = 1,\ 2.\end{aligned}$$

(H_2) : $g : IR_{+} \to IR_{+}$ est une fonction bornée de classe C^1 qui satisfait

$$g(0) > 0,\ 1 - \int_0^{\infty} g(s)ds = l > 0.$$

(H_3) : Il existe $\xi > 0$ tel que

$$g'(t) < -\xi . g(t), \ t \geq 0.$$

Le résultat principal de ce chapitre est donné dans le théorème suivant.

Théorème 2.1 *Soit u_0, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ données. Supposons que les exposants $m(x)$, $p(x)$ verifient les conditions $(2,2) - (2,4)$. Alors le problème $(2,1)$ a au moins une solution $u : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ telles que u, u', u'' sont dans la classe $L^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega))$, et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$$\begin{array}{lrcl} (A1) & 2 & < & p^- < p^+ < \max\{n, \dfrac{np^-}{n-p^-}\}, \quad 2 < m^- < m^+ < p^-; \\ (A2) & \max\left\{1, \dfrac{2n}{n+2}\right\} & < & p^- < p^+ < 2, \ 1 < m^- < m^+ < \dfrac{3p^- - 2}{p^-}. \end{array}$$

2.2 Approximation variationnelle

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable de dimention infinie, d'après la proposition 12.1.15 [2] , il existe une base hilbertienne orthogonale $\{wj\}_{j=1}^\infty$ de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} -\Delta w_j &= \lambda_j w_j, \ x \in \Omega, \\ w_j &= 0, \qquad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Notons par V_k le sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de la base $\{w\}_{j=1}^{\infty}$ $(V_k \ = Span\{w_1, ..., w_k\})$. Par normalisation, nous avons $\| \ w_j \ \|_2 = 1$.

Multiplions l'équation (2.1) par une fonction $\phi \in V_k$ et intégrons sur Ω, ensuite définissons l'opérateur

$$< Lu, \phi >= \int_{\Omega} \left[|u_t|^{\rho} u_{tt}\phi + \nabla u \nabla \phi + \nabla u_{tt} \nabla \phi - \int_0^t g(t-s) \nabla u \nabla \phi ds \right.$$

$$\left. + |u_t|^{m(x)-2} u_t \phi - \alpha |u|^{p(x)-2} u \phi \right] dx, \ \ \phi \in V_k.$$

Pour tout entier k donné, on considère la solution approchée $u_k = \sum_{i=1}^{k} c_i^k(t) w_i$, qui satisfait

$$\begin{cases} < Lu_k, w_i >= 0, \ \ i = 1, 2, ..., k \\ \\ u_k(0) = u_{0k}, \ \ u_{kt}(0) = u_{1k}, \end{cases} \tag{2.6}$$

où

$$u_{0k} = \sum_{i=1}^{k} (u_0, w_i) w_i, \ \ u_{1k} = \sum_{i=1}^{k} (u_1, w_i) w_i \ et \ u_{0k} \to u_0, \ \ u_{1k} \to u_1 \text{ dans } H_0^1(\Omega).$$

Le problème(2.1) est approché par le système de k équations différentielles ordinaires suivant

$$\begin{cases} \mid (\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^k(t))', w_i) \mid^{\rho} (\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^k(t), w_i)'' = -\lambda_i c_i^k(t) + \lambda_i \int_0^t g(t-s) c_i^k(s) ds \\ + \mid (\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^k(t))', w_i) \mid^{m(x)-2} (\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^k(t))', w_i) \\ -\alpha \mid (\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^k(t), w_i) \mid^{p(x)-2} (\sum\limits_{i=1}^{k} c_i^k(t), w_i), \\ c_i^k(0) = (u_o, w_i),\ (c_i^k(0))' = (u_1, w_i), \quad i = 1, 2, ..., k. \end{cases} \tag{2.7}$$

D'après le théorème des systèmes des EDO, le problème (2.7) admet une solution unique $c_i^k(t)$ sur $[0, t_k]$, où $t_k > 0$. Alors nous pouvons obtenir une solution approchée $u_k(t)$ pour(2.1) dans V_k, sur $[0, t_k]$. Cette solution peut être étendue à $[0, T]$, pour tout $T > 0$, donné par l'estimation ci-dessous.

2.3 Estimations a priori

Dans cette section, nous établissons quelques estimations a priori utiles.

En multipliant l'équation (2.6) par $(c_i^k(t))'$ et par somation par rapport à i, on obtient la relation

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{p+2} + \parallel u_k' \parallel_{p+2}^{p+2} + \tfrac{1}{2} \parallel \nabla u_k \parallel_2^2 + \tfrac{1}{2} \parallel \nabla u_k' \parallel_2^2\right) + \int_\Omega \mid u_k' \mid^{m(x)} dx \\ &-\tfrac{d}{dt}\left(\int_0^t g(t-s) \int_\Omega (\nabla u_k(s) \nabla u_k'(t) dx ds)\right) - \alpha \tfrac{d}{dt}\left(\int_\Omega \tfrac{1}{p(x)} \mid u_k \mid^{p(x)} dx\right) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

En multipliant (2.6) par $(c_i^k(t))'$, en intégrant par parties sur Q_T et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$
\begin{aligned}
-\int_0^t g(t-s)\int_\Omega (\nabla u_k(s),\nabla u_k'(t))dxds &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\diamond\nabla u_k)(t) \\
-\frac{1}{2}(g^{'}\diamond\nabla u_k)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)ds &\parallel \nabla u_k\parallel_2^2+\frac{1}{2}g(t)\parallel\nabla u_k\parallel_2^2, \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

avec

$$
(\phi\diamond\nabla\psi)(t)=\int_0^t\phi(t-s)\parallel\nabla\psi(t)-\nabla\psi(s)\parallel_2^2 ds.
$$

En utilisant les relations (2.3)-(2.4) et les hypothèses (H_2)-(H_3), on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho+2}\parallel u_k'\parallel_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\parallel\nabla u_k'\parallel_2^2+\frac{1}{2}(g\diamond\nabla u_k)(t)\right.\\
&\left.+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\parallel\nabla u_k\parallel_2^2-\alpha\int_\Omega\frac{1}{p(x)}|u_k|^{p(x)}\,dx\right)\\
=\;&\frac{1}{2}(g\diamond\nabla u_k)(t)-\frac{1}{2}g(t)\parallel\nabla u_k\parallel_2^2-\int_\Omega|u_k'|^{m(x)}dx. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

En intégrant (2.10) sur $(0,t)$, et en utilisant les hypothèses $(2.2)-(2.4)$, on obtient .

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho+2}\parallel u_k'\parallel_{\rho+2}^{\rho+2}+\frac{1}{2}\parallel\nabla u_k'\parallel_2^2+\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right)\parallel\nabla u_k\parallel_2^2+\frac{1}{2}\left(g\diamond\nabla u_k\right)(t)\\
&-\alpha\frac{1}{p\,(x)}\mid u_k\mid^{p(x)}\leq C_1,
\end{aligned}
$$

où C_1 est une constante positive dépendant uniquement de $\parallel u_0\parallel_{H_0^1},\parallel u_1\parallel_{H_0^1}$.

D'après le lemme (1.1), nous avons aussi

$$\frac{1}{\rho+2} \parallel u_k' \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2} \parallel \nabla u_k' \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int\limits_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u_k \parallel_2^2 + \frac{1}{2} \left(g \diamond \nabla u_k\right)(t)$$

$$- \max \left\{ \alpha \frac{1}{p^-} \parallel u_k \parallel_{p(x)}^{p^-}, \alpha \frac{1}{p^-} \parallel u_k \parallel_{p(x)}^{p^+} \right\} \leq C_1, \tag{2.11}$$

Compte tenu de (H_1)-(H_2)-(H_3) et (A_1)-(A_2), on obtient

$$\parallel u_k' \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \parallel \nabla u_k' \parallel_2^2 + (g \diamond \nabla u_k)(t) \leq C_2, \tag{2.12}$$

où C_2 est une constante positive ne dépendant que de $\parallel u_0 \parallel_{H_0^1}$, $\parallel u_1 \parallel_{H_0^1}, l$, p^-, p^+.

Il s'ensuit de(2.12) que

$$u_k \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.13}$$

$$u_k' \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)). \tag{2.14}$$

Ensuite, en multipliant (2.1) par $(c_i^k(t))''$, puis en faisant la somme par rapport à i, on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |u_k'|^\rho |u_k''|_2^2 dx + \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 + \tfrac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{m(x)} |u_k'|^{m(x)}\right) = - \int_\Omega \nabla u_k \nabla u_k'' dx \\ &+ \int_\Omega g(t-s) \int_\Omega \nabla u_k(s) \nabla u_k''(t)\, dx ds + \alpha \int_\Omega |u_k|^{p(x)-2} u_k u_k'' dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notons que nous avons les estimations suivantes pour $\epsilon > 0$.

$$\int_\Omega |u_k'|^\rho |u_k''|_2^2 dx \leq C_\varepsilon \parallel |u_k'|^\rho \parallel_2^2 + \frac{1}{4\epsilon} \parallel u_k'' \parallel_2^2 . \tag{2.16}$$

$$\left|-\int_\Omega \nabla u_k \nabla u_k'' dx\right| \leq \epsilon \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 + \frac{1}{4\epsilon} \parallel \nabla u_k \parallel_2^2, \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
&| -\textstyle\int_0^t g(t-s) \int_\Omega \nabla u_k(s) \nabla u_k''(t) dx ds \,| \\
&\leq \tfrac{1}{4\epsilon} \textstyle\int_\Omega \int_0^t (g(t-s) \nabla u_k(s) ds)^2 dx + \epsilon \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 \\
&\leq \epsilon \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 + \tfrac{1}{4\epsilon} \textstyle\int_0^t g(s) ds \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \mid \nabla u_k(s) \mid^2 dx ds \\
&\leq \epsilon \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 + \tfrac{(1-l)g(0)}{4\epsilon} \textstyle\int_0^t \parallel \nabla u_k(s) \parallel_2^2 ds,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

et

$$\alpha \parallel |u_k|^{p(x)-2} u_k u_k'' \parallel \leq \alpha\epsilon \parallel u_k'' \parallel_2^2 + \frac{\alpha}{4\epsilon} \parallel |u_k|^{p(x)-2} u_k \parallel_2^2 \leq \alpha\epsilon \parallel u_k'' \parallel_2^2 + \frac{\alpha}{4\epsilon} \int_\Omega \left(|u_k|^{p(x)-2} u_k\right)^2 dx. \tag{2.19}$$

Du lemme 1.2, nous avons

$$\parallel u_k'' \parallel_2^2 \leq C^2 \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2, \tag{2.20}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (|u_k'|^{p(x)-2} u_k)^2 dx &= \int_\Omega |u_k|^{2(p(x)-1)} u_k dx \\
&\leq \max\left\{\int_\Omega |u_k|^{2(p^- -1)} dx, \int_\Omega |uk|^{2(p^+ -1)} dx\right\} \\
&\leq \max\left\{C^{*\frac{1}{2(p^-1-1)}} \parallel \nabla u_k \parallel^{\frac{2}{2(p^- -1)}}, C^{*\frac{1}{2p+-1}} \parallel \nabla u_k' \parallel^{\frac{2}{2p^+ -1}}\right\},
\end{aligned} \tag{2.21}$$

où C, C^* sont des constantes d'injection. En tenant compte de (2.15)-(2.21), on obtient

$$\begin{aligned} & C_\epsilon \int_\Omega |\nabla u_t|^{2\rho} dx + \tfrac{1}{4\epsilon} \int_\Omega |u_k''|^2 dx + (1-2\epsilon-\alpha\epsilon C) \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 + \tfrac{d}{dt}(\tfrac{1}{m(x)} |u_k'|^{m(x)}) \\ & \leq \tfrac{1}{4\epsilon} \parallel \nabla u_k \parallel_2^2 + \tfrac{(1-l)g(0)}{4\epsilon} \int_0^t \parallel \nabla u_k(s) \parallel_2^2 ds \\ & + \max \left\{ C^{*\frac{1}{2(p^--1)}} \parallel \nabla u_k \parallel^{\frac{1}{p^--1}}, C^{*\frac{1}{2p^+-1}} \parallel \nabla u_k \parallel^{\frac{1}{p^+-1}} \right\}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

En intégrant (2.22) sur (0, t), en utilisant (2.12) et le lemme 1.3 on obtient

$$\begin{aligned} C_\epsilon T C_2^{2\rho} + \frac{1}{4\epsilon} \int_0^t \parallel u_k'' \parallel^2 dx + (1-2\epsilon-\alpha\epsilon C) \int_\Omega \parallel \nabla u_k'' \parallel_2^2 ds & \\ + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u_k'|^{m(x)} dx \leq \frac{1}{4\epsilon} (C_3 + (1-l)\, g(0)\, T) + C_4, & \end{aligned} \tag{2.23}$$

où C_4 est une constante positive dépendant uniquement de $\parallel u_1 \parallel_{H_0^1}$. En prenant α, ϵ suffisamment petit dans (2.23), on obtient l'estimation

$$\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \parallel u_k'' \parallel^2 ds + \int_\Omega \frac{1}{m(x)} |u_k'|^{m(x)} dx \leq C_5 \tag{2.24}$$

Donc, selon le lemme 1.1, nous avons

$$\frac{1}{4\varepsilon} \int_0^t \parallel u_k'' \parallel^2 ds + \min \left\{ \frac{1}{m^+} \parallel u_k' \parallel_{m(x)}^{m-}, \frac{1}{m^+} \parallel u_k' \parallel_{m(x)}^{m+} \right\} \leq C_5, \tag{2.25}$$

où C_5 est une constante positive ne dépendant que de $\parallel u_0 \parallel_{H_0^1}$, $\parallel u_1 \parallel_{H_0^1}$, l, $g(0)$, T.

2.4 Résultats de convergence

D'après l'estimation (2.25), nous avons

$$u_k'' \text{ est uniformément bornée dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.26}$$

De (2.12)-(2.14) et (2.26), nous déduisons qu'il existe une sous-suite u_i de u_k et une fonction u telle que

$$u_i \rightharpoonup u \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.27}$$

$$u_i \rightharpoonup u \text{ dans } L^{p^-}(0,T;W^{1,p(x)}(\Omega)), \tag{2.28}$$

$$u_i' \rightharpoonup u' \text{ dans } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.29}$$

$$u_i'' \rightharpoonup u'' \text{ dans } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{2.30}$$

Ensuite, nous allons traiter le terme non linéaire. D'après le théorème de Aubin-Lions, voir [23], suivant (2.29) et (2.30) il existe une sous-suite de u_i toujours représentée par la même notation, telle que $u_i' \to u'$ dans $L^2(0,T;L^2(\Omega))$,ce qui implique que $u_i' \to u'$ $p.p$ dans $\Omega \times (0,T)$,Ainsi, de (2.27) - (2.30), nous avons

$$|u_i'|^\rho u_i'' \rightharpoonup |u'|^\rho u'' \text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{2.31}$$

$$|u_i|^{p(x)-2}u_i \rightharpoonup |u|^{p(x)-2}\, u \;\text{ dans } \Omega \times (0,T), \tag{2.32}$$

$$|u_i'|^{m(x)-2}u_i' \to |u'|^{m(x)-2}u' \;\; p.p. \text{ dans } \Omega \times (0,T). \tag{2.33}$$

Maintenant nous allons montré le théorème 2.1

Preuve. D'après les estimations a priori et les résultats de convergence vus dans les sections précédentes, en multipliant (2.7) par $\phi(t) \in C(0,T)$ (où $C(0,T)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans $(0,T)$) et en intégrant le resultat obtenu sur $(0,T)$, on obtient

$$< Lu_k, w_i\phi(t) >= 0, \; i = 1, 2, ..., k. \tag{2.34}$$

Notons que $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une base de $H_0^1(\Omega)$. La convergence (2.27)-(2.33) est sufisante pour passer à la limite dans (2.34) pour avoir

$$|u_t|^\rho u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds + |u_t|^{m(x)-2}u_t = |u|^{p(x)-2}u, \text{ dans } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$

pour un $T > 0$ arbitraire. D'après (2.27) - (2.30), on déduit que $u_k(0) \rightharpoonup u(0)$ dans $H_0^1(\Omega)$, $u_k^{'}(0) \rightharpoonup u^{'}(0)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Ainsi , on a $u(0) = u_0$, $u_1(0) = u_1$. Alors on conclu, la preuve du théorème 2.1. ■

Chapitre 3

Explosion de solutions

Dans ce chapitre, nous allons montrer le résultat principal concernant l'explosion des solutions donné dans le théorème 2.1. Pour cela, on définit

$$\begin{aligned} E(t) &= \tfrac{1}{\rho+2} \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \tfrac{1}{2} \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \tfrac{1}{2}\left(1 - \int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u \parallel_2^2 \\ &+ \tfrac{1}{2}(g \circ \nabla u)(t) - \tfrac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où

$$(g \circ v)(t) = \int_0^\infty g(s) v\,(t-s)\,ds < \frac{\frac{p}{2} - 1}{\frac{p}{2} - 1 + \frac{1}{2p}} = \frac{p^2 - 2p}{(p-1)^2} = 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \tag{3.2}$$

Lemme 3.1 *([25]) La fonction énergétique modifiée satisfait la solution de (2.1)*

$$E^{'}(t) \leq \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel_2^2 - \parallel u_t \parallel_m^m \leq \frac{1}{2}(g' \circ \nabla u)(t). \tag{3.3}$$

Lemme 3.2 *Supposons que*

$$\max\{m, p\} \leq \frac{2(n-1)}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{3.4}$$

Alors il existe une constante positive $C > 1$ dépendant uniquement de Ω telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ et $2 \leq s \leq p$, on a

$$\| u \|_p^s \leq C(\| \nabla u \|_2^2 + \| u \|_p^p). \tag{3.5}$$

Preuve.

1. Si$\| u \|_p \leq 1$ alors $\| u \|_p^s \leq \| u \|_p^2 \leq C \| \nabla u \|_2^2$, selon les théorèmes d'injection de Sobolev.

2. Si $\| u \|_p > 1$ alors $\| u \|_p^s \leq \| u \|_p^p$.

D'où la relation(3.5) ■

Posons

$$H(t) = -E(t)$$

Dans tout ce qui suit, nous utilisons C pour désigner une constante positive dépendant uniquement de Ω. Comme résultat de (3.1) et (3.5) nous avons

Corollaire 3.1 *Supposons que les conditions du lemme 3.2 sont verifiées. Alors nous avons l'inégalité suivante pour tout $t \in [0, T)$*

$$\| u \|_p^s \leq C(-H(t) - \| u_t \|_{\rho+2}^{\rho+2} + \| \nabla u_t \|_2^2 - \| \nabla u \|_2^2 - (g \circ \nabla u)(t) + \| u \|_p^p). \tag{3.6}$$

Théorème 3.1 *Supposons que* $\max\{m,p\} \leq \frac{2(n-1)}{n-2}$, $n \geq 3$, *supposons de plus* $u_0,\ u_1 \in H_0^1(\Omega)$ *et* $E(0) < 0$. *Alors la solution du théorème 2.1 explose en temps fini*

$$T^* \leq \frac{C(1-\alpha)}{\epsilon\gamma\alpha L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}.$$

Preuve. En multipliant l'équation (2.1) par $(-u_t)$ et en intégrant sur Ω on obtient

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left\{-\tfrac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx + \tfrac{1}{p}\int_\Omega |u|^p dx\right\}\\ &+\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_t(t)\nabla u(s)dxds = \int_\Omega |u_t|^m dx,\end{aligned} \tag{3.7}$$

pour toute solution régulière. Ce résultat peut être étendu aux solutions faibles par densité. Mais

$$\begin{aligned}&\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_t(t).\nabla u(s)dxds\\ =\ & \int_0^t\int_\Omega \nabla u_t(t).|\nabla u(s)-\nabla u(t)|dxds + \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_t(t).\nabla u(t)dxds\\ =\ & -\frac{1}{2}\int_0^t g(t-s)\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxds + \int_0^t g(s)\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx\right)ds\\ =\ & -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxds\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(s)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dxds\right]\\ & +\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxds - \frac{1}{2}g(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dxds.\end{aligned} \tag{3.8}$$

En remplaçant cette dernière relation dans (3.7) on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u_t|^{\rho+2}dx-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2dx-\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_t|^2dx+\frac{1}{p}\int_\Omega |u|^pdx\right\}\\
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxd\tau\right]+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_0^t g(s)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dxds\right]\\
=\ &\int_\Omega |u_t|^mdx-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxds+\frac{1}{2}g(t)\parallel \nabla u(t)\parallel^2 . \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

En utilisant la définition de H(t), l'estimation (3.9) devient

$$
H'(t)=\int_\Omega |u_t|^mdx-\frac{1}{2}\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxds\ +\frac{1}{2}g(t)\parallel \nabla u(t)\parallel^2\geq 0. \qquad (3.10)
$$

Par conséquent, nous avons

$$
0<H(0)\leq H(t)\leq \frac{1}{p}\parallel u\parallel_p^p . \qquad (3.11)
$$

On défini

$$
L(t)=H^{1-\alpha}(t)+\frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_tudx+\varepsilon\int_\Omega \nabla u_t.\nabla udx, \qquad (3.12)
$$

où ε sera choisi petit et

$$
0<\alpha\leq \frac{p-m}{m-1},
$$

En prenant la dérivée de (3.12) et en utilisant (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) = -\tfrac{1}{2}(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\int_0^t g'(t-s)\int_\Omega |\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2 dxds \\ +(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)\left\{\int_\Omega |u_t|^m dx + \tfrac{1}{2}g(t) \parallel \nabla u(t) \parallel^2\right\} + \tfrac{\varepsilon}{\rho+1} \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} -\varepsilon \parallel \nabla u \parallel_2^2 \\ +\varepsilon \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 +\varepsilon \int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u(s).\nabla u(t)ds - \varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u\ dx + \varepsilon \parallel u \parallel_p^p \end{aligned} \tag{3.13}$$

En utilisant l'inégalité de Young, et la relation (3.1) pour remplacer $\int_\Omega |u(x,t)|^p dx$, alors (3.13) devient

$$\begin{aligned} L'(t) &\geq (1-\alpha)H^{1-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m + \tfrac{\varepsilon}{\rho+1} \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} -\varepsilon\left(1-\int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u \parallel_2^2 \\ &+\varepsilon \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 -\varepsilon\eta(g\circ\nabla u) - \tfrac{\varepsilon}{4\eta}\int_0^t g(s)ds \parallel \nabla u \parallel_2^2 -\varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u dx + \varepsilon\tfrac{p}{2}(g\circ\nabla u) \\ &+\varepsilon\left(pH(t) + \tfrac{p}{\rho+2} \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \tfrac{p}{2} \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \tfrac{p}{2}\left(1-\int_0^t g(s)ds\right) \parallel \nabla u \parallel_2^2\right) \\ &\geq (1-\alpha)H^{1-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m +\varepsilon\left(\tfrac{1}{\rho+1}+\tfrac{p}{\rho+2}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} +\varepsilon pH(t) \\ &+\left(\left(\tfrac{p}{2}-1\right)-\left(\tfrac{p}{2}-1+\tfrac{1}{4\eta}\right)\int_0^t g(s)\right) \parallel \nabla u \parallel_2^2 +\varepsilon\left(\tfrac{p}{2}-\eta\right)(g\circ\nabla u) + \varepsilon\left(\tfrac{p}{2}+1\right) \parallel \nabla u_t \parallel_2^2, \end{aligned} \tag{3.14}$$

pour un certain nombre η avec $0<\eta<\frac{p}{2}$. En utilisant (3.2), l'estimation (3.14) devient

$$\begin{aligned} L^{'}(t) \geq (1-\alpha)H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m +\varepsilon\left(\tfrac{1}{\rho+1}+\tfrac{p}{\rho+2}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} \\ +\varepsilon pH(t) + \varepsilon a_1(g\circ\nabla u) + \varepsilon a_2 \parallel \nabla u \parallel_2^2 +\varepsilon a_3 \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 -\varepsilon\int_\Omega |u_t|^{m-2}u_t u\ dx, \end{aligned} \tag{3.15}$$

où

$$a_1 = \frac{p}{2}-\eta > 0,\ a_2 = (\frac{p}{2}-1) - \left(\frac{p}{2}-1+\frac{1}{4\eta}\right)\int_0^t g(s)ds > 0,\ a_3 = \frac{p}{2}+1 > 0.$$

Pour estimer le dernier terme de (3.15), nous utilisons à nouveau l'inégalité de Young $XY \leq \frac{\delta^r}{r}X^r + \frac{\delta^{-q}}{q}Y^q,\ X, Y \geq 0$, pour tout $\delta > 0,\ \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$, avec $r = m$ et $q = \frac{m}{(m-1)}$. On a donc

$$\int_\Omega |u_t|^{m-1}|u|dx \geq \frac{\delta^m}{m} \parallel u \parallel_m^m + \frac{m-1}{m}\delta^{\frac{-m}{(m-1)}} \parallel u_t \parallel_m^m,$$

si on remplace dans (3.15), on obtient pour tout $\delta > 0$

$$\begin{aligned} L'(t) \geq & \left[(1-\alpha)H^{-\alpha}(t) - \tfrac{m-1}{m}\delta^{\frac{-m}{(m-1)}}\right] \parallel u_t \parallel_m^m + \varepsilon a_3 \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 - \varepsilon\tfrac{\delta^m}{m} \parallel u \parallel_m^m \\ & + \varepsilon\left(\tfrac{1}{\rho+1} + \tfrac{p}{\rho+2}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon p H(t) + \varepsilon a_1(g \circ \nabla u) + \varepsilon a_2 \parallel \nabla u \parallel_2^2 . \end{aligned} \tag{3.16}$$

L'inégalité (3.16) reste valable même si δ dépend du temps puisque l'intégrale est prise sur la variable x. Par conséquent, en prenant δ tel que $\delta^{\frac{-m}{(m-1)}} = kH^{-\alpha}(t)$, pour un k grand qui sera determiné plus tard, et en remplacant dans (3.16) on obtient

$$\begin{aligned} & L'(t) \geq \left[(1-\alpha) - \tfrac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m + \varepsilon\left(\tfrac{1}{\rho+1}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} \\ & + \varepsilon a_1(g \circ \nabla u) + \varepsilon a_2 \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \varepsilon a_3 \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \left(\tfrac{p}{\rho+2}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} \\ & + \varepsilon\left[pH(t) - \tfrac{k^{1-m}}{m}H^{\alpha(m-1)}(t) \parallel u \parallel_m^m\right]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

En utilisant (3.11) et l'inégalité$\parallel u \parallel_m^m \leq C \parallel u \parallel_p^m$, on obtient

$$H^{\alpha(m-1)}(t) \parallel u \parallel_m^m \leq (\frac{1}{p})^{\alpha(m-1)} C \parallel u \parallel_p^{m+\alpha p(m-1)},$$

donc, à partir de (3.17), on obtient

$$\begin{aligned}
&L'(t) \geq \left[(1-\alpha) - \tfrac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m \\
&+\varepsilon \left(\tfrac{1}{\rho+1} + \tfrac{p}{\rho+2}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon a_1 (g \circ \nabla u) + \varepsilon a_2 \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \varepsilon a_3 \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 \\
&+\varepsilon \left[pH(t) - \tfrac{k^{1-m}}{m} (\tfrac{1}{p})^{\alpha(m-1)} C \parallel u \parallel_p^{m+\alpha p(m-1)}\right].
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Maintenant, nous utilisons le corollaire 3.1 pour $s = m + \alpha(m-1) \leq p$, on déduit de (3.18) que

$$\begin{aligned}
&L'(t) \geq \left[(1-\alpha) - \tfrac{m-1}{m}\varepsilon k\right] H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m \\
&+\varepsilon \left(\tfrac{1}{\rho+1} + \tfrac{p}{\rho+2}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon a_1 (g \circ \nabla u) + \varepsilon a_2 \parallel \nabla u \parallel_2^2 + \varepsilon a_3 \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 \\
&+\epsilon[pH(t) - C_1 k^{1-m} \left\{-H(t) - \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 - \parallel \nabla u \parallel_2^2 - (g \circ \nabla u)(t) + \parallel u \parallel_p^p\right\}] \\
&\geq \left[(1-\alpha) - \tfrac{m-1}{m}\epsilon k\right] H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m + \varepsilon \left(\tfrac{1}{\rho+1} + \tfrac{p}{\rho+2} + C_1 k^{1-m}\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} \\
&+\varepsilon (a_1 + C_1 k^{1-m})(g \circ \nabla u) + \varepsilon (a_2 + C_1 k^{1-m}) \parallel \nabla u \parallel_2^2 \\
&+\varepsilon (a_3 - C_1 k^{1-m}) \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \varepsilon \left(p + C_1 k^{1-m}\right) H(t) - \varepsilon C_1 k^{1-m} \parallel u \parallel_p^p,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

où $C_1 = \left(\frac{1}{p}\right)^{\alpha(m-1)} C/m$. En notant que

$$H(t) \geq -\frac{1}{\rho+2} \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} - \frac{1}{2} \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 - \frac{1}{2} \parallel \nabla u \parallel_2^2 - \frac{1}{2}(g \circ \nabla u) + \frac{1}{p} \parallel u \parallel_p^p,$$

En écrivant $p = 2a_4 + (p - 2a_4)$, ou $a_4 = \min\{a_1, a_2, a_3\}$, l'estimation (3.19) donne

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \tfrac{m-1}{m}\epsilon k\right] H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m \\
&+\varepsilon\left(\tfrac{1}{\rho+1} + \tfrac{p}{\rho+2} + C_1 k^{1-m} - a_4\right) \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \varepsilon\left(\tfrac{2a_4}{p} - C_1 k^{1-m}\right) \parallel u \parallel_p^p \\
&+\varepsilon(a_1 - C_1 k^{1-m} - a_4)(g \circ \nabla u) + \varepsilon(a_2 \ + C_1 k^{1-m} - a_4) \parallel \nabla u \parallel_2^2 \\
&+\varepsilon(a_3 - C_1 k^{1-m} - a_4) \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \varepsilon(p + C_1 k^{1-m} - 2a_4) H(t).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

On choisit k suffisamment grand, alors (3.20) devient

$$\begin{aligned}
L'(t) &\geq \left[(1-\alpha) - \tfrac{m-1}{m}\epsilon k\right] H^{-\alpha}(t) \parallel u_t \parallel_m^m \\
&+\varepsilon\gamma\left[H(t) + \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \parallel \nabla u \parallel_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) + \parallel u \parallel_p^p\right],
\end{aligned} \tag{3.21}$$

où $\gamma > 0$ est le minimum des coefficients de $H(t), \parallel u_t \parallel_2^2, \parallel u \parallel_p^p$ et $(g \circ \nabla u)(t)$ dans (3.21). Si on fixe k (donc γ), on choisit ε suffisamment petit alors

$$(1-\alpha) - \frac{\varepsilon k(m-1)}{m} \geq 0,$$

et

$$L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \frac{\varepsilon}{\rho+1}\int_\Omega |u_t|^\rho u_1 u_0 dx + \varepsilon \int_\Omega \nabla u_1 . \nabla u_0 dx > 0.$$

Donc (3.21) devient

$$L'(t) \geq \varepsilon\gamma\left[H(t) + \parallel u_t \parallel_{\rho+2}^{\rho+2} + \parallel \nabla u_t \parallel_2^2 + \parallel \nabla u \parallel_2^2 + (g \circ \nabla u)(t) + \parallel u_t \parallel_p^p\right]. \tag{3.22}$$

Par conséquent, nous avons $L(t) \geq L(0) > 0$, pour tout $t \geq 0$.

Maintenant, nous estimons

$$| \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx | \leq \| u_t \|_{\rho+2}^{\rho+1} \| u \|_{\rho+2} \leq C \| u_t \|_{\rho+2}^{\rho+2} \| u \|_p,$$

nous avons

$$| \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx |^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \| u_t \|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\alpha}} \| u \|_p^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left(\| u_t \|_{\rho+2}^{\frac{\rho+1}{1-\alpha}\mu} \| u \|_p^{\frac{\theta}{1-\alpha}} \right)$$

où $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$. On choisit $\mu = \frac{(1-\alpha)(\rho+2)}{\rho+1} (> 1)$, alors

$$\frac{\theta}{1-\alpha} = \frac{\rho+2}{(1-\alpha)(\rho+2) - (\rho+1)} < p$$

En utilisant le corollaire 3.1, on obtient pour tout $t \geq 0$

$$| \int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx |^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \left[-H(t) \| u_t \|_{\rho+2}^{\rho+2} + \| \nabla u_t \|_2^2 + \| \nabla u \|_2^2 - (g \circ \nabla u)(t) + \| u_t \|_p^p \right]$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) = (H^{1-\alpha}(t) + \tfrac{1}{\rho+1} \textstyle\int_\Omega |u_t|^\rho u_t u dx + \int_\Omega \nabla u_t . \nabla u dx)^{\frac{1}{1-\alpha}} \\ & \leq C \left[\| u_t \|_{\rho+2}^{\rho+2} + H(t) + \| \nabla u_t \|_2^2 + \| \nabla u \|_2^{\frac{2}{1-2\alpha}} + \| u \|_p^p \right], \ \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Comme

$$\| \nabla u \|_2^{\frac{2}{1-2\alpha}} \leq C^{\frac{2}{1-2\alpha}} \leq \frac{C^{\frac{2}{1-2\alpha}}}{H(0)} H(t), \tag{3.24}$$

il résulte de (3.23) et (3.24) que

$$L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \leq \left[\| u_t \|_{\rho+2}^{\rho+2} + \| \nabla u_t \|_2^2 + \| u \|_2^2 \right], \forall t \geq 0. \tag{3.25}$$

La combinaison des relations (3.22) et (3.25), donne

$$L'(t) \geq \frac{\epsilon\gamma}{C} L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \ \forall t \geq 0. \tag{3.26}$$

En intégrant (3.26) sur $(0, t)$ on obtient

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \epsilon\gamma t\alpha / |C(1-\alpha)|}. \tag{3.27}$$

Ceci montre que $L(t)$ explose en temps fini.

$$T^* \leq \frac{C(1-\alpha)}{\epsilon\gamma\alpha L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}. \tag{3.28}$$

Ce qui termine la preuve. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons établit l'existence de solutions faibles d'une équation hyperbolique viscoélastique non linéaire à exposants variables, en utilisant la méthode de Galerkin.

Ensuite, nous avons montré que sous certaines hypothèses et conditions appropriées sur m et p les solutions faibles de cette équation explose en un temps fini.

Bibliographie

[1] H. Brezis : Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[2] G. Allaire : Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[3] F. Z. Mahdi et A. Hakem. : Existence and blow up for a nonlinear viscoelastic hyperbolic problem with variable exponents. Ser. Math. Inform. 35**(3), 647-672, (2020).**

[4] R. Aboulaicha, D. Meskinea and A. Souissia : New diffusion models in image processing. Comput. Math. Appl.**56** (2008), 874–882.

[5] F. Andreu-Vaillo, V. Caselles and JM. Mazn : Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functions. Progress in Mathematics, Birkhuser, Basel, 2004.

[6] SN. Antontsev and V. Zhikov : Higher integrability for parabolic equations of $p(x,t)$-Laplacian type. Adv. Differ. Equ. **10** (2005), 1053–1080.

[7] SN. Antontsev : Wave equation with $p(x,t)$ -Laplacian and dampingterm : blow-up of solutions. Existence and blow-up. Differ Equ. Appl. **3(4)** (2011), 503–525.

[8] M M. Cavalcanti, VN.D. Cavalcanti and J. Ferreira : Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping. Math. Methods Appl. Sci. **24** (2001), 1043–1053.

[9] M M. Cavalcanti, VN.D. Cavalcanti and JA. Soriano : Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differ. Equ. **44** (2002),1–14.

[10] M M. Cavalcanti and HP. Oquendo : Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J.Control Optim. **42 (4)** (2003), 1310–1324.

[11] Y. Chen, S. Levine and M. Rao : Variable exponent, linear growth functions in image restoration. SIAM J. Appl. Math. **66** (2006), 1383–1406.

[12] D. Edmunds and J. Rakosnik : Sobolev embeddings with variable exponent. Mathematische Nachrichten. **246 (1)** (2002), 53–67.

[13] X. Fan, J. Shen and D. Zhao : Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl. **262** (2001), 749–760.

[14] X. Fan and D. Zhao : On the spaces $L^{p(x)}$and $L^{m,p(x)}$. J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 424–446.

[15] Y. Gao, B. Guo and W.Gao : Weak solutions for a high-order pseudo-parabolic equation with variable exponents. Appl. Anal. (2013). doi :10.1080/00036811. 2013. 772138.

[16] V.A. Galaktionov and S.I. Pohozaev : Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations. Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications. **53(3)**

(2003), 453–466.

[17] V. Georgiev and G. Todorova : Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms. J. Diff. Eqns. **109(2)** (1994), 295–308.

[18] C. Goodrich and M.A. Ragusa : Hölder continuity of weak solutions of p-Laplacian PDEs with VMO coefficients. Nonlinear Analysis. **185** (2019), 336–355.

[19] A. Haraux and E. Zuazua : Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems. Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1988), 191–206.

[20] A.M. Kbiri, S.A. Messaoudi and H.B. Khenous : A blow-up result for non-linear generalized heat equation. Computers and Mathematics with Applications. **68(12)** (2014), 1723–1732.

[21] O. Kovcik and J. Rkosnk : On spaces $L^{p(x)}$and $W^{1,p(x)}$. Czechoslov. Math. J. **41(116)** (1991), 592–618.

[22] SZ. Lian, WJ. Gao, CL. Cao and HJ. Yuan : Study of the solutions to a model porous medium equation with variable exponents of nonlinearity. J. Math. Anal. Appl. **342**(2008), 27–38.

[23] JL. Lions : Quelques méthodes De résolution des Problèmes aux limites nonlinéaires. Dunod, Paris, 1969.

[24] W. Liu : General decay and blow-up of solution for a quasilinear viscoelastic problem with nonlinear source. Nonlinear Analysis. **73** (2010), 1890–1904.

[25] S.A. Messaoudi and N. Tatar : Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem. Math. Meth. Appl. Sci. **30**(2007), 665–680.

[26] M.A. Ragusa and A. Tachikawa : On continuity of minimizers for certain quadratic growth functionals. Journal of the Mathematical Society of Japan. **57(3)** (2005), 691–700.

[27] M.A. Ragusa and A. Tachikawa : Regularity for minimizers for functionals of double phase with variable exponents. Advances in Nonlinear Analysis. **9**(2020), 710–728.

[28] E. Vitillaro : Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation. Archive for Rational Mechanics and Analysis. **149(2)** (1999), 155–182.

[29] JN. Zhao : Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(\nabla u, u, x, t)$. J. Math. Anal. Appl. **172** (1993), 130–146.

[30] SM. Zheng : Nonlinear Evolution Equation. CRC Press, Boca Raton, 2004.