



Mémoire de Master Académique

Filière : Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique

Présenté par : **Fouzia GHOUILA**

Régularisation d'un problème d'identification de source pour une équation parabolique

Dirigé par : **Dr. Abderafik BENRABAH**

Soutenu le 16 juin 2022

Devant le Jury composé de :

Hamlaoui. H	Dr. Président	U. Guelma
Benrabah. A	Dr. Encadreur	U. Guelma
Benarioua. K	Dr. Examineur	U. Guelma

Année Universitaire 2022

Résumé

Dans ce travail, nous considérons un problème d'identification d'une source indépendante du temps de l'équation parabolique complète dans \mathbb{R}^n à partir de données bruitées. C'est un problème mal-posé au sens d'Hadamard. Pour compenser le facteur qui cause l'instabilité, une famille d'opérateurs de régularisation paramétrique est introduite, où la règle pour sélectionner la valeur du paramètre de régularisation est basée sur un choix a priori. Cette règle, connue sous le nom de règle de choix des paramètres de régularisation, dépend du niveau de bruit, des données et du degré de régularité que l'on suppose pour la source. La preuve de la stabilité et la convergence de la méthode de régularisation est présentée et une estimation d'erreur de type Hôlder est obtenue. Des exemples numériques sont inclus pour illustrer l'efficacité de cette approche de régularisation.

Mots-clés : *Problèmes mal posés, problèmes inverses d'identification, régularisation.*



Abstract

In this work, we consider the problem of identifying the time independent source for full parabolic equations in \mathbb{R}^n from noisy data. This is an ill-posed problem in the sense of Hadamard. To compensate the factor that causes the instability, a family of parametric regularization operators is introduced, where the rule to select the value of the regularization parameter is based on a priori parameter choice. This rule, known as regularization parameter choice rule, depends on the data noise level and the degree of smoothness that it is assumed for the source. The proof for the stability and convergence of the regularization method is presented and a Hölder type bound is obtained for the estimation error. Numerical examples are included to illustrate the effectiveness of this regularization approach.

Keywords : *Ill-posed problems, identification inverse problems, regularization.*



Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant qui m'a donné la volonté, le courage, la force et la patience pour réaliser ce travail.

J'adresse mes vifs remerciements À mon Encadreur : *Dr. Benrabah Abderafik* (U. Guelma). Je suis très reconnaissant de la confiance qu'il m'a toujours témoigné au cours de ce mémoire. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance pour son suivi attentif, son soutien, ses conseils et sa disponibilité.

- Je tiens également À remercier *M.Hamlaoui. H* (Dr. U. Guelma) qui m'a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que *M. Benarioua. K* (Dr.U.Guelma), pour avoir accepté de faire partie du jury et d'y avoir consacré une partie de leurs temps.

- Je remercie chaleureusement tous les membres de la composante administrative du département de mathématiques (U Guelma) pour toute l'aide qui m'a été accordée.

- Une grande reconnaissance et un grand remerciement à tous mes enseignants qui ont participé à ma formation.

- Je remercie aussi ma famille, mes amis. Enfin, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cet mémoire.



Table des matières

Introduction	1
1 Rappels et notations	3
1.1 Préface	3
1.2 Problèmes directs en EDP	4
1.3 Problèmes inverses d'identification en EDP	5
1.4 Problèmes mal posés	6
2 Problème inverse d'identification de source	11
2.1 Position du problème	11
2.1.1 Étude de stabilité	15
2.2 Stratégie de régularisation	17
2.2.1 Cas : $x \in \mathbb{R}$	19
2.2.2 Cas : $x \in \mathbb{R}^n$	23
2.3 Estimation a priori	26
2.4 Estimation du terme T1	28
3 Exemples Numériques	31
3.1 Introduction	31
3.1.1 Exemple 1D	32
3.1.2 Exemple 2D	34
3.1.3 Conclusion	35



Table des figures

1.1	Problème direct	4
1.2	P. Pétrolière	4
1.3	Thorax	5
3.1	Exemple 1 : Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)	32
3.2	Exemple 2 :Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)	33
3.3	Exemple 3 :Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)	34
3.4	Exemple 4 :Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)	36



Introduction

Le problème d'identification des sources a été étudié et analysé dans différentes domaines des mathématiques appliquées au cours des dernières décennies. Des applications peuvent être trouvées dans les problèmes liés à la conduction thermique [2], l'identification des fissures [13], la prospection géophysique [1], la détection de contaminants [12] et détection des cellules tumorales [10]. La détermination des sources s'avère être en général un problème mal posé au sens d'Hadamard [5] puisque la solution ne dépend pas continûment des données.

Parmi les outils les plus significatifs utilisés pour déterminer une source, on peut trouver dans la littérature, la méthode de convexité logarithmique [11], la méthode des fonctions de Green [6], la méthode de résolution fondamentale (*MFS*) [7]. En ce qui concerne le terme de transport dans les équations différentielles paraboliques, il y a peu d'articles publiés pour le cas général, la plupart des articles disponibles dans la littérature centrés sur l'équation de la chaleur. De nombreux articles analysent des cas particuliers avec des simplifications ou des restrictions sur les modèles mathématiques, sur le type de source, les conditions, la frontières ou le domaine.

D'autre part, les méthodes de régularisation [3, 8] jouent un rôle important dans l'estimation des solutions instables. Les approches les plus utilisées sont la méthode de régularisation itérative, la méthode simplifiée de régularisation de Tikhonov, la méthode de de trancature de Fourier, méthode de mollification. Récemment, le problème d'identification du terme source a été résolu par la méthode de quasi-réversibilité, voir [9]. Cette méthode peut être utilisée pour les équations paraboliques non linéaires, la différence de ce manuscrit sont les données d'observation.



Dans ce travail, le but principal est la détermination, à partir de mesures bruitées effectuées à un temps fixe arbitraire, de la fonction f à valeurs réelles de n variables réelles, indépendante du temps, pour une équation de transport dans un domaine non borné. C'est un problème mal posé au sens d'Hadamard. Une famille d'opérateurs de régularisation est conçue pour compenser les facteurs qui provoquent l'instabilité de l'opérateur inverse. La régularisation proposée donne une famille de problèmes bien posés qui converge vers le problème mal posé initial. La stabilité et la convergence de cette méthode de régularisation sont analysées et une borne de type Hölder est dérivée pour l'estimation d'erreur. Afin d'illustrer les performances de la méthode de régularisation, quelques exemples numériques pour le 1D et 2D sont inclus.

Rappels et notations

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Préface

Dans les problèmes directs de physique mathématique, les chercheurs tentent de trouver des fonctions exactes ou approximatives qui décrivent divers phénomènes physique tels que la propagation du son, de la chaleur, des ondes sismiques, des ondes électromagnétiques, ect .

Dans ces problèmes, les propriétés du milieu (exprimées par les coefficients de l'équation) et l'état initial du processus étudié (dans le cas non stationnaire) ou ses propriétés sur la frontière (dans le cas d'un domaine borné et/ou dans le cas stationnaire) sont supposées être connu. Cependant, ce sont précisément les propriétés des milieux qui sont souvent inconnues. Ceci conduit à des problèmes inverses, dans lesquels il est nécessaire de déterminer les coefficients de l'équation à partir des informations sur la solution du problème direct. En général, les problèmes d'identification de paramètres traitent de la reconstruction de fonctions inconnues ou d'objets géométriques apparaissant comme des paramètres (coefficients, frontière, valeurs) dans les systèmes d'équations différentielles. Un problème d'identification de paramètres est ce qu'on appelle problème inverse, dans le sens où il inverse en quelque sorte le processus de résolution de l'équation différentielle.

1.2 Problèmes directs en EDP

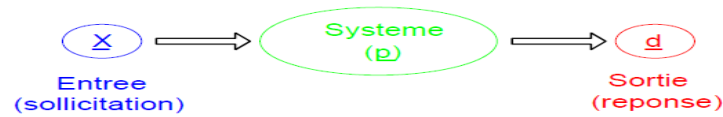


FIGURE 1.1 – Problème direct

Le problème direct consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations X et des paramètres p . Les équations de la physique donnent en général la réponse d comme fonction implicite de X, p :

$$G(X, d; p) = 0 \quad (1.2.1)$$

La notation G symbolise les équations de la physique du problème considéré; on parle parfois du modèle physique.

Dans la pratique, les données ne sont pas toujours accessible à la mesure. (voir figure 1.2)

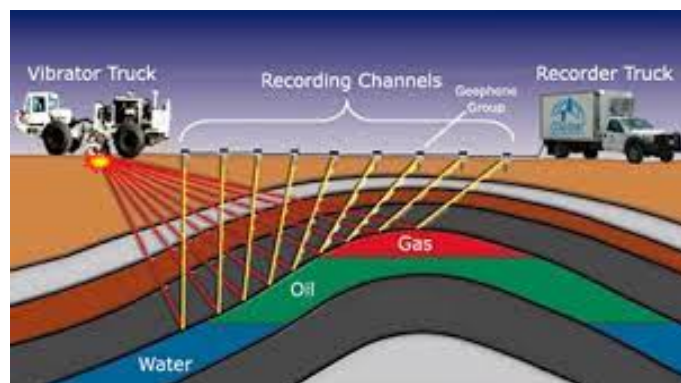


FIGURE 1.2 – P. Pétrolière

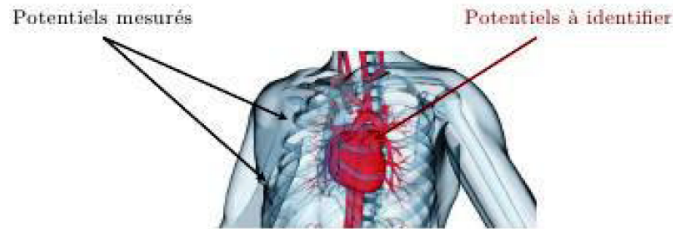


FIGURE 1.3 – Thorax

Électrocardiographie Est-il possible de connaître les valeurs des potentiels électriques à la surface du coeur ? La frontière du Thorax est constituée d'une frontière externe, (la **surface du thorax**), et d'une frontière interne, (la **surface du coeur**). Les mesures fournies par l'électrocardiogramme donnent les conditions aux limites sur la frontière externe. La **résolution numérique du problème de Cauchy permet d'identifier les potentiels électriques à la surface du coeur.**

1.3 Problèmes inverses d'identification en EDP

Étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, on s'intéresse aux solutions u :

$$\begin{cases} u_t + F(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u) = f \\ B_{i=1}^q u = g_i \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

A partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), retrouver :

- $f, g_1, \dots, g_q \longrightarrow$ Identification de sources.
- $u_0 \longrightarrow$ Identification de données initiales.
- $F \longrightarrow$ Identification de coefficients
- $\Omega \longrightarrow$ Identification géométrique.

1.4 Problèmes mal posés

Définition 1.4.1. [Hadamard 1923] Soient \mathcal{X} , \mathcal{Y} deux espaces de Banach, et $T : \mathcal{D}(T) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Tx = y$ est **bien posé** au sens de Hadamard si

Existence : Pour tout $y \in \mathcal{Y}$ il existe $x \in \mathcal{X}$ tel que $Tx = y$.

Unicité : Pour tout $y \in \mathcal{Y}$, il y a au plus une solution $x \in \mathcal{X}$.

Stabilité : La solution x dépend continûment de la donnée y .

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Le choix des espaces de départ et d'arrivée \mathcal{X} et \mathcal{Y} est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis. La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

Définition 1.4.2. [Lavrentiev 1959] Soit $T : \mathcal{D}(T) : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Tx = y$ est **conditionnellement stable** (ou **correct** au sens de Tikhonov) sur $\mathcal{M} \subset \mathcal{D}(T)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait $\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Tx_2 - Tx_1\|)$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{M}$.

L'ensemble \mathcal{M} est appelée ensemble des informations a priori (ou ensemble des contraintes). L'appartenance de u à \mathcal{M} signifie certaine régularité ou certaine bornitude vérifiée par la solution u .

Exemple 1.4.1. Considérons le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \phi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

où $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \varepsilon > 0$.

On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \phi_\varepsilon(x)$ est une solution du problème (2.2.14). On remarque que (pour tout x fixé)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi_\varepsilon(x) = 0 \text{ mais } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, y) = \infty.$$

Ce qui prouve que les solutions des problèmes (2.2.14) ne dépendent pas continûment des données initiales, d'où le problème est mal posé au sens de Hadamard.

Exemple 1.4.2. Considérons le problème rétrograde pour l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.4.2)$$

où $\psi \in L^2(0, \pi)$ est une fonction donnée.

Ce problème consiste à déterminer $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifié (1.4.2). Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (1.4.2) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ , donnée par :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx \text{ avec } e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2Tn^2} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (1.4.2) avec des données bruitées $\psi_k(x) = \psi(x) +$



$\frac{1}{k}e_k(x)$. On remarque que

$$\|\psi_k - \psi\| \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty \text{ mais } \|\varphi_k - \varphi\| = \frac{1}{k}e^{k^2T} \rightarrow \infty \text{ si } k \rightarrow \infty.$$

On voit très clairement que le problème rétrograde pour l'équation de la chaleur (problème (1.4.2)) est instable donc mal posé.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initiale $\varphi(x) = u(x, 0)$, telle que $\varphi \in L^2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-tn^2} \sin(nx) \sin(ny) \right] \varphi(y) dy.$$

Ainsi, u est solution du problème (1.4.2) si et seulement si φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$K\varphi = \psi, \quad \int_0^{\pi} k(x, y) \varphi(y) dy = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{où } k(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Tn^2} \sin(nx) \sin(ny).$$

L'opérateur intégral K est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où K^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (1.4.2).

Exemple 1.4.3. Soit l'opérateur A défini par

$$A : \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R}), (Au)(x) = \int_0^x u(t) dt, \quad x \in (0, 1).$$

Il est facile de voir que si $f \in \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{R})$ et $f(0) = 0$ le problème $Au = f$ est équivalent à

$$u(t) = (A^{-1}f)(t) = f'(t).$$

On considère maintenant le problème $Au = f$ avec des données bruitées $f^\delta(x) = f(x) + \delta \sin\left(\frac{x}{\delta^2}\right)$ où $\delta \in (0, 1)$. On remarque que

$$\|f^\delta - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \text{ si } \delta \rightarrow 0 \text{ mais } \|u^\delta - u\|_{\infty} = \frac{1}{\delta} \left\| \sin\left(\frac{x}{\delta^2}\right) \right\|_{\infty} = \frac{1}{\delta} \rightarrow \infty \text{ si } \delta \rightarrow 0.$$

On voit très clairement que le problème $Au = f$ est instable donc mal posé au sens de



Hadamard.

Exemple 1.4.4. Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u(t) = f(t), & t \in (0, T), \\ u(0) = 0, & \frac{d}{dt}u(0) = 0, \end{cases} \quad (1.4.3)$$

Supposons maintenant que la fonction $f(t)$ est inconnue, mais la fonction $u(t)$ peut être mesurée à tout instant t (ou en certains points de l'intervalle $(0, T)$). Notre question est de reconstruire $f(t)$ à partir de $u(t)$.

Considérons les perturbations de la solution au problème direct :

$$u_n(t) = u(t) + \frac{1}{n} \cos(nt).$$

Ces perturbations correspondent à la fonction $f_n(t)$, où

$$f_n(t) = f(t) - n \cos(nt).$$

On remarque que

$$\|u_n - u\|_\infty \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty \text{ mais } \|f_n - f\|_\infty \rightarrow \infty \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Le problème inverse de trouver f à partir de u est instable donc mal posé.

On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1- La non unicité. Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité.

2- L'instabilité. Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique. Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quel que soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on régularise par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées, chaque problème nécessite un traitement

spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel ¹).

1. Engl. H. W, Hanke, M. Neubauer. A, 1996. Regularization of inverse problems. Vol. 375. Springer Science & Business Media.



Problème inverse d'identification de source

2.1 Position du problème

Soit le problème d'identification de source f pour l'équation parabolique suivante :

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \alpha^2 \Delta u(x, t) - \beta \cdot \nabla u(x, t) - \eta u(x, t) + f(x), x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u(x, 0) = 0, \\ u(x, t_0) = y(x), x \in \mathbb{R}^n, t_0 > 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

où $\alpha^2, \eta > 0, \beta \in \mathbb{R}^n$ sont des constantes données, Δ est l'opérateur de laplace, ∇ l'opérateur nabla (gradient) et " \cdot " est le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n .

Remarque 2.1.1. — La première équation dans le problème est une équation parabolique linéaire à coefficients constants

— L'existence et l'unicité de la solution du problème a été donné dans [29 :Th 3.1(pages 137-138)]

Hypothèses

H_1 On suppose que $u(., t), f(.) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et qu'ils sont des fonctions inconnues

H_2 On suppose de plus que $y(.) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ une fonction donnée.

Dans la pratique généralement cette fonction est mesurée avec un niveau de bruit δ ,

c-à-d, il existe une fonction $y_\delta \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la condition suivante :

$$\|y - y_\delta\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \quad 0 < \delta \leq \delta_M \quad (2.1.2)$$

où $\delta_M \in \mathbb{R}_+^*$ représente le maximum du niveau de bruit.

Remarque 2.1.2. Dans la pratique, δ_M peut être estimé à partir de l'erreur commise par les instruments de mesure.

Dans le but de simplifier les calculs, l'analyse du problème (2.1.1) est effectuée dans l'espace des fréquences par l'utilisation de la transformée de Fourier.

Définition 2.1.1. Soit $g \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. La transformée de fourier de g est définie par :

$$F(g) = \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot x) g(x) dx \quad \xi, x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1.3)$$

Alors

$$F(u(x, t)) = \widehat{u}(\xi, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot x) u(x, t) dx, \quad (2.1.4)$$

$$F(u_t(x, t)) = \widehat{u}_t(\xi, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot x) u_t(x, t) dx, \quad (2.1.5)$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-i\xi \cdot x) \frac{\partial u}{\partial x_1} dx \\ &= -i\xi_1 \widehat{u}(\xi, t) \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) &= -\xi_1^2 \widehat{u}(\xi, t) \\ F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) &= -\xi_2^2 \widehat{u}(\xi, t) \\ &\vdots \\ F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) &= -\xi_n^2 \widehat{u}(\xi, t), \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

en regroupant les dernières équations , on obtient

$$\begin{aligned}
 F(\Delta u) &= F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right) \\
 &= -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)\widehat{u}(\xi, t) \\
 &= -\|\xi\|\widehat{u}(\xi, t),
 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

enfin la transformée de Fourier de l'opérateur ∇ s'écrit

$$\begin{aligned}
 F(\nabla u(x, t)) &= F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \\
 &= \left(F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), F\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right), \dots, F\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\right) \\
 &= (-i\xi_1\widehat{u}, -i\xi_2\widehat{u}, \dots, -i\xi_n\widehat{u}) \\
 &= -i\xi\widehat{u}(\xi, t).
 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

D'après les relations (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6), (2.1.7), (2.1.9) et (2.1.8), le problème (2.1.1) devient

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi, t) = -\alpha^2 \|\xi\|^2 \widehat{u}(\xi, t) + i\beta \cdot \xi \widehat{u}(\xi, t) - \eta \widehat{u}(\xi, t) + \widehat{f}(\xi) \\ \widehat{u}(\xi, 0) = 0 \\ \widehat{u}(\xi, t_0) = \widehat{y}(\xi) \end{cases} \tag{2.1.10}$$

puis

$$(\widehat{P}) \quad \begin{cases} \widehat{u}_t(\xi, t) = (-\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta \cdot \xi - \eta)\widehat{u}(\xi, t) + \widehat{f}(\xi) \\ \widehat{u}(\xi, 0) = 0 \\ \widehat{u}(\xi, t_0) = \widehat{y}(\xi). \end{cases} \tag{2.1.11}$$

On note par $z(\xi) = -\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta \cdot \xi - \eta$, alors l'équation suivante

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = -z(\xi)\widehat{u}(\xi, t) + \widehat{f}(\xi), \tag{2.1.12}$$

est une équation différentielle ordinaire non homogène du premier ordre.

Commençons par résoudre l'équation homogène associée

$$\widehat{u}_t(\xi, t) = -z(\xi)\widehat{u}(\xi, t),$$

qui donne par un calcul simple

$$\begin{aligned} \ln |\widehat{u}(\xi, t)| &= -z(\xi)t + c_1 \\ \Downarrow \\ \widehat{u}_h(\xi, t) &= k \exp(-z(\xi)t), \text{ où } k = \exp(c_1), \end{aligned}$$

en utilisant la méthode de la variation de la constante, la solution particulière est donnée par :

$$\begin{aligned} \widehat{u}_p(\xi, t) &= k(t) \exp(-z(\xi)t) \\ \Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}_p(\xi, t) &= k'(t) \exp(-z(\xi)t) - k(t)z(\xi) \exp(-z(\xi)t), \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation différentielle du problème (2.1.11), on obtient :

$$\begin{aligned} k'(t) \exp(-z(\xi)t) - k(t)z(\xi) \exp(-z(\xi)t) &= -z(\xi)k(t) \exp(-z(\xi)t) + \widehat{f}(\xi) \\ \Downarrow \\ k'(t) &= \widehat{f}(\xi) \exp(z(\xi)t) \\ \Downarrow \\ k(t) &= \frac{\widehat{f}(\xi)}{z(\xi)} \exp(z(\xi)t), \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

donc

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\xi, t) &= \widehat{u}_h + \widehat{u}_p \\ &= k \exp(-z(\xi)t) + \frac{\widehat{f}(\xi)}{z(\xi)} \exp(z(\xi)t) \exp(-z(\xi)t) \\ &= \frac{kz(\xi) \exp(-z(\xi)t) + \widehat{f}(\xi)}{z(\xi)}. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Pour déterminer la constante k nous utilisons la condition initiale $\hat{u}(\xi, 0) = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 = \hat{u}(\xi, 0) &= \frac{kz(\xi) + \hat{f}(\xi)}{z(\xi)} \\ &\Downarrow \\ k &= -\frac{\hat{f}(\xi)}{z(\xi)} \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

alors la solution s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t) &= \frac{-\hat{f}(\xi) \exp(-z(\xi)t) + \hat{f}(\xi)}{z(\xi)} \\ &= \frac{1 - \exp(-z(\xi)t)}{z(\xi)} \hat{f}(\xi). \end{aligned}$$

De plus, comme $\hat{u}(\xi, t_0) = \hat{y}(\xi)$, alors

$$\begin{aligned} \hat{u}(\xi, t_0) &= \hat{y}(\xi) \\ \frac{1 - \exp(-z(\xi)t_0)}{z(\xi)} \hat{f}(\xi) &= \hat{y}(\xi) \\ &\Downarrow \\ \hat{f}(\xi) &= \frac{z(\xi) \hat{y}(\xi)}{1 - \exp(-z(\xi)t_0)} \\ \hat{f}(\xi) &= A(\xi) \hat{y}(\xi) \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

où

$$A(\xi) = \frac{z(\xi)}{1 - \exp(-z(\xi)t_0)}, \quad (2.1.17)$$

ici \hat{y} est une donnée exacte.

2.1.1 Étude de stabilité

Mais dans la pratique \hat{y} est mesurée avec un niveau d'erreur δ telle que

$$\|\hat{y} - \hat{y}_\delta\| \leq \delta, \text{ où } 0 < \delta \leq \delta_M$$

et

$$\delta_M \in \mathbb{R}_+^*$$

le \widehat{f}_δ est la source bruitée (entachée) à cause des mesures expérimentales. Donc la solution bruitée est donnée par :

$$\widehat{f}_\delta(\xi) = A(\xi)\widehat{y}_\delta(\xi). \quad (2.1.18)$$

Puisque notre objectif est de déterminer la source f et en particulier le niveau d'erreur entre f et f_δ , à l'aide de la norme de l'espace $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Alors par l'identité de Parseval on peut écrire

$$\begin{aligned} \|f - f_\delta\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} &= \|\widehat{f} - \widehat{f}_\delta\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|A(\cdot)\widehat{y}(\cdot) - A(\cdot)\widehat{y}_\delta(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|A(\cdot)(\widehat{y}(\cdot) - \widehat{y}_\delta(\cdot))\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{y}(\cdot) - \widehat{y}_\delta(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \delta \|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Remarque 2.1.3. Pour que l'estimation (2.1.19) tende vers 0 lorsque $\delta \rightarrow 0$, il faut que $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ soit borné.

Mais, comme

$$\|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |A(\xi)|^2 d\xi, \quad (2.1.20)$$

alors, on a

$$\begin{aligned} |A(\xi)| &= \left| \frac{z(\xi)}{1 - \exp(-z(\xi)t_0)} \right| \\ &= \frac{|-\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi - \eta|}{|1 - \exp(-[\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi - \eta]t_0)|} \\ &\geq \frac{|-\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi - \eta|}{|1| + |\exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0)| \underbrace{|\exp(-i\beta\xi)|}_{=1}} \\ &= \frac{|\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi + \eta|}{1 + |\exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0)|} \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Remarque 2.1.4. D'après (2.1.21), lorsque

$$\|\xi\| \longrightarrow +\infty, \quad 1 + \left| \exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0) \right| \longrightarrow 1$$

et

$$\left| \alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi + \eta \right| \longrightarrow +\infty,$$

donc

$$\lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} |A(\xi)| = +\infty$$

En combinant cette dernière relation avec (2.1.19), on conclut que $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow +\infty$ et par la suite $\|A(\cdot)\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ n'est pas bornée.

2.2 Stratégie de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à Tikhonov, cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la "solution régularisée" obtenue par "inversion régularisée" dépende continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème initial mal posé par un autre "proche dans un sens" du premier et qui est bien posé.

Considérons le problème

$$Tf_1 = f_2 \quad \text{où} \quad T : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$$

est un opérateur **compact injectif**. On suppose que $f_2 \in \mathcal{R}(T)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.

Définition 2.2.1. Soit l'opérateur $T : \mathbb{H}_1 \rightarrow \mathbb{H}_2$, Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\epsilon : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{H}_1$, ($\epsilon > 0$) est dite "**famille régularisante**" pour l'opérateur T si

$$\forall f_1 \in \mathbb{H}_1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R_\epsilon T) f_1 = f_1 \text{ ,i.e., } R_\epsilon T \rightarrow I \text{ simplement.}$$

Dans ce travail, on définit R_ϵ comme suit

$$R_\epsilon : \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$$

$$\epsilon > 0 : R_\epsilon \widehat{y}(\xi) = \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \widehat{y}(\xi). \quad (2.2.1)$$

Remarque 2.2.1. Il est facile de voir que

i

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R_\epsilon \widehat{y}(\xi)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \widehat{y}(\xi) = A(\xi) \widehat{y}(\xi)$$

ii ϵ est appelé le paramètre de régularisation

iii les propriétés de la famille $\{R_\epsilon, \epsilon > 0\}$ sont données dans le Théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Considérons le problème de la détarmination de la source f à partir de la donnée mesurée y_δ à l'instant $t_0 > 0$, où δ est le niveau de bruit défini en (2.1.2). Soit u et f vérifiant le problème (2.1.1) et $\{R_\epsilon\}_{\epsilon > 0}$ la famille d'opérateur définie en (2.2.1). Alors, pour tout $y(x) = u(x, t_0)$, il existe un choix a priori du paramètre ϵ telle que le couple (R_ϵ, ϵ) soit une stratégie de régularisation convergente pour le problème d'identification .*

Preuve. Puisque $\frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2}$ est borné, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et comme ce facteur est continue pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, avec :

$$\begin{aligned} \lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} \left| \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right| &= \lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} \left| \frac{\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi + \eta}{1 - \exp - (\alpha^2 \|\xi\|^2 + i\beta\xi + \eta)t_0} \right| \frac{1}{|1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2|} \\ &= \lim_{\|\xi\| \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^2 \|\xi\|^2}{\epsilon^2 \|\xi\|^2} \\ &= \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} < +\infty. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Alors, pour $\epsilon > 0$, R_ϵ est un opérateur linéaire continue, de plus on a :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +\infty} R_\epsilon \widehat{y} = A \widehat{y}$$

pour $\widehat{y} \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)$, donc R_ϵ est une stratégie de régularisation pour A . Cependant, d'après la proposition (3.4) ([3]) pour $y(x) = u(x, t_0)$, il existe un choix a priori du paramètre ϵ telle que (R_ϵ, ϵ) soit une méthode de régularisation convergente pour le problème (2.1.1).

La solution régularisée dans l'espace des fréquences est donnée par :

$$\widehat{f}_{\delta,\epsilon}(\xi) = \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \widehat{y}_{\delta}(\xi) \quad (2.2.3)$$

en utilisant la formule d'inversion de fourier, on a l'expression de $f_{\delta,\epsilon}$

$$\begin{aligned} f_{\delta,\epsilon}(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\xi \cdot x) \mathcal{R}_{\epsilon} \widehat{y}_{\delta}(\xi) d\xi \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\xi \cdot x) \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \widehat{y}_{\delta}(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

□

2.2.1 Cas : $x \in \mathbb{R}$

Dans ce cas si

$$u(x_0, t) = y(t)$$

Lemme 2.2.1. Pour $w \in \mathbb{C}$, avec $\Re(w) > 0$ on a :

$$\left| \frac{1}{1 - \exp(-w)} \right| \leq \frac{1}{1 - \exp(-\Re(w))} \quad (2.2.5)$$

Preuve. Soit $w = a + ib$, d'après les formules d'Euler et la parité des fonctions sin et cos on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(-w) &= \exp(-(a + ib)) \\ &= \exp(-a) \exp(-ib) \\ &= \exp(-a) (\cos(b) - i \exp(-a) \sin(b)), \end{aligned}$$

ensuite, on a :

$$\begin{aligned}
 |(1 - \exp(-w))|^2 &= |(1 - \exp(-a) \cos(b)) + i \exp(-a) \sin(b)|^2 \\
 &= (1 - \exp(-a) \cos(b))^2 + \exp(-2a) \sin^2(b) \\
 &= 1 - 2 \exp(-a) \cos(b) + \exp(-2a) \cos^2(b) + \exp(-2a) \sin^2(b) \\
 &= 1 + \exp(-2a) - 2 \exp(-a) \cos(b) \\
 &= 1 - 2 \exp(-a) + \exp(-2a) + 2 \exp(-a) - 2 \exp(-a) \cos(b) \\
 &= (1 - \exp(-a))^2 + 2 \exp(-a)(1 - \cos(b)) \\
 &\geq (1 - \exp(-a))^2.
 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

En inversant cette dernière inégalité, on obtien le résultat recherché. \square

Lemme 2.2.2. Soit la fonction $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \exp(-x)} & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{1 - \exp(-x)} & 1 \leq x. \end{cases}$$

Alors,

$$g(x) \leq 2, \forall x > 0.$$

Preuve. — La démonstration de la première partie est basée sur un petit dessin. C'est-à-dire il suffit de tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{x}{1 - \exp(-x)}$, et de remarquer par la suite que cette fonction est majorée par 2 sur l'intervalle $]0, 1[$.

— D'autre part pour $x \geq 1$,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1 - \exp(-x)} \right)' = \frac{-e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} < 0,$$

$$\text{alors } f \text{ est décroissante, } \forall x \geq 1 \quad \frac{1}{1 - \exp(-x)} \leq \frac{1}{1 - \exp(-1)}.$$

Cependant, on a :

$$f(x) < \frac{1}{1 - \exp(-1)} \quad \forall x > 0,$$

et comme $\frac{1}{1 - \exp(-1)} \leq 2$ la démonstration est achevée. \square

Lemme 2.2.3. Si $0 < \epsilon < 1$. Alors

$$\frac{|x|}{1+x^2\epsilon^2} = \frac{1}{2\epsilon} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.2.7)$$

Lemme 2.2.4. Pour $\alpha^2, \nu, x_0 > 0, \beta \geq 0$ et $0 < \epsilon < 1$. Alors,

$$\left| \frac{\Lambda(\xi)}{1+\xi^2\epsilon^2} \right| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{2\alpha^2(2\nu+1)}{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2\nu})x_0} \right) \quad (2.2.8)$$

$$\Lambda(\xi) = \frac{z(\xi)}{1 - \exp\left(\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2 z(\xi)}}{2\alpha^2}\right) x_0} \quad (2.2.9)$$

Preuve. De l'équation (2.2.9), (2.2.1) et l'inégalité triangulaire nous avons :

$$\left| \frac{\Lambda(\xi)}{1+\xi^2\epsilon^2} \right| \leq \frac{\nu + |\xi|}{\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2\nu}}{2\alpha^2}\right)\right)\right) x_0 (1 + \xi^2\epsilon^2)} \quad (2.2.10)$$

notons $m = m(\alpha, \beta, \nu) = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2\nu}}{2\alpha^2}$ et considérons les deux cas suivants :

1. cas1 : $mx_0 \geq 1$: en utilisant (2.2.3) et (2.2.2) pour $0 < \epsilon < 1$, on obtient

$$\frac{\nu + |\xi|}{(1 - \exp(-mx_0))(1 + \xi^2\epsilon^2)} \leq 2\left(\frac{\nu}{1 + \xi^2\epsilon^2} + \frac{|\xi|}{1 + \xi^2\epsilon^2}\right) \quad (2.2.11)$$

$$\leq 2\nu + \frac{1}{\epsilon}. \quad (2.2.12)$$

2. cas2 : $mx_0 \in (0, 1)$: En multipliant et en divisant par mx_0 et par l'utilisations des lemmes (2.2.3) et (2.2.2) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\nu + |\xi|}{(1 - \exp(-mx_0))(1 + \xi^2\epsilon^2)} &\leq \frac{2}{mx_0} \frac{\nu + |\xi|}{1 + \xi^2\epsilon^2} \\ &\leq \frac{2}{mx_0} \left(\frac{\nu}{1 + \xi^2\epsilon^2} + \frac{1}{2\epsilon} \right) \\ &\leq \left(2\nu + \frac{1}{\epsilon}\right) \frac{1}{mx_0}, \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

d'où

$$\left| \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \xi^2 \epsilon^2} \right| \leq \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{2\alpha^2(2\nu + 1)}{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2\nu})x_0} \right)$$

□

On suppose de plus que

$$\|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 (1 + \xi^2)^p d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_1 \quad (2.2.14)$$

Théorème 2.2.2. Soit $f_{\delta,\epsilon}(t)$ soit la solution régularisée donnée dans (2.2.4) (avec $n=1$), et supposons que $\|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R})} \leq c_1$ Si on choisit le paramètre de régularisation $\epsilon^2 = \delta^{\frac{2}{p+2}}$, il existe une constante K indépendante de δ tel que :

$$\|f - f_{\delta,\epsilon}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})} \leq K \max \left(\delta^{\frac{p}{p+2}}, \delta^{\frac{2}{p+2}} \right). \quad (2.2.15)$$

Preuve. Notons $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R})}$.

On définit $\hat{f}_\epsilon(\xi) := \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \epsilon^2 \xi^2} \hat{y}(\xi)$, on a

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi) - \hat{f}_\epsilon(\xi)| &= \left| \hat{f}(\xi) - \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \epsilon^2 \xi^2} \hat{y}(\xi) \right| \\ &= \left| \hat{f}(\xi) \frac{(1 + \xi^2)^{\frac{p}{2}}}{(1 + \xi^2)^{\frac{p}{2}}} \left(1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \epsilon^2} \right) \right| \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \epsilon^2} \right) \right| \left| \hat{f}(\xi) (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{p}{2}} \right| \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

par (2.2.4) et l'inégalité triangulaire on a

$$\|\hat{f} - \hat{f}_{\delta,\epsilon}\| \leq \|\hat{f} - \hat{f}_\epsilon\| + \|\hat{f}_\epsilon - \hat{f}_{\delta,\epsilon}\| \quad (2.2.17)$$

D'après (2.2.16)-(2.2.17) et la définition de $\mathbb{H}^p(\mathbb{R})$ donnée par (2.2.4) et (2.2.14) nous obte-

nous

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \epsilon^2} \right) \right| \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R})} \\ &+ \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \frac{\Lambda(\xi)}{1 + \xi^2 \epsilon^2} \right| \|\widehat{y} - \widehat{y}_\delta\| \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

à partir de (Yang and Fu,2010), on a

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| (1 + \xi^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \xi^2 \epsilon^2} \right) \right| \leq \max(\epsilon^p, \epsilon^2) \quad (2.2.19)$$

donc , d'après (2.2.4) et l'hypothèse $\|\widehat{y} - \widehat{y}_\delta\| \leq \delta$ on a

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \leq \max(\epsilon^p, \epsilon^2) \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R})} + \frac{\delta}{\epsilon^2} \left(\frac{2\alpha^2(2\nu + 1)}{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2\nu})x_0} \right) \quad (2.2.20)$$

par l'identité de parseval et la linéarité de la transformée de fourier et (2.2.14) et en choisissant $\epsilon^2 = \delta^{\frac{2}{p+2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|f - R_{\epsilon}y_\delta\| &= \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \\ &\leq K \max\left(\delta^{\frac{p}{p+2}}, \delta^{\frac{2}{p+2}}\right), \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

où $K = c_1 + \left(\frac{2\alpha^2(2\nu + 1)}{(-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4\alpha^2\nu})x_0} \right)$ □

2.2.2 Cas : $x \in \mathbb{R}^n$

Lemme 2.2.5. Soit $\rho \in \mathbb{R}$.

1. Si $0 < \epsilon < 1$, on a $\frac{|\rho|}{1 + \rho^2 \epsilon^2} \leq \frac{1}{2\epsilon}$.
2. Cependant, pour $\alpha^2, \eta > 0$ l'inégalité suivante est satisfaite

$$\frac{\alpha^2 \rho^2 + \eta}{1 + \rho^2 \epsilon^2} \leq \max\left(\eta, \frac{\alpha^2}{\epsilon^2}\right).$$

Preuve. on a $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$ puisque $a^2 + b^2 \geq 2ab$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on

a :

$$1 + |\rho|^2 \epsilon^2 \geq 2 |\rho| \epsilon, \implies \frac{|\rho|}{1 + \rho^2 \epsilon^2} \leq \frac{1}{2\epsilon}.$$

Notons par $k(\rho)$ la fonction $\rho \mapsto \frac{\alpha^2 \rho^2 + \eta}{1 + \rho^2 \epsilon^2}$, alors :

$$\begin{aligned} k'(\rho) &= \frac{2\alpha^2 \rho (1 + \rho^2 \epsilon^2) - 2\rho \epsilon^2 (\alpha^2 \rho^2 + \eta)}{(1 + \rho^2 \epsilon^2)^2} \\ &= \frac{2\alpha^2 \rho + 2\alpha^2 \rho^3 \epsilon^2 - 2\alpha^2 \rho^3 \epsilon^2 - 2\rho \epsilon^2 \eta}{(1 + \rho^2 \epsilon^2)^2} \\ &= \frac{2\rho(\alpha^2 - \eta \epsilon^2)}{(1 + \rho^2 \epsilon^2)^2}, \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

donc la fonction k admet un seul point critique $\rho^* = 0$. Considérons maintenant les trois cas suivants :

1. $\alpha^2 = \eta \epsilon^2 \implies (\alpha^2 - \eta \epsilon^2) \implies k'(\rho) = 0$ et

$$k(\rho) = \frac{\eta \epsilon^2 \rho^2 + \eta}{1 + \epsilon^2 \rho^2} = \eta, \text{ constante, } \forall \rho \in \mathbb{R}.$$

2. $\alpha^2 < \eta \epsilon^2 \implies k'(\rho) < 0$, et la fonction k atteint son maximum global en $\rho = 0$, qui vaut $k(0) = \eta$.

3. $\alpha^2 > \eta \epsilon^2$ puisque k est une fonction paire croissante pour $\rho > 0$ et

$$\lim_{\rho \rightarrow \pm\infty} k(\rho) = \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \quad \text{alors} \quad k(\rho) \leq \frac{\alpha^2}{\epsilon^2} \implies k(\rho) \leq \max\left(\eta, \frac{\alpha^2}{\epsilon^2}\right).$$

Ce qui termine la démonstration. □

Lemme 2.2.6. Pour $\alpha^2, \eta, t_0 > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ et $0 < \epsilon < 1$ on a :

$$\left| \frac{A(\tilde{\xi})}{1 + \epsilon^2 \|\tilde{\xi}\|^2} \right| \leq \frac{2}{\epsilon^2} M, \tag{2.2.23}$$

où

$$M = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{1}{t_0} + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\eta t_0}; \eta + \alpha^2 + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2} \right),$$

$$\text{et } \|\beta\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq n} |\beta_j|.$$

Preuve. D'après la définition de $A(\xi)$ et le lemme (2.2.1), on a

$$\left| \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 (\|\xi\|)^2} \right| \leq \left| \frac{\alpha^2 \|\xi\|^2 + |\beta \xi| + \eta}{(1 - \exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0)) (1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2)} \right| = B(\xi).$$

— Si $(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0 \geq 1$, en utilisant l'inégalité triangulaire et les lemmes (2.2.3), (2.2.2) on a :

$$\begin{aligned} B(\xi) &= \frac{\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta}{1 - \exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0)(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)} \\ &\quad + \frac{|\beta \xi|}{1 - \exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0)(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)} \\ &\leq 2 \left(\frac{\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta}{1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2} + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty \|\xi\|}{1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2} \right) \\ &\leq 2 \max \left\{ \eta, \frac{\alpha^3}{\epsilon^2} \right\} + \frac{2\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\epsilon} \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^2} \left(\eta + \alpha^2 + \epsilon \sqrt{n} \frac{\|\beta\|_\infty}{2} \right) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^2} \left(\eta + \alpha^2 + \sqrt{n} \frac{\|\beta\|_\infty}{2} \right). \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

— Si $((\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0) \in (0, 1)$, on remarque que

$$\begin{aligned} B(\xi) &= \frac{(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0}{((1 - \exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0))(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2))t_0} \\ &\quad + \frac{(|\beta \cdot \xi| (\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0)}{((1 - \exp(-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0))(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2))(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0} \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

En utilisant (2.2.5),(2.2.3) on obtient :

$$\frac{(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0}{((1 - e^{-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0}) (1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2))t_0} \leq 2 \left(\frac{1}{(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)t_0} \right) \tag{2.2.26}$$

$$\frac{|\beta\xi| (\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0}{(1 - e^{-(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0})(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0} \leq \frac{2|\xi\beta|}{(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0}$$

donc d'après (2.2.26) et la dernière inégalité on trouve :

$$\begin{aligned} B(\xi) &\leq 2 \left(\frac{1}{(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)t_0} + \frac{|\xi\beta|}{(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0} \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{(1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2)t_0} + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\epsilon(\alpha^2 \|\xi\|^2 + \eta)t_0} \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{t_0} + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\epsilon\eta t_0} \right) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon^2 t_0} \left(1 + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\eta} \right). \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

$$(2.2.28)$$

En regroupant les deux cas, on obtient le résultat recherché. \square

2.3 Estimation a priori

Définition 2.3.1. Soit $\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$, $p > 0$ la norme de Sobolev définie comme suit :

$$\|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2 (1 + \|\xi\|^2)^p d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.3.1}$$

Théorème 2.3.1. Soit $f_{\delta,\epsilon}(x)$ la solution régularisée donnée par la relation (2.2.4). On suppose que $\|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} < c_1$, ($f \in \mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$) pour $0 < p < \infty$. Alors en choisissant $\epsilon^2 = \left(\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{2}{2+p}}$ on obtient l'estimation suivante :

$$\|f - f_{\delta,\epsilon}\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)} \leq 2\delta^{\frac{p}{2+p}} c^{\frac{p}{2+p}} \left[M + \frac{1}{2} \max \left(1; \left(\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{2-p}{p+2}} \right) \right] \tag{2.3.2}$$

Preuve. on note dès maintenant $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ on a :

$$\widehat{f}_\epsilon(\xi) = \frac{A(\xi)}{1 + \|\xi\|^2 \epsilon^2} \widehat{y}(\xi) \tag{2.3.3}$$

alors

$$\left| \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}_\epsilon(\xi) \right| = \left| \widehat{f}(\xi) \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right) \left(\frac{1 + \|\xi\|^2}{1 + \|\xi\|^2} \right)^{\frac{p}{2}} \right| \quad (2.3.4)$$

$$\leq \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} \left| (1 + \|\xi\|^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right) \right| \left| \widehat{f}(\xi) (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{p}{2}} \right| \quad (2.3.5)$$

D'après la définition de la norme $\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$, on obtient :

$$\left| \widehat{f}(\xi) - \widehat{f}_\epsilon(\xi) \right| \leq \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} \left| (1 + \|\xi\|^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right) \right| \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} \quad (2.3.6)$$

Maintenant, d'après l'inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| &= \|f - f_{\delta,\epsilon}\| \\ &= \|\widehat{f} - \widehat{f}_\epsilon + \widehat{f}_\epsilon - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \\ &\leq \|\widehat{f} - \widehat{f}_\epsilon\| + \|\widehat{f}_\epsilon - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

d'après la définition de $\widehat{f}_{\delta,\mu}$ et les relations (2.3.6) et (2.3.7) on obtient :

$$\begin{aligned} \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| &\leq \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} \left| (1 + \|\xi\|^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right) \right| \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} \left| \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right| \|\widehat{y} - \widehat{y}_\delta\| \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

on note :

$$T_1 = \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} \left| (1 + \|\xi\|^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right) \right| \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)}$$

et

$$T_2 = \sup_{\|\xi\| \in \mathbb{R}} \left| \frac{A(\xi)}{1 + \epsilon^2 \|\xi\|^2} \right| \|\widehat{y} - \widehat{y}_\delta\|,$$

□

T2 est estimé déjà dans le lemme (2.2.6)

2.4 Estimation du terme T1

Lemme 2.4.1. Pour $0 < \epsilon < 1$, on a l'inégalité suivante :

$$\sup_{\|\tilde{\zeta}\| \in \mathbb{R}} \left| (1 + \|\tilde{\zeta}\|^2)^{-\frac{p}{2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\tilde{\zeta}\|^2} \right) \right| = \max(\epsilon^p, \epsilon^2) \quad (2.4.1)$$

$$(2.4.2)$$

Preuve. soit $\psi(\tilde{\zeta}) =: \left(1 - \frac{1}{1 + \epsilon^2 \|\tilde{\zeta}\|^2} \right) (1 + \|\tilde{\zeta}\|^2)^{-\frac{p}{2}}$ ca démonstration de (2.4.1) sera décomposée en trois cas :

cas1 :

— On a

$$\|\tilde{\zeta}\| \geq \|\tilde{\zeta}_0\| = \frac{1}{\epsilon} > 1$$

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{\zeta}) &\leq (1 + \|\tilde{\zeta}\|^2)^{-\frac{p}{2}} \\ &\leq (\|\tilde{\zeta}\|^2)^{-\frac{p}{2}} \\ &\leq \|\tilde{\zeta}_0\|^{-p} \\ &= \epsilon^p \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

cas2 :

— $1 < \|\tilde{\zeta}\| < \|\tilde{\zeta}_0\|$ dans ce cas on obtient :

$$\begin{aligned} \psi(\tilde{\zeta}) &= \frac{\epsilon^2 (\|\tilde{\zeta}\|)^2}{1 + \epsilon^2 (\|\tilde{\zeta}\|)^2} (1 + (\|\tilde{\zeta}\|)^2)^{-\frac{p}{2}} \\ &\leq \epsilon^2 (\|\tilde{\zeta}\|)^2 ((1 + (\|\tilde{\zeta}\|)^2)^{-\frac{p}{2}}) \\ &\leq \epsilon^2 (\|\tilde{\zeta}\|)^2 (((\|\tilde{\zeta}\|)^2)^{-\frac{p}{2}}) \\ &= \epsilon^2 (\|\tilde{\zeta}\|)^{2-p} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

si $0 < p \leq 2$, l'inégalité précédente devient

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi) &\leq \epsilon^2 \|\xi_0\|^{2-p} \\
 &= \epsilon^2 \frac{1^{2-p}}{\epsilon} \\
 &= \epsilon^2 \epsilon^{p-2} \\
 &= \epsilon^p,
 \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

si $p > 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi) &\leq \epsilon^2 \|\xi\|^{2-p} \\
 &\leq \epsilon^2.
 \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

cas3 :

— $\|\xi\| \leq 1$, alors

$$\begin{aligned}
 \psi(\xi) &\leq \epsilon^2 \|\xi\|^2 (1 + \|\xi\|^2)^{-\frac{p}{2}} \\
 &= \frac{\epsilon^2 \|\xi\|^2}{(1 + \|\xi\|^2)^{\frac{p}{2}}} \\
 &\leq \epsilon^2 \|\xi\|^2 \\
 &\leq \epsilon^2,
 \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

en combinant les cas (2.4.3), (2.4.5), (2.4.6) et (2.4.7), on obtient l'estimation recherchée.

Revenons au terme 1 : d'après les lemmes (2.2.6), (2.4.1) et le fait que $\|\hat{y} - \hat{y}_\delta\| \leq \delta$ on obtient

$$\left\| \hat{f} - \hat{f}_{\delta, \epsilon} \right\| \leq \max \left(\epsilon^p, \epsilon^2 \right) \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{2\delta}{\epsilon^2} M, \tag{2.4.8}$$

en choisissant $\epsilon^2 = \left(\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{2}{p+2}}$

$$\begin{aligned} \|f - f_{\delta,\epsilon}\| &= \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \\ \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| &\leq \max\left(\delta^{\frac{p}{p+2}} c^{\frac{2}{2+p}}; \delta^{\frac{2}{2+p}} c^{\frac{p}{p+2}}\right) + 2M\delta^{\frac{p}{2+p}} c^{\frac{2}{2+p}} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

ce qui équivaut à dire

$$\|f - f_{\delta,\epsilon}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq 2\delta^{\frac{2}{2+p}} c^{\frac{2}{2+p}} \left(M + \frac{1}{2} \max\left(1, \left(\frac{\delta}{c}\right)^{\frac{2-p}{p+2}}\right) \right) \quad (2.4.10)$$

□

Théorème 2.4.1. Soit $f_{\delta,\epsilon}$ la solution régularisée, supposons que $f \in \mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)$ pour $0 < p < \infty$. Alors en choisissant $\epsilon^2 = \delta^{\frac{2}{2+p}}$ il existe une constante k indépendante de δ telle que

$$\|f - f_{\delta,\epsilon}\| \leq k \max\left(\delta^{\frac{2}{2+p}}; \delta^{\frac{p}{2+p}}\right). \quad (2.4.11)$$

Preuve. On a déjà

$$\|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \leq \max\left(\epsilon^p; \epsilon^2\right) \|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} + \frac{2\delta}{\epsilon^2} M, \quad (2.4.12)$$

le choix de $\epsilon^2 = \delta^{\frac{2}{2+p}}$ donne

$$\begin{aligned} \|f - f_{\delta,\epsilon}\| &= \|\widehat{f} - \widehat{f}_{\delta,\epsilon}\| \\ &\leq k \max\left(\delta^{\frac{2}{2+p}}; \delta^{\frac{p}{2+p}}\right) \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

où $k = c + 2M = c + 2 \max\left(\frac{1}{t_0} + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2\eta_0}; \eta + \alpha^2 + \frac{\sqrt{n} \|\beta\|_\infty}{2}\right)$ et c est donné par :

$$\|f\|_{\mathbb{H}^p(\mathbb{R}^n)} \leq c.$$

□

Exemples Numériques

3.1 Introduction

Dans cette section, nous considérons quelques exemples avec une source $f \in \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2$ pour illustrer les performances de la famille régularisante R_ϵ . Pour chaque exemple nous avons choisi différentes valeurs pour les paramètres α^2, β, ν et t_0 et un ensemble de valeurs d'écart type $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ pour le bruit des données. L'espace est uniformément discrétisé et l'ensemble de données $\{y_{\delta_1}, \dots, y_{\delta_N}\}$ est obtenu en évaluant la solution $u(x, t)$ à un instant fixé t_0 et en ajoutant du bruit, c'est-à-dire

$$y_{\delta_i} = y(x_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad x_i \in \mathcal{G}, \quad (3.1.1)$$

où \mathcal{G} est le maillage uniforme défini sur \mathbb{R}^n et $\epsilon_i, \quad i = 1, \dots, N$ sont des réalisations de la variable aléatoire normalement distribuée avec une moyenne 0 et un écart type ϵ .

En notant $y_i = y(x_i); \quad i = 1, \dots, N$, et puisque le niveau de bruit δ satisfait (2.1.2), alors l'erreur

$$y - y_\delta = (y_1 - y_{\delta_1}, \dots, y_N - y_{\delta_N}) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_N), \quad (3.1.2)$$

est numériquement intégré à l'aide de la méthode de Simpson pour obtenir une valeur approchée pour $\delta = \delta(\epsilon)$. Alors δ_M dans (2.1.2) est choisi comme étant une borne supérieure de δ . En pratique, δ_M peut être estimé en fonction des instruments de mesure utilisés dans la collecte des données.

Ensuite, $\{\widehat{y}_{\delta_1}, \dots, \widehat{y}_{\delta_N}\}$ est calculé au moyen de la *FFT* (Fast Fourier Transform) et la solution régularisée $f_{\delta, \epsilon}$ est calculée par la même formule, en utilisant la *FFT* inverse [voir [2]] où le paramètre de régularisation est choisi par : $\epsilon^2 = \delta^{\frac{2}{2+p}}$.

Les résultats des sources estimées (non régularisées et régularisées) sont tracés. Un tableau des erreurs est inclus pour chaque exemple qui montre les erreurs absolues et relatives. Pour but de comparaison, les erreurs pour tous les exemples sont calculés en prenant la formule (3.1.2) $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_5) = \{0.01, 0.03, 0.05, 0.08, 0.1\}$.

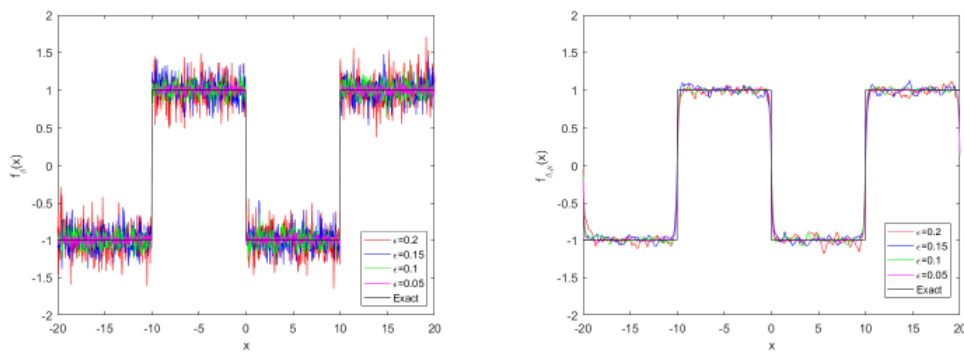


FIGURE 3.1 – Exemple 1 : Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)

3.1.1 Exemple 1D

Deux exemples sont considérés pour le problème de source inverse unidimensionnel défini dans (2.1.1).

Exemple 3.1.1. Pour cet exemple la source f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -20 \leq x \leq -10, \\ 1 & -10 \leq x \leq 0, \\ -1 & 0 \leq x \leq 10, \\ 1 & 10 \leq x \leq 20, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec les valeurs des paramètres de modélisation $\alpha^2 = 2.10^{-5}$, $\beta = 1.10^{-5}$, $\nu = 1$, $t_0 = 5$, $p = 1$ et $\epsilon \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.08, 0.1\}$

ϵ	Erreur absolue		Erreur relative	
	$\ f - f_\delta\ $	$\ f - f_{\delta,\epsilon}\ $	$\ f - f_\delta\ / \ f\ $	$\ f - f_{\delta,\epsilon}\ / \ f\ $
0.01	0.4610	0.0998	0.0729	0.0158
0.03	0.5750	0.2985	0.0909	0.0472
0.05	0.6430	0.4853	0.1017	0.0767
0.08	0.8268	0.7000	0.1307	0.1107
0.1	0.9512	0.7445	0.1504	0.1177

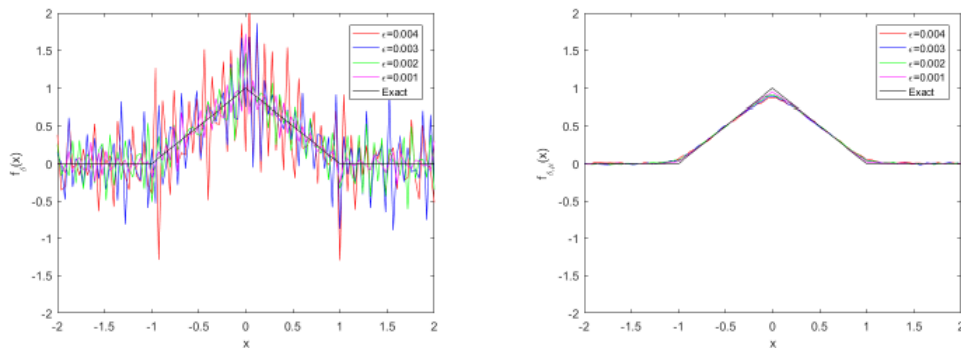


FIGURE 3.2 – Exemple 2 :Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)

Exemple 3.1.2. pour cet exemple la source f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & -1 \leq x < 0, \\ -x + 1 & 0 \leq x < 1. \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec les valeurs des paramètres de modélisation $\alpha^2 = 2$, $\beta = 0$, $\nu = 1$, $t_0 = 0.2$, $p = 2$ et $\epsilon \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.08, 0.1\}$

3.1.2 Exemple 2D

Deux exemples sont considérés pour le problème de source inverse à deux dimensions défini dans (2.1.1).

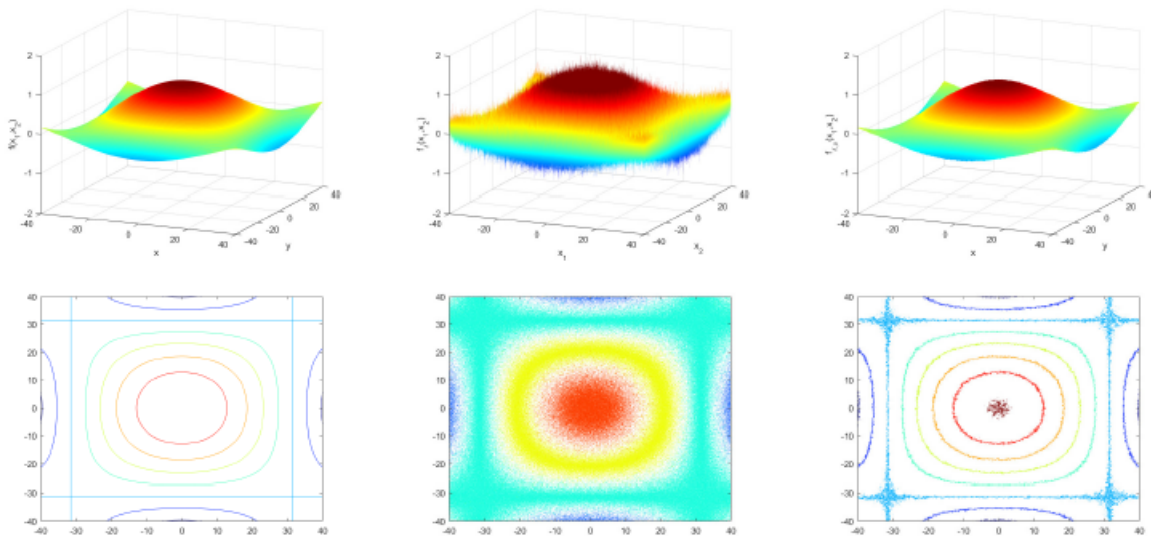


FIGURE 3.3 – Exemple 3 :Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)

Exemple 3.1.3. pour cet exemple la source f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{x_1}{20}\right) \cos\left(\frac{x_2}{20}\right) & -40 \leq x_1, x_2 \leq 40, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec les valeurs des paramètres de modélisation $\alpha^2 = 0.2$, $\beta = (0, 0)$, $\nu = 0.999$, $t_0 = 1$, $p = 1$ et $\epsilon \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.08, 0.1\}$

ϵ	Erreur absolue		Erreur relative	
	$\ f - f_\delta\ $	$\ f - f_{\delta,\epsilon}\ $	$\ f - f_\delta\ / \ f\ $	$\ f - f_{\delta,\epsilon}\ / \ f\ $
0.01	5.6563	0.2599	0.1744	0.0008
0.03	16.9395	0.7778	0.5221	0.0240
0.05	28.2357	1.3021	0.8706	0.0401
0.08	45.1974	2.0774	1.3936	0.0641
0.1	56.3882	5.5962	1.7387	0.0800

Exemple 3.1.4. pour cet exemple la source f est définie par :

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 10 + x_1 - x_2 & -10 \leq x_1 \leq 0, 0 \leq x_2 \leq 10 + x_1, \\ 10 + x_1 + x_2 & -10 \leq x_1 \leq 0, -10 - x_1 \leq x_2 \leq 0, \\ 10 - x_1 - x_2 & 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 10 - x_1, \\ 10 - x_1 + x_2 & 10 \leq x_1 \leq 10, -10 + x_1 \leq x_2 \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec les valeurs des paramètres de modélisation $\alpha^2 = 1$, $\beta = (0, 0)$, $\nu = 1$, $t_0 = 0.4$, $p = 0.6$ et $\epsilon \in \{0.01, 0.03, 0.05, 0.08, 0.1\}$

3.1.3 Conclusion

Ce travail porte sur le problème inverse d'identification de source pour les équations paraboliques complètes dans \mathbb{R}^n . Une famille d'opérateurs de régularisation est définie pour surmonter le caractère mal-posé du problème. Il a été conçu pour compenser le facteur d'instabilité dans l'opérateur inverse. Une règle de choix pour les paramètres de régularisation est également inclus qui est basée sur le niveau de bruit supposé dans l'ensemble de données et la régularité de la source à identifier. On a démontré que, pour la règle de choix des paramètres proposée ici, la méthode est stable et une estimation Holderienne est obtenue pour l'erreur de régularisation.

Les exemples numériques montrent de bonnes estimations pour les différentes sources, $n = 1, 2$, déterminé à partir de données avec différents niveaux de bruit. De plus, les sources utilisées pour les exemples numériques appartiennent à différents espaces de Hilbert et tous montrent une bonne performance de l'approche de régularisation adoptée.



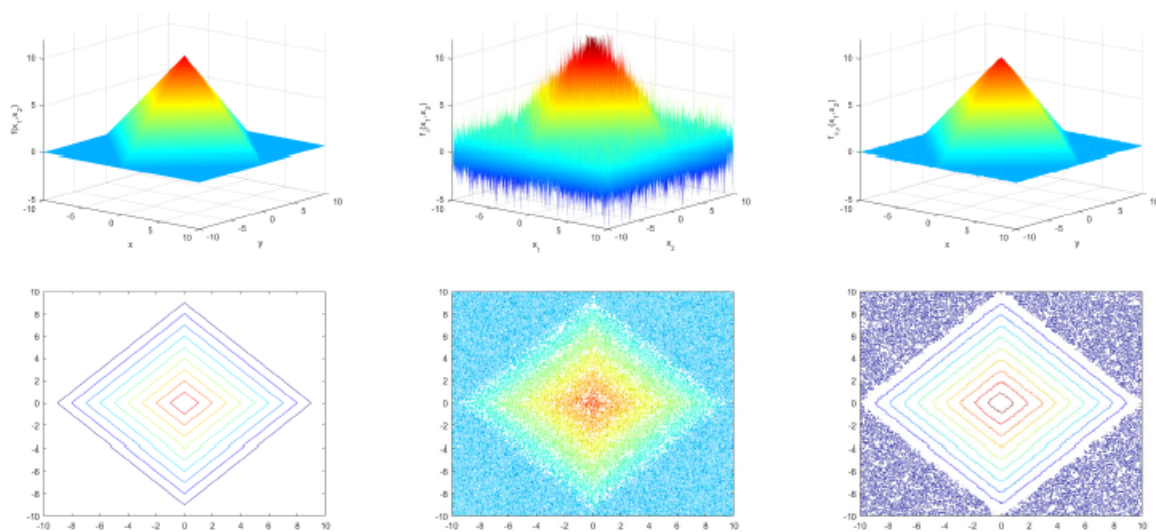


FIGURE 3.4 – Exemple 4 :Solution non régularisée (a gauche), solution régularisée (a droite)

Bibliographie

- [1] G.C. Beroza and P. Spudich. *Linearized inversion for fault rupture behavior : application to the 1984 Morgan Hill, California, earthquake*. Journal of Geophysical Research : Solid Earth, 93(6) :6275–6296, 1988.
- [2] S.L. Eldén, F. Berntsson and T. Reginska. *Wavelet and Fourier methods for solving the sideways heat equation*. SIAM Journal on Scientific Computing, 21(6) :2187–2205, 2000.
- [3] H. Engel, M. Hanke and A. Neubauer. *Regularization of inverse problems*. Kluwer Academic Publisher, The Netherlands, 1996.
- [4] Guillermo. F. U. *Identification of the Source for Full Parabolic Equations*. Mathematical Modelling and Analysis, Volume 26(3), 339–357, 2021
- [5] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy problem in linear differential equations*. Yale University Press, New Haven, 1923.
- [6] Y.C. Hon, M. Li and Y.A. Melnikov. *Inverse source identification by Green' s function*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 34(4) :352–358, 2010. 1503, 1993.
- [7] B. Jin and L. Marin. *The method of fundamental solutions for inverse source problems associated with the steady-state heat conduction*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 69(8) :1570–1589, 2007.
- [8] A. Kirsch. *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Springer, New York, 2011.
- [9] Q. Li and L.H. Nguyen. Recovering the initial condition of parabolic equations from lateral Cauchy data via the quasi-reversibility method. Inverse Problems in Science and Engineering, 28(4) :580–598, 2019.
- [10] R.A.F. Macleod, W.G. Dirks, Y. Matsuo, M. Kaufmann, H. Milch and H.G. Drexler. *Widespread intraspecies cross-contamination of human tumor cell lines arising at source*. International Journal of Cancer, 83(4) :555–563, 1999.



- [11] T. Ohe and K. Ohnaka. *A precise estimation method for locations in an inverse logarithmic potential problem for point mass models*. Applied Mathematical Modelling, 18(8) :446–452, 1994.
- [12] G.S. Tan, Y.J. Cheng and X.Q. Wang. *Determining magnitude of groundwater pollution sources by data compatibility analysis*. In- verse Problems in Science and Engineering, 14(3) :287–300, 2006.
- [13] Y.Zeng and J.G. Anderson. *A composite source model of the 1994 Northridge earthquake using genetic algorithms*. Bulletin of the Seismological Society of America, 86(1) :71–83, 1996

