قسم الرياضيات


وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 8 ماي 1945 قالمة

كلية الرياضيات والإعلام الآلي وعلوم المادة


**Mémoire de Master Académique**

**Filière : Mathématiques**

**Option : Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique**


**Présenté par : Nouhed KHEBIZI**


# Contrôlabilité approximative finie d'un système fractionnaire stochastique


**Dirigé par : Abbes BENCHAABANE**


*Soutenu le 16 juin 2022*

*Devant le Jury composé de :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Ezzebsa Abdelali** | MCA. | Président | U. Guelma |
| **Benchaabane Abbes** | MCA. | Encadreur | U. Guelma |
| **Sekrani Samia** | prof. | Examinateur | U. Guelma |

**Année Universitaire 2021**

MASTER

# ملخص

في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مفاهيم التحكم الدقيق المتزامن في البعد المنته والتقريبي في مربع المتوسط (التحكم التقريبي المنته ) في إطار المعادلات التفاضلية الجزئية العشوائية، استنتاجنا النهائي هو التحكم التقريبي المنته لنظام خطي عشوائي مكافئ للتحكم التقريبي لنفس النظام.

# Résumé

Dans ce mémoire nous étudions les concepts de contrôlabilité simultanée exacte en dimension finie et approximative au carré moyen (contrôlabilité finie-approximative) dans le cadre des équations différentielle fractionnaire stochastique. Notre conclusion finale est la suivante : la contrôlabilité approximative finie du système stochastique linéaire est équivalente à la contrôlabilité approximative du même système

# Abstract

In this paper we study the concepts of exact simultaneous controllability in finite dimension and approximate mean square controllability (finite-approximate controllability) in the framework of stochastic fractional differential equations. Our final conclusion is the following : the finite approximate controllability of the linear stochastic system is equivalent to the approximate controllability of the same system.

# *Remerciements*

*En préambule à ce mémoire nous remercions **ALLAH** qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.*

*Je tiens à remercier sincérement, **Monsieur abbes benchaabane**, qui, en tant que Directeurs de mémoire, ce sont toujours montrés à l'écoute et trés disponibles tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer.*

*Enfin, j'adresse mes plus sincéres remerciements à tous mes proches amies, qui m'ont toujours soutenue et encouragée au cours de mes étude.*

*Merci à tous et à toutes.*

# *Dédicace*

***Je dédie ce mémoire***
***avec un énorme plaisir, et une immense joies à mes chéres parents , pour leur patience, leurs encouragements, à ma grand-mère, à mes frères ,à ma soeur, à mes amies et à toute ma famille.***

# Table des matières

# *Introduction*

Le concept de contrôlabilité joue un rôle important et crucial dans l'analyse et la conception des systèmes de contrôle. Un système de contrôle est dit contrôlable si chaque état correspondant à ce processus de contrôle peut être affecté ou contrôlé dans des temps respectifs. En utilisant certains signaux de commande. Dans l'étude de tout système, il est très important de savoir si le système est contrôlable ou non. Si le système ne peut pas être contrôlé complètement, alors différents types de concepts de contrôlabilité peuvent être définis comme approximatif, nul, contrôlabilité intérieure. Dans notre mémoire nous étudions une version plus forte du concept de contrôlabilité approximative, appelée contrôlabilité finie-approximative. La contrôlabilité approximative finie signifie que le contrôle approximatif peut être choisi de telle manière que l'état final satisfasse la condition de contrôlabilité approximative et simultanément un nombre fini de contraintes. La théorie qualitative et les concepts de stabilité et de contrôlabilité des équations différentielles fractionnaires ont attiré l'attention de nombreux mathématiciens, physiciens et ingénieurs en raison de ses applications dans des nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Nous étudions un concept simultané de contrôlabilité exacte en dimension finie et approximative au carré moyen (contrôlabilité approximative finie) pour les systèmes fractionnels stochastiques linéaires et semi-linéaires dans les espaces de Hilbert. le résultat suivant pour les systèmes stochastiques linéaires : la contrôlabilité approximative finie du système stochastique linéaire est équivalente à la contrôlabilité approximative du même système.

CHAPITRE 1

# Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre nous rappelons quelques notions de bases, qui nous faciliteront notre travail.

## 1.1 Les espaces

**Définition 1.1.1.** **Un espace métrique** est un couple $(X, d)$ où $X$ est un ensemble non vide et $d$ est une distance sur $X$, c'est-à-dire une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1- **Symétrie :** $\forall x, y \in X, d(x, y) = d(y, x)$.

2- **Séparation :** $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

3- **Inégalité triangulaire :** $\forall x, y, z \in X, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

**Définition 1.1.2.** **Un espace de Banach** est un espace vectoriel normé sur un sous-corps $X$ de $\mathbb{C}$ (en général, $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), complet pour la distance issue de sa norme.

**Définition 1.1.3.** Soit $C([0, T]; X)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions $X$ continues à valeur de $[0, T]$ dans $X$ doté de la norme :

$$\|x\|_C := \sup\{\|x(t)\| : t \in [0, T]\}$$

Soit $X$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, Un produit scalaire $\langle f, g\rangle$ est une forme bilinéaire de

$X \times X$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie positive. Rappelons que $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ est une norme associée au produit scalaire.

**Définition 1.1.4. Un espace de Hilbert** est un espace vectoriel $H$ muni d'un produit scalaire $\langle f, g \rangle$ et qui est complet pour la norme $\langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$.

### Les espaces $L^p$

On désigne par $L^1(\Omega)$ avec $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ l'espace des fonctions intégrables :

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \int_\Omega |f| dx < +\infty \right\}$$

Telles que $\|f\|_{L^1} = \displaystyle\int_\Omega |f(x)| dx$.

**Définition 1.1.5.** Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leqslant p < \infty$, on pose :

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{mésurable et} \quad |f|^p \in L^1(\Omega) \}$$

On note :

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_\Omega |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \tag{1.1.1}$$

Il s'agit d'une intégrale au sens de Lebesgue. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme 1.1.1 est un espace de Banach, de plus, il est séparable pour $1 \leqslant p < \infty$. Pour $P = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire correspondant à la norme 1.1.1 étant donné par :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx$$

Pour $p = \infty$, $L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{mesurable et } \exists C : |f(x)| \leq C sur \Omega \}$. C'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_{L^\infty} = \text{In} f \{ C; |f(x)| \leq C \text{ sur } \Omega \}$$

## 1.2 Les types de contrôlabilité

Le principe de la contrôlabilité est le suivant : étant données deux états $x^0 \in \mathbb{X}$(l'espace des états) et $x^1 \in \mathbb{X}$ d'un système, existe-t-il une fonction $u$ (appelée contrôle) permettant de passer (en un sens à définir précisément) de l'état $x^0$ à l'état $x^1$ en un temps fixé $T > 0$ ? Le terme 'passer'peut-être interprété de déférentes manières : par exemple il peut signifier que la valeur à l'instant $t = T$ de la solution qui part de l'état $x^0$ à l'instant $t = 0$ soit exactement égale à $x^1$, auquel cas on parle de contrôlabilité exacte, mais il peut aussi signifier que la valeur de cette solution à l'instant $T$ soit suffisamment proche de $x^1$, sans nécessairement lui être égale, auquel cas on parle de contrôlabilité approchée, déférents concepts de contrôlabilité existent, donnons celle qui vont nous intéresser dans ce travail.

## Contrôlabilité des systèmes linéaires

Soient$(\mathbb{X}; \|.\|)$ et $(U; \|.\|_U)$ deux espaces de Banach. Soient $(A; D(A))$ un générateur infinitésimal d'un semi groupe fortement continu et $B : U \longrightarrow \mathbb{X}$ un opérateur linéaire borné. Considérons le système de contrôle linéaire :

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.2}$$

Où $x^0 \in \mathbb{X}$ est la condition initiale et $u \in U$ est le contrôle grâce à lui on veut agir sur l'état $x(.)$ du système pour l'envoyer de l'état initiale $x^0$ vers un certain état final $x^T$ prédéfini dans un temps fini $T > 0$.

**Définition 1.2.1.** Le système 1.2.2 est dit exactement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0; T]$ si et seulement s'il est possible de trouver une fonction d'entrée $u(t)$ qui puisse transférer tout état initial $x^0 \in \mathbb{X}$ à la sortie désirée $x^T \in \mathbb{X}$ au bout d'un temps fini $T$. Ceci est équivalent à dire :

$$\forall x^0 \in \mathbb{X}, \forall x^T \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U}) \text{ tel que : } x(T) = x^T$$

**Définition 1.2.2.** Le système 1.2.2 est dit exactement nul contrôlable sur l'intervalle de temps $[0; T]$ si et seulement s'il est possible de ramener tous les points dans l'espace $\mathbb{X}$ à l'origine au temps $T$ via un contrôle $u$ c-à-d :

$$\forall x^0 \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathbb{L}^2(0, T, \mathbb{U}) \text{ tel que } : x(T) = 0$$

**Définition 1.2.3.** Le système 1.2.2 est dit approximativement contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, T]$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x^0 \in \mathbb{X}, \forall x^T \in \mathbb{X}, \exists u \in \mathbb{L}^2(0, T; \mathbb{U}) \text{ tel que : } \left\| x^T - x(T) \right\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon$$

## 1.3 Partie relativement compact

**Définition 1.3.1.** On dit d'une partie $A$ d'un espace métrique $(X, d_X)$ est relativement compact si $\bar{A}$ est compacte.

**Proposition 1.3.1.** *Soit $(X, d_X)$ un espace métrique.*

*1- Une partie $A$ de $X$ est relativement compacte si et seulement si de toute suite d'éléments de $A$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $X$.*

*2- Toute partie relativement compacte de $X$ est pré compacte.*

*3- Si $A$ est une partie relativement compacte alors toute partie $B \subset A$ est relativement compacte. Toute partie d'un espace compacte est relativement compacte.*

## 1.4 Equicontinuité

**Définition 1.4.1.** Soit $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $\mathcal{F}$ une partie de $\mathcal{C}(X, Y)$ et $x_0$ un point de $X$. On dit que $\mathcal{F}$ est **équicontinue** en $x_0$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in X, \quad (d_X(x_0, y) < \alpha) \Longrightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, d_Y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon)$$

On dit que $\mathcal{F}$ est équicontinue sur $X$ si $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de $X$. Si l'on a la condition :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in X, \quad (d_X(x, y) < \alpha) \Longrightarrow (\forall f \in \mathcal{F}, d_Y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon)$$

On dit que $f$ est uniformément équicontinue.

**Lemme 1.4.1.** *Soit $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques et $\mathcal{F}$ une partie équicontinue de $\mathcal{C}(X, Y)$. Supposons que $(X, d_X)$ est compact. Alors $\mathcal{F}$ est uniformément équicontinue.*

**Lemme 1.4.2.** *Soit $(X, d_X), (Y, d_Y)$ deux espaces métriques, $\mathcal{F}$ une partie uniformément équicontinue de $C(X, Y)$ et $(f_n)_n$ une suite de fonction $\mathcal{F}$. Supposons que $(X, d_X)$ est compact.*

*Alors on a l'équivalence suivante :*

$$(f_n)_n \textit{converge vers} f \iff (f_n)_n \textit{converge uniformément vers} f.$$

## 1.5 Opérateurs compacts

Opérateurs compacts constituent une classe importante d'applications linéaires continues. D'une part, ils sont presque des opérateurs de rang fini(approchés par des opérateurs dont l'image est de dimension finie). D'autre part, la classe des opérateurs compacts est suffisamment large pour inclure les opérateurs à noyau continus ou dans $L^2$.

**Définition 1.5.1.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in L(X,Y)$ est **un opérateur compact** si $\overline{T(\bar{B}_X)}$ est un compact de $Y$, où $\bar{B}_X$ est la boule unité fermée de $X$. On note par $K(X,Y)$ l' ensemble des opérateurs compacts de $X$ dans $Y$ et par $K(X)$ si $X = Y$.

**Proposition 1.5.1.** *Soient $X$ et $Y$ deux espaces vectoriels normés et $T \in L(X,Y)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

*1- $T$ est compact.*

*2- Pour tout $A \subset X$ borné, $\overline{T(A)}$ est compact.*

*3- Toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, $T(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.*

*4- L'ensemble des opérateurs compacts $K(X,Y)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(X,Y)$.*

*5- Soient $S \in L(X,Y)$ et $T \in L(Y,Z)$ alors si $S$ ou $T$ est compact : $T \circ S \in K(X,Z)$.*

**Proposition 1.5.2.** *Soit $X$ un espace vectoriel normé de dimension infinie. Alors l'opérateur identité de $X$ n'est pas compact. Plus généralement, tout isomorphisme $T : X \longrightarrow X$ n'est pas compact.*

**Définition 1.5.2.** Soit $H$ un espace de Hilbert séparable. un opérateur $T \in L(H)$ est un opérateur de Hilbert shmidt, s'il existe une base hilbartienne $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|\mathrm{Te}_k\|^2 < \infty$$

.

**Exemple 1.5.1. Opérateurs diagonaux :**

Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base hilbertienne de $H$ et $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}*}$ une suite fixée de nombres complexes telle que : $\sum_{k=1}^{+\infty} |\lambda_k|^2 < +\infty$. Pour tout $x \in H$, posons

$$Tx = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k < x, e_k > e_k.$$

Alors $T$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $H$.

Pour tout $k \geq 1, Te_k = \lambda_k e_k$ ( $\lambda_k$ est une valeur propre et $e_k$ un vecteur propre associé). Autrement dit la matrice de $T$ dans la base hilbertienne $(e_n)$ est diagonale et sa diagonale est composée des coefficients $\lambda_n$.

## 1.6 Théorème d'Ascoli-Arzela

**Théorème 1.6.1.** *Soit $(X; d_X)$ un espace métrique compact, $(Y; d_Y)$ un espace métrique complet. Une partie $A$ de C(X; Y) est relativement compacte si et seulement si :*

*1- $A$ est équicontinue, c'est-à-dire :*

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists n > 0 / \forall f \in A, \forall y \in X, (d_X(x,y) \leqslant n) \Longrightarrow (d_Y(x,y) < \epsilon)$$

*2- Pour tout $x \in X$, l'ensemble $A(x) = \{f(x); f \in A\}$ est relativement compact.*

## 1.7 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

**Définition 1.7.1. La fonction Gamma** est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad ; \alpha \in \mathbb{C} \text{ et } \mathscr{R}e(z) > 0$$

C'est une fonction qui prolonge naturellement la fonction aux nombre réels et complexes.

**Remarque 1.7.1.** La fonction Gamma vérifié les propriétés suivantes :

1- $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, en particulier $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$.

2- $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \mp\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

4- $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$ et pour les valeurs négatives $\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\sqrt{\pi}$.

5- La fonction Gamma peut être représentée par la limite :

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}, \quad \mathscr{R}e(\alpha) > 0.$$

**Définition 1.7.2. La fonction Bêta** est définie par :

$$B(\alpha, w) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{w-1}dt, \quad (\mathscr{R}e(\alpha) > 0, \mathscr{R}e(w) > 0)$$

La fonction bêta est appelée intégrale d'Euler du premier type.

**Remarque 1.7.2.** La relation entre les deux fonctions est donnée par :

$$B(\alpha, w) = \frac{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(\alpha+w)}, (\alpha, w \in \mathbb{C}; \mathscr{R}e(\alpha), \mathscr{R}e(w) > 0)$$

## 1.8 Intégration fractionnaire

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, ($b$ peut être fini ou infini) on considère les intégrales suivantes :

$$\left(I_a^1 f\right)(x) = \int_a^x f(t)dt$$

$$\left(I_a^2 f\right)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t)dt\right) ds.$$

On transforme l'intégrable double à une intégrable simple :

$$\left(I_\alpha^2 f\right)(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt.$$

Ainsi, en intégrant successivement par itération on trouve :

$$\left(I_a^n f\right)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt.$$

**Définition 1.8.1.** Soit $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. **L'intégrale de Rieman-Liouville** de $f$ est définie par :

$$\left(I_a^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt$$

Où $\alpha$ un réel positif.

**L'intégrale fractionnaire d'ordre** $\alpha$ avec la limite inférieure $a \in \mathbb{R}$ pour une fonction $f : [a,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est :

$$I_{a,t}^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}\mathrm{d}s}, \quad t > a, \quad \alpha > 0$$

## 1.9 Dérivé fractionnaire

**Définition 1.9.1. La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre** $\alpha$ dont la limite inférieure est,zéro pour une fonction $f : [0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ à condition que le côté droit soit défini ponctuellement sur $[a,\infty[$,où $\Gamma$ est la fonction gamma est :

$${}^{L}D_{0,t}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}\,\mathrm{d}s}, \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha < n$$

**Définition 1.9.2. La dérivée de Caputo d'ordre** $\alpha$ pour une fonction

$$f : [0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

est :

$${}^{C}D_{0,t}^\alpha f(t) = {}^{L}D_{0,t}^\alpha \left( f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0) \right), \quad t > 0, \quad n-1 < \alpha < n$$

## 1.10 Un peu d'optimisation

### Infimum et suprémum

**Définition 1.10.1.** Soit $U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique. Par construction des nombres réels, l'ensemble $\{f(x) : x \in U\}$ admet un infimum $\alpha = \inf_{x\in U} f(x)$. La plus grand borne inférieure $\alpha$ vérifiant

$$\alpha \leq f(x) \quad \forall x \in U$$

De même, on peut définir le suprémum $\beta = sup_{x \in U} f(x)$ comme la plus petite valeur $\beta$ vérifiant

$$\beta \geq f(x) \quad \forall x \in U$$

**Théorème 1.10.1.** ***Existence des extréma (cas borné)*** *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique continue définie sur un domaine U fermé et borné de $\mathbb{R}^d$, alors*

*1- $\exists a \in U$ tel que $f(a) = inf_{x \in U} f(x)$ ou encore $f(a) = min_{x \in U} f(x)$*

*2- $\exists b \in U$ tel que $f(b) = sup_{x \in U} f(x)$ ou encore $f(b) = max_{x \in U} f(x)$*

Par la suite on se limitera uniquement au cas de la minimisation. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique continue définie sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^d$ fermé mais pas borné.

**Définition 1.10.2. (Fonction à section inférieure bornée)** $f$ est dite à section inférieure bornée si

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad telque \quad f^{-1}(-\infty, K] = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq K\}$$

Soit borné et non vide en notant $K = f^{-1}(-\infty, K]$, il est clair que nous avons la relation

$$\inf_{x \in U} f(x) = \inf_{x \in U \cap K} f(x)$$

Etant donné que $K$ est fermé et borné, nous avons aussi que $U \cap K$ est fermé et borné. Ainsi le théorème d'existence des extréma s'applique.

**Théorème 1.10.2.** ***Existence des extréma (cas non borné)*** *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique continue à section inférieure bornée et définie sur un domaine U fermé de $\mathbb{R}^d$, alors*

$$\exists a \in U \quad telque \quad f(a) = inf_{x \in U} f(x)$$

**Définition 1.10.3. (Fonction coercive)**$f$ est dite coercive si

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \quad f(x) = \infty$$

D'une manière formelle, ceci correspond à l'énoncé

$$\forall M > 0 \quad \exists N > 0 \quad telque \quad \|x\| > N \Longrightarrow f(x) > M.$$

**Proposition 1.10.1.** *Toute fonction numérique continue et coercive est à section inférieure bornée.*

**Définition 1.10.4. Ensemble convexe** $U \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si

$$\forall x, y \in U \quad \forall \lambda \in [0,1] \Longrightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in U$$

**Propriétés 1.10.1.** *1- Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est une collection quelconque d'ensembles convexes, $\cap_{i\in I} U_i$ est convexe.*

*2- La fermeture $\bar{U}$ d'un ensemble convexe est convexe.*

*3- L'intérieur $int(U)$ d'un ensemble convexe est convexe ou vide.*

**Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur un ensemble convexe $U$.**

**Définition 1.10.5. Fonction convexe** $f$ est dite convexe si :

$$\forall x, y \in U \quad \forall \lambda \in [0,1] \Longrightarrow f(1-\lambda)x + \lambda y \leq 1 - \lambda f(x) + \lambda f(y)$$

**Définition 1.10.6. Fonction strictement convexe** $f$ est dite strictement convexe si

$$\forall x, y \in U \quad x \neq y \quad \forall \lambda \in [0,1] \Longrightarrow f(1-\lambda)x + \lambda y < 1 - \lambda f(x) + \lambda f(y)$$

Géométriquement, le graphe d'un telle fonction doit avoir une certaine **rondeur**

## Théorème d'unicité

**Théorème 1.10.3.** *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique strictement convexe définie sur un ensemble convexe $U$. Si $f$ admet un point minimisant. $f(a) = inf_{x\in U} f(x)$ alors ce point est unique.*

**Définition 1.10.7. Fonction semi-continue inférieure** $f : U \longrightarrow \bar{R}$ est dite semi-continue inférieure si une des conditions équivalente est satisfaite

1- $\forall K \in \mathbb{R} \quad f^{-1}(-\infty, K] \subset \mathbb{R}^n$ est fermé

2- $epi(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est fermé

3- $\forall x_n \to a \quad \Longrightarrow \quad f(a) \leq \underline{\lim} f(x_n)$

### Généralisation du théorème de Weierstrass(cas non borné)

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction propre semi-continue inférieurement, à section inférieure bornée définie sur un domaine $U$ fermé et non borné, alors il existe $a \in U$ tel que $f(a) = inf_{x \in U} f(x)$. De plus, si $f$ est une fonction strictement convexe, on a unicité du point minimisant.

## 1.11 Théorème du point fixe de Shauder

Le théorème du point fixe de Schauder est une généralisation de théorème de Brouwer, d'un espace de dimension finie à un espace de dimension quelconque il s'énonce ainsi :

**Définition 1.11.1.** Pour une application $F$ d'un ensemble $E$ dans lui même, un élément $x$ de $E$ est un point fixe de $F$ si $\forall x \in E : F(x) = x$.

**Théorème 1.11.1.** ***Le premier théorème de Shauder*** *Soit $\Omega$ un sous ensemble non-vide, compact et convexe d'un espace de Banach E et $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application continue sur $\Omega$. Alors $F$ admet au moins un point fixe dans $\Omega$.*

**Théorème 1.11.2.** ***La deuxième théorème de Shauder*** *Soit $\Omega$ un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach $E$. Toute application continue et compacte $f : \Omega \longrightarrow \Omega$ admet au moins un point fixe dans $\Omega$.*

**Preuve 1.11.1.** *On note $K$ l'adhérence de $f(\Omega)$, $K = f(\Omega)$ qui est par hypothèse un compact. $K \subset \Omega$ car $\Omega$ est un fermé ( $\Omega$ étant compact alors $K = f(\Omega)$ car $f(\Omega)$ est compact). Pour chaque $n$, soit $F_n$ un $\dfrac{1}{n}$-réseau de $K$.*

*$F_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset K$ tel que $K \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \dfrac{1}{n}\right)$ et Soit $P_n : K \to \mathrm{cov}(Fn)$ une projection de Schauder, comme $\Omega$ est convexe et $F_n$ une partie de $\Omega$. Alors $\mathrm{cov}\,(F_n) \subset \Omega$ est un sous ensemble convexe et compact. On définit $f_n : \mathrm{cov}\,(F_n) \to \mathrm{cov}\,(F_n)$, $f_n = P_n \circ f_{|\mathrm{cov}(F_n)}$. Par **le théorème de Brouwer** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède au moins un point fixe $y_n$, $f_n\,(y_n) = y_n$. Ou $(f\,(y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ qui est compact et donc la suite $(f\,(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous suite*

*convergente que nous noterons de la même manière. On pose :*

$$y = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \tag{1.11.3}$$

*Et on a* $y = \lim_{n\to+\infty} f(y_n) \in \Omega$ *car* $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset K \subset \Omega$ *fermé d'où contient les limites de toutes ses suites convergentes. Montrons* $f(y) = y$. *En effet :*

$$\|f_n(y_n) - f(y_n)\| = \|P_n(f(y_n)) - f(y_n)\| < \frac{1}{n}$$

*D'où*

$$\begin{aligned} y &= \lim_{n\to\infty} f(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} y_n \end{aligned}$$

*Alors* $\lim_{n\to+\infty} y_n = y$ *d'après 1.11.3 et par la continuité de* $f$, *on obtient :* $f(y) = y$. *Par conséquent* $f$ *admet un point fixe.*

CHAPITRE 2

# Calcul stochastique

Dans ce chapitre, nous introduisons des notations et des résultats préliminaires pour établir nos principaux résultats. On considère un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où $\Omega$ est un ensemble, $\mathcal{F}$ est une tribu continue dans l'ensemble des parties de $\Omega$ et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur la tribu $\mathcal{F}$.

**Définition 2.0.1.** Soit $\Omega$ un ensemble et $\mathcal{F}$ une famille de partie de $\Omega$. On dit que $\mathcal{F}$ est **une tribu** (sur $\Omega$) si :

1- $\Omega \in \mathcal{F}$.

2- Pour tout ensemble $Z \in \mathcal{F}$, on a $Z^c \in \mathcal{F}$, où $Z^c$ désigne le complémentaire de $Z$ dans $\Omega$ (stabilité par passage au complémentaire).

3- Pour toute famille $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Omega$ satisfaisant $Z \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} Z \in \mathcal{F}$(stabilité par union dénombrable)

**Définition 2.0.2.** On appelle $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ **une filtration** sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ pour $s \leq t$ contenu dans $\mathcal{F}$.

## 2.1 Processus stochastique

**Définition 2.1.1. Un processus stochastique** $X = (X_t)_{t\in T}$ est une famille des variables aléatoires $X_t$ indexée par un ensemble $T$. En général $T = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$ et on considère que le processus est indexé par le temps $t$. Si $T$ est un ensemble fini, le processus est un vecteur aléatoire. Si $T = \mathbb{N}$ alors le processus est une suite de variables aléatoires. Plus généralement quand $T \subset \mathbb{Z}$, le processus est dit discret. Pour $T \subset \mathbb{R}^d$, On parle de champ aléatoire (drap quand $d = 2$). Un processus dépend de deux paramètres :$X_t(\omega)$ dépend de $t$(en général le temps) et de l'aléatoire $\omega \in \Omega$ :

1- Pour $t \in T$ fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_t(\omega)$ est un variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

2- Pour $\omega \in \Omega$ fixé, $t \in T \mapsto X_t(\omega)$ est une fonction à valeur réelles, appelée trajectoire du processus. C'est un enjenu que de savoir si un processus admet des trajectoires mésurables, continues, dérivables et encore plus régulières.

**Définition 2.1.2.** $X$ **Un processus mésurable** si $(t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$ de $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est un application mésurable par rapport aux tribus $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

**Définition 2.1.3.** On dit **un processus continu** si $\omega \in \Omega, t \mapsto X_t(\omega)$ est une application continue pour presque tout $\omega$.

**Définition 2.1.4.** On dit **un processus adapté** à la filtration$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si pour tout $t$, le variable aléatoire $X_t$ et $\mathcal{F}_t - mesurable$.

**Définition 2.1.5.** On dit $X$ **un processus progressivement mesurable** par rapport a $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si l'application $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ de $[0, t] \times \Omega$ dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable par rapport $\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$.

## 2.2 Martingale

**Proposition 2.2.1.** ***Propriétés de l'espérence conditionnelle*** *Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires intégrables et $F$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.*

*1- **Linéarité** : Soit $a$ et $b$ deux constantes.*

$$E(aX + bY \setminus F) = aE(X \setminus F) + bE(Y \setminus F).$$

*2- **Croissance** : Si $X \leq Y$. Alors $E(X \setminus F) \leq E(Y \setminus F)$.*

*3- $E[E(X \setminus F)] = E(X)$.*

*4- Si $X$ est F-mesurable, $E(X \setminus F) = X$.*

5- *Si* $Y$ *est -mesurable bornée,* $E(XY \setminus F) = YE(X \setminus F)$.

6- *Si* $X$ *est indépendant de* $F$, $E(X \setminus F) = E(X)$.

**Définition 2.2.1. (Cas discret :Martingale)** Une suite de variable aléatoire réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale si :

1- $X_n$ est $\mathcal{F}_n$-adapté.

2- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ est intégrable, si $E[|X_n|] < +\infty$.

3- $E[X_{n+1} \setminus \mathcal{F}_n] = X_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Définition 2.2.2. (Cas continu :Martingale)** Un processus $X$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale si :

1- $X$ est $\mathcal{F}_t-$adapté.

2- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $X_t$ est intégrable, si $E[|X_n|] < +\infty$.

3- $E[X_t \setminus \mathcal{F}_s] = X_s$, pour tout $0 \leq s \leq t$.

**Remarque 2.2.1.** 1- **Une sur-martingale** pour le cas discret (continu) est un processus qui vérifie les deux premières propriété de deux définitions précédentes et $E[X_{n+1} \setminus \mathcal{F}_s] \leq X_n, \forall n \in \mathbb{N}$. ($E[X_t \setminus \mathcal{F}_s] \leq X_s$, pour tout $0 \leq s \leq t$).

2- **Une sous-martingale** pour le cas discret(continu) est un processus qui vérifie les deux premières propriété de deux définitions précédentes et $E[X_{n+1} \setminus \mathcal{F}_s] \geq X_n$, ∀n ∈ $\mathbb{N}$. ($E[X_t \setminus \mathcal{F}_s \geq X_s$, pour tout $0 \leq s \leq t$).

**Dans la suite, on se donne un espace de probabilité filtré** $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ **et un processus** $(X_t)_{t\geq 0}$ **sur cet espace.**

## 2.3 Mouvement Brownien

En 1827 (seulement 35 après la création de la "New York Stock Exchange"), Un botaniste anglais du nom de Robert Brown a étudié le mouvement du guide situé à l'intérieur des grains de pollen. Il remarqua alors que ce liquide suivait un "mouvement de grouillement continue" apparemment chaotique. Brown attribua tout d'abord ce mouvement à une activité vitale. La première explication scientifique de ce phénomène vient d'Albert Einstein. Il montra en 1905 que ce mouvement (maintenant appelé mouvement Brownien) pouvait être expliqué par le "bombardement continuel de particule, exercé par les molécules du liquide". La première description mathématique du phénomène et de ses propriétés a ensuite été fournie par le fameux mathématicien Norbert Wiener en 1918. Un mouvement Brownien sera donc parfois appelé processus de Wiener. Il est surtout intéressant pour nous de noter que le phénomène de mouvement Brownien a été utilisé en 1900 par le mathématicien français Bachelier pour modéliser les mouvement de prix d'une option. En 1923, Norbert Wiener réalise la première étude mathématique rigoureuse et donne une démonstration de l'existence du Brownien

**Définition 2.3.1.** Le processus $(X_t, t \geq 0)$ est un **mouvement Brownien** ou **processus de Wiener** si :

1- $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ (le mouvement Brownien est issu l'origine).

2- $0 \leq s < t$, $X_t - X_s$ est une variable réelle de loi gaussienne, centrée de variance $t - s$.

3- $\forall n, \forall t_i, 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, les variables $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, ..., X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_0}$ sont indépendantes.

**Définition 2.3.2.** On appelle **un mouvement Brownien standard** à valeur dans $\mathbb{R}^d$, un vecteur $X = (X^1, ..., X^d)$ où les $X^i$ sont des mouvements Brownien réels indépendants.

**Remarque 2.3.1.** On dit que $X$ est un $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$-MB(mouvement Brownien) si $X$ est un processus continu, adapté à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, vérifiant :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall 0 \leq s \leq t, \quad \mathbb{E}\left(e^{iu(W_t - W_s)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \exp\left\{-u^2(t-s)/2\right\}$$

**Proposition 2.3.1.** *Soit $X$ un mouvement Brownien standard alors :*

*1- Pour tout $s > 0$, $\{X_{t+s} - X_s\}_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien indépendant de $\sigma\{X_u, u \leq s\}$.*

*2- $-X$ est aussi un mouvement Brownien.*

*3- Pour tout $c > 0$, $\{cX_{t/c^2}\}$ est un mouvement Brownien.*

*4- Le processus défini par $W_0 = 0$ et $W_t = tX_{1/t}$ est un mouvement Brownien.*

## 2.4 Calcul d'Itô

La formule d'Ito est un des outils essentiels pour les applications de l'intégrale stochastique à différents problèmes.

Considérons le processus stochastique $(X_t)_{t\in[0,T]}$ à valeurs réelles ayant la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t b_s d_s + \int_0^t \sigma_s db_s \quad (0 \leq t \leq T). \tag{2.4.1}$$

Où $(b_t)_{t\in[0,T]}$ et $(\sigma_t)_{t\in[0,T]}$ sont deux processus stochastiques à valeurs progressivement mesurables et tels que :

$$\int_0^T |b_s| d_s < +\infty \quad \int_0^T |\sigma_s|^2 ds < +\infty$$

**Théorème 2.4.1.** ***(Formule d'Itô)*** *Soit $f$ une fonction deux fois dérivable et $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ayant la forme 2.4.1, alors on a :*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^T f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d < X, X >_t \tag{2.4.2}$$

*Où*

$$< X, X >_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds.$$

CHAPITRE 3

# Contrôlabilité approximative finie

Dans cette étude, nous examinerons simultanément la contrôlabilité exacte en dimension finie et moyen carré approximativement contrôlable de l'équation d'évolution intégro-différentielle fractionnaire stochastique suivante :

$$
\begin{aligned}
&{}^{\mathsf{C}}D_{0+}^{\alpha}y(t) = [Ay(t) + BU(t) + F(t, y(t))]dt + \int_0^t g(r, y(r))dw(r) \\
&\text{y(0)=y}_0
\end{aligned}
\tag{3.0.1}
$$

Où ${}^{\mathsf{C}}D_{0+}^{\alpha}$ est la dérivé de caputo d'ordre $1/2 < \alpha < 1$, $H$ est un espace de Hilbert séparable, $y : [0, T] \times \Omega \to H, u : [0, T] \times \Omega \to \mathfrak{U}$, $u$ est la fontion de contrôle, $\mathfrak{U}$ est un espace de Hilbert séparable, $A$ est un générateur infinitisémal de $C_0-$ semi groupe compact, $B : \mathfrak{U} \to H$ est un opérateur linéaire borné et $f[0, T]\times \to H, g : [0, T] \times L^2$ sont des fonctions. Nous introduisons le nouveau concept de contrôle suivant :

**Définition 3.0.1.** Soit $M$ un sous-espace de dimension finie de $H$, $\pi_M$ note la projection orthogonale de $H$ à $M$, le système 3.0.1 est de dimension finie exacte et moyen carré approximativement contrôlable si :

$\forall y_0 \in H, y_T \in L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ et $\epsilon > 0, \exists u_\varepsilon \in L^2_{\mathfrak{F}}(0, T, \mathfrak{U})$ telle que les solutions de 3.0.1 satisfaient :

$$
\mathbf{E}\left\|y\left(T; u_\varepsilon\right) - y_T\right\|^2 < \varepsilon^2,
\tag{3.0.2}
$$

$$
\pi_M y\left(T; u_\varepsilon\right) = \pi_M y_T
\tag{3.0.3}
$$

La contrôlabilité simultanée exacte en dimension finie et approximée au carré moyen est appelée contrôlabilité finie-approximée, Cela signifie que la commande $u$ peut être choisie de telle sorte que $y(T;u)$ vérifie 3.0.2 et simultanément un nombre fini de contraintes, c'est-à-dire la condition 3.0.3.

## 3.1 Préliminaires

Nous introduisons des notations et des résultats préliminaires pour établir nos principaux résultats.

1- $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{B})$ est un espace de probabilité avec une filtration normale $(\mathfrak{F}_t)_{t\geq 0}$.

2- $W(t)$ est un processus Q-Wiener sur $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{B})$ avec un opérateur linéaire $Q : K \longrightarrow K$ tel que $TrQ < \infty$. Il est supposé qu'il existe une base $\{e_K\}_{K\geq 1}$ en $K$, une suite borné des nombres $\lambda_K \geq 0$ tel que $e_K = \lambda_K e_K, K = 1, 2, ...,$ et une suite $\{\beta_K\}_{K\geq 1}$ de mouvement Brownien indépendants tel que :

$$\langle W(t), e\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \langle e_k, e\rangle \beta_k(t), e \in K, t \in [0, T]$$

Et $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^W$, où $\mathfrak{F}_t^W$ est l'algèbre sigma engendrée par

$$\{X(s) : 0 \leq s \leq t\}$$

C.a.d :

$$\mathfrak{F}_t^W = \sigma\{W(s) : 0 \leq s \leq t\} \vee \mathcal{N}.$$

Où $\mathcal{N}$ est la collection de l'ensemble P-nuls de $\mathfrak{F}$.

3- $\left(H, \|\cdot\|_H = \sqrt{(\cdot,\cdot)_H}\right)$ est un espace de Hilbert séparable, on omettant le $H$ dans la norme lorsque'aucune confusion n'est possible. $K$ et $\mathfrak{U}$ sont des espaces de Hilbert séparables.

4- Pour toute pair $H_1$ et $H_2$ d'espaces de Hilberte réels séparables on note par $L(H_1, H_2)$.

5- $L_2^0 = L_2\left(Q^{1/2}K; H\right)$ est l'espace de tous les opérateurs de Hilberte-Schmidt

$$\psi : Q^{1/2}K \to H$$

Avec le produit interne

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2^0} = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi Q \phi e_k, e_k)_K = \mathrm{tr}[\psi Q \phi].$$

6- $L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ est l'espace de Hilbert des tous les fonctions carrés intégrables $\mathfrak{F}_T$-mesurables de : $f : [0,T] \times \Omega \to H$.

7- $L^2_{\mathfrak{F}}(0,T;H)$ est l'espace de Hilbert de tous les processus carrés intégrables et $\mathfrak{F}_t^-$-processus adapté $f : [0,T] \times \Omega \to H$.

8- $C([0,T];H)$ est l'espace de Banach de toutes les fonctions continues $f : [0,T] \to H$ doté de la norme $\|x\|_C := \sup\{\|x(t)\|_H : t \in [0,T]\}$.

9- $C\Big(0,T;L^2(\mathfrak{F},H)\Big)$ être l'espace Banach des maps continues de

$$f : [0,T] \longrightarrow L^2(\mathfrak{F},H)$$

satisfaisant à la condition :

$$\sup\Big\{\mathbf{E}\|\varphi(t)\|_H^2 : t \in [0,T]\Big\} < \infty$$

10- $\mathfrak{H}_2 := \mathfrak{H}_2(0,T,H)$ est le sous-espace fermé de $C\Big(0,T;L^2(\mathfrak{F},H)\Big)$ constitué de processus mesurable et $\mathfrak{F}_t$-adapté $H$-Valorisé $\varphi \in C\Big(0,T;L^2(\mathfrak{F},H)\Big)$ dotés de la norme :

$$\|\varphi\|_2 = \left(\sup_{0\le t\le T} \mathbf{E}\|\varphi(t)\|_H^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

11- A : $D(A) \subset H \to H$ est le générateur infénitisémal d'un $C_{0^-}$ semi-groupes $S : H \to H$ et $B \in L(\mathfrak{U},H)$ tel que :

$$\sup_{0\le t\le T} \|S(t)\|_{L(H)} = M_S \ \text{et} \|B\|_{L(\mathfrak{U},H)} = M_B$$

.

12- Défini deux familles d'opérateurs :

$$\mathfrak{D}(t)=\int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)S\left(t^\alpha\theta\right)d\theta,\quad \mathfrak{G}(t)=\alpha\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)S\left(t^\alpha\theta\right)d\theta,\quad t\geq 0,$$
$$\xi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\alpha}\theta^{-1-1/\alpha}\varpi_\alpha\left(\theta^{-1/\alpha}\right)\geq 0,$$
$$\varpi_\alpha(\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\theta^{-n\alpha-1}\frac{\Gamma(n\alpha+1)}{n!}\sin(n\pi\alpha),\quad \theta\in(0,\infty),$$

Où $\xi_\alpha(\theta)$ est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0,\infty)$, soit :

$$\xi_\alpha(\theta)\geq 0,\quad \theta\in(0,\infty)$$
$$\int_0^\infty \xi_\alpha(\theta)d\theta=1$$
$$\int_0^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}$$

**Proposition 3.1.1.** *Nous listons les propriétés de base de $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{G}$ qui seront utilisé dans la suite :*

1- *Pour tout $t\geq 0$ fixé et pour tout $x\in X$, $\|\mathfrak{D}(t)x\|\leq M_S\|x\|$ et $\|\mathfrak{G}(t)x\|\leq \dfrac{M_S}{\Gamma(\alpha)}\|x\|$.*

2- *$\mathfrak{D}(t):t\geq 0$ et $\{\mathfrak{G}(t):t\geq 0\}$ sont fortement continues*

3- *$\{\mathfrak{D}(t):t>0\}$ et$\{\mathfrak{G}(t):t>0\}$ sont des opérateurs compacts si $\{S(t),t>0\}$ est compact.*

**Afin d'énoncer et de prouver nos principaux résultats, nous imposons les hypothèses suivantes :**

$(H_1)$ : $f:[0,T]\times H\to H$ est une fonction continue satisfaisant la condition suivante. Il existe une fonction continue positive $n\in C([0,T],(0,\infty))$ est une fonction continue non décroissante $\Lambda_f:[0,,\infty)\to(0,\infty)$ tel que pour tout $(t,y)\in[0,T]\times H$, On a :

$$\|f(t,y)\|^2\leq n(t)\Lambda_f\left(\|y\|^2\right),\quad \lim_{r\to\infty}\inf_r\frac{\Lambda_f(r)}{r}=\sigma_f<\infty$$

$(H_2)$ : $g:[0,T]\mid\times H\to L_2^0$ est une fonction continue satisfaisant la condition suivante. Il existe une fonction continue positive $m\in C([0,T],(0,\infty))$ et une fonction continue non décroissante $\Lambda_g:[0,\infty)\to(0,\infty)$, tel que pour tout $(t,y)\in[0,T]\times H$, on a :

$$\|g(t,y)\|_{L_2^0}^2\leq m(t)\Lambda_g\left(\|y\|^2\right),\quad \lim\inf_{r\to\infty}\frac{\Lambda_g(r)}{r}=\sigma_g<\infty.$$

$(H_3)$ : Supposons que la relation suivante est vérifié :

$$4\frac{M_S^2}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\sigma_f\|n\|_C + 4\frac{M_S^2}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{T^{2\alpha}}{2\alpha-1}\sigma_g\|m\|_C < 1.$$

$(AC)$ : Le système stochastique linéaire :

$$y(t) = \mathfrak{D}(t)y_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(t-s)Bu(s)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(t-s)\int_0^s \sigma(r)dw(r)ds \tag{3.1.4}$$

Qui correspond à 3.0.1 est approximativement contrôlable sur $[0, T]$.

ici $\sigma \in \mathfrak{H}_2\left(0, T; L_2^0\right)$.

**Théorème 3.1.1.** *Le système 3.1.4 est approximativement contrôlable si et seulement si :*

$$B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathrm{E}\{\varphi \mid \mathfrak{F}_s\} = 0, \quad 0 < S < T$$

*implique que : $\varphi = 0$. Ici $\varphi \in L^2(\mathfrak{F}_T, H)$.*

Nous introduisons la définition suivante des solutions pour 3.0.1.

**Définition 3.1.1.** On dit que le processus stochastique $y \in \mathfrak{H}_2$ est une solution 3.0.1 si : pour tout $u \in L^2_{\mathfrak{F}}(0, T, \mathfrak{U})$ il satisfait l'équation stochastique intégrale suivante :

$$\begin{aligned} y(t) = \mathfrak{D}(t)y_0 &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(t-s)[Bu(s) + f(s, y(s))]ds \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(t-s)\int_0^s g(r, y(r))dw(r)ds \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0, y_T \in L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ nous introduisons la fonction suivante :

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\varphi; z) = \frac{1}{2}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{V}^*(T-s)\mathbf{E}\{\varphi \mid \mathfrak{F}_s\}\right\|^2 ds \\ +\varepsilon\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_M)\varphi\right\|^2} - \mathbf{E}\langle\varphi, h(z)\rangle \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Où :

$$\begin{aligned} h(z) = y_T - \mathfrak{D}(T)y_0 &- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(T-s)f(s, z(s))ds \\ &- \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(T-s)\int_0^s g(r, z(r))dw(r)ds. \end{aligned}$$

**Nous prouvons maintenant des plusieurs lemmes :**

**Lemme 3.1.1.** *l'ensemble* $\mathfrak{W} = \{h(z) : z \in B(0;r)\}$ *est relativement compact dans :* $L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *où :* $B(0;r) = \{z \in \mathfrak{H}_2 : \|z\|_{\mathfrak{H}_2} \leq r\}$.

**Preuve 3.1.1.** *Soit* $0 < \lambda < T$ *fixé, pour* $\delta > 0$ *on définit la fonction :* $h^{\lambda,\delta} : B(0;r) \to L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *par :*

$$h^{\alpha,\delta}(z) := z_T - \mathcal{D}(T)z_0 - \alpha\int_0^{T-\lambda} \times \int_g^\infty (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_\alpha(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta\right)f(s,z(s))d\theta ds$$
$$-\alpha\int_0^{T-\lambda}\int_5^\infty (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_\alpha(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta\right)\int_0^s g(r,z(r))dw(r)d\theta ds$$
$$= z_T - \mathcal{D}(T)z_0 - \alpha S\left(\lambda^\alpha\delta\right)\int_0^{T-\lambda} \times \int_s^\infty (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_\alpha(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta - \lambda^\alpha\delta\right)f(s,z(s))d\theta ds$$
$$-\alpha S\left(\lambda^\alpha\delta\right)\int_0^{T-\lambda}\int_s^\infty (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_\alpha(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta - \lambda^\alpha\delta\right)\times\int_0^s g(r,z(r))dw(r)d\theta ds.$$

*à partir des limites des termes intégraux et de la compacité* $\overline{\mathcal{D}}(T), S\left(\lambda^\alpha\delta\right)$. *on obtient que l'ensemble* $\mathfrak{w}^{\lambda,\delta} := \left\{h^{\lambda,\delta}(z) : z \in B(0;r)\right\} \subset L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *est relativement compact. Pour montrer que* $\mathfrak{W}$ *est relativement compact, nous estimons la différence* $h^{\lambda,\delta}(Z) - h(Z)$ :

$$E\left\|h^{\lambda,\delta}(z) - h(z)\right\|^2$$
$$\leq 4E\left\|\alpha\int_0^T\int_0^\delta (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_a(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta\right)f(s,z(s))d\theta ds\right\|^2$$
$$+4E\left\|\alpha\int_{T-\lambda}^T\int_a^\infty (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_a(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta\right)f(s,z(s))d\theta ds\right\|^2$$
$$+4E\left\|\alpha\int_0^T\int_0^s (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_\alpha(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta\right)\int_0^s g(r,z(r))dw(r)d\theta ds\right\|^2$$
$$+4E\|\ \alpha\int_{T-\lambda}^T\int_a^\infty (T-s)^{\alpha-1}\theta\xi_\alpha(\theta)S\left((T-s)^\alpha\theta\right)\int_0^s g(r,z(r))dw(r)d\theta ds\Big|^2$$

*Il en résulte que :*

$$E\left\|h^{\lambda,\delta}(z) - h(z)\right\|^2$$
$$\leq 4\alpha^2M_s^2\int_0^T (T-s)^{2\alpha-2}ds\int_0^T \|f(s,z(s))\|^2 ds\left(\int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\right)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+4\alpha^2 M_S^2 \int_{T-\lambda}^{T} (T-s)^{2\alpha-2} ds \int_{T-\lambda}^{T} \|f(s,z(s))\|^2 ds \left(\int_\delta^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\right)^2 \\
&+4\alpha^2 M_S^2 \int_0^T (T-s)^{2\alpha-2} ds \int_0^T \int_0^s \|g(s,z(s))\|^2_{L_2^0} drds \left(\int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\right)^2 \\
&+4\alpha^2 M_S^2 \int_{T-\lambda}^{T} (T-s)^{2\alpha-2} ds \int_{T-\lambda}^{T} \int_0^s \|g(s,z(s))\|^2_{L_2^0} drds \left(\int_\delta^\infty \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\right) \\
&\leq 4\alpha^2 M_S^2 \frac{T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \|n\| \Lambda_f(r) \left(\int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\right)^2 \\
&+4\alpha^2 M_S^2 \frac{\lambda^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \|n\| \Lambda_f(r) \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\
&+4\alpha^2 M_S^2 \frac{T^{2\alpha}}{2\alpha-1} \|m\| \Lambda_g(r) \left(\int_0^\delta \theta\xi_\alpha(\theta)d\theta\right)^2 \\
&+4\alpha^2 M_S^2 \frac{\lambda^{2\alpha}}{2\alpha-1} \|m\| \Lambda_g(r) \frac{1}{\Gamma^2(\alpha+1)} \to 0 \; comme \, \lambda, \delta \to 0.
\end{aligned}
$$

*Par conséquent,* $\mathfrak{W}$ *peut être approché par des ensembles relativement compact* $\mathfrak{W}^{\lambda,\delta}$*, ce qui signifie que* $\mathfrak{W}$ *est relativement compact dans* $L^2(\mathfrak{F}_T, H)$

**Lemme 3.1.2.** *La fonction* $h : B(0;r) \to L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *est continue.*

**Preuve 3.1.2.** *Supposons que* $z, z_n \in B(0;r)$ *et* $z_n \to z$ *dans* $\Omega_2$ *comme* $n \to \infty$ *alors par l'hypothèse* $(\mathrm{H}_1)$ *et* $(\mathrm{H}_2)$

$$
f(t, z_n(t)) \to f(t, z(t)) et g(t, z_n(t)) \to g(t, z(t))
$$

*Sur* $[0, T] \times \Omega$*. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le théorème de convergence donnée Lebesgue, nous obtenons :*

$$
\begin{aligned}
I_{1,n} &:= E \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathfrak{B}(T-s) \left[f(s, z_n(s)) - f(s, z(s))\right] ds\|^2 \\
&\leq \frac{M_S^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{2\alpha-2} ds \int_0^T E \left\|f(s, z_n(s)) - f(s, z(s))\right\|^2 ds \\
&= \frac{M_S^2}{\Gamma^2(\alpha)} \frac{T^{2-1}}{2\alpha-1} \int_0^T E \left\|f(s, z_n(s)) - f(s, z(s))\right\|^2 ds \to 0 \quad comme \, n \to \infty
\end{aligned}
$$

*De même, en utilisant l' inégalité de Cauchy-Schwartz, nous pouvons obtenir :*

$$
\begin{aligned}
I_{2,n} := E & \left\| \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathfrak{B}(T-s)\int_0^s \left[g\left(r,z_n(r)\right)-g(r,z(r))\right] dw(r)ds \right\|^2 \\
& \leq \frac{M_s^2}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{2\alpha-2}ds \int_0^T \int_0^s E\left[g\left(r,z_n(r)\right)-g(r,z(r))\right\|_{L_2}^2 drds \\
& \to 0 \; comme \, n \to \infty
\end{aligned}
$$

*Par conséquent :* $E\left\|h\left(z_n\right)-h(z)\right\|^2 \leq 2I_{1,n}+2I_{2,n} \to 0 \quad comme \quad n \to \infty$ *et* $h$ *est continue dans* $B(0;r)$.

**Lemme 3.1.3.** *La fonctionnelle* $J_\varepsilon : L^2(\mathfrak{F}_T, H) \times \mathfrak{H}_2 \to R$ *a les propriétés suivantes :*

1- *pour tout* $z \in \mathfrak{H}_2$. *La fonction* $\varphi \to J_\varepsilon(\varphi; z) : L^2(\mathfrak{F}_T, H) \to R$ *est strictement convexe et continue.*

2- *pour tout nombre réel* $\mathrm{r} > 0$.

$$
\lim_{\mathbf{E}\|\varphi\|^2 \to \infty} \inf_{z\in B(0;r)} \frac{J_\varepsilon(\varphi;z)}{\sqrt{E\|\varphi\|^2}} \geq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1.6}
$$

**Preuve 3.1.3.** *La formule de la définition 3.1.5 de* $J_\varepsilon(\cdot;z)$, *montre clairement qu'elle est strictement convexe et continue. Pour prouver 3.1.6 supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe deux suite :*

$$
\{\varphi_n\} \subset L^2(,H), \{z_n\} \subset B(0;r)
$$

*telle que*

$$
\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2 \to \infty \quad et \quad \underline{lim}_{n\to\infty} \frac{J_\varepsilon\left(\varphi_n; z_n\right)}{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.1.7}
$$

*D'autre part par lemme* ***3.1.1*** *l'ensemble*

$$
\mathfrak{W} = \{h(z) : z \in B(0;r)\} \subset L^2\left(\mathfrak{F}_T, H\right)
$$

*Est relativement compact. Ainsi sans perte de généralité, en choisissant une sous-suite (toujours notée* $h(z(n))$, *on peut supposer que :*

$$
h\left(z_n\right) \to h, fortement \quad dans \quad L^2\left(\mathfrak{F}_T, H\right), \tag{3.1.8}
$$

*Pour un certain* $h \in L^2\left(\mathfrak{F}_T, H\right)$, *puisque* $\{z_n\} \subset B(0;r)$. *Ensuite, normalisons* $\varphi_n$ *comme* *suite :*

$$\widetilde{\varphi}_n = \frac{\varphi_n}{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}}, \quad \sqrt{\mathbf{E}\left\|\widetilde{\varphi}_n\right\|^2} = 1. \tag{3.1.9}$$

*D'aprés 3.1.9, il s'ensuite que, nous pouvons choisir une sous-suite (toujours notée par* $\widetilde{\phi}_n$*). Qui est faiblement convergante dans* $L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *est convergé a un élément* $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathfrak{F}_T, H)$*, La compacité de l'opérateur* $\mathfrak{G}^*(t), t > 0$*, implique que :*

$$B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\{\widetilde{\varphi}_n \mid \mathfrak{F}_s\} \to B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\{\widetilde{\varphi} \mid \mathfrak{F}_s\} \tag{3.1.10}$$

*Fortement dans* $\mathfrak{H}_2$*. D'aprés 3.1.5, il s'ensuite que :*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2} J_\varepsilon(\varphi; z) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\{\tilde{\varphi}_n \mid \mathfrak{F}_s\}\right\|^2 ds \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}}\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_M)\,\tilde{\varphi}_n\right\|^2} - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}}\mathbf{E}\left\langle \tilde{\varphi}_n, h(z_n)\right\rangle
\end{aligned} \tag{3.1.11}$$

*Ainsi, sachant que* $\mathrm{E}\left\|\varphi_n\right\|^2 \to \infty$*, par 3.1.7 et 3.1.10 et le lemme de Fatou, nous avons ce qui suite :*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\{\widetilde{\varphi} \mid \mathfrak{F}_s\}\right\|^2 ds \\
&\leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\{\widetilde{\varphi}_n \mid \mathfrak{F}_s\}\right\|^2 ds = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\{\widetilde{\varphi} \mid \mathfrak{F}_s\} \\
&= 0 \text{ sur } [0, T].
\end{aligned}$$

***Par hypothèse(AC) :*** *la dernière équation implique que* $\tilde{\varphi} = 0$*, et on en déduit que* $\widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{\varphi} = 0$ *faiblement dans* $L^2(\mathfrak{F}_T, H)$*. Comme M est de dimension finie que* $\pi_M$ *est compact,* $\pi_M\mathbf{E}\widetilde{\varphi}_n \longrightarrow 0$ *dans* H *et donc :*

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{E}(I-\pi_M)\,\tilde{\varphi}_n\right\|^2 = \lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{E}\tilde{\varphi}_n\right\|^2 + \left\|\pi_M\mathbf{E}\tilde{\varphi}_n\right\|^2 = 1.$$

*Par conséquent, il résulte de 3.1.5 que :*

$$\frac{J_\varepsilon\left(\varphi_n;z_n\right)}{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}}=\frac{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}}{2}\int_0^T(T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\widetilde{\varphi}_n\mid\mathfrak{F}_s\right\}\right\|^2ds$$
$$+\varepsilon\sqrt{\mathbf{E}\left\|\left(I-\pi_M\right)\widetilde{\varphi}_n\right\|^2}-\mathbf{E}\left\langle\widetilde{\varphi}_n,h\left(z_n\right)\right\rangle,$$

*et :*

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{J_\varepsilon\left(\varphi_n;z_n\right)}{\sqrt{\mathbf{E}\left\|\varphi_n\right\|^2}}\geq\varliminf_{n\to\infty}\left(\varepsilon\sqrt{\mathbf{E}\left\|\left(I-\pi_M\right)\widetilde{\varphi}_n\right\|^2}-\mathbf{E}\left\langle\widetilde{\varphi}_n,h\left(z_n\right)\right\rangle\right)$$
$$\geq\varliminf_{n\to\infty}\left\|\mathbf{E}\left(I-\pi_M\right)\widetilde{\varphi}_n\right\|=\varepsilon,$$

*ce qui contredit 3.1.7 et prouve l'affirmation 3.1.6*

**Lemme 3.1.4.** *dit que la fonctionnelle : $J_\varepsilon(\cdot;z):L^2\left(\mathfrak{F}_T,H\right)\to R$ est coercive et strictement convexe pour tout $z\in\mathfrak{S}_2$. Il s'ensuite $J_\varepsilon(\cdot;z\,)$possède une unique minimum $\widehat{\varphi}_\varepsilon$, donc nous pouvons définir une fonction*

$$\Phi_\varepsilon:\mathfrak{H}_2\to L^2\left(\mathfrak{F}_T,H\right)$$

*Comme suite $\Phi_\varepsilon(z)=\widehat{\varphi}_\varepsilon$.*

***Le lemme suivante montre quelques propriétés de la fonction $\Phi_\varepsilon$.***

**Lemme 3.1.5.** *supposons que :*

1- *$\Phi_\varepsilon$ est borné sur $B(0;r)$, c'est-à-dire qu'il existe $L_\varepsilon>0$ tel que pour tout $z\in B(0;r)$ on a : $\mathbf{E}\left\|\Phi_\varepsilon(z)\right\|^2\leq L_\varepsilon$.*
2- *supposons que $z_n,z\in B(0;r)$ et $z_n\longrightarrow z$, dans $\mathfrak{H}_2$. Alors on a :*

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{E}\left\|\Phi_\varepsilon\left(z_n\right)-\Phi_\varepsilon(z)\right\|^2=0$$

**Preuve 3.1.4.**

*Par lemme **3.1.3** on a :*

$$\lim_{\mathbf{E}\|\varphi\|^2\to\infty}\inf_{z\in B(0;r)}\frac{J_\varepsilon(\varphi;z)}{\sqrt{\mathbf{E}\|\varphi\|^2}}\geq\frac{\varepsilon}{2}$$

*Il s'ensuite qu'il existe $L_\varepsilon>0$, tel que :*

$$\inf_{z\in B(0;r)}\frac{J_\varepsilon(\varphi;z)}{\sqrt{\mathbf{E}\|\varphi\|^2}}\geq\frac{\varepsilon}{2}\quad si:\sqrt{\mathbf{E}\|\varphi\|^2}>L_\varepsilon\tag{3.1.12}$$

*D'autre part, puisque* $\Phi_\varepsilon(z)$ *est le minimum de* $J_\varepsilon(\cdot;z)$. *On obtient que :*

$$J_\varepsilon\left(\Phi_\varepsilon(z);z\right) \leq J_\varepsilon(0;z) = 0 \tag{3.1.13}$$

*Par conséquent, par 3.1.12 et 3.1.13, pour tout* $z \in B(0;r)$ : $E\left\|\Phi_\varepsilon(z)\right\|^2 \leq L_\varepsilon$.

*Lemme* **3.1.5** *dit que la suite* $\{\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} = \Phi_\varepsilon(z_n)\}$ *est borné ce qui implique, sans perte de généralité que* $\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \rightarrow \widetilde{\varphi}_\varepsilon$ *faiblement dans* $L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *comme* $n \rightarrow \infty$. *De la définition de* $J_\varepsilon$ *et de l'optimalité de* $\widehat{\varphi}_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(z)$, *il résulte que :*

$$J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon;z\right) \leq J_\varepsilon\left(\widetilde{\varphi}_\varepsilon;z\right) \leq \underline{\lim}_{n\rightarrow\infty} J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n};z_n\right)$$

*D'autre part, par l'optimalité de* $\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} = \Phi_\varepsilon(z_n)$, *on a :*

$$\overline{\lim}_{n\rightarrow\infty} J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n};z_n\right) \leq \lim_{n\rightarrow\infty} J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon;z_n\right) = J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon;z\right)$$

*En combinant les deux inégalité précédentes, on a :*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n};z_n\right) = J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon;z\right) = J_\varepsilon\left(\widetilde{\varphi}_\varepsilon;z\right) \tag{3.1.14}$$

*Ce qui signifie que* $\tilde{\varphi}_\varepsilon$ *est aussi un minimum de* $J_\varepsilon(\cdot;z)$, *par l'unicité du minimum, il est clair que* $\tilde{\varphi}_\varepsilon = \widehat{\varphi}_\varepsilon$. *D'autre part d'après 3.1.14 :propriétés de compacité de* $\mathfrak{G}^*(T,s)$, *la continuité de* $h(z)$, *et* $\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \overset{faiblement}{\longrightarrow} \widehat{\varphi}_\varepsilon$ *on obtient :*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\rightarrow\infty} J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n};z_n\right) = J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon;z\right)\\
&\lim_{n\rightarrow\infty} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\|^2 ds\\
&\quad = \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\|B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_\varepsilon \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\|^2 ds\\
&\lim_{n\rightarrow\infty} \mathbf{E}\left\langle\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n}, h\left(z_n\right)\right\rangle = \mathbf{E}\left\langle\widehat{\varphi}_\varepsilon, h(z)\right\rangle\\
&\mathbf{E}\left\|\left(I-\pi_M\right)\widehat{\varphi}_\varepsilon\right\|^2 \leq \lim \mathbf{E}\|(I-\pi)\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n}\|^2
\end{aligned}$$

*Ces relations implique que :*

$$\lim_{n\rightarrow\infty} \mathbf{E}\left\|\left(I-\pi_M\right)\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n}\right\|^2 = \mathbf{E}\left\|\left(I-\pi_M\right)\widehat{\varphi}_\varepsilon\right\|^2 \tag{3.1.15}$$

*Puisque $H$ est un espace de Hilbert et que $\pi_M$ est compact.*

*D'après :* $\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \overset{faiblement}{\longrightarrow} \widehat{\varphi}_{\varepsilon}$ *et 3.1.15 , nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \mathrm{E} \left\| \widehat{\varphi}_{c,n} \right\|^2 \\
&\quad = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} \left\| (I-\pi_M)\, \widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \right\|^2 + \lim_{n\to\infty} \mathrm{E} \left\| \pi_M \widehat{\varphi}_{c,n} \right\|^2 \\
&\quad = \mathrm{E} \left\| (I-\pi_M)\, \widehat{\varphi}_{c} \right\|^2 + \mathrm{E} \left\| \pi_M \widehat{\varphi}_{c} \right\|^2 = \mathrm{E} \left\| \widehat{\varphi}_{c} \right\|^2
\end{aligned}$$

*Donc :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left\| \widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \right\|^2 = \mathbf{E} \left\| \widehat{\varphi}_{\varepsilon} \right\|^2 \ \ et \widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} \overset{faiblement}{\longrightarrow} \widehat{\varphi}_{\varepsilon}$$

*Ce qui signifie la convergence forte de $\widehat{\varphi}_{\varepsilon,n}$ vers $\widehat{\varphi}_{\varepsilon}$, c'est-a-dire :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} \left\| \widehat{\varphi}_{\varepsilon,n} - \widehat{\varphi}_{\varepsilon} \right\|^2 = 0$$

## 3.2 Résultat de contrôlabilité par approximation finie :

*Soit $y_0, y_t \in H$ deux points quelconques et $\epsilon > 0$ une précision quelconque. On définit un opérateur $\Theta_\varepsilon : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_2$ comme suite :*

$$(\Theta_\varepsilon y)(t) := \mathcal{D}(t) y_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathfrak{B}(t-s) \left[ B u_\varepsilon(s,y) + f(s,y(s)) \right] ds$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \mathfrak{G}(t-s) \int_0^s g(r,y(r)) dw(r) ds \quad (3.2.16)$$

$$u_\varepsilon(t,y) := B^* \mathfrak{G}^* (T-t) \mathbf{E} \left\{ \Phi_\varepsilon(y) \mid \mathfrak{F}_t \right\}$$

*De toute évidence, une solution de 3.0.1, avec*

$$u(s) = u_\varepsilon(s,y) = B^* \mathfrak{B}^* (T-t) \mathbf{E} \left\{ \Phi_\varepsilon(y) \mid \mathfrak{F}_t \right\}$$

$$\begin{aligned}
&{}^C D_{0,t}^{\alpha} y(t) = A y(t) + B u_\varepsilon(t,y) + f(t,y(t)) \\
&0 < \alpha \le 1, t \in [0,T] \\
&y(0) = y_0,
\end{aligned} \quad (3.2.17)$$

*Est une solution de l'équation opérateur $y = \Theta_\varepsilon(y)$ et inversement. Ainsi, nous pouvons appliquer la théorème du point fixe de Shauder pour dériver l'éxictence de solution de l'équation 3.2.17.*

***Pour ce faire, nous devons montrer les propriétés de $\Theta_\varepsilon$ suivantes :***

*1-* $\Theta_\varepsilon : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_2$ *est continue.*

*2-* $\Theta_\varepsilon : \mathfrak{H}_2 \to \mathfrak{H}_2$ *est compact.*

*3-* $\Theta_\varepsilon$ *: l'image de $B(0; r_\varepsilon)$ en lui-même pour un certain $r_\varepsilon > 0$.*

*Compte tenu de ces trois propriétés et comme conséquence du théorème du point fixe de Shauder, l'existence d'un point fixe de $\Theta_\varepsilon$ fuit immédiatement. En d'autre termes, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in \mathfrak{H}_2$ tel que :*

$$y_c(t) = D(t)y_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{B}(t-s)\left[Bu_\epsilon(s, y_\varepsilon) + f(s, y_c(s))\right] ds$$
$$+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{B}(t-s) \int_0^s g(r, y_\epsilon(r))\, dw(r) ds.$$

***pour démontrer les trois propriétés ci-dessus, Nous prouvons d'abord plusieurs lemmes.***

**Lemme 3.2.1.** *Sous les hypothèses $(H_2) - (H_3)$, $(AC)$ nous avons ce qui suit :*

*1-* $\mathrm{u}_\varepsilon(s, y)$*est continue dans $B(0; r)$.*

*2-* $\mathbf{E}\|u_\varepsilon(s, y)\|^2 \leq R_\varepsilon$ *pour un certain $R_z > 0$.*

**Preuve 3.2.1.** *la prouve est découle facilement du lemme **3.1.5**.*

**Lemme 3.2.2.** *Sous les hypothèses $(H_1)$, $(H_3)$ et $(AC)$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre positif $r_\epsilon$ tel que $\Theta(B(0; r_\varepsilon)) \subset B(0; r_\varepsilon)$*

**Preuve 3.2.2.** *Supposons que se ne soit pas vrai. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque $r = r_\epsilon > 0$, il existe une fonction $z_r \in B(0; r)$, mais $\Theta_\epsilon(z_r) \notin B(0; r)$. En d'autres termes,*

$\exists t \in [0, T]$ *tel que :* $r < \mathrm{E}\left\|(\Theta_\varepsilon z_r)(r)\right\|^2$. *Pour un tel* $t$ *en trouve que :*

$$\begin{aligned} r < \mathbf{E}\left\|(\Theta_\varepsilon z_r)(t)\right\|^2 &\leq 4\mathbf{E}\left\|\mathfrak{D}(t)z_0\right\|^2 \\ &+ 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{B}(t-s)Bu_\varepsilon(s, z_r)\, ds\right\|^2 \\ &+ 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{B}(t-s)f(s, z_r(s))\, ds\right\|^2 \\ &+ 4\mathbf{E}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{B}(t-s)\int_0^s g(r, z_r(r))\, dw(r) ds\right\|^2 \\ &=: 4(I_1 + I_2 + I_3 + I_4) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

*Estimons* $I_i, i = 1, \ldots, 4$. *Par l'hypothèse* $(H_1)$, *Nous avons :*

$$I_1 \leq M_S^2 \left\|z_0\right\|^2 \tag{3.2.19}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{M_S^2 M_B^2}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)} ds \int_0^t E\left\|u_\varepsilon(s, z_r)\right\|^2 ds \leq \frac{M_S^2 M_B^2}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{T^{2\alpha}}{2\alpha-1}R_\varepsilon \\ \mathrm{I}_3 &\leq \frac{\mathrm{M}_S^2}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t (\mathrm{t}-\mathrm{s})^{2(\alpha-1)} \mathrm{ds}\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{E}\left\|\mathrm{f}(\mathrm{s}, \mathrm{z_r}(\mathrm{s}))\right\|^2 \mathrm{ds} \\ &\leq \frac{\mathrm{M}_S^2}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{\mathrm{T}^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\left\|\mathrm{n}\right\|_C \Lambda_{\mathrm{f}}(\mathrm{r}) \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

*Par l'inégalité de Couchy-Shwartz on peut déduire que :*

$$\begin{aligned} I_4 &\leq \mathbf{E}\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(t-s)\int_0^s g(r, z_r(\theta))\, dw(\theta) ds\right\|^2 \\ &= \mathbf{E}\int_0^t \left\|(t-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(t-s)\int_0^s g(r, z_r(\theta))\, dw(\theta)\right\|^2 ds \\ &\leq \frac{M_S^2}{\Gamma^2(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)}\mathbf{E}\int_0^s \left\|g(r, z_r(\theta))\right\|_{L_2^0}^2 d\theta ds \\ &\leq \frac{M_S^2}{\Gamma^2(\alpha)}\frac{T^{2\alpha}}{2\alpha-1}\left\|m\right\|_C \Lambda_g(r) \end{aligned} \tag{3.2.21}$$

*En combinant les estimations 3.2.18-3.2.21 on obtient :*

$$\begin{aligned} r \leq \mathbf{E}\left\|\left(\Theta_{\varepsilon} z_{r}\right)(t)\right\|^{2} &< 4 M_{S}^{2}\left\|z_{0}\right\|^{2} \\ &+ 4 \frac{M_{S}^{2} M_{B}^{2}}{\Gamma^{2}(\alpha)} \frac{T^{2 \alpha}}{2 \alpha-1} R_{\varepsilon}+4 \frac{M_{S}^{2}}{\Gamma^{2}(\alpha)} \frac{T^{2 \alpha-1}}{2 \alpha-1}\|n\|_{C} \Lambda_{f}(r) \\ &+ 4 \frac{\mathrm{M}_{S}^{2}}{\Gamma^{2}(\alpha)} \frac{\mathrm{T}^{2 \alpha}}{2 \alpha-1}\|\mathrm{m}\|_{C} \Lambda_{\mathrm{g}}(\mathrm{r}). \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

*Nous devisons 3.2.22 par r et prenons limite comme $r \rightarrow \infty$, pour obtenir :*

$$4 \frac{M_{s}^{2}}{\Gamma^{2}(\alpha)} \frac{T^{2 \alpha-1}}{2 \alpha-1} \sigma_{f}\|n\|_{c}+4 \frac{M_{s}^{2}}{\Gamma^{2}(\alpha)} \frac{T^{2 \alpha}}{2 \alpha-1} \sigma_{g}\|m\|_{c} \geq 1$$

*Ceci est une contradiction, par l'hypothèse* $(\mathrm{H}_3)$.

*Ainsi* $\Theta_{\varepsilon}\left(\mathrm{B}\left(0 ; \quad r_{\varepsilon}\right)\right) \subset B\left(0 ; r_{\varepsilon}\right)$ *pour certain* $r_{z}>0$.

**Lemme 3.2.3.** *supposons que les hypothèses $(H_1)-(H_3)$ et $(AC)$ soient vérifiées. Alors l'ensemble $\{\Theta(z) : z \in B(0;r)\}$ est une famille des fonctions équicontinue sur $[0,T]$.*

**Preuve 3.2.3.** *Soit $0<\eta<t<T$ et $\delta>0$ tel que :*

$$\left\|\mathfrak{D}\left(s_{1}\right)-\mathfrak{D}\left(s_{2}\right)\right\|^{2}<\eta,\left\|\mathfrak{B}\left(s_{1}\right)-\mathfrak{B}\left(s_{2}\right)\right\|^{2}<\eta .$$

*pour tout $s_1, s_2 \in [0,T]$ avec $|s_1-s_2|<\delta$, pour $z \in B(0;r), 0<h<\delta, t+h \in [0,T]$, nous avons :*

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}\left\|\left(\Theta_{\varepsilon} y\right)(t+h)-\left(\Theta_{\varepsilon} y\right)(t)\right\|^{2} \leq 7\left\|\mathfrak{D}(t+h) y_{0}-\mathfrak{D}(t) y_{0}\right\|^{2} \\ &\quad+7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}\left((t+h-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\right) \mathfrak{G}(t+h-s)\left(B u_{\varepsilon}(s, y)+f(s, y(s))\right) d s\right\|^{2} \\ &\quad+7 \mathbf{E}\left\|\int_{t}^{t+h}(t+h-s)^{\alpha-1} \mathfrak{G}(t+h-s)\left(B u_{\varepsilon}(s, y)+f(s, y(s))\right) d s\right\|^{2} \\ &\quad+7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}(\mathfrak{G}(t+h-s)-\mathfrak{G}(t-s))\left(B u_{\varepsilon}(s, y)+f(s, y(s))\right) d s\right\|^{2} \\ &\quad+7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}\left((t+h-s)^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}\right) \mathfrak{G}(t+h-s) \int_{0}^{s} g(r, y(r)) d w(r) d s\right\|^{2} \\ &\quad+7 \mathbf{E}\left\|\int_{0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}(\mathfrak{G}(t+h-s)-\mathfrak{G}(t-s)) \int_{0}^{s} g(r, y(r)) d w(r) d s\right\|^{2} \\ &\quad:=7\left(I_{1}+\ldots I_{7}\right) . \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

*c'est clair.*

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \|\mathfrak{D}(t+h) - \mathfrak{D}(t)\|^2 \|y_0\|^2 < \eta \|y_0\|^2 \\
I_2 &\leq \frac{M_s^2}{\Gamma^2(\alpha)} T \int_0^t \left|(t+h-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right|^2 ds \left(R_\varepsilon + \|n\|_C \Lambda_f(r)\right) \\
I_3 &\leq \frac{M_s^2}{\Gamma^2(\alpha)} h \int_t^{t+h} (t+h-s)^{2(\alpha-1)} ds \left(R_\varepsilon + \|n\|_C \Lambda_f(r)\right) \\
&= \frac{h^{2\alpha}}{2\alpha-1} \frac{M_s^2}{\Gamma^2(\alpha)} \left(R_\varepsilon + \|n\|_C \Lambda_f(r)\right) \\
I_4 &\leq T \int_0^t (t-s)^{2(\alpha-1)} ds \quad sup_{0\leq s\leq t} \|\mathfrak{G}(t+h-s) - \mathfrak{G}(t-s)\|^2 \left(R_\varepsilon + \|n\|_C \Lambda_f(r)\right) \\
&\leq \eta \frac{T^{2\alpha}}{2\alpha-1} \left(R_\varepsilon + \|n\|_C \Lambda_f(r)\right)
\end{aligned}$$

*De la même manière, nous avons :*

$$\begin{aligned}
I_5 &\leq \frac{M_S^2 t}{\Gamma^2(\alpha)} \int_0^t \left|(t+h-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right|^2 ds \|m\|_C \Lambda_g(r) \\
I_6 &\leq \frac{h^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} \frac{M_S^2 t}{\Gamma^2(\alpha)} \|m\|_C \Lambda_g(r) \\
I_7 &\leq \eta \frac{T^{2\alpha}}{2\alpha-1} \|m\|_C \Lambda_g(r)
\end{aligned}$$

*Par conséquent, pour $\eta$ suffisamment, le membre de droite 3.2.23 tend vers zéro comme $h \to 0$. Les cas $t = 0$ et $t = T$ peuvent être faits, de manière semi-linéaire. Ainsi, l'ensemble $\{\Theta_\epsilon z : z \in B_r\}$ est équicontinu.*

**Lemme 3.2.4.** *Que les hypothèses* $(\mathrm{H}_1) - (\mathrm{H}_3)$ *et* $(\mathrm{AC})$ *soient vérifiées. Pour tout $t \in [0, T]$ l'ensemble $V(t) := \{(\Theta_\varepsilon y)(t) : y \in B(0, r)\}$ est relativement compact dans $L_2(\mathfrak{F}_T, H)$.*

**Preuve 3.2.4.** *La preuve est similaire à celle du lemme* ***3.1.1***

**Lemme 3.2.5.** $\Theta_\epsilon : \Omega_2 \to \Omega_2$ *est continue.*

**Preuve 3.2.5.** *La preuve est similaire à celle du lemme* ***3.1.2***.

**Théorème 3.2.1.** *Supposons que :* $(\mathrm{H}_1) - (\mathrm{H}_3)$ *et* $(\mathrm{AC})$ *soient satisfaits. Alors le système 3.2.17 a une solution dans $\mathfrak{H}_2$.*

**Preuve 3.2.6.** *Il ressort des lemmes* ***3.2.2****-* ***3.2.5*** *et du théorème d'Arzela-Ascoli que $\Theta(B(0, r))$ est relativement compact dans $\mathfrak{F}_2$. Donc $\Theta_c$ est un opérateur complètement continue sur $\mathfrak{H}_2$. D'aprés le théorème du point fixe $\Theta_\varepsilon$ a une point fixe dans $\mathfrak{H}_2$.*

***Nous sommes maintenant en mesure de prouver notre résultat principal.***

**Théorème 3.2.2.** *Sous les conditions :* $(\mathrm{H}_1) - (\mathrm{H}_3)$ *et* $(\mathrm{AC})$, *Le système intégro-différentiel stochastique fractionnaire 3.0.1 est finiment-approximativement contrôlable sur* $[0, T]$.

**Preuve 3.2.7.** *Par le lemme **3.1.3(a)** Nous savons que* $J_\epsilon$ *est strictement convexe et continue. Alors* $J_\epsilon\left(\varphi; y_\varepsilon\right)$ *a un unique point minimum* $\hat{\varphi}_c$ *qui minimise* $J_\varepsilon\left(\varphi; y_z\right)$ *:*

$$\widehat{\varphi}_\varepsilon \in L^2(\mathfrak{F}_T, H) : J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon : y_\varepsilon\right) = \min_{\varphi \in X} J_\varepsilon\left(\varphi; y_\varepsilon\right).$$

*De la définition du minimum. Il résulte que pour tout* $\psi \in L^2(\mathfrak{F}_T, H)$ *et* $\lambda \in R$ *nous avons :*

$$J_c\left(\widehat{\varphi}_z; y_\varepsilon\right) \leq J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_c + \lambda\psi; y_\epsilon\right).$$

*En dévisant cette inégalité par* $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\lambda}\left[J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon + \lambda\psi; y_\varepsilon\right) - J_\varepsilon\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon; y_\varepsilon\right)\right] \\
&= \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathbf{E}\left\langle B^* \mathfrak{G}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_\varepsilon \mid \mathfrak{F}_s\right\}, B^* \mathfrak{G}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\rangle ds \\
&+ \frac{\lambda}{2} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathbf{E}\left\|B^* \mathfrak{G}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\|^2 ds \\
&+ \varepsilon \frac{\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_E)\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon + \lambda\psi\right)\right\|^2} - \sqrt{\left\|\mathbf{E}\left(I-\pi_E\right)\widehat{\varphi}_\varepsilon\right\|^2}}{\lambda} - \mathbf{E}\left\langle \psi, h\left(y_\varepsilon\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

*et en laissant* $\lambda \longrightarrow 0^+$ *on obtient que :*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}\left\langle \psi, h\left(y_s\right)\right\rangle \\
&\leq \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathbf{E}\left(B^* \mathfrak{B}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_s \mid \mathfrak{F}_s\right], B^* \mathscr{B}^*(T-s) \mathbf{E}\left|\psi^*\right| \mathfrak{F}_s\right\}\Big) ds \\
&+ \frac{\lambda}{2} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathbf{E}\left\|B^* \mathfrak{G}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\|^2 ds \\
&+ \varepsilon \frac{\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_E)\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon + \lambda\psi\right)\right\|^2} - \sqrt{\left\|\mathbf{E}\left(I-\pi_E\right)\widehat{\varphi}_\varepsilon\right\|^2}}{\lambda} - \mathbf{E}\left\langle \psi, h\left(y_\varepsilon\right)\right\rangle \\
&\quad + \varepsilon \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{\sqrt{E}\left\|(I-\pi_E)\left(\widehat{\varphi}_\varepsilon + \lambda\psi\right)\right\|^2 - \sqrt{\left\|\mathrm{E}\left(I-\pi_E\right)\widehat{\varphi}_\varepsilon\right\|^2}}{\lambda} \\
&\quad \leq \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \mathbf{E}\left\langle B^* \mathfrak{G}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_\varepsilon \mid \mathfrak{F}_s\right\}, B^* \mathfrak{G}^*(T-s) \mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\rangle ds \\
&\quad + \varepsilon \sqrt{\mathrm{E}\left\|(I-\pi_E)\psi\right\|^2}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\varepsilon \lim_{\lambda \to 0^{+}} \frac{\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_E)\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon}+\lambda\psi\right)\right\|^{2}}-\sqrt{\left\|\mathbf{E}\left(I-\pi_E\right)\widehat{\varphi}_{\varepsilon}\right\|^{2}}}{\lambda} \\
&\leq \int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\langle B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_{\varepsilon} \mid \mathfrak{F}_s\right\}, B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\rangle ds \\
&+\varepsilon\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_E)\,\psi\right\|^{2}}
\end{aligned}
$$

*Nous répétons le même argument avec $\lambda < 0$ pour obtenir finalement que :*

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\langle B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\hat{\varphi}_{\varepsilon} \mid \mathfrak{F}_s\right\}, B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\rangle ds-\mathbf{E}\left\langle\psi, h\left(y_{\varepsilon}\right)\right\rangle\right| \\
&\leq \varepsilon\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_E)\,\psi\right\|^{2}}.
\end{aligned} \tag{3.2.24}
$$

*D'autre part, nous avons ce qui suit :*

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathbf{E}\left\langle B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\widehat{\varphi}_{\varepsilon} \mid \mathfrak{F}_s\right\}, B^*\mathfrak{G}^*(T-s)\mathbf{E}\left\{\psi \mid \mathfrak{F}_s\right\}\right\rangle ds \\
&=\int_0^T \mathbf{E}(T-s)^{\alpha-1}\left\langle\mathfrak{G}(T-s)Bu_{\varepsilon}\left(s, y_{\varepsilon}\right), \psi\right\rangle ds, \\
&h\left(y_{\varepsilon}\right)=y_T-\mathfrak{D}(T)y_0-\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(T-s)f\left(s, y_{\varepsilon}(s)\right) ds \\
&-\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}\mathfrak{G}(T-s)g\left(s, y_{\varepsilon}(s)\right) dW(s).
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

*Ensuite, en combinant 3.2.24 et 3.2.25, nous obtenons que :*

$$
\left|\mathbf{E}\left\langle y_{\varepsilon}(T)-y_T, \psi\right\rangle\right| \leq \varepsilon\sqrt{\mathbf{E}\left\|(I-\pi_M)\,\psi\right\|^{2}}
$$

*Tient pour tout $\psi \in L^2(\mathfrak{F}_t, H)$. Ainsi,*

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\mathrm{E}\left\|y_z(T)-y_T\right\|^{2}} &\leq \varepsilon. \\
\pi_M y_{\varepsilon}(T) &= \pi_M y_T.
\end{aligned}
$$

## 3.3 Application

*Considérons l'équation différentielle partielle stochastique fractionnelle suivante :*

$$\begin{cases} {}^cD_0^{\frac{2}{3}} y(t,\theta) = y_{\theta\theta}(t,\theta) + \mu(t,\theta) + K_1(t,y(t,\theta)) \\ \quad + \int_0^t K_2(s,y(s,\theta))dw(s), \quad (t,\theta) \in [0,1] \times [0,\pi] \\ y(t,0) = y(t,\pi) = 0, 0 \leq t \leq 1, \quad y(0,\theta) = y_0(\theta) \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \tag{3.3.26}$$

*Où $W(t)$ désigne un processus de Wiener standard à valeur réelles sur : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et $y_0 \in L^2(0,\pi)$; $\mu$:$[0,1] \times (0,\pi) \to (0,1)$ est continu en $t$, $K_1, K_2 : R \times R \to R$ sont continus. Soit $H = U = L^2(0,1)$ et on définit l'opérateur $A; H \to H$ par $Az = z''$ avec domaine $D(A) = \{z \in H, z, z'\}$ . sont absolument continus, $z'' \in H, z(0) = z(\pi) = 0\}$. Alors, $A$ engendre un semi-groupe analytique $T(t)$ et il est donné par :*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} (z, e_n) e_n, \quad z \in H.$$

*Où $e_n(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n\theta), n = 1, 2, \ldots$ est l'ensemble orthonormé complet des vecteurs propres de $A$. De ces expression il résulte que, $\{T(t), t > 0\}$ est un semi-groupe compact uniformément borné, de sorte que, $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur compact pour $\lambda \in \rho(A)$.*

*définissons un espace de dimension infinie $U$ par $U = \{u : u = \sum_{n=2}^{\infty} u_n e_n\}$, tel que $\sum_{n=2}^{\infty} u_n^2 < \infty$. La norme dans $U$ est définie par :*

$$\|u\|_u = \left( \sum_{n=2}^{\infty} u_n^2 \right)^{1/2}.$$

*Définissez maintenant une cartographie linéaire continue $B$ de $U$ en $H$ comme $Bu = 2u_2e_1 + \sum_{n=2}^{\infty} u_n e_n$ pour $u = \sum_{n=2}^{\infty} u_n e_n \in U$. Alors :*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (z, e_n) e_n, \quad z \in H$$

*Soit* $y(t)(\theta) = y(t,\theta)$, *on définit l'opérateur linéaire borné :* $\mathrm{B} : \mathrm{U} \to H$ *par :*

$$(\mathrm{Bu})(\mathrm{t})(y) = \mu(\mathrm{t}, y), 0 \leq y \leq \pi$$

*Définissons :* $f(t,y)(.) = K_1\,(t,y(.))$ *et* $g(t,y)(.) = K_2(t,y(.))$ *D'autre part, le système linéaire qui correspond à 3.3.26 est approximativement contrôlable. Ainsi, avec les choix de* $A, f, g$ *et B, le système 3.3.26 peut être réécrit sous la forme abstraite de 3.0.1 et toute les conditions du théorème* ***3.2.2*** *sont satisfaite. Par conséquent, selon le théorème* ***3.2.2****, le système integro-différentiel stochastique fractionnaire 3.3.26 est contrôlable de manière finie et approximative sur[0,1].*

# Bibliographie


[1] Mahmudov, N. I. (2020). Finite-approximate controllability of semilinear fractional stochastic integro-differential equations. Chaos, Solitons & Fractals, 139, 110277.

[2] Mahmudov, N. I. (2020). Variational approach to finite-approximate controllability of Sobolev-type fractional systems. Journal of Optimization Theory and Applications, 184(2), 671-686.

[3] Bedraoui,S.(2019).la théorie du contrôle.Départementmathématique,Cours Master 2,Univercité 8 mai 1945-Guelma.

[4] KAHIA, S. (2020). Contrôlabilité approchée et exacte de quelques système d évolution (Doctoral dissertation, université de Bordj Bou-Arréridj Faculté des mathématiques et de l'informatique).

[5] Benchaabane, A. (2021). .Introduction aux processus aléatoires,Cours : 3 Année De la Licence Académique en Mathématiques Université mai 1945 Guelma, 2021.

[6] Zohra, H. F., & Wissam, Messai (2019). Contrôlabilité stochastique avec retard.

[7] RAMDANI, H. (2020). Processus stochastique d'ordre fractionnaire : Existence, unicité et contrôlabilité.