**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université 8 Mai 1945 Guelma**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière**
**Département de Mathématiques**

# Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Master en Mathématiques**

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : **STITI Doua**

## Intitulé

**La dérivée conformable fractionnaire des fonctions de type Lyapunov et ses applications sur la stabilité des mouvements.**

**Dirigé par : REBIAI Ghania**

**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr. ARIES Mouhamed Salih | M.C.A | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr. REBIAI Ghania | M.C.B | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr. DEBBAR Rabah | M.C.A | Univ-Guelma |

**Session Juin 2022**

# Remerciements

J'aimerais en premier lieu remercier mon dieu Allah qui m'avoir donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce mémoire.

J'exprime ma reconnaissance à ma directrice de mémoire, Madame Rebiai Ghania, Je la remercie de m'avoir encadré, aidé et conseillé.

Je tiens à présenter mes remerciements aux membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail.

J'adresse un grand merci à toute ma famille en particulier mes parents qui ont toujours été là pour moi.

Je remercie mon frère Haythem, mon fiancé Ahmed et mes sœurs Aya et Israa, pour leurs encouragements.

Enfin, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude à tous ces intervenants.

# Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à

♥ Ma douce mère Djemaa Allel et mon cher père Athman en reconnaissance des sacrifices qu'ils ont fait pour nous tracer un chemin dans cette vie. Que vie nous donne temps pour les remercier! C'est grâce à leurs amours infinis, patiences, inestimables aide et ses conseils que ma vie s'est construite !

♥ Mes vifs remerciements vont également à mon frère Haytem,

Mes sœurs Aya et Israa, et tous ma famille. C'est grâce à leurs amours et leurs sacrifices que ce mémoire a été mené à bout enfin. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

♥ Pour terminer, j'adresse mon grand amour à mon fiancé Belhaouchet Ahmed pour l'appui moral qu'il m'a témoigné et les encouragements qu'il m'a offerts.

## ملــــــخص

**الهـــدف الـــرئيسي من عمـــلنا هو منـــاقشة التطــبيق لمشــتق كسري بالنـــسبة للـــدوال مـــن نـــوع ليــــابونوف فــي تحـــليل استقـــرار حلـــول معـــادلات الحـــركة المضطـــربة و كـــما قمنــــا بعـــرض النظـــريات الاســـــاسية للطــريقة المبـــاشرة لليـــــابونوف فـــي هـــذا النطـــاق.**

**الكلمات المفتاحية :**

**المشتق الكسري المطابق، الاستقرار في معنى ليابونوف.**

## Résumé

L'objectif principal de notre travail est de discuter l'application d'une dérivée fractionnaire conformable pour les fonctions de type Lyapunov dans l'analyse de la stabilité des solutions d'équations de mouvement perturbé et nous avons présenté les principaux théorèmes de la méthode directe de Lyapunov pour cette classe.

**Les mots clés :**

La dérivée fractionnaire conformable, Stabilité au sens de Lyapunov.

## Abstract

The main objectiv of our work is to discusses the application of a fractional–like derivative of Lyapunov–type functions in the stability analysis of solutions of perturbed motion and we present the principal theorems of the direct Lyapunov method for this class.

**Keywords :**

The fractional like derivative, Stability in the meaning of Lyapunov.

.

# Table des matières

## 0.1 Introduction

Les concepts de dérivation et d'intégration fractionnaire sont souvent associés aux noms de Riemann et de Liouville, alors que l'interrogation sur la généralisation de la notion de dérivée des ordres fractionnaires est plus ancienne depuis 1695. Plus de 300 ans après, nous commençons seulement venir bout des difficultés. Depuis cet échange de courrier, d'autres chercheurs de renommée se sont penchés sur ce sujet comme Leibniz et L'Hospital (1695) , Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847) et Ross (1975). Pendant ces trois dernières décennies, plus d'intérêts ont été prêtés au calcul fractionnaire et les champs d'application se sont diversifiés. Durant ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires (EDF) ont trouvé des applications dans beaucoup des problèmes en physique. Comme dans la plupart du temps, ces équations ne peuvent être résolues exactement sauf quand on connait quelques solutions particulières, ou bien nous recourons à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions en utilisant quelques théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle (théorème de contraction de Banach) pour les autres EDF (R-L et Caputo).

Les dérivés et les intégrales d'ordre entier, s'interprètent physiquement et géométriquement d'une manière claire en général, c'est pour cette raison que leurs usages dans la résolution des problèmes appliquée dans des différents domaines des sciences sont simples. Les manques de ces interprétations ont été reconnus dans plusieurs conférences internationales sur le calcul fractionaire. L'absence d'une réponse à cette question a rendu la théorie de la dérivation et l'intégration fractionnaire très mystérieuse. Par conséquent, il restait toujours un des problèmes ouverts. La dérivation et l'intégration fractionnaire sont des généralisations de la dérivation et l'intégration d'ordre entier. Pour ceci, il serait très intéressant d'avoir les interprétations physiques et géométrique des opérateurs d'ordre fractionnaire qui fourniront un lieu aux interprétations classiques des dérivations et intégrations d'ordre entier. L'interprétation physique de l'intégration et de la dérivation fractionnaires repose sur l'utilisation de deux types de temps: le temps cosmique et le temps individuel, par contre le calcul différentiel et intégral classique est basé sur l'utilisation du temps mathématiques.

Khalil et al [11] ont introduit une nouvelle dérivée fractionnaire qui s'appelle « la dérivée fractionnaire conformable ». Cette nouvelle notion est très intéressant. Plus tard, cette théorie est développée par T.Abdeljawad dans [1], qui a donné les définitions des dérivées conformables à gauche et à droite d'ordre supérieure, les fonctions exponentielles , l'inégalité de Gronwall , transformation de Laplace pour le calcul fractionnaire conformable, etc...

Récemment, le calcul fractionnaire a été introduit dans l'analyse de la stabilité des systèmes non linéaire et de nombreux problèmes ont été étudiés à ce sujet, où certains résultats fondamentaux ont été obtenus. La stabilité des systèmes non linéaires a fait l'objet d'une attention accrue en raison de son importance rôle dans les domaines de la science et de l'ingénierie. Un grand nombre de monographies et d'articles sont consacrés aux systèmes non linéaires fractionnaires. On sait que la méthode des fonctions de Lyapunov (ou la méthode directe de Lyapunov) est étendue à des nombreuses classes d'équations du mouvement perturbé, y compris les systèmes à paramètres distribués et les ensembles d'équations dans les espaces métriques.

Rappelons que la stabilité de la théorie du mouvement au sens de Lyapunov a été crée par lui à la suite de ses travaux en 1889-1892 [16]. L'élément clé de la méthode directe de Layapunov est la possibilité de calculer la dérivée totale d'une composition de fonctions (règle de la chaîne) correspondant à une fonction auxiliaire considérée et aux équations de mouvement perturbées. Le grand intérêt pour les équations à dérivées fractionnaires au cours des deux dernières décennies a poussé de nombreux chercheurs à généraliser la méthode directe de Lyapunov à cette classe d'équations. Cependant, l'absence de formule simple pour calculer la dérivée fractionnaire d'une composition de fonctions ne permet pas d'obtenir des résultats similaires à ceux obtenus pour de nombreux types d'équations pour lesquelles la dérivée totale de la fonction de Lyapunov est calculée comme dans l'analyse classique. Parallèlement aux définitions les plus courantes de Riemann-Liouville, Hadamard, Grünwald-Letnikov, Caputo a proposé en 1969 sa définition d'une dérivée fractionnaire. Contrairement aux définitions classiques des dérivées fractionnaires, la définition de Caputo permet de choisir les valeurs initiales des solutions d'équations différentielles fractionnaires de la même manière que pour un système d'équations différentielles ordinaires. Ce résultat a permis de simplifier quelque peu l'analyse des équations du mouvement avec une dérivée fractionnaire de Caputo. Mais, comme pour les définitions classiques, le problème de l'évaluation de la dérivée fractionnaire de type Caputo d'une composition de fonctions reste ouvert. Il convient de noter que certaines estimations de la dérivée de Caputo pour des fonctions simples de Lyapunov ont élargi les possibilités de la méthode directe de Lyapunov lors de l'analyse des équations du mouvement perturbé avec les dérivées de Caputo du vecteur d'état.

Ce mémoire est organisé comme suit:

**Chapitre 1:** fournit des définitions d'une dérivée fractionnaire et quelques règles pour la calculer pour des fonctions simples et on a ontroduit aussi une nouvelle dérivée nomée la dérivée conformable et on a présenté leurs propriétes les plus outils

**Chapitre 2:** Dans ce chapitre, on donnera la défnition de la stabilité au sens de Lyapunov, et quelques résultats relatifs à cette notion dans le cas des systèmes autonomes.

**Chapitre 3:** Dans ce chapitre on va étudier la stabilité des solutions des équations différentielles fractionnaires conformables et on applique cette dérivée pour les fonctions de type Lyapunov et prendre comme application les équations de mouvement perturbés.Les principaux théorèmes de la méthode directe de Lyapunov pour cette classe d'équations du mouvement sont établis.

# Chapitre 1

# Généralités sur la dérivation fractionnaire

Ce chapitre est consacré aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et de G.M.Mittag-Leffler (voir [14]).

Ainssi on a introduit une nouvelle dérivée fractionnaire appelée la dérivée conformable et nous présentons dans notre travail les propriétées les plus importantes concernant cette dérivée (voir [11]).

## 1.1 Fonctions utiles

Dans cette section, nous présentons les fonctions essentielles, ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire et ses applications.

### 1.1.1 La fonction Gamma d'Euler

**Définition 1.1** *On appelle fonction Gamma la fonction définie par:*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, z \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}(z) \succ 0, \tag{1.1}$$

*avec* $\Gamma(1) = 1$ *et* $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

**Proposition 1.1** *Nous avons les propriétés suivantes:*

1. $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$.

2. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^{n}n!}$, *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.
3. *Si* $n\in\mathbb{N}$,*on a:* $\Gamma(n+1)=n!$.

**Preuve.**

1. En utilisant l'intégration par partie, nous avons:

$$\begin{aligned}\Gamma(1+z) &= \int_{0}^{+\infty}x^{z}e^{-x}dx=\left[-x^{z}e^{-x}\right]_{0}^{+\infty}+z\int_{0}^{+\infty}x^{z-1}e^{-x}dx\\ &= z\int_{0}^{+\infty}x^{Z-1}e^{-x}dx\\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

2. Montrons par réccurence:

Pour $n=0$, vérifié .
Supposons que $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n)!\ \sqrt{\pi}}{4^{n}n!}$, et montrons que $\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\frac{(2n+2)\sqrt{\pi}}{4^{n+1}(n+1)!}$.
Nous avons:

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(n+1+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n+1)!\ \sqrt{\pi}}{4^{(n+1)}(n+1)!}$$

3. Nous avons $\Gamma(1)=0!=1$ et avec la propriété $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= 1\times\Gamma(1)=1!\\ \Gamma(3) &= 2\times\Gamma(2)=2!\end{aligned}$$

pour la $n^{ime}$ itération, nous avons: $\Gamma(n+1)=n!$. ■

### 1.1.2 La fonction Beta

**Définition 1.2** *La fonction Beta est un type d'intégrale d'Euler défini par:*

$$\beta(z,\ w)=\int_{0}^{1}x^{z-1}(1-x)^{w-1}dx,\ z,\ w\in\mathbb{C},\ \ \mathrm{Re}(z)>0,\ \ \mathrm{Re}(w)>0, \tag{1.2}$$

*avec* $\beta(z,\ w)=\beta(w,\ z)$ *et* $\beta(z,1)=\frac{1}{z}$.

### 1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier, et nous la trouvons largement utilisée dans les solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette fonction a été présentée par G.M.Mittag-Leffler, et étudier par A.Wiman.

**Définition 1.3** *Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, nous déffinissons la fonction de Mittag-Leffler de paramètre $\alpha$ comme suit :*

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + 1)}. \tag{1.3}$$

*En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle: $E_1(z) = \exp(z)$.*
*Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres $\alpha > 0$ et $\delta > 0$ comme suit :*

$$E_{\alpha,\delta}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \delta)}. \tag{1.4}$$

## 1.2 Intégration fractionnaire

Dans cette partie, nous allons définir l'intégrale d'ordre fractionnaire sur un intervalle fini de l'axe réel au sens de Riemann-Liouville avec quelques propriétés dans l'espace des fonctions continues.

### 1.2.1 L'intégrale fractionnaire

**Définition 1.4** *Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive de $f$ est donnée par :*

$$I_a^1 f(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{1.5}$$

**Proposition 1.2** *Soit $f : [a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive d'ordre $n$ de $f$ est donnée par:*

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt. \tag{1.6}$$

**Preuve.**

Soit $f : [a,b[ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, nous avons les primitives d'ordre supérieur sont données par:

$$I_a^2 = \int_a^x I_a^1 f(s)\, ds = \int_a^x \left( \int_a^s f(t)\, dt \right) ds$$

En utilisant la définition 1.4, nous obtenons:

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\, dt,$$

ce qui termine la preuve. ■

**Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville**

**Définition 1.5** *Soit $\Omega = [a,\ b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f$ une fonction intégrable sur $\Omega$. Les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville $I_a^\alpha$, $I_b^\alpha$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}\,(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ sont données par:*

$$I_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \tag{1.7}$$

*et*

$$I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \tag{1.8}$$

*où $\Gamma$est la fonction Gamma.*

**Lemme 1.3** *Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^\alpha f$ existe pour tout $\alpha \succ 0$ et $I_a^\alpha f \in L^1([a,b])$.*

**Proposition 1.4** *Si $f \in L^1([a,b])$ et $I^{n-\alpha} f$ appartient à l'espace des fonctions dont ces fonctions et ses dérivées sont dans $AC([a,b]) = \left\{ \exists \phi \in L^1([a,b]) : f(x) = c + \int_a^x \phi(t)\, dt \right\}$, avec $n = [\alpha] + 1$, alors*

$$[I_a^\alpha (D_a^\alpha) f](x) = f(x) - \sum_{j=O}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+} \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^j I_a^{n-\alpha} f \right](x). \tag{1.9}$$

**Proposition 1.5** *Pour tout $\alpha, \delta > 0$, nous avons:*

1. $I_a^\alpha \left( I_a^\delta f(x) \right) = I_a^{\alpha+\delta} f(x)$,
2. $\dfrac{d}{dx} \left( I_a^\alpha f(x) \right) = I_a^{\alpha-1} f(x)$,

3. $I_a^{\alpha}\left(x-a\right)^{\delta-1}=\dfrac{\Gamma\left(\delta\right)}{\Gamma\left(\alpha+\delta\right)}\left(x-a\right)^{\alpha+\delta-1}.$

**Preuve.**

1. Pour tous $\alpha,\,\delta\in\mathbb{R}_+^*$ nous avons:

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left(I_a^{\delta}f\left(x\right)\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\left(x-s\right)^{\alpha-1}I_a^{\delta}f\left(s\right)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\left(x-s\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\delta\right)}\int_a^s\left(s-t\right)^{\delta-1}f\left(t\right)dt\right)ds,\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\delta\right)}\int_a^x\left(x-s\right)^{\alpha-1}ds\int_a^s\left(s-t\right)^{\delta-1}f\left(t\right)dt.
\end{aligned}$$

D'après la définition 1.5 nous obtenons:

$$\begin{aligned}
I_a^{\alpha}\left(I_a^{\delta}f\left(x\right)\right) &= \frac{\beta\left(\alpha,\delta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\delta\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha+\delta-1}f\left(t\right)dt,\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\delta\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha+\delta-1}f\left(t\right)dt,\\
&= I_a^{\alpha+\delta}f\left(x\right).
\end{aligned}$$

2. Pour tout $\alpha>0$ nous avons:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(I_a^{\alpha}f\left(x\right)\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha-1}f\left(t\right)dt\right),\\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\frac{d}{dx}\left(\left(x-t\right)^{\alpha-1}\right)f\left(t\right)dt,\\
&= \frac{\left(\alpha-1\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha-2}f\left(t\right)dt,\\
&= \frac{\left(\alpha-1\right)}{\left(\alpha-1\right)\Gamma\left(\alpha-1\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha-2}f\left(t\right)dt,\\
&= I_a^{\alpha-1}f\left(x\right).
\end{aligned}$$

3. Pour tous $\alpha,\, \delta \in \mathbb{R}_+^*$ nous avons:

$$I_a^\alpha (x-a)^{\delta-1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\delta-1}\, dt.$$

nous posons: $t = a + (x-a)y,\ y \in [0,1] \Rightarrow dt = (x-a)dy$.

Si $t = a \Rightarrow y = 0$ et si $t = x \Rightarrow y = 1$.

D'où:

$$\begin{aligned}
I_a^\alpha (x-a)^{\delta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-a+(x-a)\,y)^{\alpha-1} (x-a)^{\delta-1} y^{\delta-1} (x-a)\, dy, \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\delta-1} (1-y)^{\delta-1} y^{\delta-1} dy, \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\delta-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\delta-1} y^{\delta-1} dy, \\
&= \frac{(x-a)^{\alpha+\delta-1}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha,\delta), \\
&= \frac{\delta}{\Gamma(\alpha+\delta)} (x-a)^{\alpha+\delta-1},
\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

## 1.3 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications. (la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville et de Caputo).

### 1.3.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville (R-L)

**Définition 1.6** *La dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de R-L d'une fonction $f$ définie sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ est donnée par:*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} = \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x \frac{(x-t)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t)\, dt, \tag{1.10}$$

*où $n = [\alpha] + 1$ et $[\alpha]$ désigne la partie entiére de $\alpha$. Si de plus:*

• $\alpha \in [0, 1]$, *alors* $n = 1$,

*d'où:*

$$D_a^{\alpha} f(x) = D_{RL}^{\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(t)\, dt. \tag{1.11}$$

• $\alpha = n \in \mathbb{N}$, *nous obtenons:*

$$D_{\alpha}^{0} f(x) = f(x) \ \text{ et } \ D_a^n f(x) = f^{(n)}(x), \tag{1.12}$$

*où $f^{(n)}(x)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre $n$ de $f(x)$.*

**Lemme 1.6** *Soient $\alpha \succ 0$ et $f \in L^1([a, b])$, alors l'égalité :*

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x). \tag{1.13}$$

*est vraie pour presque tout $x \in [a, b]$.*

**Proposition 1.7** *Soient $\alpha$, $\delta > 0$, $n - 1 < \alpha < n$ et $m - 1 < \delta < m$, tel que $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, alors:*

1. *Si $\alpha > \delta > 0$, alors pour $f \in L^1([a, b])$ l'égalité:*

$$D_a^{\delta} (I_a^{\alpha} f)(x) = I_a^{\alpha - \delta} f(x). \tag{1.14}$$

*est vraie presque par tout sur $[a, b]$.*

2. *S'il existe une fonction $\varphi \in L^1([a, b])$, tel que $f(x) = I_a^{\alpha} \varphi(x)$, alors :*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = f(x). \tag{1.15}$$

*pour tout $x \in [a, b]$.*

3. *pour $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$ et si les dérivées fractionnaires $D_a^{\alpha} f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existent, alors:*

$$D_a^k (D_a^{\alpha} f(x)) = D_a^{k+\alpha} f(x). \tag{1.16}$$

*pour tout $x \in [a, b]$.*

4. *Si* $\delta \geq \alpha > 0$ *et la dérivée fractionnaire* $D_a^{\delta-\alpha} f$ *existe, alors :*

$$D_a^{\delta} \left( I_a^{\alpha} f \right)(x) = D_a^{\delta-\alpha} f(x), \tag{1.17}$$

*pour tout* $x \in [a, b]$.

5. *Formule de Leibniz:*

*Pour tout* $x > 0$, $\alpha > 0$, *avec* $n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$, *et si* $f$, $g$ *et tous ses dérivées sont continues sur* $[0, x]$, *alors :*

$$D_{RL}^{\alpha} \left( f(x) g(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \left( D_{RL}^{\alpha-k} f(x) \right) g^{(k)}(x). \tag{1.18}$$

*D'où:*

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(k) \Gamma(\alpha - k)}. \tag{1.19}$$

**Preuve.**

1. Pour $\alpha > \delta > 0$, alors $n > m$ et comme $f \in L^1([a, b])$ nous avons:

$$\begin{aligned} D_a^{\delta} \left( I_a^{\alpha} f \right)(x) &= D^n I^{n-\delta} \left( I_a^{\alpha} f \right)(x), \\ &= D^n \left( I_a^{n-\delta+\alpha} f \right)(x), \\ &= D^n I^n \left( I_a^{\alpha-\delta} f \right)(x), \\ &= I_a^{\alpha-\delta} f(x). \end{aligned}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

2. Comme $f(x) = I_a^{\alpha} \varphi(x) \in L^1([a, b])$, alors, nous avons:

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{\alpha} \left( D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} \varphi(x) \right), \\ &= I_a^{\alpha} \varphi(x), \\ &= f(x), \end{aligned}$$

pour tout $x \in [a, b]$.

3. Pour tout $\alpha > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $x \in [a,b]$. et comme $D_a^{\alpha} f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existent, nous avons:

$$\begin{aligned} D_a^k \left(D_a^{\alpha} f(x)\right) &= D_a^k D_a^{n-\alpha} f(x), \\ &= D_a^{k+n} I_a^{n-\alpha+k-k} f(x), \\ &= D_a^{k+n} I_a^{k+n-(\alpha+k)} f(x), \\ &= D_a^{k+\alpha} f(x). \end{aligned}$$

4. Pour tout $\delta \geq \alpha > 0$, $x \in [a,b]$, et comme $D_a^{\delta-\alpha} f$ existe, nous avons:

$$\begin{aligned} D_a^{\delta} \left(I_a^{\alpha} f\right)(x) &= D_a^m I_a^{m-\delta} \left(I_a^{\alpha} f\right)(x), \\ &= D_a^m I_a^{m-(\delta-\alpha)} f(x), \\ &= D_a^{\delta-\alpha} f(x), \end{aligned}$$

pour $j-1 \leq \delta - \alpha < j$ et $j \leq m$.

5. Formule de Leibniz:

En partant de la règle connue de Leibniz pour calculer la dérivée $n-ième$ du produit de deux fonctions $f$ et $g$, on a pour tout entier $n$:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(f(x)\, g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x)\ f^{\ (n-k)}(x). \tag{1.20}$$

Cette formule se généralise en remplaçant l'entier $n$ par un paramètre réel $\alpha$ dans le membre à droite de (1.20) à la formule:

$$D_{RL}^{\alpha}\left(f(x)\, g(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} \left(D_{RL}^{\alpha-k} f(x)\right) g^{(k)}(x) - R_n^{\alpha}(x),\ n > \alpha + 1,$$

où

$$R_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n!}\Gamma(-\alpha) \int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} g(t)\, dt \int_t^x f^{(n+1)}(\xi)\,(t-\xi)^n\, d\xi,$$

avec $\lim\limits_{x\to\infty} R_n^{\alpha}(x) = 0$.

Si $f$ et $g$ avec toutes ses dérivées sont continues sur $[0,\ x]$, la règle de Leibniz pour la dérivation fractionnaire au sens de R-L s'écrit sous la forme:

$$D_{RL}^{\alpha}\left(f(x)\,g(x)\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left(D_{RL}^{\alpha-k}f(x)\right)g^{(k)}(x).$$

Ce qui termine la preuve. ■

**Proposition 1.8** *(Dérivées fractionnaires au sens de R-L de quelques fonctions usuelles)*
*i)Pour $\alpha > 0$, $\delta > -1$ et $x \in [a,\ b]$ nous avons :*

$$D_a^{\alpha}\left[(x-\alpha)^{\delta}\right] = \frac{\Gamma(\delta+1)}{\Gamma(\delta+1-\alpha)}(x-a)^{\delta-\alpha}. \tag{1.21}$$

*ii) Pour tout $\alpha > 0$ et $j = 1...[\alpha]+1$, nous avons :*

$$D_{0^+}^{\alpha}x^{\alpha-j} = 0. \tag{1.22}$$

*iii) Pour $\alpha > 0$, $C \in \mathbb{R}$ et $x \in [a, b]$ nous avons :*

$$D_a^{\alpha}(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}. \tag{1.23}$$

### 1.3.2 La Dérivée fractionnaire de Caputo

**Définition 1.7** *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \geq 0$ d'une fonction $f$ est donnée par:*

$$D_C^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(t)\,dt, \tag{1.24}$$

*pour $n-1 < \alpha < n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Si de plus $\alpha \in [0,1]$, alors $n = 1$, d'où :*

$$D_C^{\alpha}f(x) = D_C^{(\alpha)}f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f'(t)\,dt, \tag{1.25}$$

*où $f'$ désigne la dérivée usuelle de $f$.*

**Lemme 1.9** *Soit $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction telque $D_C^{\alpha}f$ existe, alors nous avons en général:*

$$D_C^{\alpha}f\left(x\right)= \ I^{n-\alpha}D^{n}f\left(x\right) \tag{1.26}$$

*où $n\in\mathbb{N}$, $D^n$ est l'opérateur de la dérivée usuelle.*

**Lemme 1.10** *Nous supposons que $n-1<\alpha<n$, $\delta=\alpha-(n-1)$, $m$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha$, $\delta\in\mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction, telque $D_C^{\alpha}f$ existe, alors :*

$$D_C^{\alpha}D^{m}f\left(x\right)=D_C^{\alpha+m}\neq D^{m}D_C^{\alpha}f\left(x\right). \tag{1.27}$$

**Corollaire 1.11** *Supposons que $n-1<\alpha<n$, $\delta=\alpha-(n-1)$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha$, $\delta\in\mathbb{R}$ et soit la fonction $f$, telque $D_C^{\alpha}f$ existe, alors*

$$D_C^{\alpha}f\left(x\right)=D_C^{\delta}D^{n-1}f\left(x\right), \tag{1.28}$$

*où $D^{n-1}$ désigne l'opérateur de la dérivée usuelle.*

**Preuve.**

Nous remplaçons $\alpha$ par $\delta$ et $m$ par $n-1$ dans (1.27), nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_C^{\delta}D^{n-1}f\left(x\right) &= \ D_C^{\delta+n-1}f\left(x\right), \\ &= D_C^{\alpha-(n-1)+n-1}f\left(x\right), \\ &= D_C^{\alpha}f\left(x\right). \end{aligned}$$

Ce qui complète la démonstration. ■

**Proposition 1.12** *Soit $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ et soit $f$ une fonction telque $D_C^{\alpha}f$ existe, alors nous avons les propriétés suivantes pour l'opérateur de Caputo:*

- $\lim\limits_{\alpha\to n} D_C^{\alpha}f\left(x\right)=f^{(n)}\left(x\right).$
- $\lim\limits_{\alpha\to n-1} D_C^{\alpha}f\left(x\right)=f^{(n-1)}\left(x\right)-f^{(n-1)}\left(0\right).$

**Preuve.**

Pour tout $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ , nous avons par l'intégration par partie:

$$\begin{aligned}
D_C^{\alpha}f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}dt,\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}\Big|_0^x-\int_0^x -f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n-\alpha}}{n-\alpha}dt\right),\\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\left(f^{(n)}(0)\,x^{n-\alpha}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-\alpha}\,dt\right).
\end{aligned}$$

En prenant la limite pour $\alpha\to n$ et $\alpha\to n-1$, respectivement, nous obtenons:

$$\lim_{\alpha\to n} D_C^{\alpha}f(x) = f^{(n)}(0)+f^{(n)}(t)\,\Big|_0^x = f^{(n)}(x).$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to n-1} D_C^{\alpha}f(x) &= \left(f^{(n)}(0)\,x+f^{(n)}(t)(x-t)\right)\Big|_0^x-\int_0^x -f^{(n)}(t)\,dt,\\
&= f^{(n-1)}(t)\,\Big|_0^x,\\
&= f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

**Proposition 1.13** *(Dérivées fractionnaires au sens de Caputo de quelques fonctions usuelles)*

*i) Pour tout $n-1<\alpha<n$, nous avons:*

$$D_C^{\alpha}x^p=\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}x^{p-\alpha},\ (p>n-1); \tag{1.29}$$

*et*

$$D_C^{\alpha}x^p=0,\qquad (p\leq n-1). \tag{1.30}$$

*ii) Pour $\alpha > 0$, $c \in \mathbb{R}$, nous avons:*

$$D_C^\alpha(c) = 0. \tag{1.31}$$

*iii) Pour $\alpha > 0, k \in \mathbb{R}$, nous avons:*

$$D_C^\alpha \exp(kx) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{k^{i+n} x^{i+n-\alpha}}{\Gamma(i+1+n-\alpha)} = k^n x^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(kx), \tag{1.32}$$

*où $E_{1,n-\alpha+1}$ désigne la fonction de Mittag-Leffler.*
*iv) Pour $n-1 < \alpha < n$, $k \in \mathbb{C}$, nous avons:*

$$D_C^\alpha \sin(kx) = -\frac{1}{2} i (ik)^n x^{n-\alpha} \left(E_{1,n-\alpha+1}(ikx) - (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ikx)\right), \tag{1.33}$$

$$D_C^\alpha \cos\ (kx) = \frac{1}{2} i (ik)^n x^{n-\alpha} \left(E_{1,n-\alpha+1}(ikx) + (-1)^n E_{1,n-\alpha+1}(-ikx)\right), \tag{1.34}$$

*où $i^2 = -1$.*

L'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Riemann-Liouville mais pas un inverse à droite.

**Proposition 1.14** *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $f$ une fonction continue sur $[0,\ x]$ telque $D_C^\alpha f$ existe,*
*alors nous avons:*
1. $D_C^\alpha (I^\alpha f(x)) = f(x)$,
2. $I^\alpha (D_C^\alpha f(x)) = f(x) - f(0)$.

**Preuve.**
Soit $0 < \alpha < 1$, nous avons:

$$D_C^\alpha f(x) = I^{1-\alpha} f'(x), \tag{1.35}$$

Donc:

1.

$$\begin{aligned} D_C^{\alpha}\left(I^{\alpha} f(x)\right) &= I^{1-\alpha}\left(\frac{d}{dx} I^{\alpha} f(x)\right), \\ &= I^{1-\alpha}\left(I^{\alpha-1} f(x)\right), \\ &= I^{0} f(x), \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2. Composons l'opérateur d'intégration dans l'équation (1.35) et utilisons la proposition 1.4 nous obtenons:

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left(D_C^{\alpha} f(x)\right) &= I^{\alpha}\left(I^{1-\alpha} f'(x)\right), \\ &= I f(x), \\ &= \int_0^x f'(t)\, dt, \\ &= f(x) - f(0). \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

### 1.3.3 La différence entre la dérivée au sens de R-L et la dérivée au sens de Caputo

dans cette section, nous allons donner quelques points de différence entre la dérivée au sens de R-L et la dérivée au sens de Caputo:

• L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire, contiennent les valeurs-limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $x = a$.

• Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est: $D_{RL}^{\alpha} = \dfrac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.

• Formèlement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (R-L), c'est-à-dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ où $n-1 < \alpha \leq n$ par l'approche de R-L, nous commençons d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(n-\alpha)$ pour la fonction $f$ et puis nous dérivons le résultat obtenu à l'ordre entier $m$, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha$ où $n-1 < \alpha < n$ par l'approche de Caputo nous commençons par la dérivée d'ordre entier $m$ de la fonction $f$ et puis nous l'intégrons d'ordre fractionnaire $(n-\alpha)$.

### 1.3.4 La relation entre la dérivée au sens de R-L et la dérivée au sens de Caputo

Dans cette section nous allons donner la relation mathématique entre la dérivée au sens de R-L et la dérivée au sens de Caputo.

**Théorème 1.1** *Soient $x > 0$, $\alpha > 0$, avec $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}$, alors, la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo est:*

$$D_C^{\alpha} f(x) = D_{RL}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0). \tag{1.36}$$

**Preuve.**Considérons le dévloppement limité en série de Taylor de la fonction $f$ au point $x = 0$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + R_{n-1},$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} f^{(k)}(0) + R_{n-1}.$$

avec:

$$R_{n-1} = \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt.$$

En utilisant les propriétés d'intégration d'ordre $n$, nous avons:

$$R_{n-1}=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}(n-1)!dt=I^n f^{(n)}(x),$$

d'où, en utilisant la linéarité de l'opérateur de R-L nous obtenon:

$$\begin{aligned}
D^\alpha_{RL}f(x) &= D^\alpha_{RL}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(0)+R_{n-1}\right),\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{D^\alpha_{RL}\ x^k}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(0)+D^\alpha_{RL}R_{n-1},\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k\ -\alpha+1)}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1)}f^{(k)}(0)+D^\alpha_{RL}I^n f^{(n)}(x),\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k\ -\alpha+1)}f^{(k)}(0)+I^{n-\alpha}f^{(n)}(x),\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k\ -\alpha+1)}f^{(k)}(0)+D^\alpha_{C}\ f^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Donc:

$$D^\alpha_C f(x)=D^\alpha_{RL}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k\ -\alpha+1)}f^{(k)}(0).$$

Ce qui complète la démonstration. ■

**Remarque 1.1** *La formule* (1.36) *implique que les opérateurs fractionnaires de Caputo et de R-L coïncident si et seulement si* $f$ *et ses* $n-1$ *dérivées sont nulles au point* $x=0$.

De même nous avons les résultats suivants:

**Corollaire 1.15** *La relation entre les dérivées fractionnaires de Caputo et de R-L est donnée par la formule suivante:*

$$D^\alpha_C\ f\ \ (x)=D^\alpha_{RL}\left(f\ \ (x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k\ !}f^{(k)}(0)\right). \tag{1.37}$$

**Preuve.** Pour démontrer la formule, nous utilisons la relation de la dérivée fractionnaire de R-L et la propriété de linéarité de l'opérateur de R-L:

$$\begin{aligned} D_C^{\alpha} f(x) &= D_{RL}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0), \\ &= D_{RL}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{RL}^{\alpha} x^{k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} f^{(k)}(0), \\ &= D_{RL}^{\alpha} \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k}}{k!} f^{(k)}(0) \right). \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. ■

## 1.4 La dérivée fractionnaire conformable (D.F.C.)

### 1.4.1 Définitions de base

Soit $q \in (0,1]$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et étant donné une fonction continue $x(t) : [t_0,\infty) \to \mathbb{R}$.

**Définition 1.8** *Pour tout $q \in (0,1]$ la dérivée fractionnaire conformable $D_{t_0}^q (x(t))$de la fonction $x(t)$ d'ordre $0 < q \leq 1$ est définie par:*

$$D_{t_0}^q (x(t)) = lim \left\{ \frac{x\left(t + \theta (t-t_0)^{1-q}\right) - x(t)}{\theta},\ \theta \to 0 \right\}. \tag{1.38}$$

► *Si $t_0 = 0$, alors $D_{t_0}^q (x(t))$ a la forme:*

$$D_0^q (x(t)) = lim \left\{ \frac{x(t + \theta\ t^{1-q}) - x(t)}{\theta},\ \theta \to 0 \right\}. \tag{1.39}$$

*Dans le cas $t_0 = 0$, on notera $D_0^q (x(t)) = D^q (x(t))$.*

► *Si $D^q (x(t))$ existe sur un intervalle ouvert $(0,b)$, alors:*

$$D^q (x(0)) = lim_{t \to 0^+} D^q (x(t)). \tag{1.40}$$

► *Si la dérivée fractionnaire conformable de $x(t)$ d'ordre $q$ existe sur $(t_0,\ \infty)$, alors la fonction $x(t)$ est dite $q-$différentiable sur l'intervalle $(t_0,\ \infty)$.*

**Proposition 1.16** *Soit $q \in (0,1]$ et $x(t)$, $y(t)$ soient $q-$différentiables en un point $t > 0$. Alors:*

*(a)* $D_{t_0}^{q}\,(ax(t) + by(t)) = aD_{t_0}^{q}\,(x(t)) + bD_{t_0}^{q}\,(\,y(t))$ *pour tout* $a,\, b \in \mathbb{R}$,

*(b)* $D_{t_0}^{q}\,(\,t^p\,) = pt^{p-q}$ *pour tout* $p \in \mathbb{R}$,

*(c)* $D_{t_0}^{q}\,(x(t)\,y(t)) = x(t)\,D_{t_0}^{q}\,(y(t)) + y(t)\,D_{t_0}^{q}\,(x(t))$,

*(d)* $D_{t_0}^{q}\left(\dfrac{x(t)}{y(t)}\right) = \dfrac{y(t)\,D_{t_0}^{q}\,(x(t)) - x(t)\,D_{t_0}^{q}\,(y(t))}{y^2(t)}$,

*(e)* $D_{t_0}^{q}\,(x(t)) = 0$ *pour tout* $x(t) = \lambda$ *, où* $\lambda$ *est une constante arbitraire.*

**Corollaire 1.17** *Soit* $\alpha \in \,]0,1]$*, nous avons:*

*i) La dérivée fractionnaire conformable d'une fonction constante sur un intervalle* $I \subseteq [0,+\infty[$ *est la fonction identiquement nulle sur* $I$*.*

*ii)* $(e^{cx})^{(\alpha)} = cx^{1-\alpha}e^{cx}$, $\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall x \geq 0$,

*iii)* $(\sin(bx))^{(\alpha)} = bx^{1-\alpha}\cos(bx)$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\forall x \geq 0$,

*iv)* $(\cos(bx))^{(\alpha)} = -bx^{1-\alpha}\sin(bx)$, $\forall b \in \mathbb{R}, \forall x \geq 0$,

*v)* $\left(\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)x^{\alpha}\right)^{(\alpha)} = 1$, $\forall x \geq 0$.

**Proposition 1.18** *Soit* $h(y(t)) : (t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$*. Si* $h(\cdot)$ *est différentiable par rapport à* $y(t)$ *et* $y(t)$ *est* $q-$*différentiable ,où* $0 < q \leq 1$*, alors pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $t \neq t_0$ *et* $y(t) \neq 0$

$$D_{t_0}^{q}\,h(y(t)) = h'(y(t))\,D_{t_0}^{q}\,(y(t))\,, \tag{1.41}$$

*où* $h'(t)$ *est une dérivée partielle de* $h$*.*

**Définition 1.9** *L'intégrale fractionnaire conformable d'ordre* $0 < q \leq 1$ *avec une limite inférieure* $t_0$ *est définie par:*

$$I_{t_0}^{q}x(t) = \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1}\,x(s)\,ds. \tag{1.42}$$

**Proposition 1.19** *La fonction* $x(t) : (t_0, \infty)$ $q-$*déffirentiable pour* $q \in ]0,1]$*, alors: pour tout* $t > t_0$

$$I_{t_0}^{q}\left(D_{t_0}^{q}x(t)\right) = x(t) - x(t_0)\,. \tag{1.43}$$

# Chapitre 2

# Stabilité au sens de lyapunov

Dans ce chapitre, on donnera la défnition de la stabilité au sens de Lyapunov, et quelques résultats relatifs à cette notion dans le cas des systèmes autonomes. (voir [12] , [18])

## 2.1 Préliminaires et définitions

Ici, nous aborderons la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes autonomes à temps invariant, régi par l'équation différentielle suivante:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Une notion primordiale dans l'étude de la stabilité est la notion de point d'équilibre.

**Définition 2.1** *(Point d'équilibre).L'état $x_e$ est dit état ou point d'équilibre pour le système (2.1), si $x(t_1) = x_e$ implique $x(t) = x_e$ pour tout $t \geq t_1$. Ou tout simplement que l'état $x_e$ vérifie l'équation $f(x_e) = 0$.*

**Définition 2.2** *(Définition intuitive de la stabilité).*
*Si le système dynamique est "légèrement" perturbé de son point d'équilibre, le même système reste "proche" de ce point d'équilibre. On dira alors que le point d'équilibre est stable.*

Cette défnition intuitive de la stabilité traduit la capacité d'un système dynamique, pour des conditions initiales données, à rester très proche d'un point d'équilibre suite à une perturbation.

La traduction mathématique de cette défnition intuitive de la stabilité est donnée par la définition suivante.

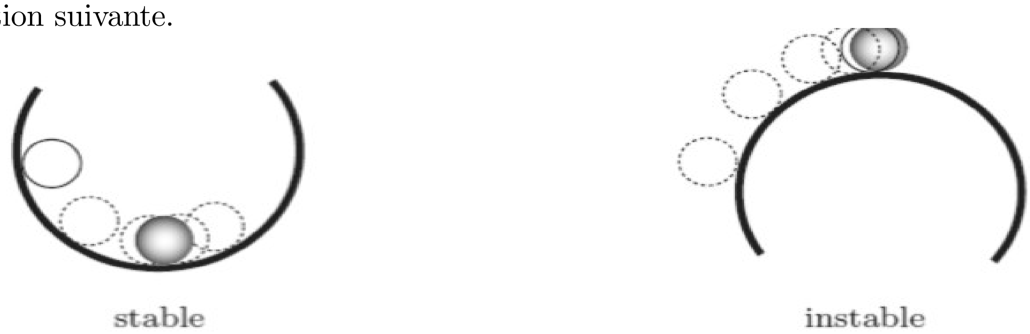


Figure 2.1 : -Illustration de la définition intuitive de la stabilité.

**Définition 2.3** *(Stabilité au sens de Lyapunov).*
*Le point d'équilibre $x_e$ est dit stable si $\forall\varepsilon > 0$, il existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que:*

$$\|x_0 - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, \forall t \geq t_0. \tag{2.2}$$

Cela signifie que, quel que soit le rayon $\varepsilon$ d'une boule centrée sur l'équilibre, il est possible de trouver une sous-boule de rayon $\rho(\varepsilon)$, telle que la trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale dans cette sous-boule de rayon $\rho$ ne quittera jamais la boule de rayon $\varepsilon$.

**Définition 2.4** *Le point d'équilibre $x_e$ est dit attractif s'il existe $\rho > 0$ tel que*

$$\|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \tag{2.3}$$

L'attractivité signifie que, si l'état est initialisé dans un certain voisinage de l'état d'équilibre, alors la trajectoire issue de cet état initial convergera vers l'état d'équilibre au bout d'un temps suffisant.

**Définition 2.5** *Un système dynamique est dit instable au sens de Lyapunov lorsqu'il n'est pas stable au sens de la définition* 2.3.

Les deux dernières définitions éclaircissent deux faits très importants dans l'étude de la stabilité au sens de Lyapunov des systèmes dynamiques.

► Le premier est que l'instabilité d'un système dynamique ne signifie pas nécessairement une explosion ou divergence à l'infini.

▶ Le deuxième est que l'attractivité d'un point d'équilibre n'assure pas la stabilité au sens Lyapunov. En effet, il existe des systèmes qui convergent vers un point d'équilibre quelles que soient les conditions initiales, sans pour autant que ces systèmes puissent être considérés comme stables.

**Définition 2.6** *(Stabilité asymptotique).*
*Le point d'équilibre $x_e$ est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

Outre la stabilité, la stabilité asymptotique exige l'existence d'un voisinage du point d'équilibre, tel que pour toute condition initiale appartenant à ce voisinage, l'état $x(t)$ converge vers $x_e$ lorsque le temps tend vers l'infini.

Cependant, la définition de la stabilité asymptotique ne donne pas une idée sur la rapidité de convergence de la trajectoire $x(t)$ vers le point d'équilibre $x_e$. D'où la notion de stabilité exponentielle.

**Définition 2.7** *(Stabilité exponentielle).*
*Le point d'équilibre $x_e$ est exponentiellement stable s'il existe $\alpha > 0$ tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\rho(\varepsilon)$ tel que:*

$$\forall t \geq t_0, \|x_0 - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon \|x_0 - x_e\| \, exp(-\alpha(t - t_0)). \qquad (2.4)$$

Cette définition traduit le fait que toute trajectoire issue d'une condition initiale appartenant à la boule ouverte de rayon $\rho$ converge vers le point d'équilibre $x_e$ plus rapidement qu'une fonction exponentielle. $\alpha$ est appelé dans ce cas le taux de convergence.

On note que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique ainsi que la stabilité au sens de Lyapunov. Dans chacune des définitions précédentes 2.6 et 2.7, la stabilité est définie localement, puisque les conditions initiales sont prises dans un voisinage $V(x_e)$ autour du point d'équilibre $x_e$. Si $V(x_e) = \mathbb{R}^n$ , le point d'équilibre $x_e$ est dit globalement asymptotiquement (exponentiellement) stable.

**Définition 2.8** *(Stabilité Globale).*
*Si la condition de stabilité asymptotique (resp. exponentielle) est vérifée dans tout $\mathbb{R}^n$, le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (resp. exponentiellement) stable.*

On note que les définitions de la stabilité de Lyapunov, de la stabilité asymptotique et de la stabilité exponentielle présentent quelques inconvénients:

▶ Il est difficile de calculer de manière explicite chaque solution correspondante à chacune des conditions initiales.

▶ Ces définitions sont exprimées sous la forme de propositions mathématiques qu'il n'est pas simple de vérifier (trouver $\varepsilon$, $\rho$, $\alpha$, etc.).

C'est pourquoi on présente dans la suite des résultats permettant de déterminer la stabilité d'un système dynamique sans recours à l'intégration des équations différentielles.

## 2.2 Théorèmes de stabilité

Commençons par des définitions très utiles par la suite telles que candidat de Lyapunov et fonction de Lyapunov.

**Définition 2.9** *Une fonction $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite définie positive si*

$$V(x) > 0, \ \forall x \neq 0 \ \textit{et} \ V(x) = 0 \ \textit{lorsque} \ x = 0 \tag{2.5}$$

*Une fonction $V(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite définie négative si*

$$V(x) < 0, \ \forall x \neq 0 \ \textit{et} \ V(x) = 0 \ \textit{lorsque} \ x = 0. \tag{2.6}$$

**Définition 2.10** *[Candidat de Lyapunov]*
*Toute fonction $V(x)$ définie positive et continue est appelée candidat de Lyapunov.*

**Définition 2.11** *[Fonction de Lyapunov]*
*Une fonction de Lyapunov est un candidat de Lyapunov de classe $C^1$ ayant la propriété suivante:*

$$\dot{V}(x) \leq 0, \ \forall x \neq 0; \dot{V}(x) = 0 \ \textit{si} \ x = 0 \tag{2.7}$$

Par la suite, différents théorèmes de stabilité seront énoncés en considérant comme point d'équilibre l'origine 0 de l'espace d'état $\mathbb{R}^n$.

En effet, on peut toujours se ramener à l'étude de la stabilité de 0 par un simple changement de variable:

▶ Si $x_e$ est un point d'équilibre pour le système (2.1), c'est-à-dire $f(x_e) = 0$, il suffit de considérer le changement de coordonnées $z = x - x_e$. Dans ce cas on aura:

$$\dot{z} = \dot{x} = f(x) = f(z + x_e) \stackrel{def}{=} g(z)$$

**Définition 2.12** *(Stabilité au sens de Lyapunov).*
*Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (2.1) et $v \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de ce point d'équilibre. S'il existe une fonction de Lyapunov $V$ définie sur $v$,vérifiant en plus*

$$\dot{V}(x) \leq 0, \ \forall x \in v - \{0\}, \tag{2.8}$$

*alors le point d'équilibre $x_e$ est stable au sens de Lyapunov.*

**Théorème 2.1** *(Stabilité asymptotique).*
*Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (2.1) et $v \subset \mathbb{R}^n$ un voisinage de ce point d'équilibre. S'il existe une fonction de Lyapunov $V$ définie sur $v$, vérifiant en plus*

$$\dot{V}(x) < 0, \ \forall x \in v - \{0\},$$

*alors le point d'équilibre est asymptotiquement stable.*

On note que le théorème 2.1 donne des conditions suffisantes pour assurer la stabilité au sens de Lyapunov. La non existence d'une fonction de Lyapunov pour un système dynamique ne veut pas dire que ce dernier est non stable au sens de Lyapunov. De même, le théorème 2.2 fournit seulement des conditions suffisantes qui garantissent la stabilité asymptotique.

On remarque aussi que les conditions de ces deux théorèmes ne sont vérifiées que dans un voisinage autour du point d'équilibre $x_e$, d'où la qualification de théorème de stabilité locale pour le théorème 2.1 et théorème de stabilité asymptotique locale pour le théorème 2.2.

**Théorème 2.2** *(Stabilité asymptotique globale).*
*Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système (2.1) et soit la fonction $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$, telle que*
(1) $V(0) = 0$ *et* $V(x) > 0$ *dans* $\mathbb{R}^n - \{0\}$,
(2) $\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty$,

(3) $\dot{V}(x) < 0$ *dans* $\mathbb{R}^n - \{0\}$,

*alors* $x_e$ *est globalement asymptotiquement stable. La condition* (2) *garantit la bornitude non radiale de la fonction* $V$ *sur* $\mathbb{R}$ *.*

Outre les théorèmes garantissant les stabilités locale et globale des systèmes dynamiques autonomes, il existe des théorèmes caractérisant l'instabilité. Parmi ces théorèmes, on cite le théorème de Chetaev.

**Théorème 2.3** *(Théorème d'instabilité).*

*Considérons* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un voisinage de* $x_e = 0$*. Choisissons* $r > 0$ *tel que la boule* $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n | \, \|x\| \leq r\}$ *soit contenue dans* $D$*. Définissons maintenant la région suivante de l'espace d'état :*

$$U = \{x \in B_r | V(x) > 0\}$$

*Soit maintenant* $x_e = 0$ *un point d'équilibre du système dynamique* (2.1)*. Considérons* $V : D \to \mathbb{R}^n$ *une fonction de classe* $C^1$ *telle que* $V(0) = 0$ *et* $\dot{V}(x) > 0$ *sur* $U$*. S'il existe* $x_0$ *tel que* $V(x_0) > 0$ *pour* $\|x_0\|$ *assez petit, alors* $x_e = 0$ *est instable.*

Nous allons maintenant aborder le cas particulier des systèmes linéaires.

**Théorème 2.4** *Considérons un système linéaire défini par l'équation d'état suivante :*

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \tag{2.9}$$

•*Le point d'équilibre* 0 *est stable au sens de Lyapunov si et seulement si toute valeur propre de* $A$ *est à partie réelle négative ou nulle et si toute valeur propre à partie réelle nulle est simple.*

• *Si toutes les valeurs propres de* $A$ *sont à partie réelle strictement négative, alors le point d'équilibre* 0 *est asymptotiquement stable.*

• *S'il existe une valeur propre de* $A$ *à partie réelle strictement positive, alors le point d'équilibre est instable.*

**Définition 2.13** *Lorsque toute valeur propre de* $A$ *est à partie réelle strictement négative* $Re(\lambda_i) < 0$*, alors la matrice* $A$ *est dite matrice de Hurwitz ou matrice de stabilité.*

**Lemme 2.1** *Le point d'équilibre* $x_e = 0$ *du système* (2.9) *est globalement asymptotiquement stable si et seulement si la matrice* $A$ *est une matrice de Hurwitz.*

Ainsi la stabilité asymptotique en l'origine d'un système linéaire caractérisé par l'équation d'état (2.9) est donnée par le théorème suivant de Lyapunov.

**Théorème 2.5** *Une matrice* $A$ *est une matrice de Hurwitz, si et seulement si pour toute matrice symétrique définie positive* $Q$*, il existe une matrice symétrique définie positive* $P$ *solution de l'équation de Lyapunov suivante:*

$$PA + A^T P = -Q. \tag{2.10}$$

Une généralisation du théorème 2.5 pour les systèmes non linéaires autonomes a été proposée par Lyapunov. En effet, une approximation locale de la dynamique d'un système non linéaire permet, dans certains cas, d'en déduire la stabilité locale. Ainsi, on effectue un développement limité en série de Taylor du premier ordre en $x_e = 0$ de l'équation (2.1). On obtient alors le système approché linéaire suivant :

$$\dot{x} = Jx \tag{2.11}$$

où

$$J = \frac{\partial f}{\partial x}(x)|x = 0$$

est la matrice Jacobienne de $f$ en 0.

**Théorème 2.6** *Soit le système non linéaire défini par* (2.1). *Admettons que la fonction* $f$ *de ce système est définie sur un voisinage* $V$ *autour de l'origine* 0 *et qu'elle est de classe* $C^1$. *L'origine est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de* $J$ *sont à parties réelles strictement négatives. L'origine est instable si au moins une valeur propre de* $J$ *est strictement positive.*

Tous ces théorèmes et résultats concernent les systèmes autonomes non linéaires. Ils furent étendus au cas des systèmes non linéaires non autonomes.

# Chapitre 3

# Etude de la stabilité des solutions d'une équation de mouvement perturbé

Ici, on va étudier la stabilité des solutions des équations différentielles fractionnaires conformables et on applique cette dérivée pour les fonctions de type Lyapunov et prendre comme application les équations de mouvement perturbé.

Les principaux théorèmes de la méthode directe de Lyapunov pour cette classe d'équations du mouvement sont établis.

## 3.1 La dérivée fractionnaire conformable de type Lyapunov

Considérons un système d'équations différentielles avec une dérivée de type fractionnaire du vecteur d'état

$$
\begin{aligned}
D_{t_0}^{q} x(t) &= f(t,\ x(t)), && (3.1)\\
x(t_0) &= x_0, && (3.2)
\end{aligned}
$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C(\mathbb{R}_+\times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $t_0 \geq 0$. On suppose en outre que pour $(t_0, x_0) \in int(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n)$ le problème de la valeur initiale (IVP) $(3.1)-(3.2)$ a une solution $x(t,\, t_0,\, x_0) \in C^q([t_0,\, \infty),$ $\mathbb{R}^n)$ pour tout $t \geq t_0$. De plus, on suppose que $f(t, 0) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ .

Soit $V(t, x) \in C^q(\mathbb{R}_+ \times\ \mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ une fonction de Lyapunov pour l'équation (3.1) est construite de telle manière que $V(t, 0) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^n$. On pose $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\}$, $r > 0$.

**Définition 3.1** *Soit $V$ une fonction continue et $q-$différentiable (scalaire ou vectorielle), $V : \mathbb{R}_+ \times B_r \to \mathbb{R}^s$ pour l'équation* (3.1) *($s = 1 ou\ s = m$, respectivement), et $x(t, t_0, x_0)$ la solution du système* $(3.1)-(3.2)$ *existe et se définit sur $\mathbb{R}_+ \times B_r$. Alors pour $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$ l'expression:*

(1)

$$^{+}D^q_{t_0}V(t, x) = lim\ sup \left\{ \frac{V\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q},\ x\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q}, t, x\right)\right) - V\left(t, x\right)}{\theta},\ \theta \to 0^+ \right\} \tag{3.3}$$

*est la dérivée fractionnaire supérieure à droite de la fonction de Lyapunov,*

(2)

$$^{+}D^q_{t_0}V(t, x) = lim\ inf \left\{ \frac{V\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q},\ x\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q}, t, x\right)\right) - V\left(t, x\right)}{\theta},\ \theta \to 0^+ \right\},$$

*est la dérivée fractionnaire inférieure à droite de la fonction de Lyapunov,*

(3)

$$_{-}D^q_{t_0}V(t, x) = lim\ sup \left\{ \frac{V\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q},\ x\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q}, t, x\right)\right) - V\left(t, x\right)}{\theta},\ \theta \to 0^- \right\},$$

*est la dérivée fractionnaire supérieure à gauche de la fonction de Lyapunov,*

(4)

$$_{-}D^q_{t_0}V(t, x) = lim\ inf \left\{ \frac{V\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q}, x\left(t + \theta\left(t - t_0\right)^{1-q}, t, x\right)\right) - V\left(t, x\right)}{\theta},\ \theta \to 0^- \right\},$$

*est la dérivée fractionnaire inférieure à gauche de la fonction de Lyapunov.*

Une application suffisante des dérivées fractionnaires supérieures à droite des fonctions de Lyapunov dans la construction de sa méthode directe est basée sur le résultat suivant ([25]).

**Lemme 3.1** *Soit $V(t,\, x)$ continue, $q-$différentiable et localement Lipschitz par rapport à sa seconde variable $x$ sur $\mathbb{R}_+ \times B_r$ . Alors la dérivée fractionnaire de la fonction $V(t,\, x)$ par rapport à la solution $x(t,\, t_0,\, x_0)$ est définie par:*

$$
{}^+D_{t_0}^q V(t,x) = lim\ sup \left\{ \frac{V\left(t+\theta\,(t-t_0)^{1-q},\ x+\theta\,(t-t_0)^{1-q} f\,(t,x)\right) - V\,(t,x)}{\theta},\ \theta \to 0^+ \right\}, \tag{3.4}
$$

*où $(t,\, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$.*
*Si $V(t,\, x(t)) = V(x(t))$, $0 < q \leq 1$, la fonction $V$ est différentiable sur $x$, et la fonction $x(t)$ est $q-$différentiable sur $t$ pour $t > t_0$, alors*

$$
{}^+D_{t_0}^q V(t,x) = V'(x(t)) D_{t_0}^q x(t),
$$

*où $V'$ est une dérivée partielle de la fonction $V$.*
*En tenant compte des relations (3.3) et (3.4), on obtient le résultat de Yoshizawa [25] pour une dérivée fractionnaire de la fonction $V(t,\, x)$ sous la forme*

$$
{}^+D_{t_0}^q V(t,\ x(t,\ t_0,\ x_0)) = {}^+D_{t_0}^q V(t,\ x).
$$

**Définition 3.2** *Si la fonction $V(t,\, x)$ avec l'une de ses dérivées fractionnaires conformables résoudrent le problème de stabilité (instabilité) des solutions de (3.1), on va appeler $V(t,\, x)$ une fonction de Lyapunov pour le système (3.1).*

**Exemple 3.1** *Soit $t > t_0$, $V(t,\, x) = V_1(x) = x^2(t)$, $x \in \mathbb{R}$ . Alors, d'après (c) de la proposition 1.16, on a:*

$$
\begin{aligned}
{}^+D_{t_0}^q V\,(x\,(t)) &= {}^+D_{t_0}^q\,(x(t)x(t)), \\
&= x(t)\,{}^+D_{t_0}^q\,(x\,(t)) + {}^+D_{t_0}^q(x(t))x(t), \\
&= 2x(t)\,{}^+D_{t_0}^q\,(x\,(t))\,, \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

*pour tout* $t \geq t_0$. *Considérons l'équation fractionnaire conformable suivante pour* $0 < q \leq 1$,

$$D^q_{t_0} x\,(t) = f\,(t,\ x\,(t))\,, \tag{3.6}$$

*où* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(t,\,0) = 0$ *pour* $t \geq t_0$. *Pour la fonction* $V(x) = \dfrac{1}{2}x^2(t)$, *en considérant* (3.5), *on obtient*

$${}^{+}D^q_{t_0} V\,(x\,(t)) = x(t)^{+}D^q_{t_0} x\,(t) = x(t) f(t,\ x(t)) \tag{3.7}$$

*dans le domaine de la fonction* $f(t,\,x)$.*Soit* $V(t,\,x) = V_2(x) = x^T x$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Alors, d'après* $(c)$ *de la proposition* 1.16, *on a*

$${}^{+}D^q_{t_0}(V_2(x(t)) =^{+} D^q_{t_0}(x^T(t)x(t)) = 2x^T(t)^{+}D^q_{t_0}(x(t)) \tag{3.8}$$

**Exemple 3.2** *Soient* $x_1,\ x_2\ :\ [t_0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ *et* $x_1,\ x_2$ $q-$*différentiables. Considérons les équations du mouvement perturbé avec des dérivées fractionnaires conformables sous la forme*

$$\begin{aligned} D^q_{t_0} x_1(t) &= -\mu(t)x_2 - \nu(t)x_1, \\ D^q_{t_0} x_2(t) &= \mu(t)x_1 - \nu(t)x_2, \end{aligned} \tag{3.9}$$

*où* $\mu(t)$ *et* $\nu(t)$ *sont des fonctions continues à valeur singulière définies sur* $t \geq t_0$.
*Pour la fonction* $V_2(x_1,\,x_2) = \dfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ *d'après* $(c)$ *de la proposition* 1.16, *on obtient*

$$\begin{aligned} {}^{+}D^q_{t_0}\left(\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right) &= x_1(t)^{+}D^q_{t_0} x_1(t) + x_2(t)^{+}D^q_{t_0} x_2(t) \\ &= -\nu(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)). \end{aligned} \tag{3.10}$$

***Remarque 3.1*** *Dans* [2] *les auteurs obtiennent l'estimation* $(*)$ *pour une dérivée fractionnaire au sens de Caputo de la fonction de Lyapunov* $V(t,\,x_1,\,x_2) = (x_1^2 + x_2^2)$ *par rapport au système* (3.9)

$${}^{c}_{t_0}D^q_t\ (V(t,\ x_1,\ x_2)) \leq -2(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \tag{(*)}$$

*pour* $x \in \mathbb{R}^2$. *En comparant cette estimation avec l'estimation* (3.10), *on voit qu'en estimant une dérivée fractionnaire de Caputo on « perd » l'effet de la fonction* $\nu(t)$ *sur les propriétés de la solution nulle du système d'équations* (3.9).

**Lemme 3.2** *Soient $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$ et $P$ est une matrice constante $n \times n$. Alors pour les fonctions $V_1 = x^2(t), V_2 = y^T(t)y(t)$ et $V_3 = y^T(t)Py(t)$ les estimations suivantes sont satisfaites:*

*(a)* ${}_{t_0}^{c}D_t^q\ (x^2(t)) \leq^+ D_{t_0}^q\,(x^2(t))$ *pour* $x \in \mathbb{R}$*;*

*(b)* ${}_{t_0}^{c}D_t^q\ (y^T(t)y(t)) \leq^+ D_{t_0}^q\,(y^T(t)y(t))$ *pour* $y \in \mathbb{R}^n$*;*

*(c)* ${}_{t_0}^{c}D_t^q\ (y^T(t)Py(t)) \leq^+ D_{t_0}^q\,(y^T(t)Py(t))$*, pour* $y \in \mathbb{R}^n$.

***Preuve.*** *On applique la dérivée fractionnaire de Caputo pour la fonction $V_1$; on obtient:*

$${}_{t_0}^{c}D_t^q\ (x^2(t)) \leq 2x(t){}_{t_0}^{c}D_t^q\ (x(t)).$$

*Des estimations similaires peuvent être obtenues pour les fonctions $V_2$ et $V_3$. En tenant compte des égalités* (3.5) *et* (3.8)*, on obtient les assertions* $(a)-(c)$ *du lemme* 3.2. ■

Du lemme 3.2, il s'ensuit que la dérivée fractionnaire conformable d'une fonction de type Lyapunov est une borne supérieure des dérivées fractionnaires de Caputo de cette fonction de Lyapunov.

## 3.2 Méthode directe de Lyapunov

Les définitions de stabilité au sens de Lyapunov pour un système fractionnaire conformable (3.1) restent les mêmes que pour les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles avec les dérivées fractionnaires de Caputo.

Dans nos principaux théorèmes nous utiliserons la classe de fonctions de Hahn

$$\Bbbk = \{a \in C[\mathbb{R}_+,\ \mathbb{R}_+] : a(u) \text{ est strictement croissante et } a(0) = 0\}.$$

**Théorème 3.1** *Supposons que pour le système d'ordre fractionnaire conformable* (3.1) *il existe une fonction $q-$différentiable $V(t,\, x), V(t,\, 0) = 0$ pour $t \geq t_0$ et des fonctions $a,\, b \in \Bbbk$ telles que:*

*(i)* $V(t, x) \geq a(\|x\|),\ (t,\, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$,

*(ii)* $V(t, x) \leq b(\|x\|),\ (t,\, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$,

*(iii)*

$$^+D_{t_0}^q\,(V(t,\ x(t))) \leq 0 \text{ pour } (t,\ x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r. \tag{3.11}$$

*Alors l'état* $x = 0$ *de* (3.1) *est uniformément stable.*

**Preuve.**Soit $x(t) = x(t,\, t_0,\, x_0)$ la solution de (3.1) pour $(t_0, x_0) \in (\mathbb{R}_+ \times B_r)$ définie pour tout $t \geq t_0$.

Soit $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $0 \ < \varepsilon < r$ est donné. Avec les conditions $(i)$, $(ii)$ du théorème 3.1 on peut choisir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, alors

$$b(\delta) < a(\varepsilon). \tag{3.12}$$

On va montrer que $\|x_0\| < \delta$ implique $\|x(t)\ \| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$. Si ce n'est pas vrai il existe une solution $x(t,\, t_0,\, x_0) = x(t)$ de (3.1) telle que pour $\|x_0\| < \delta$ il existe $t_1 > t_0$ pour laquelle

$$\|x(t_1)\| = \varepsilon,\ \ \|x(t)\| < \varepsilon \text{ pour tout } t \in [t_0, t_1).$$

D'aprés la formule 1.43 et la condition 3.11, la relation de Lyapunov

$$V(t, x(t)) - V(t_0,\ x_0) = I_{t_0}^q \left({}^+D_{t_0}^q \left(V\left(t,\ x\left(t\right)\right)\right)\right)$$

deviènne

$$V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) \leq 0. \tag{3.13}$$

Pour $t = t_1$ on a de (3.13),

$$a(\varepsilon) \leq V(t_1, x(t_1)) \leq V(t_0, x_0) \leq b(\|x_0\|) < b(\delta). \tag{3.14}$$

Cette inégalité contredit la condition 3.12.

Ce qui termine la preuve. ■

**Exemple 3.3** (*Suite*) *D'après* (3.7) *et le théorème* 3.1*, l'état* $x = 0$ *de l'équation fractionnaire conformable* (3.6) *est uniformément stable si*

$$x(t)f(t,\ x(t)) \leq 0$$

*pour* $(t,\, x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$.

**Théorème 3.2** *Soit la condition du théorème* 3.1 *satisfaite et à la place de* (3.11) *on retient* *l'estimation suivante:*

$$^{+}D_{t_0}^{q}(V(t,\ x(t))) \leq -d(\|x\|) \tag{3.15}$$

*pour* $(t,\ x) \in \mathbb{R}_+ \times B_r$ , *où* $d \in \Bbbk$. *Alors l'état* $x = 0$ *du système* (3.1) *est uniformément asymptotiquement stable.*

**Preuve.**Puisque toutes les conditions sont satisfaites, l'état $x = 0$ est uniformément stable.

On va montrer qu'il est uniformément asymptotiquement stable.

Soit $0 < \varepsilon < r$ et $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ comme dans le théorème 3.1. Pour $\varepsilon_0 \leq r$ on choisit $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) > 0$ et on considère la solution $x(t, t_0, x_0)$ avec les données initiales $t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\|x_0\| < \delta_0$.

Soit pour $t_0 < t \leq t_0 + T(\varepsilon)$, où $T(\varepsilon) \geq (qb(\delta_0)/d(\delta(\varepsilon)))^{1/q}$. Pour $x(t)$ on a $\|x(t)\| \geq \delta(\varepsilon)$.

Nous voulons de montrer que cela n'est pas possible sous les conditions du théorème 3.2.

À partir de la relation de Lyapunov on trouve

$V(t,\, x(t)) - V(t_0,\, x_0) = I_{t_0}^{q} \left(^{+}D_{t_0}^{q} \left(V\left(t,\ x\left(t\right)\right)\right)\right)$

$$\leq -I_{t_0}^{q}(d(\|x(t)\|)) = -\int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1} d(\|x(s)\|)ds. \tag{3.16}$$

De (3.16) on trouve:

$$\begin{aligned} V(t,\ x(t)) &\leq V(t_0,\ x_0) - \int_{t_0}^{t} (s - t_0)^{q-1} d(\|x(s)\|)ds \\ &\leq b(\delta_0) - d(\delta(\varepsilon)) \frac{(t - t_0)^q}{q}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Pour $t = t_0 + T(\varepsilon)$ par (3.17) on a $0 < a(\delta(\varepsilon)) \leq V(t_0 + T(\varepsilon), x(t_0 + T(\varepsilon)) \leq b(\delta_0) - d(\delta(\varepsilon)) \dfrac{T(\varepsilon)^q}{q} \leq 0$, ce qui est une contradiction.

La contradiction ci-dessus montre qu'il existe $t_1 \in [t_0,\, t_0 + T(\varepsilon)]$ tel que $\|x(t_1)\| < \delta(\varepsilon)$.

D'où $\|x(t)\ \| < \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$ autant que $\|x(t_0)\ \| < \delta_0$ et $lim\|x(t)\ \| = 0$ quand $t \to \infty$ uniformément en $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Ce qui termine la preuve. ■

**Exemple 3.4** *(suite). Il résulte de* (3.5) *et des conditions du théorème* 3.2 *que l'état* $x_1 =$

$x_2 = 0$ *de* (3.9) *sera uniformément asymptotiquement stable si la fonction* $\nu(t)$ *satisfaite la condition* $\nu(t) \geq \nu_0 > 0$, *dans ce cas on a:*

$$^{+}D_{t_0}^{q}\left(V(x_1(t), x_2(t))\right) \leq -2\nu_0(x_1^2(t) + x_2^2(t)) < 0$$

*pour tout* $t \geq t_0$*et* $0 < q \leq 1$.

Dans le théorème suivant, nous établirons les conditions d'instabilité de l'état $x = 0$ du système (3.1).

**Théorème 3.3** *Soit pour le système* (3.1) *qu'il existe une fonction* $q-$*différentiable* $V(t, x) : \mathbb{R}_+ \times B_\varepsilon \to \mathbb{R}$ *sur* $[t_0, \infty) \times G(h)$, *où* $G(h) \subset B_\varepsilon$, $t_0 \geq 0$, *les conditions suivantes sont satisfaites:*

(1) $0 < V(t, x) \leq c < \infty$ *pour certainne constante* $c$,
(2) $^{+}D_{t_0}^{q}V(t, x) \geq a(V(t, x))$, *où* $a \in \Bbbk$, $0 < q \leq 1$,
(3) *l'état* $x = 0$ *appartient à* $\partial G(h)$,
(4) $V(t, x) = 0$ *pour* $[t_0, \infty) \times (\partial G(h) \cap B_\varepsilon)$.
*Alors l'état* $x = 0$ *du système* (3.1) *est instable.*

**Preuve.**Il résulte de la condition (3) du théorème 3.3 que pour quelque soit $\delta > 0$ il existe un $x_0 \in G(h) \cap B_\delta$ tel que $V(t_0, x_0) > 0$.
Supposons que $x(t) \in G(h)$ et d'après les conditions (1) et (2) on a:

$$\begin{aligned} c &\geq V(t, x(t)) - V(t_0, x_0) \geq I_{t_0}^{q} a(V(t, x(t)) \\ &\geq V(t_0, x_0) + a(V(t_0, x_0))\frac{(t - t_0)^q}{q} \end{aligned} \tag{3.18}$$

De cette inégalité il résulte que la solution $x(t)$ doit quitter le domaine $G(h)$ à un instant $t_1 > t_0$.
Étant que la condition (4) du théorème 3.3 est satisfaite, alors $x(t)$ ne peut pas quitter le domaine $G(h)$ à travers le bord $\partial G(h)$, car $G(h) \subset B_\varepsilon$. Donc $x(t)$ quittera $B_\varepsilon$, c'est-à-dire $\|x(t_1)\| \geq \varepsilon$.
Ce qui termine la preuve.

■

Il résulte du théorème 3.3 les deux corollaires suivantes.

**Corollaire 3.3** *Supposons que toutes les conditions du théorème* 3.3 *sont vérifiées et que les conditions* (1) *et* (2) *sont remplacées par les conditions suivantes, respectivement :*
$(1^*)$ $0 < V(t,x) \leq b(\|x\|)$,
$(2^*)$ ${}^{+}D^q_{t_0} V(t,x) \geq a(\|x\|)$, *où* $a, b \in \Bbbk$ .
*Alors l'état* $x = 0$ *du système* (3.1) *est instable.*

**Corollaire 3.4** *Supposons que toutes les conditions du théorème* 3.3 *sont vérifiées et que la condition* (2) *est remplacée par*

$$ {}^{+}D^q_{t_0} V(t,x) = \lambda V(t,x) + W(x(t)),\ t \in [t_0, \infty),\ x \in G(h),\ \lambda > 0, \tag{3.19}$$

*où la fonction* $W$ *est continue et* $W(x) \geq 0$.
*Alors l'état* $x = 0$ *du système* (3.1) *est instable .*

**Preuve.**La relation (3.19) peut être représentée sous la forme intégrale

$$V(t,\ x(t)) = V(t_0,\ x(t_0))exp\left(\lambda\frac{(s-t_0)^q}{q}\right) + \int\limits_{t_0}^{t} exp\left(\lambda\frac{(s-t_0)^q}{q}\right)$$
$$\times exp\left(-\lambda\frac{(s-t_0)^q}{q}\right)(s-t_0)^{q-1}W(x(s))ds.$$

D'après la relation ci-dessus, étant que le second terme est positif avec les conditions du corollaire 3.5, pour tout $0 < q \leq 1$ on a

$$V(t,\ x(t)) \geq V(t_0,\ x(t_0))exp\left(\lambda\frac{(t-t_0)^q}{q}\right),\ t \geq t_0, \tag{3.20}$$

Soit l'état initial de la solution $x(t) = x(t,\ t_0,\ x_0)$ est $x_0 \in U$ où $U$ est un voisinage de l'origine
$x = 0$. Pour tout $t \geq t_0$ l'estimation (3.20) reste valable par rapport à la solution $x(t)$, alors pour $t \to \infty$ la fonction $V(t, x(t))$ croîte tandis que, par les conditions du théorème 3.3, elle est bornée . Alors pour $x(t)$ il existe $t^*$ tel que $x(t^*)$ va quitter $B_r$. Ce qui prouve l'instabilité de l'état $x = 0$ du système (3.1).

**Exemple 3.5** *Considérons le système conformable fractionnaire pour* $0 < q \leq 1$,

$$\begin{aligned} D^q_{t_0} x(t) &= n(t)y - xg(t,\ x,\ y), \qquad x(t_0) = x_0; \\ D^q_{t_0} y(t) &= -n(t)x - yg(t,x,y), \qquad y(t_0) = y_0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

*où $n(t)$ est une fonction continue pour tout $t \geq t_0$, $g(t, x, y)$ est une somme d'une série de puissance convergente, $g(t, 0, 0) = 0$ pour $t \geq t_0$. En appliquant la fonction $2V(x, y) = x^2+y^2$ au système* (3.21) *on a*

$$^{+}D^q_{t_0} V(x(t)), y(t)) = -(x^2 + y^2)g(t, x, y). \tag{3.22}$$

*En réalisant une $q-$intégration de* (3.22), *on obtient la relation de Lyapunov*

$$V(x(t),\ y(t)) - V(x_0,\ y_0) \leq -r^2 \int_{t_0}^{t} \frac{g(s,\ x(s),\ y(s))}{(s - t_0)^{q-1}} ds \tag{3.23}$$

*sur le domaine $x^2 + y^2 \leq r^2$ de l'état d'équilibre $x = y = 0$. De la relation* (3.22) *et de l'inégalité* (3.23) *il résulte que:*

(*a*) *D'après le théorème* 3.1, *l'état $x = y = 0$ de* (3.21) *est uniformément stable à condition que la fonction soit telle que $g(t, x, y) \geq 0$ pour $t \geq t_0$;*

(*b*) *D'après le théorème* 3.2 *l'état $x = y = 0$ du système* (3.21) *est uniformément asymptotiquement stable, si $g(t, x, y) > 0$ sur le domaine $x^2 + y^2 \leq r^2$ pour $t \geq t_0$ ;*

(*c*) *D'après le théorème* 3.3 *l'état $x = y = 0$ du système* (3.21) *est instable si $g(t,\ x,\ y) < 0$ pour $t \geq t_0$ sur un voisinage suffusamment petit.*

■

## 3.3 Principe de comparaison

On considère le système (3.1) avec la fonction$V(t,\ x) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}_+)$ $q-$differentiable et de plus la dérivée totale fractionnaire conformable de la fonction $V(t, x)$ donnée par la formule (3.4).

L'application du principe de comparaison permet d'indiquer la forme générale de la structure des conditions de stabilité pour les équations fractionnaire conformable du mouvement perturbé.

**Théorème 3.4** *Supposons que:*

(1) *Pour le système* (3.1) *il existe une fonction $q-$différentiable $V(t,\ x)$ avec une dérivée*

*fractionnaire conformable* (3.4),

(2) *Il existe une fonction* $g(t,\ u) \in C(\mathbb{R}_+^2\ , \mathbb{R})$ *telle que*

$$^+D_{t_0}^q V(t,\ x) \le g(t,\ V(t,\ x)), \tag{3.24}$$

*pour* $(t,\ x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$ *et* $0 < q \le 1$,

(3) *Il existe une solution maximale* $r(t) = r(t,\ t_0,\ r_0) \in C^q([t_0,\ \infty),\ \mathbb{R})$ *pour l'équation fractionnaire conformable scalaire de comparaison la suivante:*

$$D_{t_0}^q u(t) = g(t,\ u),\ u(t_0) = u_0 \ge 0, \qquad \forall t \ge t_0 \tag{3.25}$$

*Alors pour toutes les solutions du système* (3.1) *l'estimation*

$$V(t,\ x(t)) \le r(t), \tag{3.26}$$

*est valable pour tout* $t \ge t_0$ *quand* $V(t_0,\ x_0) \le u_0$.

**Preuve.**

Soit la solution $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ de l'IVP $(3.1)-(3.2)$ existe sur $t \in [t_0, \infty)$ et $V(t_0, x_0) \le u_0$. Notons $m(t) = V(t, x(t))$ et évaluons la dérivée fractionnaire conformable de la fonction $m(t)$ utilisant (3.4). À partir de la condition (2) du théorème 3.4 on obtient

$$D_{t_0}^q m(t) \le g(t, V(t, x)) = g(t, m(t)). \tag{3.27}$$

et de plus

$$D_{t_0}^q u(t) = g(t, u) + \varepsilon, \qquad u(t_0) = u_0 + \varepsilon \ge 0,\ \varepsilon > 0. \tag{3.28}$$

De cette égalité, il résulte que

$$D_{t_0}^q u(t, \varepsilon) = g(t, u(t, \varepsilon)) + \varepsilon > g(t, u(t, \varepsilon)),$$

alors $m(t) < u(t, \varepsilon)$ et donc $\lim u(t, \varepsilon) = r(t)$ quand $\varepsilon \to 0$ uniformément sur $t$ pour $t_0 \le t < T < +\infty$.

Ce qui termine la preuve. ■

## 3.4 Conclusion

Le calcul actuel de la dérivée fractionnaire de Caputo pour une fonction de type Lyapunov est difficile en raison de l'absence de règle de chaîne pour cette dérivée, comme pour les autres dérivées fractionnaires (Riemann-Liouville, Grunwald Letnikov, etc.). Pour cette raison prenant en considération des exemples particuliers, il est nécessaire d'estimer la dérivée fractionnaire de la fonction de Lyapunov.

La méthode directe de Lyapunov est étendue aux systèmes d'équations du mouvement perturbé avec des dérivées fractionnaires conformables, les théorèmes de la méthode directe de Lyapunov et le principe de comparaison sont établis pour les fonctions scalaires de Lyapunov, en tenant compte du fait que pour une dérivée fractionnaire conformable, une chaîne des règles se déroule. La relation entre une dérivée fractionnaire conformable et une dérivée de Caputo indique que la dérivée fractionnaire conformable des fonctions de Lyapunov est un majorant pour la dérivée de Caputo de ces fonctions. Cette circonstance doit être prise en compte en considération des problèmes spécifiques de la stabilité des mouvements.

## 3.5 Bibliographie

[1] T. Abdeljawad; On conformable fractional calculus, J. Comput. Appl. Math., 279 (2015),57–66.

[2] R. Agarwal, D. O'Regan, S. Hristova; Stability of Caputo fractional differential equations by Lyapunov functions, Appl. Math., 60 (2015), 253–676.

[3] N. Aguila-Camacho, M. A. Duarte-Mermoud, J. A. Gallegos; Lyapunov functions for fractional order systems, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 19 (2014), 2951-2957.

[4] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, and G. De Tommasi. FiniteTime Stability and Control, volume 453 of Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, London, 2014.

[5] F. Amato, M. Ariola, and C. Cosentino. Finite-time control of linear systems :a survey. In Current Trends in Nonlinear Systems and Control, pages 195-213.Springer, 2006.

[6] F. Amato, M. Ariola, C.T. Abdallah, and P. Dorato. Finite-time control for uncertain linear systems with disturbance inputs. In Proc. IEEE American Control Conf., pages 1776 1780, San Diego, USA, 1999.

[7] B.Assia :Quelques Propriétés et Applications de l'Opérateur Fractionnaire de Caputo, Mémoire du master achadémique, 2017, Université Dr Tahar Moulay Saida, Algérie, 25.

[8] P. Dorato. Short-time stability in linear time-varying systems. Technical report, DTIC Document, 1961.

[9] W. Garrard. Further results on the synthesis of nite-time stable systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 17(1) :142 144, 1972.

[10] W. Hahn. Stability of Motion. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[11] R.Khalil, M. Al Horani, A. Yousef et M. :Sababhehb A New Defenition of Fractional Derivative, Journal of computational and applied mathematics, 264 :65-70 (2014).

[12] H. K. Khalil. Nonlinear Systems. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey,3rd edition, 2002.

[13] F.Kheira, S.Safa :Dérivée et Intégrale Fractionnaire au sens de RiemannLiouville, Mémoire du master achadémique, 2018, Université Hamma Lakhdar El Oued, Algérie.

[14] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematical Studies 204, Ed Jan Van Mill Amsterdam, 2006.

[15] V. Lakshmikantham, S. Leela, J. Vasundhara Devi; Theory of Fractional Dynamic Systems,Cambridge Scientific Publisher, Cambridge, 2009.

[16] A. A. Martynyuk; On the stability of a system of equations with fractional derivatives with respect to two measures, J. Math. Sci. 217 (2016) 468–475.

[17] A. A. Martynyuk, I. M. Stamova, Yu. A. Martynyuk-Chernienko; Stability analysis of the set of trajectories for differential equations with fractional dynamics, Eur. Phys. J. Special Topics (to appear).

[18] Philippe P. Müllhaupt. Introduction à l'Analyse et à la Commande des Systèmes Non Linéaire. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 2009.

[19] I. Podlubny :Fractional Differential Equations, Academic Press, (1999).

[20] M. Pospĩšil, L. Pospĩilova Skripkova; Sturm's theorems for conformable fractional differential equation, Math. Commun., 21 (2016), 273–281.

[21] I .M. Stamova, G. T. Stamov; Functional and Impulsive Differential Equations of Fractional Order: Qualitative Analysis and Applications, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2017.

[22] G. WANG, W. LIU and C. REN : Existence of Solutions for Multi-point Nonlinear Differential Equations of Fractional Orders with Integral Boundary Conditions, Electronic Journal of differential equations, Vol. 2012, No. 54, pp. 1010, 2012.

[23] L. Weiss and E.F. Infante. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. IEEE Transactions on Automatic Control, 12(1) :54-59, 1967.

[24] M. Wellbeer : Efficient Numerical Methods for Fractional Differential Equations and their, Analytical Bockground, D. Univ Braunschweig, 2010.

[25] T. Yoshizawa; Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.