

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Gueffal Qatar Ennada

Intitulé

**Sur les équations intégrales et intégro-différentielles
non-linéaires de Volterra**

Dirigé par : Dr.Belhireche Hanane

Devant le jury

PRESIDENT	Dr.Chaoui Abderrezak	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr.Belhireche Hanane	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr.Ghiat Mourad	MCA	Univ-Guelma

Session 15 Juin 2022

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu **Allah** qui a donnée vie et santé pour le parachèvement de ce modeste travail.

Je tiens à remercier vivement mon encadreur **Dr.Hanane Belhireche**, pour son soutien, son encouragement, la confiance qu'elle a témoignée en acceptant de diriger ce travail et pour avoir mis à mon disposition ses conseils pour une meilleure maitrise du sujet.

J'exprime également mes chaleureux remerciement au **Mr.Chaoui Abderrezak** et au **Mr.Ghiat Mourad**, pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je voudrais également remercier ma familles, et mes amis.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
A mes chers parents et mes soeur et frères
A tout les amis.

L'imagination est plus importante que la connaissance.

La vraie science est un sentiment de coeur avant de réaliser à l'esprit.
Gueffal Qatar Ennada

Résumé

Dans ce mémoire, nous allons étudier dans les sens analytique et numérique les équations intégrales de Volterra dans la forme linéaire, non linéaire et intégral-différentielle. Sur le plan théorique on applique la méthode de Picard et sur le plan numérique on utilise la méthode de Nyström qui consiste à l'approximation de l'intégrale. Des tests numériques sont donnés pour vérifier l'efficacité et la convergence de notre méthode.

Mots clé : Equation de Volterra non linéaire, equation de Volterra intégral-différentielle, méthode de Trapèze, méthode de Nyström.

Abstract

In this thesis, we will study in analytical and numerical sens the Volterra integral equations in the linear, nonlinear and integro-differential forms. In the theoretical sens we apply the method of Picard and in numerical senses we use the Nyström method which consists to the approximation of the integral. Numerical tests are given to verify the efficiency and convergent of our method.

Keywords : Volterra non linear equation, integro-differential equation, Trapezoidal method, Nyström method.

Table des matières

Introduction	6
1 Rappel de l'équation intégrale de Volterra linéaire	7
1.1 Etude analytique	7
1.2 Etude numérique	9
1.3 Résultats numériques	10
2 Equation intégrale de Volterra non linéaire	15
2.1 Etude analytique	15
2.2 Etude numérique	17
2.3 Etude de l'erreur	19
2.4 Resultats numériques	21
3 Equation intégro-différentielle non linéaire de Volterra	24
3.1 Etude numérique	25
3.2 Etude de l'erreur	27
3.3 Résultat numérique	30

Introduction

Dans ce mémoire on s'intéresse à l'étude des équations intégrales de Volterra du seconde espèce dans la forme linéaire, non linéaire et intégral-différentielle. Cette étude est consacré à l'étude analytique et même numérique en se référant aux [3], [4] et [7].

Le mémoire est divisé en trois chapitres essentiels :

Dans **le premier chapitre**, on fait rappel à l'étude de l'équation intégrale de Volterra linéaire (voir [[3]]) dans les deux sens analytique et numérique.

L'étude analytique est basée sur la méthode des approximations successives, appelée aussi la méthode de Picard, tandis que dans l'étude numérique on utilise la méthode de Nyström pour l'approximation de l'intégrale.

Des exemples numérique sont données pour voir l'effécacité de la méthode choisie.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'équation intégrale de Volterra non linéaire.

Dans **le dernier chapitre** on se limite à l'étude numérique de l'équation intégral-différentielle de Volterra par la méthode de Nyström donné dans [4] (voir aussi [7]).

Chapitre 1

Rappel de l'équation intégrale de Volterra linéaire

Dans ce chapitre, on va rappeler l'étude analytique et numérique de l'équation intégrale de Volterra linéaire (voir [3]) donné dans la forme :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s)u(s)ds + f(t) \quad (1.1)$$

1.1 Etude analytique

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution $u(t)$ de l'équation (1.1), on a le théorème suivant.

Théorème 1.1.1 *Si $k(t, s)$ est continue dans $a \leq s \leq t \leq b$ et $f(t)$ est continue dans $a \leq t \leq b$, alors l'équation intégrale (1.1) possède une solution unique continue pour $a \leq t \leq b$.*

Démonstration 1 . *L'approche classique pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de (1.1) est la méthode d'approximation successive également appelée la méthode de Picard, qui consiste à définir les itérations suivantes :*

$$u_n(t) = f(t) + \int_a^t k(t, s)u_{n-1}(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

avec

$$u_0(t) = f(t)$$

On pose

$$\phi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

avec $\phi_0(t) = f(t)$

Alors, on a

$$\phi_n(t) = \int_a^t k(t, s) \phi_{n-1}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

et

$$u_n(t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(t) \quad (1.5)$$

Comme f et k sont continue sur $[a, b]$, alors $\exists G > 0$ et $K > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} |f(t)| &\leq G; & 0 \leq t \leq b, \\ |k(t, s)| &\leq K; & a \leq s \leq t \leq b. \end{aligned}$$

On va démontrer par récurrence que

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{G(K(t-a))^n}{n!}, \quad a \leq t \leq b, \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.6)$$

En effet, pour $n=0$, l'inégalité (1.6) est évidente. Supposons maintenant que (1.6) est vrai pour $n-1$, alors de (1.4) on obtient

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{GK^n}{(n-1)!} \int_a^t s^{n-1} ds = \frac{GK^n(t-a)^n}{n!} \quad (1.7)$$

d'où par récurrence l'inégalité (1.6) est vrai $\forall n \geq 0$. par conséquent la suite $u_n(t)$ définie dans (1.5) converge ce qui nous permet écrire

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) \quad (1.8)$$

Nous allons montrer maintenant que $u(t)$ donnée dans (1.8) satisfait l'équation (1.1), comme les termes $\phi_i(t)$ sont dominés par $\frac{G(K(b-a))^i}{i!}$ alors la série $\sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t)$ est uniformément convergente. Par conséquent nous pouvons échanger l'ordre d'intégration et la somme dans l'expression suivante, on obtient

$$\int_a^t k(t, s) \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(s) ds = \sum_{i=0}^{\infty} \int_a^t k(t, s) \phi_i(s) ds = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{i+1}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) - f(t). \quad (1.9)$$

Cela prouve que $u(t)$ défini par (1.8) satisfait l'équation (1.1). De plus, comme chacun $\phi_i(t)$ est clairement continue, alors $u(t)$ est aussi continue, car il s'agit de la limite d'une suite des fonctions continues uniformément convergentes.

On va montrer l'unicité de la solution $u(t)$. Supposons qu'il existe une autre solution continue $\tilde{u}(t)$ de (1.1) alors :

$$u(t) - \tilde{u}(t) = \int_a^t k(t, s)(u(s) - \tilde{u}(s))ds \quad (1.10)$$

Comme $u(t)$ et $\tilde{u}(t)$ sont les deux continues, il existe une constante B tel que :

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq B, \quad a \leq t \leq b,$$

en substituant dans (1.10), on obtient

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq KB(t - a), \quad a \leq t \leq b,$$

en répétant la marche on montre que

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \frac{B(K(t - a))^n}{n!}, \quad a \leq t \leq b.$$

Pour tout n pour assez grand, le côté droit de l'inégalité est suffisamment petit, d'où $u(t) = \tilde{u}(t)$, $a \leq t \leq b$.

1.2 Etude numérique

Dans cette section on va construire une approximation de la solution de l'équation (1.1).

La méthode que nous allons utiliser est celle de Nyström. Elle consiste à remplacer l'intégrale qui apparaît dans l'équation par une formule d'intégration. Soit la subdivision de l'intervalle $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$,

$$h = \frac{b - a}{n}; \quad t_i = a + ih; \quad 0 \leq i \leq n;$$

Nous remplaçons l'intégrale

$$I = \int_a^{t_i} k(t, s)u(s)ds;$$

Par la forme de quadrature suivante

$$I_i = h \sum_{j=0}^n w_j k(t_i, t_j)u(t_j); \quad (1.11)$$

où, $\{w_j\}_{j=0}^n$ sont appelés les poids supposés vérifier

$$\exists W > 0; \sup_{n \geq 1} \{w_j\}_{j=0}^n \leq W.$$

En appliquant cette approximation dans l'équation (1.1), on obtient le système suivante :

$$\begin{cases} u_i = f(t_i) + h \sum_{j=0}^{i-1} w_j k(t_i, t_j)u_j + w_i k(t_i, t_i)u_i \\ u_0 = f(t_0) \end{cases}$$

où

$$u_i \approx u(t_i).$$

On récupère alors le système itératif suivant

$$\begin{cases} u_i = \frac{1}{1 - w_i h k(t_i, t_i)} \left(f(t_i) + h \sum_{j=0}^{i-1} w_j k(t_i, t_j)u_j \right), \\ u_0 = f(t_0). \end{cases}$$

1.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous allons donner deux exemples différents pour voir l'efficacité de la méthode des Trapèzes, qui donne une grande précision pour approcher l'intégrale.

Exemple 1.3.1 *Considérons l'équation linéaire de Volterra définie comme suit*

$$u(t) = \int_0^t (ts)u(s)ds + f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

où

$$K(t, s) = ts, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

$$K \in \mathcal{C}^0([0, 1] \times \mathbb{R})$$

et

$$f(t) = 1 - \frac{t^3}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$f \in \mathcal{C}^0([0, 1]),$$

en se référant au théorème (1.1.1), on vérifie que l'équation admet la solution exacte donnée par

$$u(t) = 1.$$

Les figures suivantes (voir figure (1.1)) représentent le résultat de calcul obtenus pour $N=10$ et $N=100$.

Exemple 1.3.2 *Considérons dans cet exemple l'équation suivante*

$$u(t) = \int_0^t \exp(ts)u(s)ds + f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

où

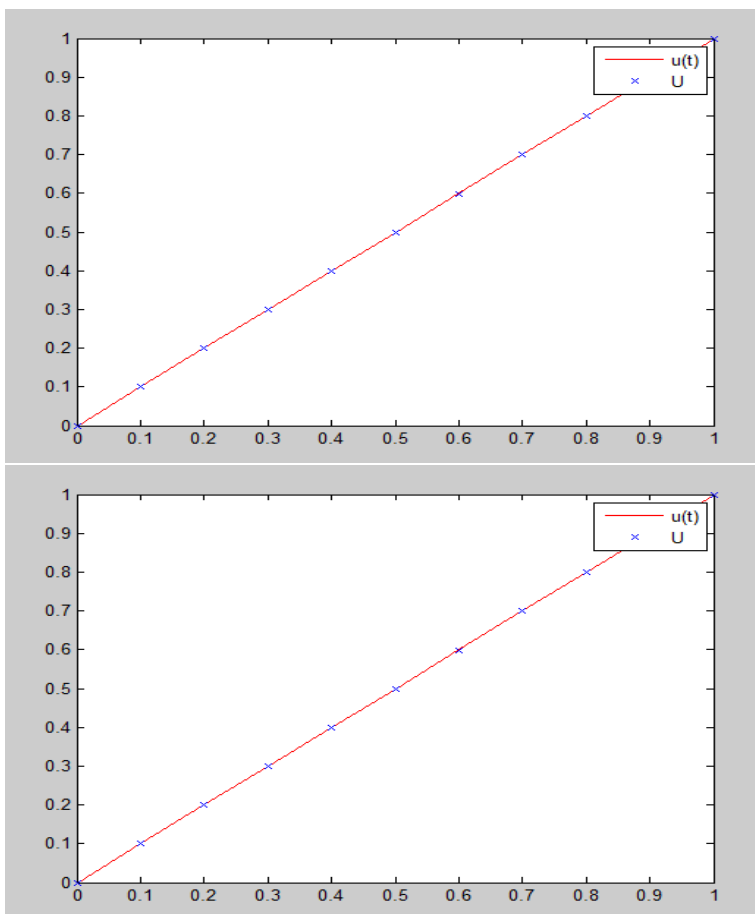
$$K(t, s) = \exp(ts), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1,$$

$$K \in \mathcal{C}^0([0, 1] \times \mathbb{R})$$

et

$$f(t) = \exp(t) - \frac{\exp(t * (t + 1)) - 1}{t + 1};, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$f \in \mathcal{C}^0([0, 1]),$$

FIGURE 1.1 – solution exacte et solution approchée pour $N = 10$ et $N = 100$

en se référant au théorème (1.1.1), on vérifie que l'équation admet la solution exacte donnée par

$$u(t) = \exp(t).$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solution

exacte et celle approchée avec un test d'arrêt $\epsilon = 10^{-7}$.

<i>Méthode des Trapèzes</i>	
N	$E = \max(\ u - U_i\)$
4	1.391863600719523e-001
10	1.990385309817144e-002
50	7.809406063645774e-004
100	1.951186115651815e-004
200	4.877237452305394e-005

Les figures suivantes représentent le résultat obtenu pour $N = 4$ et $N = 100$.

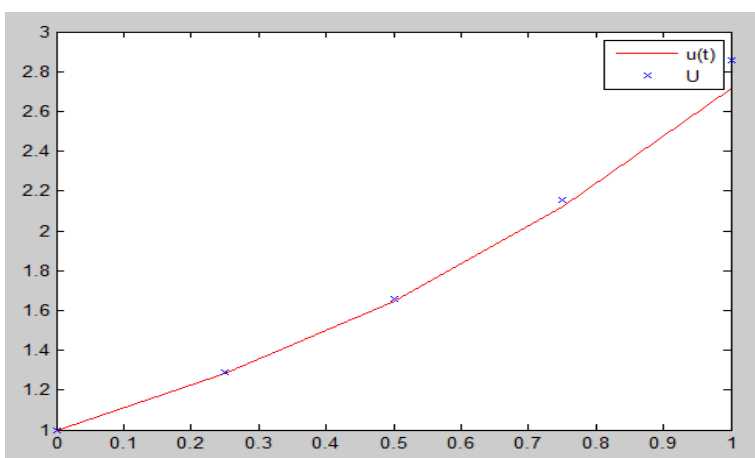
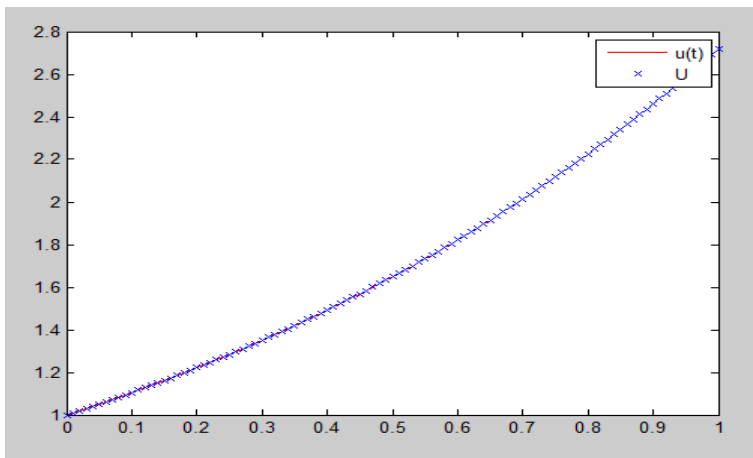


FIGURE 1.2 – solution exacte et solution approchée pour $N = 4$

FIGURE 1.3 – solution exacte et solution approchée pour $N = 100$

Chapitre 2

Equation intégrale de Volterra non linéaire

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude analytiquement et numériquement l'équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce, donnée dans la forme suivante

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s))ds, \quad a \leq t \leq b \quad (2.1)$$

2.1 Etude analytique

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution $u(t)$ de l'équation (2.1), on ait besoin de certaines hypothèses, on suppose alors que :

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} i) \quad f(t) \in \mathcal{C}(a, b), \\ ii) \quad K \in \mathcal{C}([a, b]^2 \times \mathbb{R}), \\ iii) \quad \forall t, s \in [a, b], \forall u, \tilde{u} \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R}_+, \\ |K(t, s, u) - K(t, s, \tilde{u})| \leq A|u - \tilde{u}| \end{array} \right.$$

Le théorème suivant donne l'existence et l'unicité de la solution de l'équation (2.1).

Théorème 2.1.1 *Supposons que les hypothèses (H) sont vérifiées alors l'équation (2.1) admet une solution unique continue sur $[a, b]$.*

Démonstration 2 *Comme pour le cas linéaire, pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution, on utilise la méthode des approximation successives,*

définis par

$$u_n(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u_{n-1}(s)) ds \quad (2.2)$$

avec $u_0(t) = f(t)$. On pose.

$$\phi_n(t) = u_n(t) - u_{n-1}(t) \quad (2.3)$$

avec $\phi_0(t) = f(t)$, on a alors

$$u_n(t) = \sum_{i=0}^n \phi_i(t) \quad (2.4)$$

et

$$|\phi_n(t)| \leq \int_a^t |\phi_{n-1}(s)| ds \quad (2.5)$$

Par récurrence on obtient

$$|\phi_n(t)| \leq \frac{G(A(t-a))^n}{n!} \quad (2.6)$$

où

$$G = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)| \quad (2.7)$$

Par conséquent

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t) \quad (2.8)$$

existe et est une fonction continue. Pour prouver que $u(t)$ vérifie l'équation (2.1), on pose

$$u(t) = u_n(t) + \delta_n(t) \quad (2.9)$$

donc à partir de (2.2), on a

$$u(t) - \delta_n(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s) - \delta_{n-1}(s)) ds$$

où encore,

$$u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s)) ds = \delta_n(t) + \int_a^t K(t, s, u(s) - \delta_{n-1}(s)) - K(t, s, u(s)) ds. \quad (2.10)$$

Appliquant la condition de Lipschitz $H(iii)$, on obtient

$$|u(t) - f(t) - \int_a^t K(t, s, u(s))ds| \leq |\delta_n(t)| + A(t - a)\|\delta_{n-1}\| \quad (2.11)$$

où

$$\|\delta_{n-1}\| = \max_{0 \leq s \leq t} |\delta_{n-1}(s)|,$$

mais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\delta_n(t)| = 0$$

de sorte que, en prenant n assez grand, le côté droit de l'inégalité (2.11) est suffisamment petit. Il s'ensuit que la fonction $u(t)$ définit par (2.1) satisfait.

On va montrer que $u(t)$ est une solution unique. Supposons qu'il existe une autre solution continue $\tilde{u}(t)$ de (2.1) alors on a

$$u(t) - \tilde{u}(t) = \int_a^t K(t, s, u(s)) - K(t, s, \tilde{u}(s))ds \quad (2.12)$$

d'où

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq A \int_a^t |u(s) - \tilde{u}(s)|ds \quad (2.13)$$

ce qui implique que

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq BL(t - a)$$

En répétant, la marche, on obtient :

$$|u(t) - \tilde{u}(t)| \leq \frac{B(A(t - a))^n}{n!} \quad (2.14)$$

pour tout n , par conséquent, on conclut que $u(t) = \tilde{u}(t)$

2.2 Etude numérique

La méthode que nous allons utiliser est celle de Nyström. Soit la subdivision de l'intervalle $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b$, $h = \frac{b-a}{N}$, $t_j = a + jh$. La méthode consiste à remplacer l'intégrale

$$I = \int_a^{t_i} K(t, s, u(s))ds,$$

par la forme de quadrature suivante

$$I_i = h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j)). \quad (2.15)$$

Nous choisissons la méthode des Trapèzes, c-à-d $w_0 = w_i = \frac{1}{2}$ et $w_j = 1$ pour $j = 1, \dots, i-1$

$$I_i = \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j) + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i),$$

En remplaçant dans l'équation (2.1), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} U_0 = f(t_0) \\ U_i = f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j) + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i). \end{cases} \quad (2.16)$$

Le système (2.16) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} u_0 = f(t_0), \\ U_i = S + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i), \\ S = f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j) \end{cases} \quad (2.17)$$

où $U_i \simeq u(t_i)$. Le théorème suivant nous permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution du système (2.16)

Théorème 2.2.1 *Si h est suffisamment petit, le système (2.16) admet une unique solution.*

Démonstration 3 . *Pour tout $i \geq 1$, nous définissons*

$$\phi_i(U_i) = S + \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i),$$

où

$$S = f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_0, U_0) + \sum_{j=1}^{i-1} K(t_i, t_j, U_j).$$

D'après H(iii), on a

$$|\phi_i(U_i) - \phi_i(U'_i)| = \left| \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U_i) - \frac{h}{2} K(t_i, t_i, U'_i) \right| \leq \frac{h}{2} A |U_i - U'_i|, \quad (2.18)$$

d'après le théorème du point fixe de Banach et pour h suffisamment petit, ϕ_i est une contraction donc le système (2.17) admet un unique point fixe.

2.3 Etude de l'erreur

Dans cette partie nous allons démontrer que la méthode numérique ainsi, construite converge vers la solution exacte de l'équation (2.1). Pour cela, nous définissons

$$|\epsilon_i| = |U_i - u(t_i)|, \quad 0 \leq i \leq N,$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\epsilon_i|) = 0.$$

Soit u solution de (2.1). La fonction

$$\delta_n(h, t_i) = \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s)) ds - h \sum_{j=0}^i w_j K(t_i, t_j, u(t_j)),$$

est appelée l'erreur de la consistance locale, par conséquent la méthode d'approximation est dite consistante si

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|) = 0.$$

Le théorème suivant nous permet de montrer que la méthode numérique construite dans la partie précédente converge vers la solution exacte de l'équation (2.1)

Théorème 2.3.1 *Si la méthode d'approximation est consistante, alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq i \leq n} |\epsilon_i|) = 0.$$

Avant de démontrer ce théorème, on a besoin de rappeler le lemme suivant donné dans [3].

Lemme 2.3.1 *(Lemme de Gronwall)*

Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

où

$$A > 0, \quad |B_n| \leq B$$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1}(B + A|\xi_0|), \quad n \geq 1$$

La démonstration du théorème (2.3.1) est la suivante

Démonstration 4 Nous avons, pour $1 \leq i \leq N$,

$$|\epsilon_i| = |U_i - u(t_i)| = \left| h \sum_{j=0}^i w_j (K(t_i, t_j, U_j) - K(t_i, t_j, u(t_j))) - \delta_n(h, t_i) \right|,$$

d'après l'hypothèse H(iii), on a

$$|\epsilon_i| = \left| h \sum_{j=0}^i w_j A (U_j - u(t_j)) - \delta_n(h, t_i) \right|,$$

alors

$$|\epsilon_i| \leq hWA \sum_{j=0}^i |\epsilon_j| + |\delta_n(h, t_i)|,$$

ce qui donne

$$|\epsilon_i| \leq \frac{hWA}{1 - hWA} \sum_{j=0}^{i-1} |\epsilon_j| + \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|}{1 - hWA}.$$

En utilisant le théorème (2.3.1), on trouve

$$|\epsilon_i| \leq \left(1 + \frac{hWA}{1 - hWA} \right)^{i-1} \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\delta_n(h, t_i)|}{1 - hWA} \right),$$

comme

$$\left(1 + \frac{hWA}{1 - hWA} \right)^{i-1} \leq \left(1 + \frac{(b-a)WA}{N(1 - hWA)^N} \right),$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(b-a)WA}{N(1 - hWA)^N} \right) < +\infty,$$

alors, $\exists \theta > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \left(1 + \frac{1 + hWA}{1 - hWA} \right)^{i-1} \leq \theta$$

ce qui prouve le résultat.

2.4 Resultats numériques

Dans cette partie, nous allons donner un exemple pour voir l'efficacité de la méthode de Trapèze, qui donne une grande précision pour approcher l'intégrale.

Exemple 2.4.1 *On considère l'exemple suivant*

$$u(t) = \int_0^t \frac{2s}{1+t^2+u^2(s)} ds + f(t), \quad 0 \leq s \leq t \leq 1$$

on pose

$$K(t, s, u) = \frac{2s}{1+t^2+u^2(s)}, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad u \in \mathbb{R},$$

et

$$f(t) = -\ln(1+2t^2) + \ln(1+t^2) + t, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1.$$

On vérifie facilement que f et K sont continues, pour $0 \leq s \leq t \leq 1$ et que le noyau K est Lipschitzien par rapport à la troisième variable u , en appliquant le théorème [2.2.1](#), on vérifie que l'équation admet la solution exacte $u \in C^0([0, 1])$ donnée par,

$$u(t) = t.$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solutions exacte et approchée, avec test d'arrêt $\epsilon = 10^{-7}$.

Méthode des Trapèzes	
N	$E = \max(\ u - U_i\)$
4	3.852532914045637e-003
10	6.181213618856596e-004
30	6.862912315930281e-005
80	9.640766585272687e-006
100	6.171313766012432e-006
150	2.743580715947047e-006
250	9.869979691323749e-007

Les figures suivantes représentent le résultat obtenu pour $N = 10$ et $N = 200$.

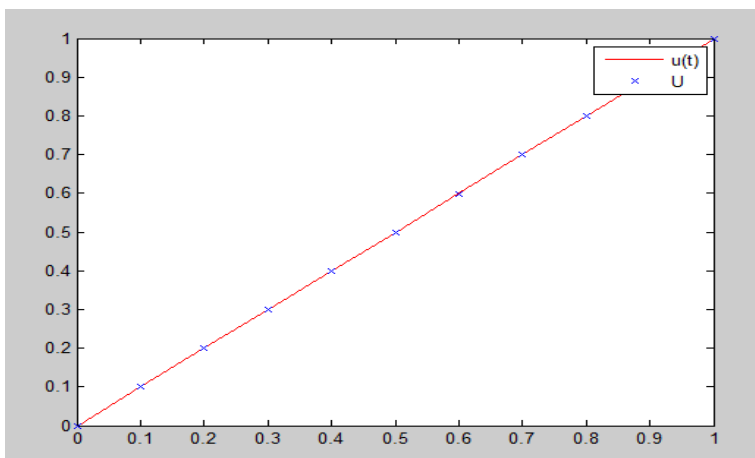
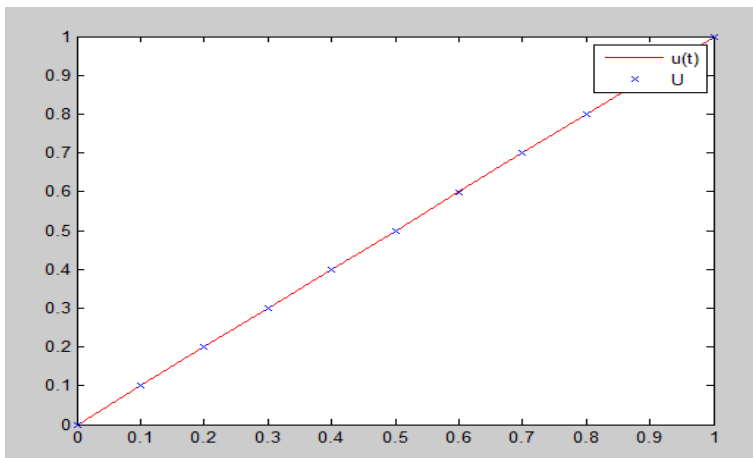


FIGURE 2.1 – solution exacte et solution approchée pour $N = 10$

Remarque 2.4.1 Nous remarquons dans les deux cas (linéaire et non linéaire) que lorsque N prend des valeurs assez grandes, l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, de l'équation de Volterra, tend vers zéro, ce qui prouve la convergence de la méthode des Trapèzes.

FIGURE 2.2 – solution exacte et solution approchée pour $N = 200$

Chapitre 3

Equation intégro-différentielle non linéaire de Volterra

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à l'étude de l'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra, où la dérivée est donnée sous le signe intégrale, donnée dans la forme :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (3.1)$$

L'équation (3.1) est complétée par l'équation dérivée suivante

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (3.2)$$

Pour mettre l'équation dans un cadre fonctionnel, on a besoin de certaines hypothèses utiles. On suppose que $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, et K une fonction définie par,

$$K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(t, s, u, v) \rightarrow K(t, s, u, v),$$

et vérifie les hypothèses suivantes :

$$(H_1) \left\| \begin{array}{l} (1) \ K, \frac{\partial K}{\partial t} \in \mathcal{C}([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \ \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall t, s \in [a, b], \forall u, v \in \mathbb{R}, \\ \max(|K(t, s, u, v)|, |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v)|) \leq M \end{array} \right.$$

et

$$(H_2) \left\| \begin{array}{l} (1) \ \exists \alpha, \beta, \bar{\alpha}, \bar{\beta} \in \mathbb{R}^+, \forall u, v, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], \\ |K(t, s, u, v) - K(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq \alpha|u - \bar{u}| + \beta|v - \bar{v}|, \\ |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u, v) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \bar{u}, \bar{v})| \leq \bar{\alpha}|u - \bar{u}| + \bar{\beta}|v - \bar{v}|, \\ (2) \ \beta < 1 \end{array} \right.$$

3.1 Etude numérique

La méthode que nous allons utiliser est celle de Nyström. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit une subdivision de l'intervalle $[a, b]$, tel que

$$h = \frac{b-a}{N}, \quad t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq N.$$

Soit la formule des intégrations numériques

$$\int_a^b \xi(t) dt \approx h \sum_{i=0}^N w_i \xi(t_i),$$

où, w_i est une famille de réels, vérifiant, $\forall N \in \mathbb{N}^*, \exists W > 0, \max_{0 \leq j \leq N} |w_j| \leq W$. En appliquant cette quadrature sur les équations (3.1) et (3.2), on obtient le système suivant

$$U_0 = f(a), \tag{3.3}$$

$$V_0 = f'(a) + K(a, a, U_0, V_0), \tag{3.4}$$

$$U_n = f(t_n) + h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N \quad (3.5)$$

$$V_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (3.6)$$

où

$$U_n \approx u(t_n),$$

et

$$V_n \approx u'(t_n).$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de la solution du système (3.3)-(3.6), nous allons supposer une nouvelle hypothèse (H_3) donnée par

$$(H_3) \quad \alpha < 1.$$

Théorème 3.1.1 *Sous les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3), et pour h suffisamment petit, le système (3.3)-(3.6) admet une unique solution sur $[a, b]$.*

Démonstration 5 *Soit la norme suivante dans \mathbb{R}^2 ,*

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|.$$

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons

$$\psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_n) + h w_n K(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ f'(t_n) + K(t_n, t_n, X, Y) + h w_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) + h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\left\| \psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\|_1,$$

où

$$\beta_1 = h w_n (K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y'))$$

$$\beta_2 = K(t_n, t_n, X, Y) - K(t_n, t_n, X', Y') + hw_n \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, X', Y') \right)$$

Cependant

$$\begin{aligned} |\beta_1| &\leq hW(\alpha|X - X'| + \beta|Y - Y'|), \\ |\beta_2| &\leq (\alpha + hW\bar{\alpha})|X - X'| + (\beta + hW\bar{\beta})|Y - Y'|. \end{aligned}$$

Alors

$$\left\| \psi_n \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \psi_n \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(hW\alpha, hW\beta, (\alpha + hW\bar{\alpha}), (\beta + hW\bar{\beta})) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1$$

Comme $\alpha < 1$, en appliquant le théorème de Banach, nous obtenons le résultat.

3.2 Etude de l'erreur

Nous allons montrer que la méthode numérique construite dans la section précédente converge vers la solution exacte de l'équation (3.1). Pour cela, nous définissons l'erreur,

$$\epsilon_n = |U_n - u(t_n)| + |V_n - u'(t_n)|, \quad 0 \leq n \leq N$$

On dit que la méthode est convergente si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \epsilon_n \right) = 0$$

Pour $0 \leq n \leq N$ et $u \in \mathcal{C}^1(a, b)$, nous définissons l'erreur de consistance par,

$$\begin{aligned} \delta(h, t_n) &= \left| \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right| \\ &+ \left| \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), u'(t_i)) \right|. \end{aligned}$$

La méthode d'approximation est dite consistante avec l'équation (3.1), si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \delta(h, t_n) \right) = 0.$$

Le théorème suivant nous permet de montrer que la méthode numérique construite, converge vers la solution exacte de l'équation (3.1).

Théorème 3.2.1 *Si la méthode d'approximation est consistante avec l'équation (3.1), alors*

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\max_{0 \leq n \leq N} \epsilon_n) = 0$$

Démonstration 6 *Pour $n \geq 1$, on a par définition*

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= |U_n - u(t_n)| + |V_n - u'(t_n)|, \\ &= |h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds| \\ &\quad + |K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ &\quad - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds| \end{aligned}$$

ainsi, en ajoutant et retranchant dans cette égalité les termes

$$h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))$$

et

$$h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))$$

on trouve

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= |h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \\ &\quad + h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds| \\ &\quad + |K(t_n, t_n, U_n, V_n) + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) \\ &\quad - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) \\ &\quad + h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n)) \\ &\quad + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds| \end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &\leq |h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))| \\
&\quad + |K(t_n, t_n, U_n, V_n) - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n))| \\
&\quad + |h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))| \\
&\quad + |h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds| \\
&\quad + |h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds|
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &\leq |h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^{n-1} w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))| \\
&\quad + |h w_n K(t_n, t_n, U_n, V_n) - h w_n K(t_n, t_n, u(t_n), v(t_n))| \\
&\quad + |h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, U_i, V_i) - h \sum_{i=0}^{n-1} w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i))| \\
&\quad + |h w_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, U_n, V_n) - h w_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, u(t_n), v(t_n))| \\
&\quad + |K(t_n, t_n, U_n, V_n) - K(t_n, t_n, u(t_n), u'(t_n))| \\
&\quad + |h \sum_{i=0}^n w_i K(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) - \int_a^{t_n} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds| \\
&\quad + |h \sum_{i=0}^n w_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, u(t_i), v(t_i)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, u(s), u'(s)) ds|
\end{aligned}$$

d'après les hypothèses (H_1) , (H_2) et la définition de $\delta(h, t_n)$, on a

$$\begin{aligned}
\epsilon_n &\leq (\alpha + \alpha hW + \bar{\alpha} hW) |U_n - u(t_n)| + (\beta + \beta hW + \bar{\beta} hW) |V_n - u'(t_n)| \\
&\quad + hW \sum_{i=0}^{n-1} ((\alpha + \bar{\alpha}) |U_i - u(t_i)| + (\beta + \bar{\beta}) |V_i - u'(t_i)|) + \delta(h, t_n).
\end{aligned}$$

pour h assez petit, on a

$$k = \min(1 - (\alpha + \alpha hW + \bar{\alpha} hW), 1 - (\beta + \beta hW + \bar{\beta} hW)) > 0,$$

et

$$\epsilon_n \leq \frac{hWmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{k} \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i + \frac{1}{k} \delta(h, t_n),$$

d'après le théoreme (2.3.1) du chapitre 2, on obtient

$$\epsilon_n \leq \frac{1}{k} \left(1 + \frac{hWmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{k} \right)^{n-1} \left(\max_{1 \leq i \leq n} \delta(h, t_i) + hWmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta}) \epsilon_0 \right),$$

mais

$$\left(1 + \frac{(hWmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta}))}{k} \right)^{n-1} \leq \left(1 + \frac{(b-a)Wmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{Nk} \right)^N,$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{((b-a)Wmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta}))}{Nk} \right)^N < +\infty.$$

Alors, $\exists \theta > 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbb{N}; \quad \max_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{k} \left(1 + \frac{hWmax(\alpha + \bar{\alpha}, \beta + \bar{\beta})}{k} \right)^{n-1} \leq \theta$$

d'où le résultat.

3.3 Résultat numérique

Dans cette partie, nous allons donner un exemple pour voir l'efficacité de la méthode des Trapèzes.

Exemple 3.3.1 Soit l'équation donnée par,

$$u(t) = f(t) + \int_a^t \frac{2s}{1+t^2 + \frac{u^2}{100} + \frac{v^2}{100}} ds, \quad t \in [0, 1] \quad (3.7)$$

où, le noyau $K(t, s, u, v) = \frac{2s}{1+t^2 + \frac{u^2}{100} + \frac{v^2}{100}}$ satisfait, à (H_1) , (H_2) et (H_3) avec

$$M = \frac{1}{10}, \quad \alpha < \frac{1}{2}, \quad \beta < \frac{1}{2}, \quad \bar{\alpha} < 1, \quad \bar{\beta} < 1$$

et la fonction $f(t)$ notée par

$$f(t) = t - 100 \left[\ln \left[\frac{101}{100} + \frac{101t^2}{100} \right] - \ln \left[\frac{101}{100} + t^2 \right] \right]$$

on vérifie que la solution exacte est donnée par,

$$u(t) = t$$

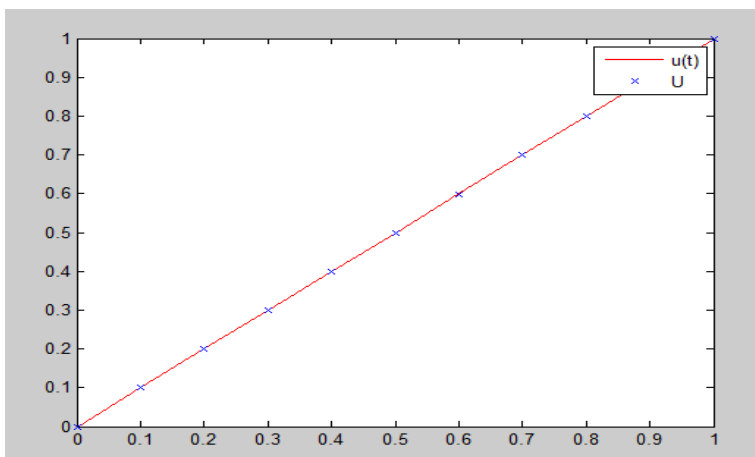
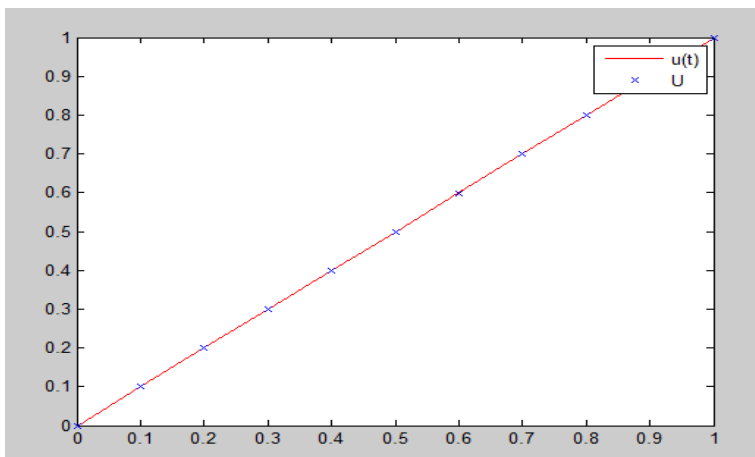
et

$$u'(t) = 1$$

Le tableau suivant donne une estimation de l'erreur entre la solutions exacte et la solution approchée avec un test d'arrêt $\epsilon = 10^{-7}$

Méthode des trapèzes	
N	$E = \max(\ u - U_i\ , \ v - V_i\)$
4	1.519414700539290e-004
10	2.438124604164926e-005
20	6.118786601838622e-006
50	9.903920661358256e-007
100	2.524897193545428e-007
200	9.113579024777607e-008
250	9.342530959965956e-008

Les figures suivantes montre la convergence de la méthode des Trapèzes.

FIGURE 3.1 – solution exacte et solution approchée pour $N = 10$ FIGURE 3.2 – solution exacte et solution approchée pour $N = 100$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons repris l'étude des équations intégrales de Volterra linéaires, non linéaires et intégral-différentielles. On a commencé par la question de l'existence et l'unicité de la solution puis la construction d'une approximation numérique en utilisant la méthode des trapèzes.

A la fin de chaque étude, on a développé des exemples numériques pour assurer l'efficacité de notre méthode choisie.

Bibliographie

- [1] K. E. Atkinson : The numeral solution of integral equation of the second kind ;maison d'édition,1997.
- [2] H. Brezis : Analyse Fonctionnelle (Théorie et applications), Masson 1987.
- [3] P. Linz : Analytical and numerical methods for Volterra Equations ; maison d'edition, 1985
- [4] H. Guebbai, M. Z. Aissaoui, I. Debbar, B. Khalla, Analytical and Numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equations, AMC, vol 229, p. 367-373 (2014).
- [5] A. Quarteoni, R. Sacco, F. Salero : Méthodes numériques Algorithmes, analyse et applications, Springer-Verlag, Italia,2008
- [6] A. Rahmoun : Equations intégrales linéaires et non linéaires, Analyse et techniques de résolution, August 16, 2018
- [7] S. Salah, H. Guebbai, S. Lemita and M.Z. Aissaoui, Equations de la dynamique avec une approche numérique, *thèse soutenue en vue de l'obtention d'un Doctorat.*