République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Mme Farah Chayma

Intitulé

Existence de la solution d'une équation différentielle d'ordre trois à condition intégrale en résonance

Dirigé par :

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr.Hitta Amara**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.Frioui Assia**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.Bendjazaia Nassima**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Table des matières

Remerciements

Dieu merci pour cette réussite et ce succès, pour le courage et la patience que vous n'avez accordés le long de mon parcours de formation surtout.

Un grand remerciement à mon encadreure FRIOUI Assia. Maitre de conférences classe A, à l'université-08 Mai 1945-Guelma. Pour ses consignes, ses conseils fructueux et sa disposition. Sans sa patience, ce travail n'aurait pas pu voir le jour.

Je tiens à remercier Pr. HITTA Amara, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse

J'adresse mes remerciements à Dr. BENDJAZIA Nassima, d'avoir accepté d'examiner, évaluer et juger mon travail.

Veuillez accepter ce travail, en gage de mon grand respect et ma profonde reconnaissance.

Dédicaces

Je dédie ce travail à

À mon mari Mousaab BOUAFIA

À ma chère mère Lilia

À mon cher père Riadh

À tous mes frère «Ali, Mouhamed, hamza et ma sœur Roukaya»

À mes chères filles «Meriem et Wedjden»

Qui étaient toujours à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments difficiles,

À tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager leur savoir de nous l'inculquer sans relâche.

À tous mes amis

À tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon cœur, je dis grand merci

De la part de Chayma FARAH

Résumé

L'objectif de ce mémoire s'inscrit dans l'étude de l'existence de la solution d'un problème en résonance moyennant le degré de coïncidence de Mawhin.

Mots clés : Opérateurs de Fredholm, résonance, théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

Abstract

The objective of this memory is devoted to the study of the existence of solution for the resonance problem via the coincidence degree theory of Mawhin.

Keywords : Fredholm operators, resonance, coïncidence degree theory of Mawhin.

Notations

X étant un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de X.on notera par :

- X/F l'espace quotient de X par F.
- $\dim(F)$ dimension de F
- $co\dim(F)$ codimension de F

$L : X \to Y$ étant un opérateur linéaire on notera

- $D\,(L)$ domaine de définition de L
- $Ker\,(L)$ noyau de L
- $\operatorname{Im}(L)$ image de L
- $ind\,(L)$ indice de L (lorsque L est de Fredholm).
- $\deg_B$ degré de Brouwer
- $\deg_{LS}$ degré de Leray-Schauder.

0.1 Introduction

Ces dernières années tout comme la théorie du point fixe, le degré topologique communément appelé les théorèmes de continuation s'est révélé un outil très imporatnt pour la résolution de certains problèmes aux limites non linéaires associés à des équations différentielles ordinaires et fonctionnelles. Ces théorèmes se base sur un processus appelé processus de continuation qui consiste à déformer l'application non définie sur tout l'espace en une autre plus simple pour laquelle nous connaissons l'existence d'un point fixe. Cette déformation est connue sous le nom d'homotopie. La propriété d'invariance par homotopie du degré topologique permet alors de déduire l'existence d'un point fixe et par conséquent d'une solution au problème donné. En revanche le concept du degré topologique d'une application fut introduit d'abord par Brouwer aux environs de 1910 pour une application continue. Il utilisa ce degré pour démontrer qu'une application continue d'une sphère dans $\mathbb{R}^n$ en elle-même possède un point fixe. En 1934, Leray et Schauder ont étendu le degré de Brouwer aux perturbations compactes de l'identité c'est à dire les opérateurs de la forme $I - T$ dans des espaces de Banach de dimension infinie. Puis en 1972, Mawhin a étendu la puissante théorie du degré de Leray-Schauder du cas des perturbations compactes de l'identité à celui des perturbations non linéaires compactes d'applications de Fredholm d'indice zéro.

C'est dans ce contexte que ce mémoire s'inscrit et l'objectif est donc l'étude d'un problème en résonance. Au fait nous nous proposons d'etudier l'existence de la solution d'une équation différentielle d'ordre trois à conditions non locales de type intégrale suivante :

$$\begin{cases} x'''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \qquad 0 < t < 1, \\ x(0) = x''(0) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\eta^2} \int_0^\eta x(t)\, dt, \quad \eta \in (0,1), \end{cases} \tag{0.1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et $\eta \in (0,1)$. Il importe de souligner que notre étude repose sur la théorie du degré de coïncidence de Mawhin. Cette notion que nous employons et qui est décrite plus en détail dans la suite, consiste à transformer le problème (0.1) en une équation opérationnelle de la forme

$$Lx = Nx, \tag{0.1$'$}$$

où $Lx = x'''$, et $Nx = f(t, x(t), x'(t))$ avec $t \in (0,1)$. On dit que le problème aux limites (0.1) est en résonance si l'équation linéaire $Lx = x'''(t) = 0$, sous les conditions aux limites données possède une solutions non triviale i.e, si $\dim \ker L \neq \{0\}$, autrement dit si L n'est pas inversible. Néanmoins, il n'y a aucun problème si le noyau de la partie linéaire de cette équation ne contient que zéro, car dans ce cas L est surjective et l'équation $\left(0.1'\right)$ pourra être réduite à un problème de point fixe pour l'opérateur $L^{-1}N$ et pour le résoudre on utilisera un théorème convenable soit par exemple celui de Schauder si $L^{-1}N$ est compact ou de Banach si $L^{-1}N$ est contractant. Mais qu'on ait il si L^{-1} n'existe pas. A cet effet, Mawhin à montrer que si L est un opérateur de Fredholm d'indice zéro, on a dans ce cas $\dim(Ker(L)) = co\dim(\operatorname{Im}(L)) < \infty$. Par conséquent il existe deux projections continues $P : X \to X$, et $Q : Y \to Y$ telles que

$$\operatorname{Im}(P) = KerL \text{ et } Ker(Q) = \operatorname{Im}(L),$$

(ici X et Y sont des espaces de banach), et un isomorphisme $J : Ker(L) \to \operatorname{Im}(Q)$, que l'application $L + JP$ est bijective et que

$$(L + JP)^{-1} = L_p^{-1}(I - Q) + J^{-1}Q.$$

avec $L_p = L\,|_{D(L)\cap Ker(P)}$ et que l'equation $\left(0.1'\right)$ prend la forme

$$\begin{aligned} x &= (L + JP)^{-1}(N + JP)x \\ &= \left(L_p^{-1}(I - Q) + J^{-1}Q\right)(N + JP)x \\ &= \left(P + J^{-1}QN + L_p^{-1}(I - Q)N\right)x \end{aligned}$$

c'est à dire que l'équation donnée est équivalente à un problème de point fixe pour l'opérateur

$$M = P + J^{-1}QN + L_p^{-1}(I - Q)N$$

qui est indépendant du choix des projections P et Q. Si M est compact, alors à partir du degré de Leray- Schauder, Mawhin a développé une nouvelle théorie du degré topologique connu sous le nom de degré de coïncidence pour le couple (L, N).

Terminons cette introduction par une analyse rapide du contenu de ce mémoire.

Dans le premier chapitre, nous discutons le concept du degré topologique et ses propriétés nous définissons alors le degré de Brouwer en dimension finie puis le degré de Leray-Schauder en dimension infinie et comme application nous prouvons quelques théorèmes de point fixe topologiques à savoir : le théorème du point fixe de Brouwer et de Schauder.

A travers le chapitre deux nous verrons que pour définir le degré de coïncidence de Mawhin où du moins pour le construire nous aurons besoin d'identifier une classe importante d'opérateurs : les opérateurs de Fredholm d'indice zéro. En revanche comme nous le verrons ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections, alors nous y consacrons une autre section. Enfin dans la dernière section de ce chapitre nous prouvons le théorème de continuation de Mawhin.

Dans le troisième et dernier chapitre nous présentons une brève introduction de quelques notations et certains résultats fondamentaux intervenant dans la reformulation du problème ainsi que le théorème principal soit celui d'existence de la solution obtenu à partir du théorème de coïncidence de Mawhin.

Chapitre 1

Degré topologique et ses applications

Ce premier chapitre introductif est consacré aux outils mathématiques utiliser pour développer ces présentes études. On s'intéresse plus particlièrement à une notion bien importante : le degré topologique et ses implications pour les théorèmes de points fixes. Cette théorie est intéressante pour deux raisons : d'une part, elle constitue l'une des approches classiques pour démontrer quelques théorèmes d'aspect topologiques, et d'autre part elle est à l'origine d'un autre concept : le degré de coïncidence de Mawhin que nous verrons en detail dans la suite de ce mémoire.

1.1 Avant propos

Soient $y \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application au moins continue et soit l'équation

$$f(x) = y \qquad (1,1)$$

La question qui se pose souvent : peut on assurer l'existence de la solution de $(1,1)$.

C'est évidement très simple dans le cas où f est linéaire, on calcule justement le déterminant s'il est non nul alors, il existe une solution et même une seule de $(1,1)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

Mais dans le cas où f est non linéaire ce n'est pas de la même simplicité. On souhaite alors développer un outil jouant pour les applications non linéaires ce rôle de déterminant pour les applications linéaires : un réel appelé le "degré" qui indique par sa non-nullité que $(1,1)$ a au moins une solution stable. Ce degré dépendra de f, y et de l'ensemble sur lequel on cherche les solutions de $(1,1)$.

Cependant les degrés topologiques les plus connus sont de Brouwer pour les espaces de dimension finie, de Leray-Schauder pour la dimension infinie et comme conséquence de ce dernier on a le dégré de coincidence de Mawhin.

Notons qu'une des propriétés la plus importante quand à l'emploi pratique du degré topologique est la propriété d'invariance par homotopie qu'on appelle aussi principe de continuation. Pour cela nous allons commencer par définir cette notion ainsi que quelques unes de ses proriétés.

1.2 Définitions de l'homotopie et ses propriétés

1.2.1 Principes de continuation.

Le processus de continuation permet d'établir l'existence d'un point fixe pour une application non définie sur tout l'espace autrement dit ce principe consiste à déformer l'application en une autre plus simple pour laquelle on connait l'existence d'un point fixe. Cette déformation est connue sous le nom d'homotopie et devra vérifier certaines conditions à savoir :

Définition 1.1 *Soient X et Y deux espaces topologiques. Deux applications continues $f,\, g : X \to Y$ sont dites homotopes lorsqu'il existe une application continue*

$$H : \ X \times [0,1] \to Y,$$

telle que $H(x,0) = f(x)$ et $H(x,1) = g(x)$. En d'autres termes, il existe une famille d'applications de X dans Y, à savoir $x \to H(x,t)$ pour $0 \leq t \leq 1$, qui part de f pour *arriver à g, et varie continûment. On note $f \simeq g$.*

Exemple 1.1 *Soit $X = Y = \mathbb{R}^n$, on considère $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application constante $c(x) = 0$, et $i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application $i(x) = x$. Montrons que c et i sont homotopes. Il suffit de prendre :*

$$H : \mathbb{R}^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$$

$$H(x,t) = tx.$$

Alors $H(x,0) = 0 = c(x)$ et $H(x,1) = x$.

Dans cette section, nous donnons un brèf aperçu de la notion du degré topologique que ce soit en dimension finie ou infinie. Le degré, $\deg(f, \Omega, y)$ de f dans Ω par rapport à y donne une information sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$ dans un ensemble ouvert $\Omega \subset X$ où $f : \Omega \subset X \to X$ est continue, $y \notin f(\partial\Omega)$ et X est un espace topologique, métrique la plupart du temps.

1.2.2 Degré topologique de Brouwer

Cas particulier ; dimension 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, ne s'annule ni en 0 ni en 1, et soit $d(f) = \frac{1}{2}(sgn(1) - sgn(0))$. Si $d(f) \neq 0$ alors $f(0)$ et $f(1)$ ont des signes différents, par le théorème des valeurs intermédiaires $\exists\ x \in [0,1]$ tel que

$$f(x) = 0 \qquad (1,2)$$

donc l'entier $\deg(f)$ permet d'assurer qu'il existe au moins une solution de $(1,2)$ dans $[[0,1]$. On décomposant Ω en ses composantes connexes $\Omega = \underset{i \in I}{\cup}]a_i, b_i[$ on peut définir

$$\deg(f, \Omega, y) = \frac{1}{2} \sum (sgn(f(b_i) - y) - sgn(f(a_i) - y))$$

Ce degré est adapté à $(1,1)$ tel que $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ soit continue et ne s'annule pas sur $\partial\Omega$.

Considérons maintenant un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et de fermeture $\overline{\Omega}$. $\overline{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$ désignera l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ k fois différentiables dans Ω qui sont continues sur $\overline{\Omega}$.

Soit $x_0 \in \Omega$, si f est différentiable en x_0, on note par $J_f(x_0) = \det f'(x_0)$ le Jacobien de f en x_0.

Définition 1.2 *Soit f une fonction de classe C^1 sur Ω. Notons par $J_f(x_0)$ le Jacobien de f en un point x_0 de Ω. Le point x_0 est dit point critique si $J_f(x_0) = 0$. Dans le cas contraire x_0 est dit point régulier.*

Définition 1.3 *Soient $f \in \overline{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ une valeur régulière de f. On appelle degré topologique de f dans Ω par rapport à y le nombre entier*

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} Sgn\ J_f(x),$$

où $Sgn\ J_f(x)$ désigne le signe de $J_f(x)$, défini par $sgn(t) = 1$ si $t > 0$ et $sgn(t) = -1$ si $t < 0$.

Exemple 1.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ alors le* $\deg(f,]0, 2[, 1) = 0$.

Nous donnons à présent quelques propriétés importantes du degré topologique de Brouwer

Théorème 1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, et posons*

$$\mathrm{A}(\Omega) = \left\{ f \in C\left(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n\right) : y \notin f(\partial\Omega) \right\}$$

L'application $\deg(f, \Omega, y) : \mathrm{A}(\Omega) \to \mathbb{Z}$ *satisfait les propriétés suivantes*

1. *(Normalisation)* $\deg(I, \Omega, y) = 1$ *si* $y \in \Omega$ *et* $\deg(I, \Omega, y) = 0$ *si* $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *où I désigne l'application identité sur $\overline{\Omega}$*
2. *(Solvabilité) Si* $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$, *alors $f(x) = y$ admet au moins une solution*

dans Ω.

3. *(Invariance par homotopie) Pour tout* $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \ \rightarrow \mathbb{R}^n$ *et tout* $y : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ *continues telles que* $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$ *pour tout* $t \in [0,1]$, *alors*

$$\deg(h(0,.), \Omega, y(0)) = \deg(h(1,.), \Omega, y(1))$$

4 .*(Additivité) Supposons que* Ω_1 *et* Ω_2 *sont deux sous-ensembles disjoints et ouverts de* Ω *et* $y \notin f\left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$. *Alors*

$$\deg(f, \Omega, y) = \deg(f, \Omega_1, y) + \deg(f, \Omega_2, y).$$

5. $\deg(f, \Omega, y) = \deg(f - y, \Omega, 0)$.

Dans le but de démontrer l'existence des solutions d'équations non linéaires dans $\mathbb{R}^n$, la propriété (2) du théorème ci dessus est souvent complétée par la propriété d'invariance par homotopie du degré. L'intérêt principal de cette notion réside dans le fait que si deux applications sont homotopes alors elles ont le même degré.

Exemple 1.3 *Soit* $\Omega = (-1, 1)$ *et considérons l'application*

$$h : (t, x) \in [0,1] \times \overline{\Omega} \rightarrow h(t, x) = (1 - t)x + txe^x$$

il est clair que cette application satisfait

1. h *est continue sur* $[0,1] \times \overline{\Omega}$

2. $h(0, x) = x$ *et* $h(1, x) = xe^x$

3. *Pour tout* $t \in [0,1]$, *la fonction* $h(t, x)$ *ne s'annulle pas en* $\{-1, 1\}$. *Donc si* $f(x) = xe^x$ *alors* $\deg(f, (-1,1), 0) = \deg(I, (-1,1), 0) = 1$

1.2.3 Degré topologique de Leray-Schauder

Soient X un espace vectoriel normé de dimension infinie $\Omega \subset X$ un ensemble ouvert et borné $f : \overline{\Omega} \to X$ une fonction continue et $y \in X$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$. Dans la section précedente nous avons vu qu'en dimension finie $C\left(\overline{\Omega}, X\right)$ est une classe convenable de fonctions pour laquelle il existe une unique fonction degré le degré de Brouwer satisfaisant les propriétés $1, 2$ et 3 du théorème. Malheureusement, en dimension infinie $C\left(\overline{\Omega}, X\right)$ ne l'est pas. Dans cet exemple on perd l'espoir de trouver un degré topologique pour une application continue sur un espace de dimension infinie

Soit $E = l^{\infty} = \left\{(x_n)_{n\geq 1} \text{de suites bornées}\right\}$ et $T : E \to E$ définie par $T(x) = (0, x_1, x_2, ...)$ pour chaque $x = (x_1, x_2, ...) \in E$.

Soit $h : [0,1] \times \overline{\Omega}$ l'homotopie entre Id et$T$ tel que

$$h(t,x) = tx + (1-t)T(x) = (tx_1, tx_2 + (1-t)x_1, ...)$$

$$\forall t \in [0,1]\,;\ h(t,x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} tx_1 = 0 \\ tx_2 + (1-t)x_1) = 0 \\ .... \\ tx_n + (1-t)x_{n-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x_1, x_2, ...x_n) = (0, 0, ...0)$$

donc la seule solution de $h(t, x = 0)$ est la suite nulle.

S'il existe un degré pour tous les applications continues sur E alors on aura d'aprés l'invariance par homotopie du degré

$$1 = \deg(Id, B(0,1), 0) = \deg(T, B(0,1), 0)$$

D'où

$$\deg(T, B(0,1), z) = 1 \neq 0,$$

c'est à dire pour tout z proche de 0 on a $T(x) = z$ ce qui est faux car $z = (\epsilon, 0, 0, ...)$, $\epsilon \neq 0$ alors $T(x) \neq z$

En réalité, le bon cadre pour introduire la notion de degré topologique de Leray-Schauder est celui des perturbations compactes de l'identité, c'est a dire des opérateurs du type $I - T$ avec T un opérateur compact.

Pour construire ce degré, nous avons besoin de quelques résultats et définitions notamment ceux des opérateurs compacts et de rang finis.

Définition 1.4 *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. Une application continue $T : \Omega \to X$ est dite compacte si $T\left(\overline{\Omega}\right)$ est relativement compacte. Elle est dite complètement continue, si l'image de tout sous ensemble borné B de Ω est relativement compacte.*

Définition 1.5 *La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite absolument continue sur I si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour toute partition finie d'intervalles disjoints $[a_k, b_k]_{k=1}^n$ de Ω, on a la relation :*

$$\sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

Définition 1.6 *Soient X un espace de Banach et Ω une partie de X. On dit que l'application $T : \Omega \to X$ est de rang fini si $\dim(\mathrm{Im}(T)) < \infty$, autrement dit , si $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace de dimension finie de X.*

Lemme 1.1 *Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$.un ouvert borné et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compacte. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace de dimension finie noté F et une application continue $T_\epsilon : \overline{\Omega} \to F$ telle que*

$$\|T_\epsilon x - Tx\| < \epsilon \qquad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Définition 1.7 *Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$.un ouvert borné et $T : \overline{\Omega} \to X$ une application compacte. Supposons maintenant que $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$. Il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$ le degré de Brouwer $\deg(I - T_\epsilon, \Omega \cap F, 0)$ est bien défini où T_ϵ*

est défini comme dans le lemme 1.1. Par conséquent, nous définissons le degré de Leray-Schauder par

$$\deg(I-T,\Omega,0)=\deg(I-T_\epsilon,\Omega\cap F,0).$$

Remarque 1.1 *Cette définition ne dépend que de T et de Ω. Si $y\in X$ est tel que $y\notin(I-T)(\partial\Omega)$ le degré de $I-T$ dans Ω par rapport à y est défini comme étant*

$$\deg(I-T,\Omega,y)=\deg(I-T-y,\Omega,0).$$

Théorème 1.2 *Soit X un espace de Banach et*

$$\mathcal{A}=\left\{(I-T,\Omega,0),\ \Omega \text{ un ouvert borné de } X,\ T:\overline{\Omega}\to X \text{ compacte, } 0\notin(I-T)(\partial\Omega)\right\}$$

alors, il existe une unique application $\deg(f,\Omega,y):\mathcal{A}\to\mathbb{Z}$ *appelé le degré topologique de Leray-Schauder telle que :*

1. *(Normalité) Si* $0\in\Omega$ *alors* $\deg(I,\Omega,0)=1$ *;*
2. *(Solvabilité) Si* $\deg(I-T,\Omega,0)\neq 0,$ *alors* $\exists\ x\in\Omega$ *tel que* $(I-T)x=0$;
3. *(Invariance par homotopie) Soit $H:[0,1]\times\overline{\Omega}$ une homotopie compacte, telle que $0\notin(I-H(t,.))(\partial\Omega)$. Alors*

$$\deg(I-H(0,.),\Omega,0)=\deg(I-H(1,.),\Omega,0)$$

4. *(Additivité) Soient Ω_1 et Ω_2 deux sous-ensembles disjoints ouverts de Ω et*

$$0\notin(I-T)\left(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)\right).$$

Alors, $$\deg(I-T,\Omega,0)=\deg(I-T,\Omega_1,0)+\deg(I-T,\Omega_2,0).$$

Le degré de Leray-Schauder conserve toutes les propriétés de base du degré de Brouwer. Pour finir et comme conséquence de cette notion du degré nous allons prouver quelques théorèmes de points fixe topologiques.

1.3 Applications

1.3.1 preuve de quelques théorèmes de point fixe topologiques

Théorème 1.3 ***(Brouwer)*** *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continue. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. On va montrer l'existence de la solution de $f(x) = x$ sur $\overline{B}$.

• S'il existe un $x \in \partial B$, alors il n'y a rien à prouver.

• Si nonon suppose que $f(x) \neq x, \forall\ x \in \partial B$,

Soient $h(t, x) = x - tf(x), \forall\ (t, x) \in [0, 1] \times \overline{B(0, 1)}$ et $y(t) = 0, \forall\ t \in [0, 1]$ .On montre que $y(t) \notin h(t, \partial B(0, 1))\ \forall\ t \in]0, 1[$.

Supposons par absurde que

$$\exists\ t \in]0, 1[\,,\ \exists\ x \in \partial B(0, 1) : y(t) = h(t, x)$$

On a donc

$$\begin{aligned} h(t, x) &= 0 \Leftrightarrow x - tf(x) = 0,\ t < 1 \\ &\Leftrightarrow x = tf(x) \\ &\Rightarrow |x| = t\,|f(x)| \\ &\Rightarrow 1 \leq t\ \ (\text{car } |x| = 1 \text{ et } |f(x)| \leq 1) \end{aligned}$$

contradiction puisque $t < 1$.Par suite $h(t, x) \neq 0,\ \forall\ (t, x) \in [0, 1] \times \partial B(0, 1)$

D'après l'invariance par homotopie du degré de Brouwer

$$\deg(h(0, .), B(0, 1), y(0)) = \deg(h(1, .), B(0, 1), y(1))$$

c'est à dire

$$1 = \deg(I, B(0, 1), 0) = \deg(I - f, B(0, 1), 0)$$

donc $\deg(I-f, B(0,1), 0) \neq 0 \Rightarrow \exists\, x \in \overline{B(0,1)}$ tel que $f(x) = x$. ■

Théorème 1.4 ***(Schauder)*** *Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \to \overline{B}$ compacte. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.*

Preuve. Soit $h(t,x) = tf(x)$ fonction compacte sur $[0,1] \times \overline{B}$. Si, pour un $t \in [0,1]$ et un $x \in \partial B$, on a $x - h(t,x) = 0$, alors $tf(x) = x$; comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$ donc un point fixe sur ∂B situation que l'on a exclue. On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré donne

$$1 = \deg(I, B, 0) = \deg(I - f, B, 0)$$

puisque $h(0,\cdot) = 0$ et $h(1,\cdot) = f$ donc l'existence d'un point fixe. ■

Chapitre 2

Théorème de continuation de Mawhin

Avant de faire une présentation plus détaillée du théorème de continuation de Mawhin, faisons brièvement un état d'art sur les opérateurs de Fredholm ainsi que les principales notions qui s'y rapportent. En revanche comme nous le verrons par la suite ces opérateurs peuvent être obtenus à partir des projections alors nous y consacrons cette section.

2.1 Sommes directes et projections

2.1.1 Supplémentaire topologique

Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé X. On dit que E est un supplémentaire topologique de F si X est la somme directe de F et E c-à-d $X = F \oplus E$.

2.1.2 Projection

Soit X un espace vectoriel. On dit qu'un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si

$$P(P(x)) = P^2(x) = P(x), \forall x \in X$$

Proposition 2.1 *Soit X un espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : X \to X$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection. De plus si l'espace X est normé alors P est continue si et seulement si $(I - P)$ est continue.*

Preuve. Soit P une projection. Alors :

$$(I-P)^2(x) = x - 2P(x) + P^2(x) = x - 2P(x) + P(x) = x - P(x) = (I-P)(x).$$

Réciproquement, si $(I - P)$ est une projection $(I - (I - P)) = P$ est aussi une projection. Pour le cadre topologique, comme l'identité est une application continue et que la somme de deux applications continues reste continue nous avons que P est continue si et seulement si $(I - P)$ l'est. ■

Proposition 2.2 *Si P est une projection dans X alors$KerP = \mathrm{Im}(I-P)$ et $\mathrm{Im}(P) = Ker(I-P)$...*

2.2 Projection sur un sous-espace de dimension finie

Lemme 2.1 ***Projection sur un sous-espace de dimension finie****. Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un projecteur P continu sur X tel que $\mathrm{Im}(P) = E$.*

Corollaire 2.1 *Si E est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace normé X, alors il existe un sous-espace vectoriel fermé $F \subset X$ tel que $X = E \oplus F$.*

Définition 2.1 ***Codimension d'un sous-espace vectoriel.*** *Si l'espace quotient X/Y est de dimension finie, on dit que le sous-espace vectoriel fermé Y de X est de codimension finie dans X et on écrit*

$$co\dim(Y) = \dim(X/Y)$$

Lemme 2.2 *Soient E un espace vectoriel normé, M et N deux sous-espaces vectoriels fermés de E tels que $M \cap N = \{0\}$. Si $\dim(M) = co\dim(N) < \infty$, alors $E = M \oplus N$.*

2.3 Opérateurs de Fredholm

Définition 2.2 *Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés, on dit qu'une application linéaire $L : D(L) \subset X \to Y$ est de Fredholm si elle vérifie les conditions suivantes*

1. $Ker(L) = L^{-1}(\{0\})$ est de dimension finie.

2. $\mathrm{Im}(L) = L(D(L))$ est fermée et de codimension finie.

Rappelons que la codimension de $\mathrm{Im}(L)$ est la dimension de $co\ker(L) = \dim(Y/\mathrm{Im}(L))$. Si L est un opérateur de Fredholm alors son indice est l'entier

$$ind(L) = \dim(Ker(L)) - co\dim(\mathrm{Im}(L)).$$

Exemple 2.1 *1. Si X et Y sont de dimensions finies, alors toute application linéaire $L : X \to Y$ est de Fredholm avec*

$$ind(L) = \dim(X) - \dim(Y).$$

2. Si X et Y sont des espaces de Banach et $L : X \to Y$ est une application linéaire bijective, alors L est un opérateur de Fredholm d'indice 0. En effet, il découle de la bijectivité que $Ker(L) = \{0_X\}$, dont la dimension est nulle et $\mathrm{Im}(L) = Y$ et sa codimension est *nulle ainsi*

$$ind\,(L) = \dim(Ker(L)) - co\dim(\mathrm{Im}(L)) = 0.$$

3. L'identité $I : X \to X$ *est un opérateur de Fredholm d'indice* 0..

Dans tout ce que suit $L : D\,(L) \subset X \to Y$ désigne un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Si L est de Fredholm alors d'aprés ce qui précède il existe deux projections continues : $P : X \to X$ et $Q : Y \to Y$ telles que

$$\mathrm{Im}\,(P) = KerL \text{ et } KerQ = \mathrm{Im}\,(L)\,.$$

Posons

$$X_1 = \mathrm{Im}\,(I - P) = KerP \quad \text{et} \quad Y_1 = \mathrm{Im}\,(Q)\,,$$

alors on peut écrire

$$X = KerL \oplus X_1\,; \;\; Y = \mathrm{Im}\,(L) \oplus Y_1$$

Considérons un isomorphisme,

$$J \;\; : KerL \to \mathrm{Im}\,(Q)\,,$$

dont l'existence est assurée par le fait que $\dim KerL = \dim \mathrm{Im}\,(Q) = n$. Remarquons que

$$D\,(L) = KerL \oplus (D\,(L) \cap X_1)$$

et que la restriction de L à $D\,(L) \cap X_1$ est un isomorphisme sur $\mathrm{Im}\,(L)$; notons par L_p cette restriction c'est à dire $L_p : D\,(L) \cap X_1 \to \mathrm{Im}\,(L)$ alors

Lemme 2.3 L_p *est un isomorphisme algébrique.*

Preuve. Tout d'abord, montrons que L_p est injective. Pour cela, soit $x \in KerL_p \subset KerL = \mathrm{Im}\,P$, alors il existe un $y \in Dom\ P$ tel que $x = Py$. Comme P est une projection, on obtient $x = Py = P^2y = P(Py) = Px = 0$. Par conséquent, $x = 0$, et donc $KerL_p = \{0\}$, ce qui signifie l'injection de L_p.

Quand à la surjection de L_p, puisque P est une projection, alors nous pouvons écrire l'espace vectoriel X comme somme directe $X = KerP \oplus \operatorname{Im} P = KerP \oplus KerL$. Prenons $z \in \operatorname{Im} L$, donc il existe $x \in D(L) \subset X$ tel que $Lx = z$. Comme $X = KerP \oplus KerL$, alors il existe deux éléments uniques $e \in KerP$ et $f \in KerL$ tels que $x = e + f$. On a $z = Lx = L(e+f) = Le + Lf = Le + 0 = Le$, ainsi $e \in D(L)$. Finalement, on obtient $e \in D(L)$, $e \in KerP$ et $L_pe = z$, d'où L_p est bien surjective. ■

Définissons maintenant $K_p := L_p^{-1}$, il est clair que $K_p : \operatorname{Im}(L) \subset Y \to D(L) \cap KerP$ est bijectif, que $PK_p = 0$, et qu'il vérifie les propriétés

Lemme 2.4 (1) *Sur* $\operatorname{Im}(L)$, *on a* $LK_p = I$. (2) *Sur* $D(L)$, *on a* $K_pL = I - P$.

Preuve. (1) Prenons $x \in \operatorname{Im}(L)$, alors $LK_px = L(K_p(x)) = L_p(K_p(x)) = Ix$.

(2) Comme $\operatorname{Im} P = KerL$, alors $LP = 0$, et par suite $K_pL = K_pL(I-P)$. Donc montrer (2), revient à vérifier que $K_pL(I-P) = K_pL_p(I-P)$. Si on a $\operatorname{Im}(I-P) \subseteq D(L_p) = D(L) \cap KerP$, alors le resultat s'ensuit. Prenons $x \in D(L)$ Comme $P(x) \in KerL \subset D(L)$ et $D(L)$ est un sous espace vectoriel de X, on a $(x - Px) \in D(L)$.

Puisque $P(x-Px) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0$, alors $(x - Px) \in KerP$. et par conséquent $(x-Px) \in D(L) \cap KerP$. D'ici on obtient $\operatorname{Im}(I-P) \subset D(L) \cap KerP$. D'où en utilisant (1) $K_pL(I-P) = K_pL_p(I-P)$ s'ensuit. ■

Considérons l'opérateur $K_{P,Q} : Y \to X$ défini par $L_p^{-1}(I-Q)$, on a

Lemme 2.5 *L'opérateur* $L + JP : D(L) \to Y$ *est un isomorphisme et*

$$(L+JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q.$$

En particulier,

$$(L+JP)^{-1}x = J^{-1}x \quad \textit{pour tout } x \in \operatorname{Im} Q.$$

Preuve. Pour l'injectivité de $L+JP$, soit $x \in D(L)$ tel que

$$(L+JP)\,x = 0 \tag{1.1}$$

De cette égalité on en déduit que

$$Lx \in \mathrm{Im}\,(L) \cap \mathrm{Im}\,(J) = Ker\,(Q) \cap \mathrm{Im}\,(Q) = \{0\}\,,$$

d'où $x \in Ker\,(L)$. Par conséquent, $Px = x$ et compte tenu de (1.1), $Jx = 0$; par suite $x = 0$. Pour la surjectivité de $L+JP$, $y \in Y$. Affirmons que

$$x = \left(K_{P,Q} + J^{-1}Q\right) y$$

est une solution de

$$(L+JP)\,x = y.$$

En effet, comme $J^{-1}Qy \in Ker\,(L)$, il en résulte que

$$Lx = LK_{PQ}y = LL_p^{-1}\,(I-Q)\,y = (I-Q)\,y.$$

Comme $K_{PQ}y \in D\,(L) \cap KerP$, il s'ensuit que

$$JPx = JJ^{-1}Qy = Qy.$$

Conséquement

$$(L+JP)\,x = (I-Q)\,y = Qy$$

et

$$(L+JP)^{-1} = K_{P,Q} + J^{-1}Q. \ \blacksquare$$

Lemme 2.6 *Si $N : \Delta \subset X \to X$ est une application, le problème*

$$x \in D\,(L) \cap \Delta, \quad Lx = Nx$$

est équivalent au problème de point fixe

$$x \in \Delta,\ x = Px + J^{-1}QNx + K_{P,Q}Nx.$$

Preuve. On a

$$[x \in D(L) \cap \Delta,\ Lx = Nx]$$

$$\Leftrightarrow [x \in D(L) \cap \Delta,\ (L + JP)x = (N + JP)x]$$

$$\Leftrightarrow \left[x \in \Delta,\ x = (L + JP)^{-1}(N + JP)x\right].$$

D'autre part, en utilisant le lemme 2.5 il s'ensuit que

$$\begin{aligned}(L + JP)^{-1}(N + JP) &= \left(K_{P,Q} + J^{-1}Q\right)(N + JP) \\ &= K_{P,Q}N + K_{P,Q}JP + J^{-1}QN + J^{-1}QJP.\end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Im}(J) = \operatorname{Im}(Q) = Ker(I - Q)$, il en résulte que

$$K_{P,Q}JP = L_p^{-1}(I - Q)JP = 0.$$

Puisque $Q_{|\operatorname{Im} Q} = I_{|\operatorname{Im} Q}$ et $\operatorname{Im}(J) = \operatorname{Im}(Q)$, on en déduit que

$$J^{-1}QJP = J^{-1}JP = P$$

Par conséquent, $(L + JP)^{-1}(N + JP) = P + J^{-1}QN + K_{P,Q}N$. ■

Soient X, Y deux espaces de Banach et $L : dom(L) \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zéro.

Définition 2.3 *Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $dom(L) \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \to Y$ est dite $L-$compacte sur $\overline{\Omega}$ si $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné et $K_{PQ}N : \overline{\Omega} \to X$ est compacte.*

Comme conséquence des lemmes (2.5) et (2.6) le degré de coincdence de Mawhin se définit comme suit :

Définition 2.4 *Si les opérateurs L et N satisfont les propiétés mentionnées ci dessus, alors le degré de coïncidence de L et N sur Ω est définit par*

$$\deg\left[(L,N),\Omega\right]=\deg_{LS}\left(I-M,\Omega,0\right)$$

où M désignera la quantité donnée par $M(P,J,Q)=P+J^{-1}QN+K_{P,Q}N$, voir ci dessus.

Revenons à ce qui a motivé cette partie et prouvons le théorème de continuation de Mawhin.

2.4 Preuve du théorème de Mawhin

Théorème 2.1 *Soit L un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et N est $L-$compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $Lx\neq\lambda Nx$ pour tout $(x,\lambda)\in\left[\ (D(L)\setminus KerL)\cap\partial\Omega\right]\times\left]0,1\right[.$

ii) $QNx\neq 0$ pour tout $x\in KerL\cap\partial\Omega$.

iii) $\deg_B\left(J^{-1}QN\mid_{KerL},\Omega\cap KerL,0\right)\neq 0$, où $Q:Y\to Y$ est la projection définie ci dessuss avec $\operatorname{Im}L=KerQ$.

Alors l'équation $Lx=Nx$ admet au moins une solulion dans $domL\cap\ \overline{\Omega}$.

Preuve. Pour $\lambda\in[0,1]$, considérons la famille de problèmes

$$x\in D(L)\cap\overline{\Omega},\qquad Lx=\lambda Nx+(1-\lambda)\,QNx. \tag{1.2}$$

Soit $M:[0,1]\times\overline{\Omega}\to Y$ une homotopie définie par

$$M(\lambda,x)=Px+J^{-1}QNx+\lambda K_{P,Q}Nx.$$

En vertu du lemme (2.6) , le problème (1.2) est équivalent à un problème de point fixe $x \in \overline{\Omega}$ et

$$\begin{aligned} x &= Px + J^{-1}Q\left(\lambda N + (1-\lambda)QN\right)x + K_{P,Q}\left(\lambda N + (1-\lambda)QN\right)x \\ &= Px + \lambda J^{-1}QNx + (1-\lambda)J^{-1}QNx + \lambda K_{P,Q}Nx + (1-\lambda)K_{P,Q}QNx \\ &= M(\lambda, x). \end{aligned}$$

Donc, cette dernière équation est équivalente à un problème de point fixe

$$x \in \overline{\Omega}, \quad x = M(\lambda, x). \tag{1.3}$$

S'il existe un $x \in \partial\Omega$ tel que $Lx = Nx$ alors, nous avons terminé. Maintenant supposons que

$$Lx \neq Nx \quad \text{pour tout} \quad x \in D(L) \cap \Omega \tag{1.4}$$

Et d'autre part

$$Lx \neq \lambda Nx + (1-\lambda)QNx \tag{1.5}$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (D(L) \cap \partial\Omega)$ .Si

$$Lx = \lambda Nx + (1-\lambda)QNx$$

pour tout $(\lambda, x) \in]0,1[\times (D(L) \cap \partial\Omega)$, on obtient par application de Q aux deux membres de l'egalité précédente

$$QNx = 0, \quad Lx = \lambda Nx$$

La première de ces égalités et la condition (ii) impliquent que $x \notin KerL \cap \partial\Omega$ i.e $x \in \partial\Omega \cap (D(L) \backslash KerL)$ et donc la seconde égalité contredit (i). En utilisant une nouvelle fois (ii), il s'ensuit que

$$Lx \neq QNx \quad \text{pour tout} \quad x \in D(L) \cap \partial\Omega. \tag{1.6}$$

En vertu de (1.4), (1.5)et (1.6) on déduit que

$$x \neq M(\lambda, x) \quad \text{pour tout} \quad (x, \lambda) \in [0,1] \times \partial\Omega. \tag{1.7}$$

Il est facile de vérifer que $M(\lambda, x)$ est compacte car N est $L-$ compact sur $\overline{\Omega}$, dés lors en utilisant la propriété d'invariance par homotopie du degré de Leray-Schauder, on obtient

$$\deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = \deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \tag{1.8}$$

D'autre part on a

$$\deg_{LS}(I - M(0,.), \Omega, 0) = \deg_{LS}\left(I - \left(P + J^{-1}QN\right), \Omega, 0\right) \tag{1.9}$$

Mais le rang de $P + J^{-1}QN$ est contenu dans le $Ker(L)$, d'où en utilisant la propriété de reduction du degré de Leray-Schauder et le fait que $P\ |_{Ker(L)} = I\ |_{Ker(L)}$ (car $Ker(L) = \operatorname{Im}(P) = Ker(I - P)$), on obtient

$$\begin{aligned} \deg_{LS}\left(I - \left(P + J^{-1}QN\right), \Omega, 0\right) &= \deg_B\left(I - \left(P + J^{-1}QN\right), \Omega \cap Ker(L), 0\right) \\ &= \deg_B\left(J^{-1}QN, \Omega \cap Ker(L), 0\right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

En vertu de (1.8), (1.9)et (1.10), il s'ensuit que $\deg_{LS}(I - M(1,.), \Omega, 0) \neq 0$, et donc la propriété d'existence du degré de Leray-Schauder implique l'existence d'un $x \in \Omega$ tel que $x = M(1, x)$ i.e $x \in D(L) \cap \Omega$, $Lx = Nx$. ■

Chapitre 3

Existence de la solution d'une equation différentielle d'ordre trois à condition intégrale en resonance.

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence de la solution d'un problème en résonance associé à une équation différentielle d'ordre trois à conditions non locales de type intégrale moyennant le concept de la théorie du degré de coïncidence de Mawhin.

3.1 Introduction

Considérons l'équation différentielle d'ordre trois suivante :

$$x^{'''}(t) = f(t, x(t), x'(t)), \qquad 0 < t < 1, \tag{3.1}$$

assujettie aux conditions non locales

$$x(0) = x''(0) = 0, \quad x(1) = \frac{2}{\eta^2} \int_0^{\eta} x(t)\, dt, \quad \eta \in (0,1), \tag{3.2}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory, et $\eta \in (0,1)$. On dit que le problème à valeurs aux limites (3.1), (3.2) est en résonance si l'equation linéaire $Lx = x''' = 0$, sous les conditions aux limites (3.2) possède une solution non triviale i.e., $\dim \ker L \geq 1$.

Il est bien connu que l'étude des équations différentielles ordinaires aux conditions non locales plus particulièrement aux conditions intégrales joue un rôle important aussi bien en théories qu'en applications. L'étude de ces problèmes est motivée par ses diverses applications notamment en thermo-élasticité, en génie chimique, en physique des plasmas, ainsi que dans certains modèles de revêtement d'écoulement d'eau souterraines.

3.2 Resultat d'existence

Dans cette partie, nous allons donner quelques notations et des résultats fondamentaux intervenant dans la reformulation du problème.

Soit X, Y deux espaces de Banach et soit $L : domL \subset X \to Y$ un opérateur de Fredholm d'indice zero et $P : X \to X$, $Q : Y \to Y$ deux projections continues telles que $ImP = KerL$, $KerQ = ImL$ et $X = Ker\ L \oplus KerP$, $Y = ImL \oplus ImQ$. Il en suit que $L \mid_{domL \cap KerP} : domL \cap KerP \to ImL$ est inversible, notons par K_P son application inverse. Soit Ω un sous ensemble ouvert borné de X tel que $domL \cap \Omega \neq \emptyset$, l'application $N : X \to Y$ est dite L-compact sur $\overline{\Omega}$ si l'application $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est bornée et $K_P (I - Q) N : \overline{\Omega} \to X$ est compacte. Enfin rappelons le théorème d'existence de point fixe de Mawhin.

Théorème 3.1 *Soient L un opérateur de Fredholm d'indice zéro et N une application $L-$ compact sur $\overline{\Omega}$. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

i) $Lx \neq \lambda Nx$ pour tout $(x, \lambda) \in [\ (domL \backslash KerL) \cap \partial\Omega] \times (0,1)$.

ii) $Nx \notin \operatorname{Im} L$ pour tout $x \in KerL \cap \partial\Omega$.

iii) $\deg (QN \mid_{KerL}, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$, où $Q : Y \to Y$ est la projection définie ci dessuss avec $\operatorname{Im} L = KerQ$.

Alors l'équation $Lx = Nx$ admet au moins une solulion dans $domL\cap\ \overline{\Omega}$.

Définition 3.1 *Une fonction* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory si*

(i) La fonction $t \to f(t,x,y)$ *est mesurable pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$.

(ii) La fonction $(x,y) \to f(t,x,y)$ *est continue presque pour tout* $t \in [0,1]$.

Théorème 3.2 ***(Ascoli-Arzela)*** *Considérons* $X = C([a,b])$ *muni de la norme* $\|u\| = \max_{a \le t \le b} |u(t)|$, *avec* $-\infty < a < b < +\infty$. *Si* M *est un sous ensemble de* X *tel que*
i. M *est borné, i.e.* $\|u\| \le r$, $\forall u \in M$ *et* $r > 0$ *un nombre fixé,*
ii. M *est équicontinu, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ tq\ \ |t_1 - t_2| < \delta \ et\ u \in M \Longrightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon.$$

Alors, M *est relativement compact*

Dans ce qui suit utilisons les espaces classiques $C[0,1], C^1[0,1]$, et $L^1[0,1]$. Pour $x \in C^1[0,1]$, on définit la norme $\|x\| = \max\left\{\|x\|_\infty, \left\|x'\right\|_\infty\right\}$ où $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$, tandis que $\|x\|_1$ représente la norme dans $L^1[0,1]$. Soient $X = C^1[0,1]$, $Y = L^1[0,1]$ et l'opérateur linéaire $L : domL \subset X \to Y$ défini par

$$Lx = x''',\ x \in domL = \left\{x \in W^{3,1}([0,1]) :\ x(0) = x''(0) = 0,\ x(1) \ = \frac{2}{\eta^2}\int_0^\eta x(t)\,dt\right\}$$

où $W^{3,1}[0,1] = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} : x, x', x''$ sont absolument continues dans $[0,1]$
avec $x''' \in L^1[0,1]$ $\}$

Soit l'opérateur $N : X \to Y$ défini par

$$Nx = f(t, x(t), x'(t)), \qquad t \in (0,1).$$

Alors le problème aux limites (3.1) et (3.2) sera équivalent à $Lx = Nx$

Nous donnons à présent le théorème principal de ce chapitre soit celui d'existence de la solution du problème $(3.1) - (3.2)$.

Théorème 3.3 *Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites*

1) Il existe des fonctions α, β, $\gamma \in L^1[0,1]$*telles que pour tout* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \in [0,1]$ *on a*

$$|f(t,x,y)| \leq \alpha(t)|x| + \beta(t)|y| + \gamma(t). \tag{3.3}$$

2) Il existe une constante $M > 0$, *telle que pour* $x \in domL$ *si* $|x'(t)| > M$ *pour tout* $t \in [0,1]$ *alors*

$$\int_0^1 (1-s)^2 f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds \neq 0. \tag{3.4}$$

3) Il existe une constante $M^* > 0$, *telle que pour tout* $x(t) = bt \in KerL$ *avec* $|b| > M^*$, *on a ou bien*

$$b\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s, b(s), b)\, ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s, b(s), b)\, ds\right] < 0, \tag{3.5}$$

ou bien

$$b\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s, b(s), b)\, ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s, b(s), b)\, ds\right] > 0. \tag{3.6}$$

Alors le problème $(3,1)$ *et* $(3,2)$ *admet au moins une solution dans* $C^1[0,1]$ *pourvu que*

$$\|\alpha\| + \|\beta\| < \frac{1}{2}. \tag{3.7}$$

La preuve de ce théorème se fait en des étapes dont chacune sera représentée par la démonstration d'un lemme.

Lemme 3.1 *L'opérateur* $L : domL \subset X \to Y$ *est un opérateur de Fredholm d'indice zero. De plus on peut définir l'opérateur projection continue* $Q : Y \to Y$ *par*

$$Qy(t) = k\left[\int_0^1 (1-s)^2 y(s)\, ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 y(s)\, ds\right] t$$

où $k = 60/5 - 2\eta^3$ *et l'opérateur linéaire* $K_P = (L_{domL \cap kerP})^{-1} : \operatorname{Im} L \to domL \cap KerP$

par

$$K_p y\left(t\right)=\frac{1}{2}\int_0^t \left(t-s\right)^2 y\left(s\right)ds \qquad y\in \operatorname{Im} L.$$

En outre

$$\left\|K_p y\right\|\leq \left\|y\right\|_1 \qquad \textit{pour tout} \;\; y\in \operatorname{Im} L.$$

Preuve. Il est clair que sous les conditions données on a

$Lx=x^{'''}=0\Leftrightarrow x\left(t\right)=\frac{at^2}{2}+bt+c$ où a, b et c sont des constantes réelles ; et comme $x''(0)=x(0)=0$ alors $a=c=0$ donc

$$kerL=\{x\in \text{dom } L: x=bt, \quad b\in\mathbb{R}, \quad t\in[0,1]\}\simeq\mathbb{R}.$$

Montrons que

$$\operatorname{Im} L=\left\{\ y\in Y:\int_0^1 \left(1-s\right)^2 y\left(s\right)ds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta \left(\eta-s\right)^3 y\left(s\right)ds=0 \quad \right\}. \tag{3.8}$$

Le problème

$$x^{'''}=y \tag{3.9}$$

a une solution $x\left(t\right)$ satisfaisant les conditions $x\left(0\right)=x^{''}\left(0\right)=0,\;\; x\left(1\right)=\frac{2}{n^2}\int_0^\eta x\left(t\right)dt$ si et seulement si

$$\int_0^1 \left(1-s\right)^2 y\left(s\right)ds-\frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta \left(\eta-s\right)^3 y\left(s\right)ds=0. \tag{3.10}$$

En effet de (3.9) on a

$$x\left(t\right)=x^{''}\left(0\right)\frac{t^2}{2}+x^{'}\left(0\right)t+x\left(0\right)+\frac{1}{2}\int_0^t \left(t-s\right)^2 y\left(s\right)ds=x^{'}\left(0\right)t+\frac{1}{2}\int_0^t \left(t-s\right)^2 y\left(s\right)ds$$

En vertu de $x(1) = \frac{2}{n^2} \int_0^\eta \ x(t)\, dt$ on obtient

$$\int_0^1 (1-s)^2\, y(s)\, ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3\, y(s)\, ds = 0.$$

D'autre part si (3.10) est vérifiée, posons

$$x(t) = bt + \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds$$

où b est une constante réelle, il est clair que $x''' = y$ et $x''(0) = x(0) = 0$ de plus on a $x(1) = b + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-s)^2\, y(s)\, ds$ alors

$$\begin{aligned} x(1) &= \frac{2}{\eta^2} \int_0^\eta \left[bt + \frac{1}{2} \int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds \right] dt \\ &= b + \frac{1}{\eta^2} \left[\frac{1}{3} \int_0^\eta (\eta - s)^3\, y(s)\, ds \right] \end{aligned}$$

Posons

$$Ry = \int_0^1 (1-s)^2\, y(s)\, ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3\, y(s)\, ds,$$

définissons $Qy(t) = k.(Ry).t$, il est clair que $\dim \operatorname{Im} Q = 1$.

On a

$$\begin{aligned} Q^2 y &= Q(Qy) = k(k.Ry) \left(\int_0^1 (1-s)^2\, sds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3\, sds \right) t \\ &= (kRy)\, t = Qy, \end{aligned}$$

ce qui implique que l'opérateur Q est une projection. En outre il est facile de vérifier que $ImL = kerQ$, et que Im L est fermée vient du fait que $ImL = kerQ = Q^{-1}(\{0\})$.

Vérifions à présent que $Y =$ Im $L\oplus$ Im Q. Pour $y \in Y$,on a $y = (y - Qy) + Qy$ d'où $y - Qy \in$ ker $Q =$ Im L car $(Q^2 y = Qy)$ et $Qy \in$ Im Q alors $Y =$ Im $L+$ Im Q.De plus Im $L\cap$ Im $Q = \{0\}$,en effet, si $y \in$ Im $L =$ ker $Q \Longrightarrow Qy = 0$, si $y \in$ Im Q : $\exists\ y' \in Y$ tel que $y = Qy' \Longrightarrow Qy = Q^2 y' = Qy' = y = 0$ car $(Qy = 0)$ et donc $y \in$ Im $L\cap$ Im

$Q \Longrightarrow y = Qy = 0$ ce qui vérifie que Im $L\cap$ Im $Q = \{0\}$, d'où $Y =$ Im $L\oplus$ Im Q et dim ker $L = 1 =$ dim Im $Q =$ codim Im $L = 1$ donc Ind $L =$dim ker$L-$ codim Im $L = 0$, dés lors L est un opérateur de Fredholm d'indice zero.

Définissons maintenant la projection P de X vers X par

$$Px(t) = x^{'}(0)\,t\ .$$

Alors l'inverse généralisé de l'opérateur $K_P : \operatorname{Im} L \to$ dom $L\cap$ Ker P de L est donné par

$$K_p y(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds.$$

On remarque que $\operatorname{Im} P = KerL$ et $KerP = \left\{x \in X;\ \ x^{'}(0) = 0\right\}$. Montrons que P est une projection. En effet, $Px(t) = x^{'}(0)\,t \Longrightarrow P^2x = P\left[x^{'}(0)\,t\right] = \left[x^{''}(0)\,t + x^{'}(0)\right]t = x^{'}(0)\,t = Px$. Evidemment par un simple calcul on vérifie que $KerL \cap KerP = \{0\}$ de plus il découle de $x = (x-Px) + Px$ que $X = KerP + KerL$. Donc ceci confirme que $X = KerL \oplus KerP$.

Suite aux définitions de P et K_P il est facile de voir que l'inverse généralisé de L est K_P. En effet, pour $y \in \operatorname{Im} L$ on a

$$(LK_p)\, y(t) = \left[(K_p y)\, t\right]^{'''} = \left(\frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\, y(s)\, ds\right)^{'''} = y(t)\,,$$

et pour $x \in$ dom $L\cap$ ker P, en utilisant deux intégrations par partie on obtient

$$\begin{aligned}(K_pL)\, x(t) &= (K_p)\, x^{'''}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^2\, x^{'''}(s)\, ds \\ &= x(t) - x(0) - x^{'}(0)\,t\ - \frac{1}{2}x^{''}(0)\,t^2,\end{aligned}$$

étant donné que $x \in$ dom $L\cap$ ker P c'est à dire $x(0) = x^{''}(0) = 0$ et $Px = 0$ alors

$$(K_pL)\, x(t) = x(t)\,.$$

Ceci montre que $K_p = \left(L|_{\mathrm{dom}L\cap\ker P}\right)^{-1}$. D'autre part on a pour tout $y \in \operatorname{Im} L$, $t \in [0,1]$

$$\|K_p y\|_\infty \leq \int_0^1 (1-s)^2 |y(s)|\, ds \leq \int_0^1 |y(s)|\, ds = \|y\|_1,$$

et comme $(K_p y)'(t) = \int_0^1 (1-s)\, y(s)\, ds$, alors

$$\left\|(K_p y)'\right\|_\infty \leq \int_0^1 (1-s)\, |y(s)|\, ds \leq \int_0^1 |y(s)|\, ds = \|y\|_1$$

d'où $\|K_p y\| = \max\left(\|K_p y\|_\infty, \left\|(K_p y)'\right\|_\infty\right) \leq \|y\|_1$. Ceci termine la démonstration du lemme 3.1 ■

Lemme 3.2 *Soit* $\Omega_1 = \{x \in domL \backslash KerL : Lx = \lambda Nx, \ \ pour\ \lambda \in [0,1]\}$. *Alors* Ω_1 *est borné.*

Preuve. Soit $x \in \Omega_1$, et $Lx = \lambda Nx$. Alors $\lambda \neq 0$ et $QNx = 0$, car $x \notin KerL$ et $Nx \in \operatorname{Im} L = KerQ$, donc

$$\int_0^1 (1-s)^2 f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds - \frac{2}{3\eta^2} \int_0^\eta (\eta - s)^3 f\left(s, x(s), x'(s)\right) ds = 0.$$

Ainsi par la condition (2), il existe $t_0 \in [0,1]$, tel que $\left|x'(t)\right| \leq M$. Comme x', x''sont absolument continues pour tout $t \in [0,1]$,

$$x'(0) = x'(t_0) - \int_0^{t_0} x''(t)\, dt, \qquad x''(t) = x''(0) + \int_0^t x'''(s)\, ds,$$

alors on a

$$\left|x'(0)\right| \leq M + \left|\int_0^{t_0}\left(x''(0) + \int_0^t x'''(s)\, ds\right) dt\right| \leq M + \int_0^1 \left|x''(0)\right| dt + \int_0^1 \left(\int_0^1 \left|x'''(s)\, ds\right|\right) dt$$

donc

$$\left|x^{'}(0)\right| \leq M+\int_0^1 \left(\int_0^1 \left|x^{'''}(s)\,ds\right|\right) dt = M+\left\|x^{'''}\right\|_1 = M+\|Lx\|_1 \leq M+\|Nx\|_1 . \tag{3.11}$$

A nouveau pour $x \in \Omega_1$, $x \in domL\backslash KerL$, alors $(I-P)\,x \in domL \cap KerP$ et $LPx = 0$, on sait d'aprés le lemme 3.1 que

$$\|(I-P)\,x\| = \|K_p L\,(I-Px)\| \leq \|L\,(I-Px)\|_1 = \|Lx\|_1 \leq \|Nx\|_1 . \tag{3.12}$$

En se servant des estimations (3.11) et (3.12), on déduit que

$$\|x\| \leq \|Px\| + \|(I-P)\,x\| = \left|x^{'}(0)\right| + \|(I-P)\,x\| \leq M + 2\,\|Nx\|_1 . \tag{3.13}$$

De (3.3) et (3.13),on obtient

$$\|Nx\|_1 = \int_0^1 |f\,(s, x\,(s)\,, x'\,(s))|\,ds \leq \|\alpha\|_1\,\|x\|_\infty + \|\beta\|_1 \left\|x^{'}\right\|_\infty + \|\gamma\|_1 ,$$

dés lors

$$\|x\| \leq 2\left[\|\alpha\|_1\,\|x\|_\infty + \|\beta\|_1 \left\|x^{'}\right\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right]. \tag{3.14}$$

Ainsi de $\|x\|_\infty \leq \|x\|$ et (3.14) on obtient

$$\|x\|_\infty \leq \frac{2}{1-2\,\|\alpha\|_1}\left[\|\beta\|_1 \left\|x^{'}\right\|_\infty + \|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right], \tag{3.15}$$

car $1-2\,\|\alpha\|_1 \geq 1-2\,(\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1) > 0$ voir condition (3.7) . D'autre part de$\left\|x^{'}\right\|_\infty \leq \|x\|$ de (3.14) et (3.15) on a

$$\left\|x^{'}\right\|_\infty \left[1 - \frac{2\,\|\beta\|_1}{1-2\,\|\alpha\|_1}\right] \leq \frac{2}{1-2\,\|\alpha\|_1}\left[\|\gamma\|_1 + \frac{M}{2}\right].$$

donc

$$\left\|x'\right\|_{\infty}\left[\frac{1-2\left\|\alpha\right\|_{1}-2\left\|\beta\right\|_{1}}{1-2\left\|\alpha\right\|_{1}}\right]\leq\frac{1}{1-2\left\|\alpha\right\|_{1}}\left[2\left\|\gamma\right\|_{1}+M\right].$$

c'est à dire

$$\left\|x'\right\|_{\infty}\leq\frac{2\left[\left\|\gamma\right\|_{1}+\frac{M}{2}\right]}{1-2\left\|\alpha\right\|_{1}-2\left\|\beta\right\|_{1}}=M_{1}. \tag{3.16}$$

D'où de (3.16), il existe $M_1>0$, tel que

$$\left\|x'\right\|_{\infty}\leq M_{1}, \tag{3.17}$$

ainsi de (3.17) et (3.15), il existe $M_2>0$ tel que

$$\left\|x\right\|_{\infty}\leq M_{2}. \tag{3.18}$$

Par conséquent

$$\left\|x\right\|=\max\left\{\left\|x\right\|_{\infty},\left\|x'\right\|_{\infty}\right\}\leq\max\left\{M_{1},\ M_{2}\right\}.$$

Donc Ω_1 est borné. ■

Lemme 3.3 *L'ensemble* $\Omega_2=\{x\in KerL\ :\ Nx\in\operatorname{Im}L\ \}$ *est borné.*

Preuve. Soit $x\in\Omega_2$, alors $x\in KerL=\{x\in domL:x=bt,\ b\in\mathbb{R},\ t\in[0,1]\}$ et $QNx=0$, car $Nx\in\operatorname{Im}L=KerQ$ par conséquent

$$\int_{0}^{1}(1-s)^{2}f(s,bs,b)\,ds-\frac{2}{3\eta^{2}}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{3}f(s,bs,b)\,ds=0.$$

De la condition (2) du théorème 3.3, on déduit qu'il existe $t_1\in[0,1]$, tel que $\left|x'(t_1)\right|=|b|\leq M$. Comme dans ce cas on a $\|x\|_{\infty}=\max\limits_{t\in[0,1]}|x(t)|=|b|=\left\|x'\right\|_{\infty}$; alors $\|x\|=|b|\leq M$, donc Ω_2 est borné. ■

Lemme 3.4 *Si la première partie de la condition* (3) *du théorème 3.3 est satisfaite c'est* *à dire*

$$b\cdot\frac{60}{5-2\eta^{3}}\left[\int_{0}^{1}(1-s)^{2}f(s,b(s),b)\,ds-\frac{2}{3\eta^{2}}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{3}f(s,b(s),b)\,ds\right]<0,\quad(3.19)$$

pour tout $|b|>M^{*}$. *Alors l'ensemble*

$$\Omega_{3}=\{x\in KerL\ :\ \ -\lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0,\quad\lambda\in[0,1]\ \}$$

est borné, où $J:KerL\to\operatorname{Im}Q$ *désigne un isomorphisme linéaire défini par* $J(bt)=bt$, $\forall b\in\mathbb{R},\ t\in[0,1]$.

Preuve. Supposons que $x=b_{0}t\in\Omega_{3}$, alors on a

$$\lambda b_{0}t=(1-\lambda)\frac{60}{5-2\eta^{3}}\left(\int_{0}^{1}(1-s)^{2}f(s,b(s),b)\,ds-\frac{2}{3\eta^{2}}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{3}f(s,b(s),b)\,ds\right)t,$$

donc

$$\lambda b_{0}=(1-\lambda)\frac{60}{5-2\eta^{3}}\left(\int_{0}^{1}(1-s)^{2}f(s,b(s),b)\,ds-\frac{2}{3\eta^{2}}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{3}f(s,b(s),b)\,ds\right).$$

Si $\lambda=1$, alors $b_{0}=0$. Par ailleurs, si $|b_{0}|>M^{*}$, alors en vue de (3.19) on a

$$\lambda b_{0}^{2}=b_{0}(1-\lambda)\frac{60}{5-2\eta^{3}}\left(\int_{0}^{1}(1-s)^{2}f(s,b(s),b)\,ds-\frac{2}{3\eta^{2}}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{3}f(s,b(s),b)\,ds\right)<0,$$

ceci contredit le fait que $\lambda b_{0}^{2}\geq0$. D'où $|x|=|b_{0}t|\leq|b_{0}|\leq M^{*}$ alors $\|x\|\leq M^{*}$ par suite $\Omega_{3}\subset\{x\in KerL:\|x\|\leq M^{*}\}$ est borné.

Si $\lambda=0$, alors

$$\int_{0}^{1}(1-s)^{2}f(s,b(s),b)\,ds-\frac{2}{3\eta^{2}}\int_{0}^{\eta}(\eta-s)^{3}f(s,b(s),b)\,ds=0\ ,$$

en tenant compte de la condition (3) du théorème 3.3, on obtient $\|x\|=|b|\leq M^{*}$. ■

Lemme 3.5 *Si la deuxième partie de la condition* (3) *du théorème 3.3 est satisfaite, c'est* *à dire*

$$b \cdot \frac{60}{5-2\eta^3}\left[\int_0^1 (1-s)^2 f(s,b(s),b)\,ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,b(s),b)\,ds\right] > 0, \quad (3.20)$$

pour tout $|b| > M^*$*.Alors l'ensemble*

$$\Omega_3 = \{x \in KerL \ : \ \lambda Jx + (1-\lambda) QNx = 0, \quad \lambda \in [0,1]\ \},$$

est borné. Ici J *est défini comme dans le lemme 3.4. D'une manière analogue à la preuve du lemme précédent on prouve également que* Ω_3 *est borné.*

Lemme 3.6 *Supposons que* Ω *est un sous ensemble ouvert borné de* X *tel que* $domL \cap \Omega \neq \emptyset$*. Alors* N *est* $L-$*compact sur* $\overline{\Omega}$*.*

Preuve. En effet nous devons montrer que l'application $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est bornée et $K_P(I-Q)N : \overline{\Omega} \to X$ est compact. Comme Ω est borné, il existe une constante $r > 0$ telle que $\|x\| \leq r$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Pour $x \in \overline{\Omega}$ on a

$$\begin{aligned}
|QNx| &= \left|\left(k\int_0^1 (1-s)^2 f(s,x(s),x'(s))\,ds - \frac{2}{3\eta^2}\int_0^\eta (\eta-s)^3 f(s,x(s),x'(s))\,ds\right)t\right| \\
&\leq k\int_0^1 (1-s)^2 |f(s,x(s),x'(s))|\,ds + \frac{2}{3\eta^2}\int_0^1 (1-s)^2 |f(s,x(s),x'(s))|\,ds \\
&\leq \left(k+\frac{2}{3\eta^2}\right)\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|\,ds,
\end{aligned}$$

compte tenu de la condition 1 du théoréme 3.3 on obtient

$$\|QNx\|_1 \leq \left(k+\frac{2}{3\eta^2}\right)\left(\left(\|\alpha\|_1+\|\beta\|_1\right)r+\|\gamma\|_1\right). \quad (3.21)$$

Dés lors $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné.

Montrons à présent que $K_P(I-Q)N\left(\overline{\Omega}\right)$ est compacte. En effet, remarquons d'abord que pour $x \in \overline{\Omega}$

$$\|Nx\|_1 = \int_0^1 |f(s, x(s), x'(s))|\, ds \leq (\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1)\, r + \|\gamma\|_1\,, \tag{3.22}$$

de plus

$$\begin{aligned}
|K_P (I-Q) Nx(t)| &= \frac{1}{2}\left|\int_0^t (t-s)^2 (I-Q) Nx(s)\, ds\right| \leq \int_0^1 (1-s)^2 |(I-Q) Nx(s)|\, ds \\
&\leq \int_0^1 (|Nx(s)| + |QNx(s)|)\, ds = \|Nx\|_1 + \|QNx\|_1\,.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left|[K_P (I-Q) Nx]'(t)\right| &= \left|\int_0^t (t-s)(I-Q) Nx(s)\, ds\right| \leq \int_0^1 (1-s)\, |(I-Q) Nx(s)|\, ds \\
&\leq \int_0^1 (|Nx(s)| + |QNx(s)|)\, ds = \|Nx\|_1 + \|QNx\|_1\,.
\end{aligned}$$

D'où de (3.21) et (3.22), $\left\|K_P (I-Q) N\left(\overline{\Omega}\right)\right\| \leq \|Nx\|_1 + \|QNx\|_1$ conséquement $K_P (I-Q) N\left(\overline{\Omega}\right)$ est borné. Prouvons maintenant que $K_P (I-Q) N\left(\overline{\Omega}\right)$ est équicontinu. En effet, pour t_1, $t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, on a

$$|K_P (I-Q) Nx(t_1) - K_P (I-Q) Nx(t_2)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left|\int_0^{t_1} (t_1-s)^2 (I-Q) Nx(s)\, ds - \int_0^{t_2} (t_2-s)^2 (I-Q) Nx(s)\, ds\right| \\
&\leq \int_0^{t_1} (t_2-s)^2 - (t_1-s)^2\, |(I-Q) Nx(s)|\, ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^2\, |(I-Q) Nx(s)|\, ds \\
&\leq \int_0^{t_1} (t_2-s)^2 - (t_1-s)^2 (|Nx(s)|\, ds + |QNx(s)|)\, ds \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^2 (|Nx(s)|\, ds + |QNx(s)|)\, ds \\
&\leq 2(t_2-t_1) \int_0^1 (|Nx(s)|\, ds + |QNx(s)|)\, ds + \int_{t_1}^{t_2} (|Nx(s)|\, ds + |QNx(s)|)\, ds
\end{aligned}$$

et

$$\left|\left[K_P\left(I-Q\right)Nx\right]'\left(t_1\right)-\left[K_P\left(I-Q\right)Nx\right]'\left(t_2\right)\right|$$

$$\leq\left(t_2-t_1\right)\int_0^1\left|\left(I-Q\right)Nx\left(s\right)\right|ds+\int_{t_1}^{t_2}\left|\left(I-Q\right)Nx\left(s\right)\right|ds$$

$$\leq\left(t_2-t_1\right)\int_0^1\left(\left|Nx\left(s\right)\right|ds+\left|QNx\left(s\right)\right|\right)ds+\int_{t_1}^{t_2}\left(\left|Nx\left(s\right)\right|ds+\left|QNx\left(s\right)\right|\right)ds.$$

Ainsi $\left\|K_P\left(I-Q\right)Nx\left(t_1\right)-K_P\left(I-Q\right)Nx\left(t_2\right)\right\|\to 0$ quand $t_1\to t_2$ par conséquent $K_P\left(I-Q\right)N\left(\overline{\Omega}\right)$ est équicontinu. En vue du théorème d'Ascoli-Arzela, $K_P\left(I-Q\right)N\left(\overline{\Omega}\right)$ est compact, alors N est L-compact sur $\overline{\Omega}$. ■

3.3 Preuve du théorème 3.3

La preuve du théorème 3.3 est une conséquence immédiate des lemmes ci-dessus et le théorème de coïncidence de Mawhin.

Preuve. En effet, soit Ω le sous ensemble ouvert borné de X i.e $\Omega=\{x\in X;\ \ \|x\|\leq r\}$ tel que $\cup_{i=1}^{3}\overline{\Omega}_i\subset\Omega$. Des lemmes (2) et (3) on a

i) $Lx\neq\lambda Nx$, pour tout $x\in\left(domL\backslash KerL\right)\cap\partial\Omega$ et $\lambda\in(0,1)$ car $\Omega_1\cap\partial\Omega\times(0,1)=\varnothing$.

ii) $Nx\notin\operatorname{Im}L$ pour tout $x\in KerL\cap\partial\Omega$ car $\Omega_2\cap\ \partial\Omega=\varnothing$.

iii) Soit $H\left(x,\lambda\right)=\pm\lambda Jx+\left(1-\lambda\right)QNx=0$, en accord avec les lemmes (4) et (5) on sait que $H\left(x,\lambda\right)\neq 0$ pour tout $x\in KerL\cap\partial\Omega$ car $\Omega_3\cap\partial\Omega=\varnothing$; alors par la propriété d'invariance par homotopie du degré on obtient

$$\begin{aligned}\deg\left(QN\left|_{KerL},\Omega\cap KerL,0\right.\right)&=\deg\left(\ H\left(\cdot,0\right),\Omega\cap KerL,0\right)\\&=\deg\left(\ H\left(\cdot,1\right),\Omega\cap KerL,0\right)\\&=\deg\left(\ \pm J,\Omega\cap KerL,0\right)\neq 0.\end{aligned}$$

Donc par le théorème (3.1), l'equation $Lx=Nx$ admet au moins une solution dans $domL\cap\ \overline{\Omega}$, et dés lors (3.1), $(3,2)$ a au moins une solution $x\in C^1\left[0,1\right]$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons appliqué le degré de coïncidence de Mawhin pour l'étude d'un problème en résonance non linéaire avec des conditions aux limites non locales.

Tout d'abord nous avons discuté dans le premier chapitre le concept du degré topologique et ses propriétés où nous avons défini le degré de Brouwer en dimension finie puis le degré de Leray-Schauder en dimension infinie et comme applications nous avons prouvé quelques théorèmes de point fixe topologiques à savoir : le théorème du point fixe de Brouwer et de Schauder. A travers le chapitre deux nous avons identifié une classe importante d'opérateurs : les opérateurs de Fredholm d'indice zéro qui définissent le degré de coïncidence de Mawhin puis nous avons terminé ce chapitre par la démonstration du théorème de Mawhin.

Enfin dans le troisième et dernier chapitre nous avons présenté via le théorème de continuation de Mawhin un résultat d'existence de la solution d'un problème aux limites associé à une équation différentielle d'ordre trois à conditions non locales de type intégrale

Bibliographie

[1] G. Dinca, J. Mawhin, Brouwer Degree and Applications, January 17, 2009.

[2] J. Droniou, Degrés topologiques et applications, Departement de Mathématiques, UMR CNRS 5149, CC051, University Montpellier 2, Place Eugène

[3] Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5, France, (2006).

[4] O. Kavian. Introduction à la théorie des points critiques et applications au problemes elliptiques. Vol. 13. Math ematiques & Applications. Springer-Verlag, 1993.

[5] A. Guezane-Lakoud, A. Frioui, Third Order Boundary Value Problem with Integral Condition at Resonance, Theory and Applications of Mathematics & Computer Science 3 (1) (2013) 56–64.

[6] J. Mawhin, Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems, CBMS Reg. Conf. in Math., No 40, American Math. Soc., Providence, RI, 1979

[7] J. Mawhin, Equivalence theorems for nonlinear operator equations and coincidence degree theory, J. Di⊠erential Equations 12 (1972), 610-636

[8] D. O'Regan, Y. Je Cho and Y.Q. Chen, Topological Degree Theory and Applications, Series in Mathematical Analysis and Applications, vol. 10, Chapman & Hall/CRC, (2006).

[9] A. Sirma, S. Sevgin, A Note on Coincidence Degree Theory, Int. J. Math. Math. Sc, Volume 2012Article ID 370946, 18 pages

[10] J. Leray, J. Schauder, Topologie et equations fonctionnelles, Ann. Ecole Norm, 51, pp. 45-78