République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{lle} LAFAIFIA Khawla

Intitulé

Etude de la solution d'un problème aux limites fractionnaire

Dirigé par :

Dr Lilia ZENKOUFI

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr A.BENCHAABANE**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr L.ZENKOUFI**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr H. BELHIRECHE**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Remerciement

Je tiens à remercier au Docteur ZENKOUFI Lilia, de m'avoir proposé ce sujet de recherche et d'avoir dirigé mon travail.

J'adresse mes vifs remerciements au Docteur BENCHAABANE Abbes, pour le grand honneur qu'il me fait de présider le jury de soutenance.

J'exprime également mes chaleureux remerciements au Docteur BELHIRECHE Hanane pour l'honneur qu'il m'a fait d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Enfin, je remercie mon père, ma mère, mes sœurs et toute ma famille pour tous ce qu'ils ont fait pour ma réussite.

Dédicace

Je dédie ce mémoire,

À mes parents,

À mes sœurs.

À ma famille et mes amies.

À tous les enseignants, du primaire, du moyenne, du secondaire et de l'université 8 Mai 1945 Guelma.

Table des matières

Résumé

L'objectif de ce travail est d'établir l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples. Nous clôturons ce travail par une bibliographie.

Mots clés : Problèmes aux limites fractionnaire, Alternative non linéaire de Leray-Schauder, Le principe de contraction de Banach, Existence, Unicité de la solution.

Abstract

The objective of this work is to establish the existence and uniqueness of solution for boundary value problem of fractional differential equations, by using the Leray-Schauder nonlinear alternative and the Banach contraction principle. The results obtained are illustrated by examples. We close this work by a bibliography.

Key words : Fractional boundary value problems, Banach contraction principle, Leray-Schauder nonlinear alternative, Existence, Uniqueness of solution.

introduction

La théorie des équations différentielles fractionnaires a émergé comme un domaine intéressant à explorer ces dernières années. Selon une thèse d'histoire des mathématiques récente [5], la question des dérivées fractionnaires fût abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre à L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande qu'elle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction x, Leibnitz répond que cela même à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des dicultés. De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc.

Quand on introduit la notion de dérivée, on se rend vite compte qu'on peut appliquer le concept de dérivée à la fonction dérivée elle-même et par la même, introduire la dérivée seconde, puis les dérivées successives d'ordre entier.

Les équations différentielles fractionnaires constituent un domaine de recherche d'actualité. En effet, de nombreux articles sont apparus traitant les questions d'existence, d'unicité ainsi que la multiplicité des solutions positives de ce type d'équations.

La dérivation non entière consiste à généraliser la notion de la dérivée à des ordres non entièrs de dérivation (réels ou complexes). Différentes définitions de la dérivation non entière ont été établies, ces dernières ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour plusieurs fonction.

Beaucoup de contributions ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérét dans différentes disciplines tels que : l'électricité, la chimie, la biologie, l'économie,...et dans différentes applications réelles que : la modilisation, l'identification, la robotique et le traitement d'images.

Certains problèmes en physique moderne et en technologie sont généralement décrits par des problèmes aux limites engendrés par des équations différentielles linéaires ou non linéaires. Quand ces équations satisfont des conditions aux limites en plus d'une valeur, le problème résultant est un problème aux limites à plusieurs points, comme la terminologie l'indique, il s'agit des cas où les conditions aux limites sont imposées en deux, trois ou en m points du domaine. Le cas le plus compliqué est quand ces conditions sont vérifiées aux extrémités et à l'intérieur du domaine.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un grand rôle.

En analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui affirme qu'une fonction f possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur f. Un point fixe d'une fonction f qui est définie dans un espace métrique X vers lui même, est un élément $x \in X$ qui vérifie $f(x) = x$. Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Durant ces dernières années, les théorèmes du point fixe sont regardés comme de très puissants et importants outils dans l'étude des phénomènes non-linéaires. Le plus simple théorème de point fixe connu est le théorème de Banach qui est appelé aussi théorème de contraction : "toute contraction d'un espace métrique complet vers lui même admet un unique point fixe."

En 1912, Brouwer a trouvé une généralisation du théorème de Banach, il affirme que : "une fonction continue de la boule unité fermée dans un espace euclidien de dimension n vers elle même doit avoir un point fixe". Ce résultat a été généralisé par plusieurs mathématiciens, la plus importante généralisation est obtenue par le mathématicien polonais Juliusz Schauder en 1930 : "toute application continue et compacte d'un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même admet un point fixe". Ce puissant théorème du point fixe intervient surtout dans la démonstration de l'existence de solutions d'une équation différentielle.

Notons que les théorèmes de Brouwer et de Schauder ne s'appliquent pas si la compacité n'a pas lieu. En 1955 Dardo a prouvé que : "toute application Darbo-contractive d'un ensemble borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même, admet un point fixe." La généralisation de ce théorème est obtenue par Sadovskii, il affirme que :"toute application condensée d'une partie non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach vers lui même, admet un point fixe." Parmi les généralisations du théorème de point fixe de Schauder, on cite aussi, le résultat de Schauder-Tychono concernant les espaces localement convexe qui a dit : "Toute application continue d'un ensemble convexe et compact d'un espace localement convexe possède un point fixe."

De nombreux théorèmes d'existance sont obtenus à partir des théorèmes des Banach, Brouwer et Schauder, en transformant le problème d'existance en problème de point fixe.

Nous passons maintenant à la description du plan de ce travail :

Le premier chapitre est consacré aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma et la fonction Bêta qui jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles fractionnaires. Deux approches (Riemann-Liouville et Caputo) généralisant les notions de dérivation sont ensuite considérées.

Le **deuxième chapitre** se compose notamment des rappels de quelques résultats théoriques, de quelques théorèmes importants sur la théorie du point fixe et des notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées.

Ces éléments d'analyse on été pris de quelques livres et articles choisis.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Enfin, nous clôturons ce travail par **une bibliographie**.

Chapitre 1

La dérivation fractionnaire

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base de la dérivation non entière. Nous avons repertorié quelques notions de cet outil mathématique, deux approches des dérivées fractionnaires sont introduites à savoir, l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo ainsi que leurs propriétés et quelques exemples de calcul.

1.1 Fonctions spécifiques pour la dérivation fractionnaire

Nous présentons les fonctions Gamma et Bêta.

Ces fonctions, qui jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition 1.1 *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$ *tel que* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$*, on définit la fonction suivante :*

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \tag{1.1}$$

En intégrant par parties, on peut voir que :

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{1.2}$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

1.1.2 La fonction Bêta

La fonction Bêta est une fonction définie par :

$$B(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}d\tau, \quad \mathrm{Re}(p) > 0, \ \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.4}$$

1.1.3 Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

Remarque 1.1 *La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit :*

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \mathrm{Re}(p) > 0, \ \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.5}$$

Preuve. On a évidemment :

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = (\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx)(\int_0^\infty e^{-y}y^{q-1}dy),$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}dxdy.$$

Dans cette intégrale double, effectuons le changement de variable :

$$y = \mu - x,$$

pour

$$0 \leq x \leq \mu,$$

et conservons la variable x, comme :

$$\frac{dy}{d\mu} = 1,$$

on a

$$dxdy = dxd\mu,$$

on obtient que :

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^\infty \int_0^\mu e^{-\mu} x^{p-1} (\mu - x)^{q-1} dx d\mu, \\
&= \int_0^\infty e^{-\mu} (\int_0^\mu x^{p-1} (\mu - x)^{q-1} dx) d\mu,
\end{aligned}$$

pour évaluer l'intégrale relative à dx, effectuons le changement de variable $x = t\mu$ on obtient que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\mu x^{p-1} (\mu - x)^{q-1} dx &= \int_0^1 (t\mu)^{p-1} (\mu - t\mu)^{q-1} dt, \\
&= \mu^{p+q-1} \int_0^\infty t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = \mu^{p+q-1} B(p,q),
\end{aligned}$$

par suit

$$\begin{aligned}
\Gamma(p)\Gamma(q) &= B(p,q) \int_0^\infty e^{-\mu} \mu^{p+q-1} d\mu, \\
&= B(p,q)\Gamma(p+q),
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat désiré. ■

1.1.4 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale :

$$I^{(1)}f(x) = \int_a^x f(t)dt, \tag{1.6}$$

$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)du,$$
$$I^{(2)}f(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt, \tag{1.7}$$

et par récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} I^{(n)}f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n, \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)dt, \end{aligned} \tag{1.8}$$

pour tout entier n cette formule est appelée formule de Cauchy et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $(n-1)! = \Gamma(n)$, Riemann rendu compte que le second membre de (1.8) pourrait avoir un sens même quand n prenant un valeur non-entière, il était naturel de définir l'intégration fractionnaire comme suit :

Définition 1.2 *Si $f \in C[a, b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ l'intégrale :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt, \tag{1.9}$$

telle que :

$$a \in \left]-\infty, +\infty\right[,$$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à gauche) de Reimann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale :

$$I_{b-}^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt, \tag{1.10}$$

telle que $b \in]-\infty, +\infty[$ est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de Reimann-Liouville d'ordre α.

Remarque 1.2 *Dans tout ce qui suit on va utiliser uniquement l'intégrale (à gauche).*

Proposition 1.1 *Pour $f \in C[a,b]$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante :*

$$I_{a^+}^{(\alpha)}[I_{a^+}^{(\beta)} f(x)] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \qquad \textit{pour}, \ \mathrm{Re}(\alpha) > 0, \ \textit{et} \ \mathrm{Re}(\beta) > 0. \tag{1.11}$$

Exemple 1.1 *Considérons la fonction :*

$$f(t) = (t-a)^m.$$

A l'aide de changement de variable :

$$\tau = a + x(t-a),$$

on trouve :

$$I^\alpha (t-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a)^{\alpha-1} (\tau - a)^m d\tau, \tag{1.12}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} x^m dx,$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \beta(m+1, \alpha),$$

$$= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-\alpha)^{\alpha+m}.$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 0$, où on a :

$$I_a^1 (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (x-a)^{\beta+1} = \frac{(x-a)^{\beta+1}}{\beta+1} \ .$$

1.2 Diverses approche de la dérivées fractionnaire

Différentes approches ont été utilisées pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

1.2.1 Approche de Grunwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.

La dérivée d'ordre 1 d'une fonction f au point x est définie par :

$$D^1 f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Le calcule des dérivées de la fonction f donne la généralisation de cette formule à l'ordre p, où p est un nombre entier positif ou nul.

$$D^{(p)} f(t) = \lim_{h \to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh),$$

avec

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)...p(p-k+1)}{k!}. \tag{1.13}$$

La généralisation de cette formule pour p un entier négatif :

$$(-1)^k \binom{p}{k} = \frac{-p(-p+1)...(-p+k-1)}{k!}, \tag{1.14}$$

En utilisant la fonction Gamma telle que :

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n),$$

et :

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

on aura :

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh), \tag{1.15} $$

et

$$ {}^{G}D^{-p}f(t) = \lim_{h\to 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh)\ , \tag{1.16} $$

si f est de classe C^n, alors utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$ {}^{G}D^{-p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{n+p-1} f^{(n)}(\tau)d\tau, \tag{1.17} $$

aussi

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)d\tau. \tag{1.18} $$

La dérivée d'une fonction constante au sens de Grunwald-Letnikov

En générale la dérivée d'une fonction constante au sens de Grunwald-letnikov n'est pas nulle ni constante.

Si $f(t) = c$ et p non entier positif on a :

$$ f^{(k)}(t) = 0 \text{ pour } k = 1, 2, ..., n $$

$$ {}^{G}D^{p}f(t) = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \tag{1.19} $$

$$ + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)d\tau, $$

$$ = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. $$

La dérivée de $f(t) = (t-a)^{\alpha}$ au sens de Grunwald-Letnikov

Soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a :

$$f^{(k)}(a) = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, ..., n-1, \tag{1.20}$$

et :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}, \tag{1.21}$$

d'où :

$${}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{-p}d\tau,$$

en faisant le changement de variable :

$$\tau = a + s(t-a),$$

on trouve :

$${}^{G}D^{p}f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n}d\tau,$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}\int_{a}^{t}(1-s)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds,$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(\alpha-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

A titre d'exemple :

$$^{G}D^{\frac{1}{2}}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}. \tag{1.22}$$

1.2.2 Aproche de Riemann-Liouville

Définition 1.3 *Soit f une fonction intégrable sur $[a, t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p (avec $n-1 \leq p < n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$^{R}D^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.23}$$

$$= \frac{d^n}{dt^n}(I^{n-p}f(t)).$$

Remarque 1.3 *Si f est de classe C^n, alors en faisant des intégrations par parties et des dérivations répétées on obtient :*

$$^{R}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}f^{(n)}(\tau)d\tau =^{G} D^{p}f(t). \tag{1.24}$$

Dans ce cas l'approche de Grunwald-Letnikov et l'approche de Riemann-Liouville sont équivalentes.

La dérivée non entière d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville

Comme premier exemple de dérivée non entier d'un fonction constante $f(r) = c$ au sens de Riemann-Liouville, nous avons :

$$^{R}D^{p}C = \frac{C}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. \tag{1.25}$$

La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville

Comme deuxième exemple de dérivée d'une fonction $f(x) = (x-a)^\alpha$ au sens de Riemann-Liouville, nous avons :

soit p non entier et $0 \leq n-1 < p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a :

$$^{R}D^{p}(\tau-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^\alpha d\tau. \tag{1.26}$$

En faisant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$, on aura :

$$^{R}D^{p}(t-a)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}(t-a)^{n+\alpha-p}\int_a^t (1-s)^{n-p-1}s^\alpha ds,$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)B(n-p,\alpha+1)}{\Gamma(n-p)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(n+\alpha-p+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-p+1)\Gamma(n+\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

A titre d'exemple :

$$^{R}D^{0.5}t^{0.5} = \frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)} = \Gamma(1.5). \tag{1.27}$$

Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire,

$$^{R}D^{p}(I^{p}f(t)) = f(t), \tag{1.28}$$

en général on a :

$$^{R}D^{p}(I^{q}f(t)) =^{R} D^{p-q}f(t), \tag{1.29}$$

et si

$$p-q<0, \quad ^{R}D^{p-q}f(t) \ = I^{q-p}f(t),$$

en général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas :

$$^{R}D^{-p}({}_{a}^{R}D_{t}^{q}f(t)) =^{R} D^{q-p}f(t) - \sum_{k=1}^{m}[^{R}D_{t}^{p-q}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{p-k}}{\Gamma(p-k+1)}, \tag{1.30}$$

avec

$$m-1 \leq q < m.$$

1.2.3 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

La définition de la dérivation fractionnaire de type Riemann-Liouville a joué un role important dans le développement de la théorie des dérivées et intégrales fractionnaires à cause de leurs applications dans les mathématiques pures (solutions des équations différentielles d'ordre entier, définition de nouvelles classes de fonction, sommation des séries,...).

Dans l'approche de Caputo, celui-ci a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire.

(on introduit une dérivée fractionnaire qui est plus restrictive que celle de Riemann-Liouville.)

Définition 1.4 *Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que :*

$$\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1[a,b],$$

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de Caputo est définie par :

$$^C D^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau) d\tau = I^{n-p}(\frac{d^n}{dt^n} f\ (t)). \tag{1.31}$$

La dérivée d'une fonction constante au sens de caputo

La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

$$^C D^p C = 0. \tag{1.32}$$

La dérivée de $f(t) = (t-a)^\alpha$ au sens de Caputo

Soit p un entier et $0 \leq n-1 < p < n$ avec $\alpha > n-1$, alors on a :

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\tau-a)^{\alpha-n}, \tag{1.33}$$

d'où

$$^C D^p f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau, \tag{1.34}$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient :

$$\begin{aligned} ^C D^p f(t) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{\alpha-n} d\tau, \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} (t-a)^{\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds, \end{aligned}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)B(n-p,\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p},$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p}.$$

1.3 comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

•L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équation différentielles d'ordre entier, c'est-à-dire contient les valeurs limites des dérivées d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

•Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo par contre par Riemann-Liouville elle est :

$$\frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}.$$

Remarque 1.4 *Graphiquement, on peut dire que le chemin suit pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre* α *où* $m-1 \leq \alpha \leq m$ *par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre* $(m-\alpha)$ *pour la fonction* $f(x)$ *et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier* m*, mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre* α *où* $m-1 \leq \alpha \leq m$ *par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier* m *de la fonction* $f(x)$ *et puis on l'intègre d'ordre fractionnaire* $(m-\alpha)$.

Chapitre 2

Etude des théorèmes du point fixe et applications

Résumé

Dans ce chapitre, on étudie quelques théorèmes du point fixe et résultats théoriques, ces résultats nous permettent de résoudre certains problèmes, comme par exemple trouver les zéros d'un polynôme, ou prouver que certaines équations différentielles admettent des solution sans les déterminer explicitement.

2.1 Rappel

Théorème 2.1 ***(Théorème de point fixe).***

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $I = [a, b]$ *.*

Si $f(I) \subset I$ *(*I *stable par* f*), alors* f *admet au moins un point fixe sur* I*.*

C'est-à-dire : il existe au moins un réel x *de* I *tel que* $f(x) = x$*.*

Théorème 2.2 ***(Théorème des valeurs intermédiaires).***

Soit I *un intervalle,* a *et* b *inclu dans* I *avec* $a < b$*,* f *une application continue sur l'intervalle* I*, et* λ *un réel compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *.*

Alors : il existe au moins un réel c *dans* $[a, b]$ *tel que :* $f(c) = \lambda$*.*

(Autrement dit : l'équation $f(x) = \lambda$ *admet au moins une solution dans* $[a, b]$*).*

Preuve du Théorème 2.1

Preuve. Considérons la fonction g définie sur $I = [a, b]$ par :

$$g(x) = f(x) - x.$$

Montrons que $0 \in g(I)$. On a :

$$g(a) = f(a) - a \in g(I) \ , \tag{2.1}$$

$$g(b) = f(b) - b \in g(I) \,, \tag{2.2}$$

Or, comme $f(I) \subset I$, on a $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, c'est -à-dire $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $x \in I$ tel que :

$$g(x) = 0, \tag{2.3}$$

c'est-à-dire

$$f(x) = x.$$

■

2.1.1 Théorème d'Arzéla-Ascoli

Nous allons rappeler le théorème d'Arzéla-Ascoli qui concerne les compacts et qui constitue un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle et il va nous servir beaucoup le long de ce travail.

Définition 2.1 *Une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur un intervalle $I = [a, b]$ est* ***uniformément bornée*** *s'il existe un nombre M tel que,*

$$|f_n(x)| \leq M, \qquad \forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.4}$$

Définition 2.2 *(Equicontinuité).*

La suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue sur $[a, b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$, tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| < \delta,\ \text{alors},\ |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Théorème 2.3 *(Théorème d'Arzéla-Ascoli)*

Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques et supposons que X compact. Alors, une partie $\mathcal{F}$ incluse dans $C(X, Y)$ est relativement compacte (i.e, d'adhérence compact) pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

- La famille $\mathcal{F}$ est équicontinue en tout point de X.

- La famille $\mathcal{F}$ est unifomément bornée sur X.

2.2 Théorèmes du point fixe

Etant donné un ensemble E et une application $f : E \longrightarrow E$.

Définition 2.3 ***(application contractante).***

*Soit A une application de E dans E. On dit que A est **contractante** s'il existe un réel α strictement inférieur à 1 $(\alpha < 1)$ tel que :*

$$\forall u, w \in E : \|A(u) - A(w)\|_E \leq \alpha \|u - w\|_E . \tag{2.6}$$

Définition 2.4 *Soit E un espace vectoriel normé, et f une application de E dans E. On dit que f est **lipschitzienne** sur E s'il existe une constante $L > 0$ telle que :*

$$\forall u_1, u_2 \in E : \|f(u_1) - f(u_2)\|_E \leq L \|u_1 - u_2\|_E . \tag{2.7}$$

2.2.1 Un Théorème du Point Fixe Métrique.

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 2.4 ***(Banach)**.*

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application contractante, i.e, Lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, f admet un unique point fixe $a \in E$.

De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := f(x_p)$ converge vers a.

Preuve.

1. Existence :

Soit x_0 un point initial quelconque et (x_p) la suite itérée associée. On a :

$$d(x_p, x_{p+1}) = d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \qquad p \geq 1. \tag{2.8}$$

On va prouver que (x_p) est une suite de Cauchy dans E. Pour $p < q$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + ... + d(x_{q-1}, x_q).$$

Puisque f est une contraction, on a :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d\left(f(x_{p-1}), f(x_p)\right) \\ &\leq kd(x_{p-1}, x_p), \qquad p \geq 1. \end{aligned}$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq \left(k^p + k^{p+1} + ... + k^{q-1}\right) d(x_0, x_1), \\ &\leq k^p \left(1 + k + ... + k^{q-p-1}\right) d(x_0, x_1), \\ &\leq k^p \left(\frac{1}{1-k}\right) d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

On en déduit alors que (x_p) est une suite de Cauchy. Comme (E, d) est complet, la suite (x_p) converge vers un point limite $a \in E$.

Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$a = \lim_{p\to\infty} x_p = \lim_{p\to\infty} f(x_{p-1}) = f\left(\lim_{p\to\infty} x_{p-1}\right) = f(a). \tag{2.9}$$

Donc a est un point fixe de f (i.e, $f(a) = a$).

2. Unicité :

Supposons qu'il existe $a, b \in E$, $a \neq b$, tels qu'on a $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

Alors, on a :

$$d(a, b) = d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b), \tag{2.10}$$

ce qui implique que : $d(a, b) = 0$, i.e, $a = b$. (puisque $k < 1$) . ■

Nous allons montrer que les hypothèses du théorème de point fixe de Banach sont essentielles.

Exemple 2.1 *Les exemples suivant montrent que chacune des hypothèses du théorème est réellement nécessaire : si nous négligeons seulement une, alors le point fixe n'existe pas.*

(**1**).

X *n'est pas stable par* f : $\quad f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *sur* $X = [0,1]$.

Or X *est fermé dans* $\mathbb{R}$, *et complet car* $\mathbb{R}$ *est complet.*

De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1, \\ \sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| &< 1 \Longrightarrow f \quad \text{est contractante.} \end{aligned}$$

Mais f *n'a pas de point fixe car*

$$f([0,1]) = \left[1, \sqrt{2}\right],$$

i.e, X *n'est pas stable par* f.

(**2**).

f *n'est pas contractante :*

$$f(x) = \sqrt{x^2+1},$$

sur $X = [0, \infty[$.

Or $f : X \to X$ *et* X *est un fermé de* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ *est complet donc* X *est complet.*

Mais,

$$\sup_{x\in X}\left|f'(x)\right| = 1,$$

$\Longrightarrow f$ *n'est pas contractante.*

(**3**).

X n'est pas complet :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

sur $X = \left]0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Or

$$\begin{aligned} f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) &= \left]0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right] \subset \left]0, \frac{\pi}{4}\right], \\ \sup_{x \in X} \left|f'(x)\right| &= \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow f \text{ est contractante.} \end{aligned}$$

Mais X *n'est pas fermé dans* $\mathbb{R}$ *donc n'est pas complet.*

2.2.2 Un Théorème du Point Fixe Topologique

Ce théorème (**de Brouwer**) donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.5 *Soit* K *une partie non vide, compacte et convexe de* $\mathbb{R}^n$ *et* $f : K \to K$ *une fonction continue. Il existe* $x \in K$ *tel que* $f(x) = x$.

Remarque : Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments.
Le Théorème de Brouwer prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particulière suivante :

Théorème 2.6 *Si* $f : [a, b] \to [a, b]$ *est continue, alors il existe* $x \in [a, b]$ *tel que* $f(x) = x$.

Preuve. Si f est continue de $[a, b]$ dans lui-même $([a, b])$, la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x \geq 0$ est continue, prend en a la valeur $f(a) - a \geq 0$ et en b la valeur $f(b) - b \leq 0$.

Alors : par le Théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de f. ■

Remarque 2.1 1. *L'hypothèse " I fermé " n'est là que pour assurer que* $x_0 \in I$. *Si on sait déjà, par ailleurs, que* $x_0 \in I$ *(en pratique, on a parfois déjà calculé* ℓ *en résolvant l'équation* $f(x_0) = x_0$*), cette hypothèse devient inutile.*

2. *Le théorème du point fixe ne s'applique pas si l'on remplace l'hypothèse "f contractante sur$I$ " par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I ".*

*Voici un **contre-exemple** :*

Soit, $I = [1, +\infty[$ *et*

$$f : I \to I,$$

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x},$$

Soient x et y dans I avec $x < y$.

Comme la fonction f est croissante sur $[1, +\infty[$, *on a :*

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x),$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x-y}{xy},$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x|.$$

Ce qui prouve que f est 1-lipschitzienne sur I.

Cependant f n'a pas de point fixe sur I. (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution).

Le Théorème de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.7 ***(Schauder).***

Soit E un espace de Banach et $K \subset E$ convexe et compact. Alors toute application continue $f : K \to K$ possède un point fixe.

Preuve. Soit $f : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, f est uniformément continue ; donc, si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in K$, on a :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon, \quad \text{dès que } \|x - y\| \leq \delta,$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent K ;

i.e,

$$K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq P} B(x_j, \delta).$$

Si on désigne $L := Vect\,(f(x_j))_{1 \leq j \leq P}$, alors L est de dimension finie, et $K^* := K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq P$, on définit la fonction continue $\psi_j : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.11}$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in K$, $\sum_{j=1}^{p} \psi_j(x) > 0$, et donc on peut définir sur K les fonctions continues positives φ_j par :

$$\varphi_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)}, \tag{2.12}$$

pour lesquelles on a $\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$, pour tout $x \in K$.

On pose alors, pour $x \in K$,

$$g(x) := \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) f(x_j).$$

g est continue (car elle est la somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans K^* (car $g(x)$ est un barycentre des $f(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g_{/K^*} : K^* \to K^*$, g possède un point fixe $y \in K^*$. De plus,

$$\begin{aligned} f(y) - y &= f(y) - g(y) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) f(x_j), \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y)(f(y) - f(x_j)), \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$, alors,

$$\|y - x_j\| < \delta,$$

et donc

$$||f(y) - f(x_j)|| < \epsilon.$$

Donc, on a pour tout j,

$$\left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \epsilon\varphi_j(y),$$

et donc

$$\|f(y) - y\| \leq \sum_{j=1}^{p} \left\|\varphi_j(y)(f(y) - f(x_j))\right\| \leq \sum_{j=1}^{p} \epsilon\varphi_j(y) = \epsilon. \tag{2.13}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que

$$\|(f(y_m) - y_m)\| < 2^{-m},$$

Et puisque K est compact, de la suite $(y_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (y_{m_k}) qui converge vers un point $y^* \in K$.

Alors, f étant continue, la suite $(f(y_{m_k}))$ converge vers $f(y^*)$ et on conclut que

$$f(y^*) = y^*, \tag{2.14}$$

$i.e,\ y^*$ est un point fixe de f sur K. ■

Exemple 2.2 *Etude de la convergence de la suite définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

On utilisant le théorème suivant :

Théorème 2.8 [10] *Soit g une fonction continue définie sur un intervalle I. On suppose de plus que l'intervalle I est stable par g.*

Théorème 2.9 *Si la suite récurrente (u_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de g.*

Exemple 2.3 *On peut introduire l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{1+x},$$

Point fixe *de f* ***:***

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = x \Leftrightarrow x \geq 0,$$

et

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1, +\infty[) = [0, +\infty[\subset [-1, +\infty[.$$

L'intervalle $I = [-1, +\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \ \ |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2} |b-a| .$$

Donc, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.

En outre :

$$f(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}_+.$$

Donc, $\mathbb{R}_+$est stable par f .

D'après le Théorème du point fixe, la suite (u_n)définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ.

Enfin, si $u_0 \in [-1, +\infty]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}_+$ et d'après ce qui précède (u_n)converge encore vers λ.

Chapitre 3

Etude de l'existence et l'unicité d'un problème aux limites fractionnaire

Résumé

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude d'existence et d'unicité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

3.1 Introduction

Les équations différentielles fractionnaires sont une généralisation naturelle des équations différentielles ordinaires. Ils peuvent décrire de nombreux phénomènes dans divers domaines de la science et de l'ingénierie tels que le contrôle, milieux poreux, électrochimie,.... Il a été prouvé que dans de nombreux cas, ces modèles fournissent des résultats plus appropriés que les modèles analogues avec des dérivées entières. En conséquence, l'étude des équations différentielles fractionnaires gagne beaucoup d'importance et d'attention. Pour plus de détails, on peut voir les références $[1-4, 6-8, 12, ...]$.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solutions du problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\alpha} u(t) + f(t, u(t)) = 0, \quad t \in [0,1]. \\ u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{3.1}$$

où :

(i) $f \in C([0,1] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\beta > 0$, $0 < \eta < 1$.

(ii) $D_{0^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $2 < \alpha \leq 3$.

Dans la deuxième section, nous rappellerons brièvement quelques définitions de base et préliminaires qui seront utilisés tout au long de ce chapitre. Dans la troisième section, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray Schauder et le principe de contraction de Banach, nous présentons et nous prouvons les résultats d'existence et d'unicité de la solution non triviale du problème, nous allons démontrer aussi que l'opérateur intégral est complètement continu par utilisation du théorème d'Arzéla-Ascoli. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples dans la dernière section.

3.2 préliminaires

Nous allons donner quelques préliminaires que nous allons utiliser par la suit.

On note $L^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions Lebesgue intégrable de $[0,1]$

dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(t)|\, dt$.

Soit $E = C\,[0,1]$, muni de la norme $\|y\|_E = \max\limits_{t\in[0,1]} |y\,(t)|$.

Définition 3.1 *L'intégrale fractionnaire*

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds,$$

où $\alpha > 0$ est l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ et $\Gamma(.)$ est la fonction Gamma donnée par la formule (1.1).

Définition 3.2 *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction continue $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ est donnée par :*

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds.$$

$\Gamma(.)$ *est la fonction Gamma , tel que le côté droit soit définie sur* $]0, +\infty[$ *et* $n = [\alpha] + 1$, $[\alpha]$ *représente le plus grande entier infèrieur à* α.

Lemme 3.1 [9] *Soit* $\alpha, \beta \geq 0$, $f \in L^1(0,1)$, *alors :*

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(t) = f(t),$$

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t).$$

Lemme 3.2 [9] *Pour $\alpha > 0$ et $u \in (C(0,\,1) \cap L^1(0,1))$, l'équation différentielle fractionnaire*

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) = 0,$$

admet la solution,

$$u(t) = c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \ldots + c_n t^{\alpha-n},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ et $n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.3 [11]*Supposons que* $u \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ *telle que la dérivée fractionnaire d'ordre* $\alpha > 0$ *appartient à* $C(0,1) \cap L^1(0,1)$. *Alors,*

$$I_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\alpha} u(t) = u(t) + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} + \ldots + c_n t^{\alpha-n},$$

pour $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n;\ n = [\alpha] + 1$.

Lemme 3.4 *Soit* $f \in C[0,1]$ *et* $\alpha > \beta \geq 0$. *Alors,*

$$D_{0+}^{\beta} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} f(s) ds,$$

Preuve. D'après le Lemme (3.1) :

$$D_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\alpha} f(t) = f(t) \quad \text{et} \quad I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta} f(t),$$

on a,

$$\begin{aligned}
D_{0+}^{\beta} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds &= D_{0+}^{\beta} \Gamma(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \\
&= D_{0+}^{\beta} \Gamma(\alpha) I_{0+}^{\alpha} f(t), \\
&= \Gamma(\alpha) D_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha} f(t), \\
&= \Gamma(\alpha) D_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha-\beta} f(t), \\
&= \Gamma(\alpha) I_{0+}^{\alpha-\beta} f(t), \\
&= \Gamma(\alpha) \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-\beta-1} f(s) ds.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. ■

Lemme 3.5 *Soit* $2 < \alpha < 3$, $\beta > 0$, $0 < \eta < 1$, $\beta\eta^{\alpha-1} \neq 1$, *et* $y \in L^1[0,1]$, *alors le problème :*

$$D_{0+}^{\alpha} u(t) + y(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.2}$$

$$u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = \beta u(\eta), \tag{3.3}$$

admet une solution unique,

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds + \frac{\beta t^{\alpha-1}}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s)\, y(s)\, ds, \tag{3.4}$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, & 0 \le s \le t \le 1, \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1}, & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Preuve. En intégrant l'équation (3.2) de 0 à t, on obtient :

$$u(t) = -I_{0+}^{\alpha} y(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + C_3 t^{\alpha-3}.$$

De $u(0) = u'(0) = 0$, on a, $C_3 = C_2 = 0$.

Et de $u(1) = \beta u(\eta)$ on a :

$$C_1 = \frac{1}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}[I_{0+}^{\alpha} y(1) - \beta I_{0+}^{\alpha} y(\eta)].$$

Alors,

$$\begin{aligned} u(t) \;=\; & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t [-(t-s)^{\alpha-1} + t^{\alpha-1}(t-s)^{\alpha-1}] y(s) ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds \\ & + \frac{t^{\alpha-1}\beta}{\Gamma(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_0^{\eta} [\eta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} - (\eta-s)^{\alpha-1}] y(s) ds \\ & + \frac{t^{\alpha-1}\beta}{\Gamma(\alpha)(1-\beta\eta^{\alpha-1})} \int_{\eta}^1 \eta^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-1} y(s) ds. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Par conséquent, le problème admet une solution unique

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds + \frac{\beta t^{\alpha-1}}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s) y(s) ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

Ceci achève la démonstration. ■

Nous avons besoin de quelques propriétés de la fonction $G(t,s)$.

Lemme 3.6 *Supposons que* $t, s \in [0,1]$, *alors on a :*

(*i*) $G(t,s) \geq 0$ *et* $G(t,s) \in C([0,1] \times [0,1], \mathbb{R}_+)$.

(*ii*) *si* $t, s \in [\tau, 1]$, $\tau > 0$ *alors,*

$$\tau^{\alpha-1} G_1(s) \leq G(t,s) \leq \frac{1}{\tau} G_1(s),$$

où

$$G_1(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s (1-s)^{\alpha-1}.$$

Preuve. (*i*) Il est facile de vérifier que G est continue.

Pour $0 \leq t \leq s \leq 1$ on a,

$$G(t,s) = \frac{(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \geq 0.$$

Dans le cas $0 \leq s \leq t \leq 1$ on a :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] = \frac{(t-ts)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \geq 0.$$

(*ii*)

si $0 \leq t \leq s \leq 1$

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} \leq G_1(s).$$

si $0 \leq s \leq t \leq 1$, on a :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right],$$

alors,

$$G(t,s) \leq \frac{1}{s} G_1(s), \quad \forall s, t \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$G(t,s) \leq \frac{1}{\tau} G_1(s), \quad \forall s \in [\tau, 1], \ t \in [0,1].$$

Maintenant, si $0 \leq t \leq s \leq 1$,

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} \geq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} s (1-s)^{\alpha-1},$$

alors,

$$G(t,s) \geq t^{\alpha-1} G_1(s), \quad \forall s,t \in [0,1].$$

si $0 \leq s \leq t \leq 1$ on a :

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \right] \geq 0,$$

et

$$(1-s)^{\alpha-1} t^{\alpha-1} (1-s) - (t-s)^{\alpha-1} \geq 0,$$

$$G(t,s) \geq t^{\alpha-1} G_1(s), \quad \forall s,t \in [0,1].$$

Par conséquent,

$$G(t,s) \geq \tau^{\alpha-1} G_1(s), \text{ pour } t,s \in [\tau, 1].$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Définition 3.3 *Nous définissons un opérateur $T : E \longrightarrow E$ par :*

$$Tu(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s, u(s))\, ds$$

$$+ \frac{\beta t^{\alpha-1}}{1 - \beta \eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta, s) f(s, u(s))\, ds, \qquad t \in [0,1]. \tag{3.7}$$

Lemme 3.7 *La fonction $u \in E$ est une solution du problème* (3.1) *si et seulement si :*

$$Tu(t) = u(t),$$

$(u$ *est un point fixe de* $T)$.

Définition 3.4 *Un opérarteur est complètement continu s'il est continu et transforme chaque ensemble borné à un ensemble précompact.*

3.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous présentons et nous prouvons nos résultats d'existence et d'unicité, en utilisant le principe de contraction de Banach et l'alternative non linéaire de Leray-Schauder.

Théorème 3.1 *Supposons qu'il existe une fonction positive* $k \in L^1([0,1], \mathbb{R}_+)$, *tele que :*

$$|f(t,x) - f(t,u)| \leq k(t)|x-u|, \tag{3.8}$$

$$\forall\ x, u \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,1],$$

et

$$C = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}}\right) \int_0^1 G_1(s) k(s) ds < 1.$$

où

$$\gamma = \max\left\{\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau^{\alpha-1}}\right\}, 0 < \tau < 1.$$

Alors, le problème aux limite fractionnaire $(3.2), (3.3)$ *admet une solution unique dans* E.

Preuve. Prouvant que T est une contraction.

Soit $u, v \in E$, $\beta\eta^{\alpha-1} \neq 1$ alors,

$$|Tu(t) - Tv(t)| \leq \int_0^1 G(t,s) |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| ds$$

$$+ \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}} \int_0^1 G(\eta,s) |f(s,u(s)) - f(s,v(s))| ds.$$

Donc,

$$|Tu\,(t) - Tv\,(t)| \leq$$

$$\frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1\,(s)\,k\,(s)\,|u\,(s) - v\,(s)|\,ds,$$

alors,

$$|Tu\,(t) - Tv\,(t)| \leq \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\|u - v\|_E \int_0^1 G_1\,(s)\,k\,(s)\,ds,$$

en utilisant :

$$C = \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)k(s)ds < 1,$$

où :

$$\gamma = \max\left\{\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau^{\alpha-1}}\right\}, 0 < \tau < 1.$$

On a :

$$\| \, Tu - Tv \, \|_E \leq C \, \| \, u - v \, \|_E \, .$$

Alors, T est une contraction, donc il admet un point fixe unique qui est la solution unique du problème aux limites fractionnaire (3.1) . ■

Pour prouver l'existence d'au moins une solution du problème (3.1) , nous emploierons l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, donnée par le Lemme suivant [13].

Lemme 3.8 [13] (*Alternative non linéaire de Leray-Schauder*) *Soit F un epsace de Banach et soit Ω un sous ensemble ouvert et borné de F, $0 \in \Omega$ et $T : \overline{\Omega} \rightarrow F$ un opérateur complètement continu. Alors, il existe un $x \in \partial\Omega$, $\lambda > 1$ tel que $T\,(x) = \lambda x$, ou il existe un point fixe $x^* \in \overline{\Omega}$.*

Théorème 3.2 *Nous supposons que $f(t, 0) \neq 0$, il existe deux fonctions positives k, $l \in L^1([0, 1], \mathbb{R}^+)$ et $\phi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ croissante telles que :*

$$|f(t, u)| \leq k(t)\phi(|u|) + l(t), \qquad \forall u \in \mathbb{R}, \; t \in [0, 1], \tag{3.9}$$

et il existe $m > 0$ tel que :

$$M_1\phi\left(\|u\|_E\right) + M_2 < m.$$

où,

$$M_1 = \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)k(s)ds, \tag{3.10}$$

$$M_2 = \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\int_0^1 G_1(s)l(s)ds. \tag{3.11}$$

Alors, le problème aux limites fractionnaire (3.1) *admet au moins une solution non triviale* $u^* \in E$.

Preuve. Pour obtenir les résultats de ce Théorème, nous démontrons d'abord que l'opérateur T donné par (3.8) est complètement continu.

1) T est continu.

D'après la continuité de f et G, on conclut que T est un opérateur continu.

2) Soit $B_r = \{u \in E : \| u \|_E \leq r\}$ un sous-ensemble borné dans E. Nous allons prouver que $T(\Omega \cap B_r)$ est relativement compact :

(i) $T(\Omega \cap B_r)$ est uniformément borné.

Pour certains $u \in \Omega \cap B_r$, nous obtiendrons :

$$\begin{aligned} \mid Tu(t) \mid &\leq \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right) \\ &\times \int_0^1 G_1(s)[k(s)\phi(u(s)) + l(s)]ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|Tu\|_E \leq \gamma\left(1 + \frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)[M_1\phi\left(\|u\|_E\right) + M_2],$$

Alors, $T(\Omega \cap B_r)$ est uniformément borné.

(ii) $T(\Omega \cap B_r)$ est équicontinu.

Soit $u \in \Omega \cap B_r$, $t_1, t_2 \in [0,1]$, $t_1 < t_2$, nous avons :

$$|Tu(t_2) - Tu(t_1)| \leq \int_0^1 |G(t_2,s) - G(t_1,s)|\, f(s,u(s))ds$$

$$+\frac{(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\int_0^1 G(\eta,s)\mid f(s,u(s))\mid ds.$$

$$|Tu(t_2)-Tu(t_1)| \leq \frac{L(t_2^{\alpha-1}-t_1^{\alpha-1})}{\Gamma(\alpha)}[\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds+\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}ds$$

$$+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\int_0^1 G(\eta,s)ds],$$

où :

$$L=\max_{\substack{0<S<1 \\ \|u\|_E\leq r}} |f(s,u(s))|,$$

Alors, $|Tu(t_1)-Tu(t_2)| \underset{t_1\to t_2}{\longrightarrow} 0.$

Par conséquent, $T(\Omega\cap B_r)$ est équicontinu.

D'après le Théorème *d'Arzela-Ascoli*, nous déduisons que, T est un opérateur complètement continu.

Soit $\Omega=\{u\in E:\|u\|_E<m\}$.

Supposons que $u\in\partial\Omega$, $\lambda>1$, tel que $Tu=\lambda u$ nous obtiendrons,

$$\lambda m=\lambda\|u\|_E=\|Tu\|_E,$$

on a :

$$\|Tu\|_E \leq \frac{1}{\tau}\int_0^1 G_1(s)\left[k(s)\phi(\|u\|)+l(s)\right]ds+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\int_0^1 \frac{1}{\tau}G_1(s)[k(s)\phi(\|u\|)+l(s)]ds.$$

$$\|Tu\|_E \leq \gamma\left(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)\times\int_0^1 G_1(s)[k(s)\phi(\|u\|)+l(s)]ds.$$

$$\|Tu\|_E \leq \gamma\left(1+\frac{\beta}{1-\beta\eta^{\alpha-1}}\right)[\phi(\|u\|)\int_0^1 G_1(s)k(s)ds$$

$$+\int_0^1 G_1(s)l(s)ds],$$

Alors, on obtient,

$$\|Tu\|_E \leq M_1\phi(\|u\|_E) + M_2,$$

et,

$$\lambda m = \lambda \|u\|_E = \|Tu\|_E \leq M_1\phi(\|u\|_E) + M_2 \leq m.$$

Par conséquent $\lambda < 1$, ceci contredit $\lambda > 1$.

En appliquant *le Lemme* 3.8, nous concluons que l'opérateur T a un point fixe $u^* \in \overline{\Omega}$.

Par conséquent le problème aux limites fractionnaire (3.1) admet au moins une solution non triviale $u^* \in E$.

Ceci achève la démonstration. ■

3.4 Exemples

Dans cette section, nous allons illustrer les résultats obtenus par des exemples.

Exemple 3.1 *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{5}{2}} u(t) + \frac{t^3}{4} u = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, & u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{J1}$$

Soit,

$$\beta = \frac{1}{3}, \eta = \frac{1}{4},$$

et

$$f(t,u) = \frac{t^3}{4} u,$$

Choisissant,

$$k(t) = \frac{t^3}{4}, \qquad t \in [0,1]$$

$k \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ *est une fonction positive et*

$$\begin{aligned} |f(t,x) - f(t,u)| &\leq \frac{t^3}{4} \mid x - u \mid \\ &\leq k(t) \mid x - u \mid \end{aligned}$$

et

$$C = \gamma \left(1 + \frac{\beta}{1 - \beta\eta^{\alpha-1}}\right) \int_0^1 G_1(s)\, k(s) ds < 1.$$

Ainsi, d'après le Théorème 3.1, *le problème aux limites fractionnaire* $(J1)$ *admet une unique solution non triviale,* $u^* \in E$.

Exemple 3.2 *Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{5}{2}} u(t) + \frac{t^2}{4} u + \frac{1+t^2}{2} = 0, \quad 0 < t < 1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \qquad u(1) = \beta u(\eta), \end{cases} \tag{J2}$$

Posons

$$\beta = \frac{1}{2}, \qquad \eta = \frac{1}{5}.$$

où :

$$\alpha = \frac{5}{2},$$

et

$$f(t,u) = \frac{t^2}{4} u + \frac{1+t^2}{2}, \qquad \forall u \in \mathbb{R}, t \in [0,1].$$

Choisissant ,

$$\begin{cases} k(t) = \frac{t2}{4}, \\ l(t) = \frac{1+t^2}{2} \end{cases} \qquad , t \in [0,1],$$

$k,\ l \in L^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ *sont deux fonctions positives, et :*

$$|f(t,u)| \leq k(t)\phi_1(|u|) + l(t), \qquad \forall u \in \mathbb{R}, t \in [0,1].$$

D'après le Théorème 3.2*, il existe* $m > 0$ *tel que :*

$$M_1\phi_1(\|u\|_E) + M_2 < m,$$

où, M_1 *et* M_2 *sont donnés par la formule* (3.10) *et* (3.11)*, et le problème aux limites fractionnaire* $(J2)$ *admet au moins une solution non triviale dans* E.

Conclusion

La théorie du point fixe est d'une importance capitale dans l'étude de l'existence de solutions pour les problèmes non linéaires. De cette théorie découlent plusieurs applications qui constituent un domaine très actif de la recherche. Dans notre travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe et on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites fractionnaire, en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder et le principe de contraction de Banach. Les résultats obtenus sont illustrés par des exemples.

Actuellement il y a une grande variété de théorèmes du point fixe, ces théorèmes donnent certaines conditions sous lesquelles une application $f : E \to E$, admet un point fixe dans E.

Ces théorèmes sont importants dans les mathématiques car il y a plusieurs applications, par exemple pour trouver les racines d'un polynôme, ou pour montrer l'existence des solutions numériques des équations différentielles.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Benchohra, S. Hamani, Servey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional equations and inclusions,Acta Appl. Math. 1095 (2010) 973-1033.

[2] A. Babakhani, V. D. Gejji, Existence of positive solutions of nonlinear fractional equations, J. Math. Anal. Appl. 278 (2003) 434-442.

[3] Cui, Y., Liu, L., Zhang, X. : Uniqueness and existence of positive solutions for singular differential systems with coupled integral boundary value problems. Abstr. Appl. Anal. 2013, 340487 (2013).

[4] Cui, Y., Ma, W., Sun, Q., Su, X. : New uniqueness results for boundary value problem of fractional differential equation. Nonlinear Anal. : Model. Control 23, 31–39 (2018).

[5] S. Dugowson. Les différentielles métaphysiques : histoire et philosophie de la généralisation de l'ordre de dérivation, Université Paris 13, Villetaneuse, France, 1994.

[6] El-Shahed, M., Positive solution for boundary value problem of nonlinear fraction differential equation. Abstr. Appl. Anal. 2007, art. ID 10368, 8 pages.

[7] C. S. Goodrich, Existence of a positive solution to a class of fractional differential equations, Appl. Math. Lett. 23 (2010), 1050–1055.

[8] D.Guo,V.Lakshmikantham, Nonlinear problems in abstract cones, Academic Press, San Diego, 1988.

[9] Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., Trujillo, J. J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland mathematics Studies, vol. 204. Elsevier, Amsterdam (2006).

[10] V.Lakshmikantham, A. Vatsala, Basic theory of fractional differential equations, Nonlinear Analysis TMA 69 No 8 (2008) 2777-2682.

[11] Lilia ZENKOUFI, Existence of a Positive Solution for a Boundary Value Problem of some Nonlinear Fractional Differential Equation, Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 11 (2020) No. 2 499-514, doi : 10.22075/IJ-NAA.2020.4616.

[12] Pan, Y, Han, Z, Sun, S, Huang, Z, The existence and uniqueness of boundary value problems of fractional differential equations, Math. Sci. 6(7), 1-10 (2012).

[13] I. Podlud.ny, Fractional differential equation, Mathematics in science and engineering, Academic Press, New York, 1999.