République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{r}. Bouchahed Safa

Intitulé

Contrôlabilité faible d'un système différentiel fractionnaire non linéaire

Dirigé par : **Berhail Amel**

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Zankoufi Lili a**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Berhail Amel**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Bouhadjar Slimane**	**MCA**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

الإهداء

أهدي ثمرة جهدي إلى أمين الأمة محمد رسول الله –صلى الله عليه وسلم- الذي كان سببا في وصولي إلى هذه المرحلة بعد الله سبحانه وتعالى.

إليك يا ملاكي في الحياة ...يا فرحتي ونور قلبي...إليك يا من تقف الكلمات عاجزة عن إيفاءها حقها...إلى أول كلمة نطقها لساني وعشقها قلبي , إلى من سهرت الليالي من أجلنا , إلى من وضعت الجنة تحت قدميها, إليك يا من كان دعاؤها سر نجاحي .

إليك يا أعز الناس **"أمي الغالية"** , حفظك الله وأطال في عمرك.

اليك يا صاحب الصدر الدافئ, اليك يا من أحمل اسمه بكل افتخار, اليك يا من به أكبر و أفتخر وعليه أعتمد, اليك يا من أقتدي به في الحياة, اليك يا من تصب عرقا من أجلنا , اليك يا من سقيتنا من شبابك حب العمل والمثابرة.

إليك يا أغلى الناس **"أبي الغالي"** , حفظك الله وأدامك تاجا يتلألأ فوق رؤوسنا.

إلى رفيقي وصديقي ...إلى سندي في الحياة ...إلى أغلى هدية أرسلها رب الوجود...

إلى زوجي الغالي **"عبد الحكيم"** حفظك الله.

إلى من أتقاسم معهم السعادة والحزن ...إلى أغلى وألطف الأخوات

"بثينة" , **"سارة** وأولادها الكتاكيت **أصيل زكريا و توبة"**

إلى **والدان زوجي** ...وإلى من جمعهم مشواري الدراسي خاصة طلبة السنة ثانية ماستر تخصص رياضيات.

إلى كل من وسعهم قلبي ولم تسعهم ورقتي.

شكر وتقدير

بسم الله الرحمان الرحيم

"وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون وستردون إلى عالم الغيب والشهادة فينبئكم بما كنتم تعملون"

(الأية 105 من سورة التوبة)

صدق الله العظيم

اللهم أعوذ بك من قلب لا يخشع وعين لا تدمع وعلم لاينفع نحمد الله تعالى على كل العزيمة والصبر الذي منحني إياها لإتمام هذه المذكرة.

أتقدم بالشكر الجزيل إلى من أهدتني بالنصائح ووجهتني الوجه السديد والتي كانت نعم السند والمعين إلى الأستاذة الفاضلة **"الدكتورة برحايل أمال"** التي أشرفت على هذه المذكرة, وأرجو من المولى عز وجل أن يثيبها خير الثواب.

كما أتقدم بجزيل الشكر إلى جميع أساتذة قسم الرياضيات وإلى كل من ساعدني من قريب أو من بعيد ولو بكلمة تشجيع ساهمت في انجاز هذا العمل.

Table des matières

Résumé

La contrôlabilité des systèmes différentielles joue un rôle important dans l'étude des équations différentielles. L'objectif de ce mémoire est l'étude de la contrôlabilité approchée d'un système différentielle non linéaire fractionnaire au sens caputo. Nous avons utilisé la technique de point fixe de Dhage pour prouver le résultat d'existence de solutions mild du problème puis nous avons étudié la contrôlabilité approchée d'un système différentielle fractionnaire non linéaire. Finalement, nous fournissons un exemple illustrant les résultats obtenus.

Mots clés : *système différentielle fractionnaire non linéaire, Dérivée de Caputo, contrôlabilité approchée, solution mild.*

Abstract

The controllability of differential systems plays an important role in the study of differential equations. The objective of this work is to study the weak controllability of a nonlinear fractional differential system in the caputo sense. We used a Dhage fixed point technique to prove existence results for mild solutions and then we studie the approximate controllability of a nonlinear fractional differential system. Finally, we provide an example to illustrate our results.

Keywords : *nonlinear fractional differential system, Caputo derivative, weak controllability, mild solution.*

Notations et Abréviations

Ω	ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$L^2(\Omega)$	l'espace des fonctions carrée mesurables.
$L^p(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{K}$ telle que
	$\|f\|_p = (\int_\Omega \|f(x)\|^p dx)^{\frac{1}{p}} < \infty$, $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$	l'espace des fonctions mesurables bornées presque partout sur Ω
$C^k(\Omega)$	l'espace des fonctions k fois continument différentiable sur $\Omega, k \geq 0$.
$\mathscr{L}(E, F)$	l'espace des fonctions linéaires et continues définie de E dans F.
$H^1(\Omega)$	l'espace des fonctions $u \in L^2(\Omega)$ et $\partial_i u \in L^2(\Omega)$ au sens de distributions.

0.1 Introduction

La contrôlabilité s'intéresse au comportement de systèmes dynamiques en fonction de leurs paramètres. Elle peut être vue comme une stratégie permettant de sélectionner la bonne entrée d'un système pour que la sortie soit celle désirée. Donc, le but est d'amener le système d'un état initial donnée a un certain état final, en respectant éventuellement certains critères.
On rencontre dans la pratique de très nombreux problèmes de contrôle, dans toutes les disciplines : par exemple garer la voiture, piloter un avion ou un satellite vers une orbite, optimiser les flux d'information dans un réseau, contrôler une épidémie, réaliser une opération chirurgicale au laser, si on peut chauffer ou refroidir une partie du solide, on peut essayer de rendre la répartition de température du solide uniforme plus rapidement que la diffusion naturelle ne le ferait.
Depuis plusieurs décennies de nombreux travaux ont été menés sur les problèmes de contrôlabilité des équations fractionnaires [3], [5], [11], [10].
Dans ce mémoire, nous nous intéressons a l'étude de la contrôlabilité approchée d'un problème fractionnaire ou les dérivées sont prises au sens de Caputo.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire est composé de trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions préliminaires concernant le calcul fractionnaire, la transformée de Laplace et la théorie de semi groupe,..., qui seront bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.
Le deuxième chapitre, est basé sur l'étude de la théorie de contrôle d'un problème distribué, où on a présenter les notions de base de cette théorie : la contrôlabilité, le contrôle optimal,...
Le dernier chapitre est dédié aux résultats d'existence des solutions d'un équation différentielle fractionnaire non linéaire au sens de Caputo où on a utilisé le théorème de point fixe de Dhage, puis on a présenté les conditions nécessaires pour assurer la contrôlabilité approchée de notre problème. Finalement, nous illustrons nos résultats obtenus par un exemple.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats fondamentaux qui sont bénéfique pour les chapitres qui vont suivre.

1.1 Calcul fractionnaire

1.1.1 Fonction Gamma

Une des fonctions de base pour le calcul fractionnaire est la fonction Gamma qui prolonge la fonction factorielle a l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.1 [13] La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

où l'intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe ou la partie réelle est strictement positive.
Cette fonction est strictement décroissante pour $0 < z < 1$, de plus on a

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

1.1.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires sur les intégrales et les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville et de Caputo.

Définition 1.2 : [7] Soit $\Omega = [a, b)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue sur Ω. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par :

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \quad t > 0, \tag{1.2}$$

quand l'intégrale existe.

Définition 1.3 : [7] La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville (notée par ${}^{RL}D$) d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in C^n(\Omega)$ est définie par

$${}^{RL}D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds, \tag{1.3}$$

avec $n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}^*$, quand l'intégrale existe.

Remarque 1.1 : L'approche de Riemann-Liouville a des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville en la borne inférieure.

Malgré le fait que des problèmes aux valeurs initiales avec de telles conditions initiales peuvent être résolus mathématiquement, leurs solutions sont pratiquement inutiles, car il n'y a aucune interprétation physique pour de telle type de conditions initiales. Une certaine solution pour ce problème a été proposée par M. Caputo.

1.1.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.4 : [7] Soit f une fonction de classe $C^n([a, b])$. La dérivée de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ de la fonction f est définie par l'intermédiaire de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville c'est à dire :

$${}^cD_a^\alpha f(t) = {}^{RL}D_a^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k \right], \tag{1.4}$$

avec $n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^*$, quand l'intégrale existe.

Définition 1.5 : [7] La dérivée fractionnaire de caputo d'ordre α d'une fonction f une fonction de classe $C^n([a,b])$ définie par :

$$^{c}D_a^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds,$$

avec $n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

Remarque 1.2 :
Une différence entre la définition de Riemann-Liouville et la définition de Caputo est que la dérivée de Caputo d'une constante est nulle, par contre, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est

$$^{RL}D_a^{\alpha}C=\frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\neq 0.$$

Lemme 1.1 *[7] Soit $f\in C^n([0,T])$, nous avons les propriétés suivantes :*

$$D^{\alpha}I^{\alpha}f(t)=f(t),$$

$$I^{\alpha}D^{\alpha}f(t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0). \tag{1.5}$$

1.2 Transformation de Laplace

Comme dans le cas entier, la transformée de Laplace est utilisée pour la résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaires. C'est une outil qui permet de convertir une équation différentielle en une équation linéaire ou disparaissent les formes dérivées.

Définition 1.6 : La transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ d'un variable réel positif $t\in(0,+\infty)$ est la fonction $F(s)$ définie par

$$F(s)=(\mathscr{L}f)(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt,\quad s\in\mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Propriétés de la transformation de Laplace :
On cite ci-dessous quelques propriétés de la transformée de Laplace.
1- La transformation de Laplace est une application linéaire c'est a dire pour toutes fonctions f et g admettant des transformées de Laplace et pour tous réels $\alpha,\ \beta$:

$$\mathscr{L}\{\alpha f+\beta g\}=\alpha\mathscr{L}\{f\}+\beta\mathscr{L}\{g\}.$$

2- Soient $F(s)$ et $G(s)$ les transformées de Laplace de $f(t)$ et $g(t)$ respectivement alors le produit de convolution $(f*g)$ est donné par :

$$(f*g)(t)=F(s).G(s)=\mathscr{L}\Big\{\int_0^t f(t-z)g(z)dz\Big\}. \tag{1.7}$$

Définition 1.7 [1] L'inverse de la transformation de Laplace de la fonction $g(t)$ est donnée par la formule :

$$(\mathscr{L}^{-1}g)(x)=\mathscr{L}^{-1}\{g(s)\}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{sx}g(s)ds, \tag{1.8}$$

ou γ est choisi de telle façon que l'intégrale converge.

Définition 1.8 [1]
La formule de transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est :

$$\mathscr{L}\big\{D_t^\alpha f(t);s\big\}=\int_0^{+\infty}e^{-st}\big\{D_t^\alpha f(t)\big\}dt,$$

avec

$$\mathscr{L}\big\{D_t^\alpha f(t);s\big\}=s^\alpha F(s)-\sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0),\quad (n-1<\alpha\leq n). \tag{1.9}$$

1.3 Opérateur linéaire

Définition 1.9 : [7] Soit X un espace de Hilbert. Un opérateur linéaire est une application linéaire $A:D(A)\subset X\to X$ où $D(A)$ est appelé le domaine de A. On dit que l'opérateur A est à domaine dense si $\overline{D(A)}=X$.

Définition 1.10 [7] : L'opérateur A est dit borné si

$$\exists M > 0,\ \forall x \in D(A),\ \parallel Ax \parallel_X \leq M \parallel x \parallel_X .$$

On note par $\mathscr{L}(X)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans X muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$\parallel A \parallel = \sup_{\|x\|=1} \parallel Ax \parallel. \tag{1.10}$$

Définition 1.11 :[11] Soit $A : D(A) \to X$ un opérateur linéaire défini sur le domaine $D(A) \subseteq X$. L'opérateur A est dit **fermé** si et seulement si son domaine $D(A)$ est un espace complet par rapport à la norme

$$\parallel x \parallel_{D(A)} = \parallel x \parallel_X + \parallel Ax \parallel_X .$$

Remarque 1.3 : La densité du domaine est nécessaire et suffisante pour l'existence de l'adjoint.

1.3.1 Adjoint d'un opérateur

Définition 1.12 : L'adjoint d'un opérateur $(A, D(A))$ à domaine dense est l'unique opérateur A^* ayant pour domaine

$$D(A^*) = \{x \in X, y \in D(A) \to (x, Ay) \ \textit{est continue}\},$$

et vérifiant

$$\forall\ x \in D(A^*), \forall\ y \in D(A),\ (A^*x, y) = (x, Ay).$$

Remarque 1.4 : L'opérateur adjoint des opérateurs non bornés peut être défini comme un opérateur borné.

1.3.2 Résolvante d'un opérateur

Soit A un opérateur linéaire défini sur un espace de Banach. Pour tout nombre complexe λ tel que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et continu, on définit la résolvante de A par : $R_\lambda = (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}$.
L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles la résolvante existe est appelé l'ensemble résolvant, noté $\rho(A)$.
Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant :

$$\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A).$$

1.4 Semi groupe

Définition 1.13 : [12] Soit X un espace de Hilbert et $\mathscr{L}(X)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans lui même. Une famille d'opérateurs $S(t)_{t\geq 0}$, d'élément de $\mathscr{L}(X)$ est appelée semi-groupe si :
1- $S(0) = I$ (I est l'opérateur d'identité dans $\mathscr{L}(X)$).
2- $S(s+t) = S(s)S(t),\ \forall s, t \geq 0$.
On dira qu'il est fortement continu (C^0-semi groupe) si

$$\lim_{t\to 0^+} \parallel S(t)x - x \parallel_X = 0, \forall x \in X.$$

Générateur infinitésimal d'un semi-groupe

Définition 1.14 [12] : Soit $S(t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe défini sur un espace de Banach X. Posons

$$D(A) = \{x \in X; \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \textit{ existe pour tout } t > 0\}.$$

L'opérateur A de $D(A)$ dans X défini par

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t},$$

est appelée générateur infinitésimal du semi-groupe $S(t)$.

Remarque 1.5 : Soit $(v_k)_{k\geq 1}$ un vecteur propre de A associé a la valeur propre $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ tel que la famille (v_k) forme une base orthonormée de $L^2(\Omega)$, alors le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ est donnée par :

$$S(t)u = \Sigma_{k=1}^{+\infty} e^{\lambda_k t} \langle u, v_k \rangle_{L^2(\Omega)} v_k,\ \forall u \in L^2(\Omega),$$

alors

$$S(t)v_k = e^{\lambda_k t} v_k.$$

Théorème de Hille- Yosida :

Théorème 1.1 *[12] : Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur non borné sur un espace de Banach* X*. Nous avons équivalence entre :*
(a) $(A, D(A))$ *génère un* C_0*-semi -groupe vérifie*

$$\exists M, \omega \in \mathbb{R},\ \|S(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

(b)A est fermé à domaine dense avec

$$\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^* \ et \ \forall \lambda > 0, \ \| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{1}{(\lambda - \omega)^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.5 Théorème de point fixe de Dhage

Le théorème de point fixe de Dhage est important pour les résultats d'existence de la solution de notre problème.

Théorème 1.2 *[2] : Soit Ω un ensemble fermé, borné, convexe non vide d'un espace de Banach X. Soit $\phi : \Omega \to X$ et $\varphi : X \to X$ deux opérateurs continus vérifiant les hypothèses suivantes :*
(a) ϕ est complètement continue.
(b) φ est Lipschitzienne c'est à dire $\exists k_\varphi$ positive tel que

$$\|\varphi z - \varphi y\| \leq k_\varphi \| z - y \| \ \ \forall \ z, y \in X.$$

(c) $z = \phi y \varphi z$ implique $z \in \Omega, \ \forall \ y \in \Omega$,
(d) $M k_\varphi < 1$, où $M = \sup\{\| \phi z \| : z \in \Omega\}$.
Alors l'équation $z = \phi z \varphi z$ admet une solution dans Ω.

1.6 Théorème d'Ascoli-Arzela

Ce théorème caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.3 *[4] : Soit $X = C[a, b]$ un espace normé, muni de la norme $\|x\| = max\{| \ x(t) \ |, t \in [a, b]\}$. Soit F un sous ensemble de X, alors F est relativement compacte si et seulement si :*
1. *F est équicontinue sur X c'est à dire*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \forall t_1, t_2 \in [a, b], \ tel \ que \ \ | \ t_1 - t_2 \ | < \delta \Rightarrow \|x(t_1) - x(t_2)\| < 0.$$

2. *F est uniformément borné c'est à dire $\exists r > 0, \|x\| \leq r, \ \forall x \in F$.*

Remarque 1.6 Soit Ω un ensemble fermé, borné, convexe non vide d'un espace de Banach X. Soit $T : \Omega \to X$ un opérateur continu. Alors :

$$T \ est \ compact \Longrightarrow T \ est \ completement \ continu.$$

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes distribués

La contrôlabilité peut être vue comme une stratégie permettant de sélectionner la bonne entrée d'un système pour que la sortie soit celle désirée.

2.1 Système contrôlé

Du point de vue mathématique, un système du contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle "u", habituellement soumis à des contraintes. Un système contrôlé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} y^{'}(t) = f(y(t), u(t)). \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où $y(t)$ est le vecteur des états, les contrôles u appartiennent à un ensemble de contrôles admissibles U_{ad}. On suppose le champ de vecteur f suffisament régulier, de sorte que pour toute condition initiale y_0 et tout contrôle admissible $u \in U_{ad}$ le système (2.1) admet une unique solution $y(t)$. On notera cette solution par $y_f(t, y_0, u(\cdot))$. Le système (2.1) est dit en boucle ouverte et est représenté par le diagramme suivant

$$u(input) \rightarrow \boxed{y^{'} = f(y,u)} \rightarrow y(output)$$

Parmi les objectifs principaux de la théorie du contrôle qui seront abordés dans ce travail est la notion de la contôlabilité.

2.2 Contrôlabilité

Soit $T > 0$, considérons un système différentiel linéaire défini sur [0, T]

$$\begin{cases} y^{'}(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

où A est une matrice carré $(n \times n)$ appelée matrice d'état et B une matrice $(n \times m)$ appelée matrice de commande ou du contrôle, $y(t)$ est l'état du système et y_0 la condition initiale. La solution de (2.2) est donnée par :

$$y(t, y_0, u(t)) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds. \tag{2.3}$$

Dans le cas des systèmes linéaires en dimension infini, notre système est définie comme suit :

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ suffisamment régulière. Pour $T > 0$ fixé, on défini $Q = \Omega \times [0, T]$, $\sum = \partial\Omega \times]0, T[$. On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}(x, t) = Ay(x, t) + Bu(t) \ Q, \\ y(\zeta, t) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \sum, \\ y(y, 0) = y_0 \qquad\qquad\qquad\qquad \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

où A et B sont des opérateurs de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, X = H^1(\Omega))$ et la fonction u dite "*contrôle*" appartient à l'espace $U = L^2(0, T, \mathbb{R}^n)$. Alors la solution de ce système dépend de la donnée initiale et du second membre et peut s'exprimer par la formule :

$$y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds.$$

tel que S est le semi groupe définit de $[0, +\infty[$ dans $\mathscr{L}(X)$.

La contrôlabilité est la notion de base dans l'analyse des systèmes dynamiques. Il s'agit d'imposer à un système un comportement souhaité, c'est-à-dire d'amener (en temps fini) un système d'un état initial arbitraire à un état désiré au moyen d'un contrôle.

On peut définir plusieurs notions de contrôlabilité. Les plus importantes sont la contrôlabilité exacte, la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité à zéro.

Définition 2.1 :[6] On dit que le système (2.1) (resp.(2.2)) est exactement contrôlable en temps T si pour tous les états y_0, y_1 dans l'espace d'état, il existe un contrôle admissible u tel que :

$$y_1 = y(\mathrm{T}, y_0, u).$$

Définition 2.2 :[6] Soit $T > 0$. Le système de contrôle (2.2) est approximativement contrôlable en temps T si pour tout y_0, y_1, et $\forall \varepsilon > 0$, il existe un contrôle u tel que la solution du système vérifie

$$\| y(\mathrm{T}, y_0, u) - y_1 \| \leq \varepsilon.$$

Remarque :
1- Dans le cas où $y_1 = 0$, on dit que le système est " nulle-contrôlable" ou on a une contrôlabilité à zéro.
2- La contrôlabilité exacte implique la contrôlabilité approchée et la contrôlabilité à zéro, et donc la plus forte des trois notions.

Exemple 2.1 : Le fait de tourner le volant ou non d'une automobile ne va pas affecter la vitesse (la vitesse n'est pas contrôlable par le volant), alors que le fait décélérer ne va pas influencer la direction de la voiture.

2.2.1 Critère de Contrôlabilité de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire de dimension fini due à Kalman.

Définition 2.3 : **Matrice de Contrôlabilité**
La matrice

$$M = (B, AB, \cdots, A^{n-1}B),$$

dite matrice de contrôlabilité de Kalman.

Théorème 2.1 *[16] Le système linéaire (2.2) est contrôlable si et seulement si :*

$$rang M = n.$$

On dit aussi que la paire (A, B) est contrôlable.

Remarque :
La matrice M est appelée " Matrice de Kalman " et la condition est appelée " Condition de Kalman". Cette condition ne dépend ni de temps ni de la donnée initiale.

2.2.2 Caractérisation de la Contrôlabilité

La solution (2.3) peut s'écrire pour tout $t \in [0, T]$ sous la forme :

$$y(t, y_0, u) = Y_0 + L_t u,$$

où $L_t u$ est l'opérateur linéaire borné défini par :

$$L_t : \begin{cases} L^2(0, T, U) \to \mathbb{R}^n \\ u \to \displaystyle\int_0^t e^{(t-s)A} Bu(s)ds, \end{cases}$$

et

$$Y_0 = e^{tA} y_0.$$

Pour simplifier les calculs, prenons $Y_0 = 0$

Proposition 2.1 *: [16] Le système (2.2) est contrôlable au temps $T > 0$ si et seulement si l'opérateur L_T est surjectif i.e*

$$\forall y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n, \exists u \in U_{ad},\ y(y_0, u)(T) = y_1.$$

2.2.3 Gramien de contrôlabilité

Avec la définition de l'opérateur L_t on considère l'adjoint

$$L_t^* : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to L^2(0, T, U) \\ z \to L_t^*(z) = B^* e^{A^*(T-t)} z \end{cases}$$

tel que

$$(L_t^*(z), u) = (z, L_t u), \forall u \in L^2(0, T; U), \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

On introduit la matrice de contrôlabilité dit "Gramien de contrôlabilité " par

$$W_T = L_t L_t^* = \int_0^{\mathrm{T}} e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds,$$

tel que A^* et B^* désignent les matrices transposées des matrices A et B. On a la caractérisation suivante :

Corollaire 2.1 *[6] Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *La paire (A, B) est contrôlable au temps $T > 0$.*
2. *L'opérateur L_t est surjectif.*
3. *L'opérateur L_t^* est injectif.*
4. *La matrice W_T est inversible*

Remarque 2.1 :
La matrice de contrôlabilité W est positive

$$\langle W_T x, x \rangle = \int_0^{\mathrm{T}} |B^t e^{sA^t} x|^2 ds = \|L_T^* x\|^2 \geq 0.$$

2.3 Contrôle Optimal

Dans le cas où le système est contrôlable, il existe une infinité de contrôles. Il est intéressant de construire un qui "consomme le moins d'énergie".
La fonctionnelle d'énergie que l'on choisit ici est

$$J(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 \, ds.$$

On note

$$U_{ad}(y_0, y_1) = \{u \in U, y(T, y_0, u) = y_1\}.$$

Donc, on cherche la solution du problème d'optimisation avec contrainte suivant :

$$(P)\ \{minJ(u), u \in U_{ad}\} \tag{2.5}$$

Deux questions se posent alors :

— Prouver l'existence d'un contrôle optimal.

— Trouver un moyen de le calculer c'est à dire décrire une méthode constructive pour calculer le contrôle.

Le théorème suivant définit l'unique contrôle u qui minimise la fonctionnelle J sur l'ensemble $U_{ad}(y_0, y_1)$.

Théorème 2.2 *[16] Le contrôle u qui transfère y_0 en $y_1 = y(T; y_0; u)$ est donné par :*

$$u(s) = B^* e^{(\mathrm{T}-s)A^*} W_{\mathrm{T}}^{-1}(y_1 - e^{\mathrm{T}A} y_0).$$

Pour la preuve, en utilisant la formule (2.3).

Chapitre 3

Contrôlabilité approchée d'un problème fractionnaire non linéaire

Dans ce chapitre, on s'intéresse a l'étude de la contrôlabilité approchée d'un problème fractionnaire (au sens de Caputo) non linéaire. On va d'abord examiner l'existence des solutions, puis les conditions suffisantes pour que notre système soit approximativement contrôlable.

3.1 Position du problème

Considérons l'équation fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} ({}^cD_0^\alpha + A)z(t) = \psi(t, z(t))I_0^{1-\alpha}(Bu(t) + f(t, z(t))), \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$t \in I = [0, b]$, où :

• ${}^cD_0^\alpha$ est la dérivée de caputo d'ordre α tel que : $0 < \alpha < 1$.

• Xet U deux espaces de Hilbert.

• $A : D(A) \subseteq X \to X$ est un opérateur linéaire.

• $B : U \to X$ est un opérateur linéaire borné et $u \in L^2(I, U)$.

• f, ψ :$I \times X \to X$ sont des fonctions données telle que ψ ne s'annule pas sur $I \times X$.

3.2 Solution intégrale

Soit $A : D(A) \to X$ un opérateur linéaire défini sur le sous espace $D(A) \subseteq X$. Dans ce qui suit, nous présentons l'équation intégrale associée au problème (3.1).

Théorème 3.1 *: Le système fractionnaire linéaire :*

$$\begin{cases} {}^cD_0^\alpha z(t) = -Az(t). \\ z(0) = z_0 \in D(A). \end{cases} \tag{3.2}$$

a une solution intégrale donné par :

$$z(t) = z_0 - \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(a)} Az(s)ds \in D(A), \quad t \in I.$$

Preuve. On a :

$${}^cD_0^\alpha z(t) = -Az(t).$$

En prenant l'intégrale fractionnaire de Caputo d'ordre α de cette équation et utilisant le lemme (1.1), on obtient

$$I^\alpha[{}^cD_0^\alpha z(t)] = z(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} c^{(k)}(0),$$

et comme $n = 1$, on arrive a

$$z(t) - c_0 = -I^\alpha[Az(t)].$$

De plus, on a

$$z(0) = c_0 - 0 = z_0 \Rightarrow c_0 = z_0.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

3.3 Opérateur α-résolvante

Définition 3.1 [7] :
Soit A un opérateur fermé et dense, défini sur$X$. La famille $S_\alpha(t)_{t\geq 0}$ des opérateurs linéaires bornées sur X est appelé opérateur de solutions (ou α-résolvant) engendré par A si les conditions suivantes sont vérifiées :

(S_1) $S_\alpha(t)$ est fortement continue sur $\mathbb{R}_+$ et $S_\alpha(0) = I$.(opérateur identité).
(S_2) $S_\alpha(t)D(A) \subseteq D(A)$ et

$$AS_\alpha(t)z = S_\alpha(t)Az, \ \forall z \in D(A), \ t \geq 0.$$

(S_3) $S_\alpha(t)z$ est une solution de l'équation intégrale.

Définition 3.2 [7] :
Un opérateur de solution $S_\alpha(t)$ est dit **compact** si pour tout $t > 0$, $S_\alpha(t)$ est un opérateur compact.
Soit $S_\alpha(t)$ une solution de système (3.2), utilisant (S_3), en déduit que :

$$Az = \Gamma(\alpha + 1) \lim_{t \to 0^+} \frac{z - S_\alpha(t)z}{t^\alpha},$$

telle que la limite existe. Nous appelons A le générateur infinitésimale de $S_\alpha(t)$ ou simplement on dit que A engendre l'opérateur solution $S_\alpha(t)$.

Définition 3.3 : [7] Soit $A : D(A) \subseteq X \to X$ un opérateur linéaire fermé. On dit que A est un opérateur sectoriel de type (M, θ, α, μ) si

$$\exists \mu \leq 0, \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \ et \ M > 0,$$

tel que l'opérateur S_α de A existe dans tout le secteur :

$$Y = \{\lambda \in \mathbb{C} : Re(\lambda) > (-\mu)^{\frac{1}{\alpha}}; \mid \arg(\lambda) \mid < \theta\} \subseteq \rho(A),$$

et

$$\| \ R(\lambda^\alpha, A) \| \leq \frac{M}{\mid \lambda^{\alpha+\mu} \mid}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

On suppose que A est un opérateur sectoriel de type (M, θ, α, μ) qui génère l'opérateur de solution $S_\alpha(t)$. Dans ce cas, nous pouvons écrire l'opérateur de solution du système (3.2) comme suit :

$$S_\alpha(t) = \mathscr{L}^{-1}(\lambda^{\alpha-1}R(\lambda^\alpha, A)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \lambda^{\alpha-1} R(\lambda^\alpha, A) d\lambda, \tag{3.3}$$

avec $C \subset Y$.

Nous présentons, maintenant, l'équation intégrale associée au problème linéaire contrôlé.

Lemme 3.1 *: Le système linéaire*

$$\begin{cases} ({}^cD_0^\alpha + A)z(t) = \psi(t)I_0^{1-\alpha}[Bu(t) + f(t)]. \\ z(0) = z_0. \end{cases} \tag{3.4}$$

a une solution intégrale donnée par :

$$z(t) = \psi(t)\bigg(S_\alpha(t)z_0(\psi(0))^{-1} + \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s))ds\bigg). \tag{3.5}$$

Preuve. L'équation

$${}^cD_0^\alpha z(t) + Az(t) = \psi(t)I_0^{1-\alpha}[Bu(t) + f(t)], \tag{3.6}$$

est équivalent à

$${}^cD_0^\alpha\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) + A\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) = I_0^{1-\alpha}[Bu(t) + f(t)].$$

Appliquant la transformation de Laplace,

$$\mathscr{L}\bigg[{}^cD_0^\alpha\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg)\bigg] + \mathscr{L}\bigg[A\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg)\bigg] = \mathscr{L}\bigg[I^{1-\alpha}[Bu(t) + f(t)]\bigg], \tag{3.7}$$

on arrive à

$$\lambda^\alpha\mathscr{L}\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) - \lambda^{\alpha-1}\bigg(\frac{z(0)}{\psi(0)}\bigg) + A\mathscr{L}\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) = \lambda^{\alpha-1}\mathscr{L}[Bu(t) + f(t)], \tag{3.8}$$

ce qui implique

$$(\lambda^\alpha + A)\mathscr{L}\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) = \lambda^{\alpha-1}\bigg(\frac{z(0)}{\psi(0)}\bigg) + \lambda^{\alpha-1}\mathscr{L}[Bu(t) + f(t)].$$

On déduit que

$$\mathscr{L}\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) = (\lambda^\alpha + A)^{-1}\lambda^{\alpha-1}\bigg(\frac{z(0)}{\psi(0)}\bigg) + (\lambda^\alpha + A)^{-1}\lambda^{\alpha-1}\mathscr{L}[Bu(t) + f(t)], \tag{3.9}$$

donc

$$\mathscr{L}\bigg(\frac{z(t)}{\psi(t)}\bigg) = (\lambda^\alpha+A)^{-1}\lambda^{\alpha-1}z_0(\psi(0))^{-1}+(\lambda^\alpha+A)^{-1}\lambda^{\alpha-1}\mathscr{L}[Bu(t) + f(t)]. \tag{3.10}$$

Appliquons la transformation de Laplace inverse, on trouve

$$\frac{z(t)}{\psi(t)} = \mathscr{L}^{-1}\bigg((\lambda^\alpha+A)^{-1}\lambda^{\alpha-1}z_0(\psi(0))^{-1}\bigg)+\mathscr{L}^{-1}\bigg((\lambda^\alpha+A)^{-1}\lambda^{\alpha-1}\mathscr{L}[Bu(t) + f(t)]\bigg).$$

Utilisant la formule (3.3) et l'expression (1.7), on obtient

$$\frac{z(t)}{\psi(t)} = S_\alpha(t)z_0(\psi(0))^{-1} + \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s))ds.$$

D'où le résultat. ■

3.3. Opérateur α-résolvante

3.4 Contrôlabilité d'un système fractionnaire

Définition 3.4 Le système (3.1) est dit exactement contrôlable sur I si pour tout état final désiré $z_b \in X$ il existe un contrôle $u \in L^2(I, U)$ telle que z vérifie :

$$z(b, u) = z_b. \tag{3.11}$$

Définition 3.5 Le système (3.1) est dit approximativement contrôlable sur I si pour tout état final désiré $z_b \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe une commande (contrôle) $u \in L^2(I, U)$ telle que z vérifie :

$$\|z(b, u) - z_b\|_X < \varepsilon. \tag{3.12}$$

Remarque 3.1 Le système (3.1) est dit approximativement contrôlable sur I si l'ensemble :

$$H = \{z(b, u) \in X : u \in L^2(I, U)\}, \tag{3.13}$$

dense dans X.

On définit l'opérateur de contrôlabilité $L_t : L^2(I, U) \longrightarrow X$ par :

$$L_t u = \int_0^t S_\alpha(t - s) B u(s) ds, \ t \in I, \tag{3.14}$$

c'est un opérateur linéaire borné défini sur $L^2(I, U)$.
L'opérateur adjoint de L_b est donné par :

$$L_b^* : X \longrightarrow L^2(I, U).$$

$$L_b^* = B^* S_\alpha^*(b - .).$$

Le Grammien de contrôlabilité $W : X \longrightarrow X$ est défini par :

$$W = L_b L_b^* = \int_0^b S_\alpha(b - s) B B^* S_\alpha^*(b - s) ds.$$

La fonction de contrôle u s'écrit sous la forme [11]

$$u(t) = B^* S_\alpha^*(b - t)(\lambda I + W)^{-1} \Upsilon z, t \in I,$$

où :

$$\Upsilon z = z_b(\psi(b, z(b)))^{-1} - S_\alpha(b) z_0(\psi(0, z_0))^{-1} - \int_0^b S_\alpha(b-s) f(s, z(s)) ds. \tag{3.15}$$

3.4.1 Résultats d'existence

Définition 3.6 : Une fonction $z \in C(I, X)$ est dite solution mild du système (3.1) si, pour tout $t \in I$:

$$z(t) = \psi(t, z(t))\Big(S_\alpha(t)z_0(\psi(0, z_0))^{-1} + \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s, z(s)))ds\Big). \tag{3.16}$$

Pour étudier l'existence des solutions du problème (3.1), nous avons besoin des hypothèses suivantes :
(H_1) S_α est un opérateur analytique compact telle que :

$$M_s = \sup\{\|S_\alpha(t)\| : t \in I\} < \infty. \tag{3.17}$$

(H_2) La fonction $f : I \times X \to X$ est continu et il existe une constante positive k_f telle que :

$$\|f(t, z)\| < k_f, \ pour\ tout\ (t, z) \in I \times X. \tag{3.18}$$

(H_3) La fonction $\psi : I \times X \to X$ est continu et :

$$\exists \tau \in L^1(I, \mathbb{R}_+) : \|\psi(t, z) - \psi(t, y)\| < \|\tau\|_{L^1}\|z - y\|, \tag{3.19}$$

pour tout $(t, z) \in I \times X$, et $\exists w \succ 0$, tel que $w = sup \parallel \psi(t, 0) \parallel,\ t \in I.$
(H_4) L'opérateur $B : U \to X$ est linéaire borné et il existe $N > 0$ telle que :

$$\|B\| = N. \tag{3.20}$$

(H_5) On pose

$$M = (N^2M_s^2/\lambda)\Big(\|z_b(\psi(b, z(b)))^{-1}\| + M_s\|z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\| + M_sk_fb\Big)$$
$$+M_s\|z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\| + M_s^2k_fb,$$

telle que : $M\|\tau\|_{L^1} < 1$.
(H_6) On a

$$\|(\lambda I + W)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

Le résultat d'existence est prouvé à l'aide du théorème de point fixe de Dhage.

Théorème 3.2 *Supposons que les conditions $(H_1)-(H_6)$ sont vérifiées, alors le système (3.1) a une solution mild sur I.*

Preuve. Pour la démonstration, on utilise le théorème de point fixe de Dhage. On pose

$$\varphi(z) = \psi(t, z(t)), \tag{3.21}$$

et

$$\phi(z) = S_\alpha(t)z_0(\psi(0, z_0))^{-1} + \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s, z(s)))ds. \tag{3.22}$$

Pour montrer que ϕ est complètement continus, on montre que ϕ est compact.

Première étape :

Nous prouvons la continuité des opérateurs φ et ϕ.

Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de $C(I, X)$ telle que :

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} z_n = z. \tag{3.23}$$

D'après les hypothèses (H_2) et (H_3), on a

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} f(t, z_n(t)) = f(t, z(t)), \tag{3.24}$$

et

$$\lim_{n\longrightarrow\ +\infty} \psi(t, z_n(t)) = \psi(t, z(t)),\ \textit{pour tout } t \in I. \tag{3.25}$$

De (3.25) ψ est continu et donc φ est continu.

Montrons que ϕ continue. On a

$$\begin{aligned} \|\phi z_n(t) - \phi z(t)\| &= \|S_\alpha(t)z_0(\psi(0, z_0))^{-1} \\ &+ \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu_n(s) + f(s, z_n(s)))ds - S_\alpha(t)z_0(\psi(0, z_0))^{-1} \\ &- \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s, z(s)))ds\|, \end{aligned} \tag{3.26}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\phi z_n(t) - \phi z(t)\| &\leq \int_0^t \|S_\alpha(t-s)Bu_n(s) + S_\alpha(t-s)f(s, z_n(s))\|ds \\ &+ \int_0^t \|S_\alpha(t-s)Bu(s) + S_\alpha(t-s)f(s, z(s))\|ds \\ &\leq \|S_\alpha(t-s)\|\|B\| \int_0^b \|u_n(s)\| \\ &+ \int_0^t \|S_\alpha(t-s)f(s, z_n(s))\|ds + \|S_\alpha(t-s)\|\|B\| \int_0^b \|u(s)\| \\ &+ \int_0^t \|S_\alpha(t-s)f(s, z(s))\|ds. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Utilisant les hypothèses (H_1) et (H_4), on déduit que

$$
\begin{aligned}
\|\phi z_n(t)-\phi z(t)\| &\leq M_s N\int_0^b \|u_n(s)-u(s)\|ds + M_s\int_0^b \|f(s,z_n(s))-f(s,z(s))\|ds \\
&\leq M_s N\int_0^b \Big(\|B^*\|\|S_\alpha^*(b-s)\|\|(\lambda I+W)^{-1}\|\|\Upsilon z_n\| \\
&- \|B\|\|S_\alpha(b-s)\|\|(\lambda I+W)^{-1}\|\|\Upsilon z\|)\Big)ds \\
&+ M_s\int_0^b \|f(s,z_n(s))-f(s,z(s))\|ds.
\end{aligned}
$$

Comme

$$\|B^*\| = \|B\| \; et \; \|S_\alpha^*(b-s)\| = \|S_\alpha(b-s)\|.$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\|\phi z_n(t)-\phi z(t)\| &\leq M_s N\Big[(\|B\|\|S_\alpha(b-s)\|\|(\lambda I+W)^{-1}\|)\int_0^b \|\Upsilon z_n-\Upsilon z\|ds\Big] \\
&+ M_s\int_0^b \|f(s,z_n(s))-f(s,z(s))\|ds \\
&\leq \frac{M_s^2N^2}{\lambda}\int_0^b \|\Upsilon z_n-\Upsilon z\|ds + M_s\int_0^b \|f(s,z_n(s))-f(s,z(s))\|ds.
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\|\Upsilon z_n-\Upsilon z\| &= \| \, z_b(\psi(b,z_n(b)))^{-1} - S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} \\
&- \int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z_n(s))ds - z_b(\psi(b,z(b)))^{-1} \\
&+ S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} - \int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z(s))ds \, \|,
\end{aligned}
$$

il vient

$$
\begin{aligned}
\|\Upsilon z_n-\Upsilon z\| &\leq \|z_b\|\|(\psi(b,z_n(b)))^{-1}-(\psi(b,z(b)))^{-1}\| \\
&+ \int_0^b \|S_\alpha(b-s)f(s,z_n(s))-S_\alpha(b-s)f(s,z(s))\|ds \\
&\leq \|z_b\|\|(\psi(b,z_n(b)))^{-1}-(\psi(b,z(b)))^{-1}\| \\
&+ \|S_\alpha(t)\|\int_0^b \|f(s,z_n(s))-f(s,z(s))\|ds.
\end{aligned}
$$

Utilisant l'hypothèse $(H1)$, on trouve

$$\begin{aligned} \|\Upsilon z_n - \Upsilon z\| &\leq \|z_b\| \|(\psi(b, z_n(b)))^{-1} - (\psi(b, z(b)))^{-1}\| \\ &+ M_s \int_0^b \|f(s, z_n(s)) - f(s, z(s))\| ds. \end{aligned} \tag{3.28}$$

On a ψ continu, et

$$\exists \delta > 0, \ \forall n \in \mathbb{N} : |\psi(b, z_n(b))| \leq \delta \Rightarrow |\psi(b, z_n(b))^{-1}| \geq \delta. \tag{3.29}$$

De plus, on a

$$\|f\| \leq k_f, \tag{3.30}$$

et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(t, z_n(t)) = f(t, z(t)), \tag{3.31}$$

Grâce au théorème de la convergence Dominante (TCD), on arrive a

$$\int_0^b \|f(s, z_n(s)) - f(s, z(s))\| \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} 0, \tag{3.32}$$

d'où :

$$\|\Upsilon z_n - \Upsilon z\| \xrightarrow{n \to +\infty} 0. \tag{3.33}$$

Comme

$$\|\phi z_n(t) - \phi z(t)\| \leq \frac{M_s^2 N^2}{\lambda} \int_0^b \|\Upsilon z_n - \Upsilon z\| ds + M_s \int_0^b \|f(s, z_n(s)) - f(s, z(s))\| ds.$$

Utilisant le théorème du TCD (pour la deuxième fois), il résulte que

$$\|\phi z_n(t) - \phi z(t)\| \xrightarrow{n \to +\infty} 0, \tag{3.34}$$

donc les opérateurs ϕ et φ sont continus.
De plus, l'opérateur :

$$\int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s, z(s))ds, \tag{3.35}$$

est compact [3]. D'après le théorème d'Ascoli Arzela, l'opérateur ϕ est compact, d'où ϕ est complètement continus.

Deuxième étape :

D'après l'hypothèse (H_3), l'opérateur φ est lipschitzienne où la constante de lipschitzienne est $k_\varphi = \|\tau\|_{L^1}$.

On montre que : $z = \phi y \varphi z$ implique $y \in \Lambda_r$, $\forall\ z \in \Lambda_r$, telle que :

$$\Lambda_r = \{z \in C(I, X) : \|z\| \leq r\}. \tag{3.36}$$

est un ensemble borné fermé et convexe et r un nombre réel positive fixé.

On a : $z = \phi y \varphi z$ pour tous $z \in \Lambda_r$, alors

$$\|z\| = \|\phi y \varphi z\| \leq \|\phi y\| \|\varphi z\|.$$

On montre que ϕ de $C(I, X)$ est borné.

Pour tout $z \in C(I, X)$, on a

$$\|\phi z\| = \|S_\alpha(t) z_0(\psi(0, z_0))^{-1} + \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s) + f(s, z(s))ds\|. \tag{3.37}$$

$$\|\phi z\| \leq \underbrace{\|S_\alpha(t) z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\|} + \underbrace{\int_0^t \|S_\alpha(t-s)Bu(s)\|ds} + \underbrace{\int_0^t \|S_\alpha(t-s)f(s, z(s))\|ds}.$$

Donc

$$\|\phi z\| \leq \beta + \gamma + \sigma, \tag{3.38}$$

telle que :

$$\beta = \|S_\alpha z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\| \leq M_s \|z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\|.$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \int_0^t \|S_\alpha(t-s)Bu(s)\|ds \\
&\leq M_s N \int_0^b \|u(s)\|ds = M_s N \int_0^b \|B^*\| \|S_\alpha^*(b-s)\| \|(\lambda I + W)^{-1}\| \|\Upsilon z\|ds \\
&= \frac{M_s^2 N^2}{\lambda} \int_0^b \|\Upsilon z\|ds = \frac{M_s^2 N^2}{\lambda} (\|z_b(\psi(b, z(b))^{-1}\|) + M_s \|z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\| \\
&+ \|S_\alpha(b-s)\| \int_0^b \|f(s, z(s))\|ds \\
&= \frac{M_s^2 N^2}{\lambda} \Big(\|z_b(\psi(b, z(b))^{-1})\| + M_s \|z_0(\psi(0, z_0))^{-1}\| + M_s k_f b \Big),
\end{aligned}$$

et

$$\sigma = \int_0^t \|S_\alpha(t-s)f(s,z(s))\|ds = M_s k_f b.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|\phi z\| &< M_s\|z_0(\psi(0,z_0))^{-1}\| \\ &+ \frac{M_s^2N^2}{\lambda}\Bigg(\|z_b(\psi(b,z(b))^{-1})\| + M_s\|z_0(\psi(0,z_0))^{-1}\| + M_s k_f b\Bigg) + M_s k_f b. \end{aligned} \tag{3.39}$$

D'après (H_5), on trouve

$$\|\phi z\| < M. \tag{3.40}$$

Il suit que,

$$\|z\| \leq M\|\varphi z\|.$$

Comme :

$$\varphi z(t) = \psi(t, z(t)). \tag{3.41}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \|z\| \leq M\|\psi(t,z(t))\| &\leq M(\|\psi(t,z) - \psi(t,0) + \psi(t,0)\|) \\ &\leq M(\|\psi(t,z) - \psi(t,0)\| + \|\psi(t,0)\|). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Utilisant l'hypothèse (H_3), et $\omega = \sup\|\psi(t,0)\|$ on trouve

$$\begin{aligned} \|z\| &\leq M(\|\tau\|_{L^1}\|z\| + \omega) \\ &\leq M\|\tau\|_{L^1}\|z\| + M\omega \\ &\leq \frac{\omega M}{1 - M\|\tau\|_{L^1}}. \end{aligned}$$

Choisissant r suffisamment grand telle que

$$r > M \max\left(1, \frac{\omega}{1 - M\|\tau\|_{L^1}}\right),$$

on s'assure que $z \in \Lambda_r$.
Finalement, on a : $k_\varphi = \|\tau\|_{L^1}$, et d'après l'hypothèse (H_5) :

$$M\|\tau\|_{L^1} < 1,\ avec\ : M = \sup\{\|\phi z\| : z \in \Lambda_r\}.$$

Alors :

$$Mk_\varphi < 1.$$

Toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Dhage sont vérifiées, donc $\exists z \in \Lambda_r$ tel que $z = \phi z \varphi z$ est une solution du système (3.1) c'est à dire le problème (3.1) a au moins une solution. ■

3.4. Contrôlabilité d'un système fractionnaire

3.4.2 Contrôlabilité approchée du problème

Pour montrer la contrôlabilité approximative du notre problème, nous introduisons les conditions supplémentaires suivantes :
(H_7) $\lambda(\lambda I+W)^{-1} \longrightarrow 0$ si $\lambda \longrightarrow 0^+$ pour la topologie forte.
(H_8) La suite $\{\psi(.,z_\lambda(.)):\lambda>0\}$ est bornée dans $L^2(I,X)$.

Théorème 3.3 *Supposons que les hypothèses* (H_1)*-*(H_8) *sont vérifiées. Alors le système fractionnaire (3.1) est approximativement contrôlable sur* I*.*

Preuve. D'après le théorème (3.2), il existe une solution mild $z_\lambda \in C(I,X)$ donnée par :

$$\begin{aligned} z_\lambda(t) = \psi(t,z_\lambda(t))\Bigg(S_\alpha(t)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} \\ + \int_0^t S_\alpha(t-s)(Bu(s)+f(s,z_\lambda(s))ds\Bigg), \end{aligned} \tag{3.43}$$

avec

$$u(t)=B^*S_\alpha^*(b-t)(\lambda I+W)^{-1}\Upsilon z, t\in I, \tag{3.44}$$

où

$$\Upsilon z = z_b(\psi(b,z(b)))^{-1} - S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} - \int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z(s))ds. \tag{3.45}$$

On pose $t=b$, on obtient

$$\begin{aligned} z_\lambda(b) &= \psi(b,z_\lambda(b))\Bigg(S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} \\ &+ \int_0^b S_\alpha(b-s)(Bu(s)+f(s,z_\lambda(s)))ds\Bigg) \\ &= \psi(b,z_\lambda(b))\Bigg[S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} + (\lambda I+W-\lambda I)(\lambda I+W)^{-1} \\ &\times \Bigg(z_b(\psi(b,z_\lambda(b)))^{-1} - S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} \\ &- \int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z_\lambda(s))ds\Bigg) + \int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z_\lambda(s))ds\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Donc

$$\begin{aligned} z_\lambda(b) - z_b &= -\psi(b, z_\lambda(b))\lambda(\lambda I + W)^{-1} \\ &\times \Bigg(z_b(\psi(b, z_\lambda(b)))^{-1} - S_\alpha(b) z_0(\psi(0, z_0))^{-1} \\ &- \int_0^b S_\alpha(b-s) f(s, z_\lambda(s)) ds \Bigg). \end{aligned} \tag{3.47}$$

D'après l'hypothèse (H_2), on a :

$$\|f(t, z(t))\| < k_f, \forall (t, z) \in I \times X. \tag{3.48}$$

Alors

$$\int_0^b \|f(t, z_\lambda(t))\|^2 ds \quad < \quad k_f^2 b. \tag{3.49}$$

Cela implique que la suite $\{f(., z_\lambda(b)) : \lambda > 0\}$ est borné dans l'espace de Hilbert $L^2(I, X)$, donc ; on peut extraire une sous-suite convergente notée encore $\{f(., z_\lambda(b)) : \lambda > 0\}$ de $L^2(I, X)$ telle que

$$\{f(., z_\lambda(b)) : \lambda > 0\} \xrightarrow{\lambda \to 0} w \ faiblement \ dans \ L^2(I, X).$$

Et d'après l'hypothèse (H_8), on peut extraire une sous-suite convergente, notée encore $\{\psi(., z_\lambda(b)) : \lambda > 0\}$ de $L^2(I, X)$ telle que

$$\{\psi(., z_\lambda(b)) : \lambda > 0\} \xrightarrow{\lambda \to 0} v \ faiblement \ dans \ L^2(I, X).$$

On pose

$$\mu = z_b(v(b))^{-1} - S_\alpha(b) z_0(\psi(0, z_0))^{-1} - \int_0^b S_\alpha(b-s) w(s) ds. \tag{3.50}$$

telle que :

$$\psi(b, z_\lambda(b)) = v(b) \ et \ f(b, z_\lambda(b)) = w(b). \tag{3.51}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \| \quad & (z_b(\psi(b, z_\lambda(b)))^{-1} - S_\alpha(b) z_0(\psi(0, z_0))^{-1} - \int_0^b S_\alpha(b-s) f(s, z_\lambda(s)) ds - \mu\| \\ \leq \quad & \|z_b\| \|\psi(b, z_\lambda(b)))^{-1} - (v(b))^{-1}\| + \|\int_0^b S_\alpha(b-s)[f(s, z_\lambda(s)) - w(s)] ds\|. \end{aligned}$$

Utilisant la compacité de $S_\alpha(t)$, on conclut que l'application

$$\begin{aligned} L^2(I,X) &\longrightarrow L^2(I,X) \\ z(t) &\longrightarrow \int_0^b S_\alpha(t-s)z(s)ds; \end{aligned} \tag{3.52}$$

est compact, donc :

$$\|(\psi(b,z_\lambda(b)))^{-1}-(v(b))^{-1}\|\|z_b\|+\|\int_0^b S_\alpha(b-s)[f(s,z_\lambda(s))-w(s)]ds\| \xrightarrow{\lambda\to 0^+} 0.$$

Cela implique que :

$$\begin{aligned} \| \quad & (z_b(\psi(b,z_\lambda(b)))^{-1}-S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1} \\ - \quad & \int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z_\lambda(s))ds-\mu\| \xrightarrow{\lambda\to 0^+} 0, \end{aligned} \tag{3.53}$$

Utilisant l'inégalité (3.47) et l'hypothèse (H_5), on obtient que :

$$\begin{aligned} \|z_\lambda(b)-z_b\| \ &\leq \ \|\psi(b,z_\lambda(b))\lambda R(\lambda,W)\| \\ &\times \ \left\|(z_b(\psi(b,z_\lambda(b)))^{-1}-S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1}-\int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z_\lambda(s))ds\right\| \\ &\leq \ \|\psi(b,z_\lambda(b))\|.\|\lambda R(\lambda,W)\|) \\ &\times \ \left\|(z_b(\psi(b,z_\lambda(b)))^{-1}-S_\alpha(b)z_0(\psi(0,z_0))^{-1}-\int_0^b S_\alpha(b-s)f(s,z_\lambda(s))ds-\mu\right\| \\ &+ \ \|\psi(b,z_\lambda(b))\|\|\lambda R(\lambda,W)\mu\|. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Par conséquent

$$\|z_\lambda(b)-z_b\| \longrightarrow 0 \ si \ \lambda \longrightarrow 0^+,$$

ce qui implique que le système fractionnaire (3.1) est approximativement contrôlable sur I.

■

3.5 Exemple

Considérons le système du contrôle fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}^cD_0^{0.8}\frac{z(t,x)}{1+Lt^2 sinz(t,x)} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{z(t,x)}{1+Lt^2 sinz(t,x)}\right) + I_0^{1-\alpha}\left(u(t,z(t,x)) + \frac{|z(t,x)|}{1+|z(t,x)|}\right), \\ z(t,0) = z(t,\pi) = 0, z(0,x) = z_0(x) \end{cases} \tag{3.55}$$

où $x \in (0,\pi),\ t \in I = [0,1]$. Soit $X = U = L^2[0,\pi]$ et $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, avec

$$D(A) = \{\beta \in X : \beta\ et\ \beta' \text{sont absolument continues}, \beta'' \in X,\ \beta(0) = \beta(\pi) = 0\}.$$

Alors A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, s'écrit sous la forme

$$S(t)\beta = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi^2 t}\langle \beta, e_n\rangle e_n, t > 0, \beta \in X, \tag{3.56}$$

où

$$e_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sin nx,\ n = 1, 2, ...$$

est la base orthonormale de X.

De plus, A est aussi un générateur de l' opérateur analytique compact $S_\alpha(t)$, donné par (voir [11])

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty S(st^\alpha)\vartheta_\alpha(s)ds, t > 0, \tag{3.57}$$

où

$$\vartheta_\alpha(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{n!\Gamma(1-\alpha-n\alpha)},\ 0 < \alpha < 1. \tag{3.58}$$

On pose :

$$\begin{cases} z(t)x = z(t,x) \\ (Bu)(t)(x) = u(t,x) \\ \psi(t,z(t))(x) = 1 + Lt^2\sin z(t,x) \\ \\ f(t,z(t))(x) = \frac{|z(t,x)|}{(1+|z(t,x)|)} \end{cases} \tag{3.59}$$

Alors le système (3.55) est équivalent à (3.1) pour tout $t \in [0,1]$.
L'opérateur $S_\alpha(t)$ satisfait l'hypothèse (H_1) telle que $M_s = 1$ et avec des calculs simples, on obtient

$$k_f = 1, \ \|\tau\|_{L^1} = \frac{L}{3}, \ et \ N = \|B\| = \|I\| = 1.$$

Donc, on choisit L tel que

$$ML < 3,$$

de plus, les hypothèses (H_6) et (H_7) sont satisfaites, ce qui signifie que toutes les conditions du théorème (3.3) sont satisfaites. Ainsi, le système (3.55) est approximativement contrôlable sur $[0,1]$.

3.6 Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats de contrôlabilité approchée pour un système fractionnaire non linéaire au sens de Caputo.
Nous commençons par l'utilisation du théorème de point fixe de Dhage pour assurer l'existence des solutions mild de notre problème. Puis, des conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée d'une classe de systèmes de contrôle dynamiques décrits par des équations différentielles fractionnaires non linéaire sont considérées.
L'exemple numérique confirme les résultats théoriques obtenus.

Bibliographie

[1] Bekaddour K. : Transformé de la Laplace et Applications aux Équations Différentielles Fractionnaires, mémoire master, 2017.

[2] Dhage, B. C. ; On a fixed point theorem in Banach algebras with applications, Applied Mathematics Letters, vol. 18, no. 3, pp. 273-280, 2005.

[3] Fan,Z. : Approximate controllability of fractional differential equations via resolvent operators, Adv. Difference Equ. 54, 2014.

[4] Granas, A., Dugundji, J. : Fixed Point Theory. Springer, New York 2003.

[5] Hea B.B, Cheng Zhoub B, HaiKouc C : The controllability of fractional damped dynamical systems with control delay, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 32, 190-198, 2016.

[6] Khodja, F.A et Benabbdallah, A : Une introduction à la théorie du contrôle, Note de cours, 2005.

[7] Kilbas, A., Srivastava, H.M., Trujillo, J.J. : Theory and Applications of Fractional Differential Equation. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[8] Lobry, C., Sari,T. : Introduction à la théorie du contrôle, école du CIMPA Tlemsen, 2003.

[9] Mahmudov, N. and Matar,M. M. : Existence of mild solution for hybrid differential equations with arbitrary fractional order, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 8, no. 2, pp. 160-169, 2017.

[10] Marir, S. :Problèmes de contrôlabilité des systèmes différentiels fractionnaires, Mémoire magistère, 2012.

[11] Matar, M. : Approximate Controllability of Fractional Non linear Hybrid Differential Systems via Resolvent Operators, Journal of Mathematics, Volume 2019. https ://doi.org/10.1155/2019/8603878

[12] Pazy : Semi groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer- Verlag, 1983.

[13] Podlubny, I. : Fractional Differential Equations, Mathematics In Science And Engineering, 1999.

[14] Podlubny, I., Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional diferential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, 1993.

[15] Tarasov, V.E. : Fractional Dynamics : Application of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media. Springer, HEP, New York ; 2011.

[16] Trelat, E. : Contrôle optimal : Théorie et applications, Note de Cours, Université de Paris-sud, 2000.