République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Melle. GHAZI Nour El Imane

Intitulé

Contrôlabilité approchée des équations différentielles impulsives avec dérivée fractionnaire de Caputo

Dirigé par : Dr. KERBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. DEBBAR Rabah**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. KERBOUA Mourad**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. DEBBOUCHE Ammar**	**PROF**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Remerciements

La réalisation de ce travail a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à mon encadreur de ce travail, Dr. KERBOUA Mourad, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Aux membres du jury Pr. Debbouche Ammar et Dr. Debbar Rabah pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail.

Merci à tous mes professeurs au cours de ma carrière universitaire et à tous ceux qui m'ont aidé même avec un mot gentil.

MERCI!

Dédicace

Je dédie ce travail :

A ma chère mère ***Fatiha*** et à mon cher père **Slimane** qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude.

A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de vivacité.

A tous ce qui m'ont aidé- de près ou de loin et ce qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A mes élèves et tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à souhaite plus de succès.

MERCI !

Ghazi Nour El Imane

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la contrôlabilité approchée pour une classe d'équations différentielles impulsives d'ordre fractionnaire de Caputo sous l'hypothèse que l'équation différentielle impulsive linéaire correspondant est approximativement contrôlable.
En basant sur le calcul fractionnaire, la théorié du semi-groupes, le théorème du point fixe et la technique de la théorie de la contrôlabilité, des conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée de l'équation différentielle impulsive fractionnaire au sens de Caputo sont considérés. Enfin, nous avons présenté un exemple appliqué qui illustre le côté théorique de notre étude.

Mots clés : contrôlabilité approchée, équation différentielle impulsive, dérivée fractionnaire de Caputo, point fixe.

Abstract

In this thesis, we study the approximate controllability for a class of Caputo fractional order impulsive differential equations under the assumption that the corresponding linear impulsive differential equation is approximately controllable.
Based on fractional calculus, semigroup theory, fixed point theorem and the technique of controllability theory, sufficient conditions for the approximate controllability of the fractional impulsive differential equation in the sense of Caputo are considered. Finally, we presented an applied example that illustrates the theoretical side of our study.

Keywords : approximate controllability, impulsive differential equation, caputo fractional derivative, fixed point.

ملخص

في هذه المذكـرة، ندرس إمكانية التحكم التقريبية لفئة من المعادلات التفاضلية الاندفاعية ذات الرتب الكسرية من نوع كابوتو على افتراض أن المعـادلة التفاضلية الاندفاعية الخطيـة المقابلة يمكن التحكم فيها تقريبًا.

استنادًا إلى حساب التفاضل والتكامـل الجزئي ونظرية شبـه الزمرة ونظرية النقطة الثابتة وتقنية نظرية التحكم، تم مراعاة الشـروط الكافية للتحكم التقريبي في المعادلة التفاضلية الاندفاعية الكسرية بمفهـوم كابوتو. أخيرًا، قدمنا مثالًا تطبيقيًا يوضح الجانب النظري لدراستنا.

الكلمات المفتاحية : قابلية التحكـم التقريبية، معـادلة تفاضلية اندفاعيـة، مشتق كابوتو الكسـري، نقطة ثابتـة.

Introduction

Au cours des deux dernières décennies, les équations différentielles fractionnaires ont attiré de nombreux scientifiques en raison de leurs applications dans de nombreux domaines appliqués importants tels que la physique, l'électrochimie, la viscoélasticité, le traitement du signal, etc. Pour plus d'applications, on peut en trouver dans les livres [2, 10, 12] et leurs références. Il a été vérifié que les équations différentielles fractionnaires (FDE) sont plus précises pour décrire plus précisément le comportement dynamique d'un phénomène réel.
Récemment, une nouvelle définition nommée dérivée fractionnaire conforme est introduite dans [3]. Cette nouvelle dérivée fractionnaire est très simple et satisfait toutes les propriétés de la dérivée standard. De nombreuses études et discussions liées à la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo sont apparues dans plusieurs articles.

Le concept de la contrôlabilité joue un rôle majeur dans les espaces de dimensions finies et infinies, c'est-à-dire des systèmes représentés par des équations différentielles ordinaires et des équations différentielles partielles respectivement. Il est donc naturel d'étendre ce concept à des systèmes dynamiques représentés par des équations différentielles fractionnaires. Par conséquent, la contrôlabilité approchée, le concept le plus faible de contrôlabilité, a attiré beaucoup d'attention récemment, ce qui oriente le système vers un petit voisinage arbitraire d'un état final (voir, par exemple, [6, 11].
D'autre part, il y a des développements significatifs dans la théorie des impulsions, en particulier dans le domaine des équations différentielles impulsives à moments fixes, qui fournissent une description naturelle des processus d'évolution observés, les considérant comme un outil important pour mieux comprendre plusieurs phénomènes du monde réel en sciences appliquées. Pour plus de détails concernant les équations différentielles impulsives, le lecteur pourra se référer à la monographie de LAKSHMIKANTHAM ET AL. [5] et [1, 14]. Cependant, il existe peu de travaux considérant la contrôlabilité approchée du système d'évolution impulsif fractionnaire [8, 15].
Ce mémoire est organisé comme suit :
Dans **le premier chapitre,** nous fournissons les informations fondamentales nécessaires relatives aux fonctions spéciales (Gamma et Bêta) et aux les deux approches de la dérivée fractionnaire (Riemann-Liouville, Caputo).
Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié au théorie des semi-groupes, où on présente les notions de base de cette théorie, ainsi on fait rappel sur les théorèmes de point fixe qui sont trés utils à la résolution des équations différentielles impulsives fractionnaires conformes.
Le trosième chapitre est dédié aux équations différentielles impulsives immpliquant une dérivée fractionnaire de Caputo, où nous intéresserons à la question de l'existence et la contrôlabilité approchée de ces équations, notamment, où on présente les principaux résultats en basant sur le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semi-groupe. Un exemple est donnée pour illustrer la théorie.

Chapitre 1

Calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques notions de base que nous allons utiliser dans les chapitres suivantes tels que : Les fonctions spéciales (Gamma, Bêta), calcul fractionnaire (Intégrales et dérivées fractionnaires au sens de Riemann Liouville et les dérivées fractionnaires au sens de Caputo)

1.1 Fonctions spéciales et calcul fractionnaire

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$.

Définition 1.1.([2, 10]) *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \ x > 0 \tag{1.1}$$

ou parfois

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt,\ x > \ 0$$

avec $\Gamma(1) = 1;\ \Gamma(0_+) = +\infty.$

Quelques propriétés sur la fonction Gamma

Soit $x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, alors :

1. $\Gamma(n+1) = n!$

2. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_-$.

3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

4. $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\, dt,\ \ x > \ 0.$

De ce qui précède, nous pouvons obtenir :

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

c) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}.\frac{-1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)},$$

où nous supposons que $Re(z) > 0$.

1.1.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

Définition 1.2.($[2, 10]$) *La fonction Bêta est donnée par*

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt,\ Re(x) > 0,\ Re(y) > 0.1.2 \qquad (1.1) \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2x-1}\cos(t)^{2y-1}\, dt. \end{aligned}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x)\,, \forall x,y : Re(x) > 0,\ Re(y) > 0.$$

– **Quelques propriétés sur la fonction Bêta**

Soient $Re\,(x) > 0$ et $Re\,(y) > 0$, alors :

1. $B\,(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B\,(x,y)$.

2. $B\,(x,1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

3. $B\,(x,1) = \frac{1}{x}$.

4. $B\,(x,n) = \frac{(n-1)!}{x.(x+1)...(x+n-1)}, \quad n \geq 1.$

5. $B\,(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \;\; m \geq 1$ et $n \geq 1.$

1.1.3 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Intégrale d'ordre arbitraire

Soit $f : [a;b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$\left(I_a^1 f\right)(t) = \int_a^t f\,(\tau)\;d\tau$$

pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f\,(t)\,dt\right)\,ds.$$

En utilisant le théoréme de fubini, on peut écrire

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t (t-\tau)\,f\,(\tau)\;d\tau$$

en itérant, on arrive a :

$$\left(I_a^n f\right)(t) = \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} f\,(\tau)\;d\tau.$$

Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy pour le calcul de l'intégrale répétée n fois qui est donnée par

$$I^n f\,(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f\,(s)\;ds;\; t > a \; et \; n \in \mathbb{N}^*.$$

En généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

Définition 1.3. ([2, 10]) *L'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha > 0$ *d'une fonction* $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *, est formellement définie par*

$$I_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds. \tag{1.3}$$

– **Propriétés de l'intégrale fractionnaire de R-L**

1. L'opérateur d'intégration fractionnaire I_{0+}^{α} est borné dans $L^p(\mathbb{R}_+),\ (1 \leq p \leq +\infty)$ et on a

$$||I_{0+}^{\alpha} f||_p \leq K\, ||\, f\, ||_p,$$

pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$.

2. Soit $\alpha, \beta > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$I_{0+}^{\alpha} I_{0+}^{\beta} f(t) = I_{0+}^{\alpha+\beta}\, f(t) = I_{0+}^{\beta} I_{0+}^{\alpha} f(t),$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$.

3. Soit $\alpha > 1$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\frac{d}{dt}(I_{0+}^{\alpha} f)(t) = (I_{0+}^{\alpha-1} f)(t),$$

4. Soit $\alpha > 0$, alors pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on a

$$\lim_{\alpha \to 0_+} (I_{0+}^{\alpha} f)(t) = f(t).$$

<u>Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville</u>

Définition 1.4. ([2, 10]) *Pour* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha] + 1$, *la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* α *d'une fonction* $f \in L^1(R_+)$ *est formellement définie par*

$${}^{L}D_{0+}^{\alpha} f(t) = D^n I_{0+}^{n-\alpha}\, f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}\, f(s)\, ds, \ \ t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.4}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Remarques

– Pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée ordinaire.

– En général, la dérivée fractionnaire d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville est ni nulle ni constante. A titre d'exemple si $\alpha > 0$ est non entier alors

$$^{L}D_{0_{+}}^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \;\; t \in \mathbb{R}_{+},$$

pour toute constante $C \in \mathbb{R}$.

1.1.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La définition formelle de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est donnée par

Définition 1.5. ([2, 10]) *La dérivée fractionnaire à gauche au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ est donnée par*

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\, ds, \;\; t \in \mathbb{R}_{+}, \tag{1.5}$$

avec

$$n = [\alpha] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N};\; n = \alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{N}.$$

Conséquence : Contrairement à la dérivée de Riemann-Liouville, la dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction constante $f = C$ est nulle.

Propriétés de la dérivée fractionnaire de Caputo

La relation entre la dérivée fractionnaire de Caputo et celle de Riemann-Liouville sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.1. ([2, 10]) *Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivées en 0 et si $^{L}D_{0+}^{\alpha} f$ existe, alors*

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) =^{L} D_{0+}^{\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \right], \tag{1.6}$$

presque partout sur $\mathbb{R}_+$.

Corollaire 1.1. *Si $^{C}D_{0+}^{\alpha} f$ et $^{L}D_{0+}^{\alpha} f$ existent, et si l'on suppose que $f^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo coincide avec celle de Riemann-Liouville, i.e.*

$$^{C}D_{0+}^{\alpha} f(t) =^{L} D_{0+}^{\alpha} f(t), \;\; p.p.\; t \in \mathbb{R}_{+}. \tag{1.7}$$

Remarque

La dérivée fractionnaire de Caputo est également l'inverse de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Corollaire 1.2. *Si* ${}^{C}D_{0^{+}}^{\alpha}f$ *et* ${}^{C}D_{0^{+}}^{\beta}f$ *existent, on a*

$$\begin{aligned} {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}f\left(t\right) &\neq {}^{C}D_{0+}^{\alpha+\beta}f\left(t\right)1.8 \\ {}^{C}D_{0+}^{\alpha}\,{}^{C}D_{0+}^{\beta}f\left(t\right) &\neq {}^{C}D_{0+}^{\beta}\,{}^{C}D_{0+}^{\alpha}f\left(t\right) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Chapitre 2

Semi-groupes et Solution Mild (douce)

Dans ce chapitre nous présentons les notions de base de la théorie des semi-groupes, la représentation des solutions de notre problème, ainsi nous présentons théorèmes de point fixe. Ces bases mathématiques seront utilisées tout au long de notre mémoire.

Soit X un espace de Banach muni d'une norme noté $\|.\|$ et le produit scalaire $\langle .,.\rangle$, $\mathcal{L}(X)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même dont la norme est

$$\|U\|_{\mathcal{L}(x)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|},$$

pour tout $U \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach.

2.1 Semi-groupe fortement continu

Définition 2.1. ([9]) *Une famille d'opérateurs* $\{\ominus(t)\}_{t\geq 0}$ *linéaires bornés définis sur* X *est dite semi-groupe fortement continu (ou de classe* C_0 *), ou simplement* C_0*-semi-groupe si on a :*

(i) $\ominus(0) = I$ *(*I *est l'opérateur d'identité dans* $L(X)$*).*

(ii) $\ominus(t+s) = \ominus(t)\ominus(s)$ *pour tout* $s, t \geq 0$*.(propriété algebrique)*

(iii) $\lim\limits_{t\to 0}||\ominus(t)x - x|| \ = 0$ *pour tout* x *dans* X*. (propriété topologique)*

si en remplace (iii) par :

$$\lim_{t\to 0}||\ominus(t) - I\ || \ = 0, \quad t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 2.1. ([9])*Pour* $\{\ominus(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* X*, alors on a les propriétés suivantes*

(i) $t \to |\ominus(t)|_{\mathcal{L}(X)}$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0, t_1]$;

(ii) *Pour tout* x *dans* X*, la fonction* $t \to \ominus(t)\ x$ *est continue sur* R_+;

(iii) *Il existe des constantes* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$ *telles que*:

$$|\ominus(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \ Me^{\omega t}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 2.2. ([9]) *L'opérateur* A *défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0}\frac{\ominus(t)x - x}{t} \text{ existe pour tout } t > 0 \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0}\frac{\ominus(t)\ x - x}{t} = \frac{d}{dt}\ominus(t)x|_{t=0}, \text{ pour } x \in D\ (A)$$

est dit générateur infinitésimal du C_0*−semi-groupe.*

L'espace $D(A)$ *est muni de la norme du graphe* $||x||_{D(A)} = ||x|| \ + ||Ax||, \quad x \in D\ (A)$.

Remarque 2.1. *Si* $\{\ominus(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*−semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal A, alors il est unique.*

Proposition 2.1. *Soient* $\{\ominus(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi groupe d'opérateurs linéaires bornées et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in D(A)$ *alors* $\ominus(t)x \in D(A)$ *et on a l'égalité*

$\ominus(t)Ax = A\ominus(t)x; \ \forall\, t \geq 0.$

Remarque 2.2. *On voit que* $\ominus(t)D(A) \subseteq D(A); \; \forall\, t \geq 0.$

Lemme 2.1. *Soit* $\{\ominus(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-*semi -groupe alors :*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\ominus(\tau)x d\tau = \ominus(t)x,$$

pour tout $x \in X$ *et* $t \geq 0$.

2.2 Représentation de la solution (Solution Mild)

Dans cette section on présente la solution de l'équation différentielle linéaire fractionnaire. Le concept du solution mild peut être introduit pour étudier le problème à valeur initiale non homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \; 0 < t < b, \\ x(0) = x_0, \qquad\qquad\qquad x \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0, b[\to X$.

Nous définissons maintenant le concept d'une solution mild

Définition 2.3. *Soit* A *un générateur infinitésimal d'un* C_0-*semi-groupe* $\{\ominus(t)\}_{t\geq 0}$ *sur* X, $x_0 \in X$, *et* $f \in L^1([0, b], X)$ *l'espace des fonctions Bochner-intégrables sur* $[0, b]$ *à valeurs dans* X.

La fonction $x \in C([0, b], X)$ *donnée par*

$$x(t) = \ominus(t)\, x_0 + \int_0^t \ominus\,(t-s)\, f(s)\, ds, \quad 0 < t < b,$$

est la solution mild du probléme à valeur initiale (2.1) sur $[0, b]$.

2.3 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de poit fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

Définition 2.4. *Soient* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* (x_n) *une suite de* X *. On dit que* (x_n) *est une suite de Cauchy*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, N \geq 0,\ \forall\, n > N,\ \forall\, m \geq N,\ \|x_{n+m} - x_n\| \leq \epsilon.$$

Définition 2.5. *On dit que* X *est complet pour la norme* $\|\cdot\|$ *si tout suite de Cauchy dans* X *est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

Définition 2.6. *Soit* f *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle point fixe de* f *tout point* $x \in X$ *tel que*

$$f(x) = x.$$

En **1922** STEFAN BANACH prouva son fameux résultat dit "*principe de contraction de banach*", ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.

Définition 2.7. *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Une application* ϕ *de* X *dans* X *est dite contactante s'il existe un nombre* $\gamma :\ 0 \leq \gamma < 1$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *on a*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \gamma \|x - y\|.$$

Théorème 2.2. (Point fixe de Banach)

Soit X *un espace de Banach et* $\phi : X \to X$ *est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe* $x \in X$ *tel que* $\phi x = x$.

Chapitre 3

Contrôlabilité approchée des équations différentielles impulsives avec une dérivée fractionnaire de Caputo

Le but de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité approchée des équations différentielles impulsives immpliquant une dérivée fractionnaire de Caputo. Les outils mathématiques de base utilisés dans ce chapitre reposent sur le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semi-groupe et le calcul fractionnaire.

3.1 Position du Problème

Ci-dessous, Nous étudions la contrôlabilité des équations différentielles impulsives d'ordres fractionnaires au sens de Caputo sous la forme suivante :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = -Ax(t) + Bu(t) + f\left(t, x(t)\right), \quad t \in J =: [0,b]\,,\ t \neq t_k \\ \Delta x(t_k) = x\left(t_k^{+}\right) - x\left(t_k^{-}\right) = I_k\left(x\left(t_k^{-}\right)\right), \quad k = 1,2,...,m. \\ x\left(0\right) = x_0 \in X, \end{cases} \tag{3.1}$$

où ${}^{C}D_t^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $0 < \alpha < 1$. L'opérateur $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\ominus(t)(t \geq 0)$ sur un espace de Banach X, $f : J \times X \to X$ est une fonction donnée. La fonction de contrôle $u(\cdot)$ prend ses valeurs dans $V = L^2([0,b];U)$ et U est un espace de Banach. B est un opérateur linéaire de V en $L^2([0,b];X)$.

De plus les instants fixes t_k vérifient $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m < b$, $x\left(t_k^{+}\right)$ et $x\left(t_k^{-}\right)$ représentent les limites droites et gauches de $x(t)$ à $t = t_k$, respectivement, $\Delta x(t_k) = x\left(t_k^{+}\right) - x\left(t_k^{-}\right)$, représente le saut de l'état x au temps t_k avec I_k déterminant la taille du saut.

Soit $PC(J,\ X) = \{x : J \to X$, $x(t)$ est continu partout sauf pour certains t_k pour lesquels $x\left(t_k^{-}\right)$ et $x\left(t_k^{+}\right)$ existent et $x\left(t_k^{-}\right) = x(t_k),\ k = 1,2,...m\}$ l'espace de Banach des applications continues par morceaux de J dans X satisfaisant la condition $\sup_{t\in J}\|x\left(t\right)\| < \infty$.

Nous adoptons maintenant la solution Mild (Douce) de notre problème (3.1).

Définition 3.1. ($[4,\ 16]$) *Une solution $x \in PC(J,\ X)$ est dite une solution mild de (3.1) si pour tout $u \in V$, l'équation intégrale fractionnaire*

$$\begin{array}{rcl} x(t) & = & \mathcal{S}(t)x_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\,\mathcal{T}\left(t-s\right)\left[Bu(s) + f(s,x(s))\right]ds \\ & & + \sum_{0<t_k<t} \mathcal{S}\left(t-t_k\right) I_k\left(x\left(t_k^{-}\right)\right). \end{array} \tag{3.2}$$

est satisfait, pour tout $0 \leq t \leq b$.

Où $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ sont des opérateurs caractéristiques donnés par

$$\mathcal{S}(t) = \int_0^t h_\alpha\left(\theta\right) \ominus \left(t^\alpha\theta\right) d\theta \text{ et } \mathcal{T}(t) = \alpha\int_0^t \theta h_\alpha\left(\theta\right) \ominus \left(t^\alpha\theta\right) d\theta.$$

h_α est une fonction de densité de probabilité définie sur $(0,\infty)$; telle que

$$h_\alpha(\theta) \geq 0,\ \theta \in (0,\infty),\ \text{et} \int_0^\infty h_\alpha(\theta)d\theta = 1.$$

Lemme 3.1. *Les opérateurs $S(t)$ et $T(t)$ sont fortement continus, i.e., pour $x \in X$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq b$, on a $\|\mathcal{S}(t_2)x - \mathcal{S}(t_1)x\| \to 0$ et $\|\mathcal{T}(t_2)x - \mathcal{T}(t_1)x\|$ quand $t_2 \to t_1$.*

Ci-dessous nous imposons les conditions suivantes sur les données de notre problème :

($\mathbf{H1}$) Pour tout $t \geq 0$ fixé, $\mathcal{S}(t)$ et $\mathcal{T}(t)$ sont des opérateurs linéaires bornés, i.e., pour tout $x \in X$,

$$\|\mathcal{S}(t)x\| \leq M \|x\| \text{ et } \|\mathcal{T}(t)x\| \leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \|x\|,$$

où $M = \sup_{t \geq 0} \|\ominus(t)\|$.

($\mathbf{H2}$) La fonction $f : J \times X \to X$ est continu et il existe une constante $N > 0$ tel que

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq N \|x_1 - x_2\| \text{ pour tout } x_1, x_2 \in X.$$

($\mathbf{H3}$) La fonction de saut $I_k : PC(J,\ X) \to X$ est continue et il existe une constante $\beta_k > 0$, telle que

$$\|I_k(x) - I_k(y)\| \leq \beta_k \|x - y\|, \quad k = 1, 2, ...m.$$

Soit $x(b, x_0, u)$ la valeur d'état de (3.1) au temps terminal b correspondant à la fonction de contrôle u et à la valeur initiale x_0. On introduit l'ensemble $\mathfrak{R}(b, x_0) = \{x(b, x_0, u) : u \in V\}$ qui est appelé l'ensemble atteignable du système (3.1) au temps terminal b, sa fermeture dans X est notée $\overline{\mathfrak{R}(b, x_0)}$.

Définition 3.2. *On dit que le système (3.1) est approximativement contrôlable sur J si $\overline{\mathfrak{R}(b, x_0)} = X,\ \forall\, x_0 \in X$.*

Plus précisément, (3.1) est approximativement contrôlable sur J si :

$$\forall\, h \in X,\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, u \in V \ /\ \|x(b) - h\| < \epsilon.$$

Afin d'étudier la contrôlabilité approchée pour le système de contrôle fractionnaire conforme (3.1), nous introduisons le système différentiel fractionnaire linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^{C}D_t^{\alpha} x(t) = -Ax(t) + Bu(t), \quad t \in J := [0, b], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

La contrôlabilité approchée pour le système de contrôle linéaire d'ordre fractionnaire de Caputo (3.3) est la généralisation naturelle de la notion du contrôlabilité approchée pour le système de contrôle linéaire du premier ordre $(\alpha = 1)$. Définissons l'opérateur $L_0^b := \int_0^b (b-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(b-s) Bu(s)ds : V \to PC(J, X)$. Introduisons les deux opérateurs associés à (3.3) :

$$\Pi_0^b := \left(L_0^b\right)\left(L_0^b\right)^* = \int_0^b (b-s)^{2(\alpha-1)} \mathcal{T}(b-s) BB^* \mathcal{T}^*(b-s)\, ds : \; X \to X, \tag{3.4}$$

$$R\left(\lambda, \Pi_0^b\right) = \left(\lambda I + \Pi_0^b\right)^{-1} : \; X \to X, \quad \lambda > 0, \tag{3.5}$$

où B^* est l'adjoint de B et $\mathcal{T}^*$ représente l'adjoint de $\mathcal{T}$.

Lemme 3.1. (Voir [7]) *Le système de contrôle linéaire fractionnaire (3.3) est approximativement contrôlable sur J si et seulement si $\lambda R\left(\lambda, \Pi_0^b\right) \to 0$ quand $\lambda \to 0^+$.*

On choisit la fonction de contrôle associée au système non linéaire (3.1) comme suit :

$$\begin{aligned} u_\lambda(t,x) = \; & B^* \mathcal{T}^*(b-t) R\left(\lambda, \Pi_0^b\right) \Big\{ x(b) - \mathcal{S}(b) x_0 \\ & - \int_0^b (b-s)^{\alpha-1} \mathcal{T}(b-s) f(s, x(s)) ds \\ & - \sum_{0<t_k<b} \mathcal{S}(b-t_k) I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right) \Big\} \end{aligned}$$

Lemme 3.2. (Voir[4, 16]) *Il existe des constantes réelles positives $\hat{M}, \hat{N}$ telles que pour tout $x, y \in PC(J, X)$, on a*

$$||u_\lambda(t,x) - u_\lambda(t,y)|| \le \hat{M}\, ||x(t) - y(t)||\,,$$

$$||u_\lambda(t,x)|| \le \hat{N} \left(\frac{1}{b} + \|x(t)\|\right).$$

3.2 Existence des solutions Mild (Douce)

Cette section est consacrée à l'étude des résultats d'existence et d'unicité pour notre problème (3.1) en utilisant le principe de l'application contractante.

Théorème 3.1. *Supposons que les hypotheses (H_1), (H_2) et (H_3) sont satisfaites et soit $b>0$ un nombre réel fini quelconque. Alors pour chaque fonction de contrôle $u(.)\in V$, le systeme de contrôle (3.1) a une solution mild unique sur J à condition que*

$$\gamma := \left(M\hat{M}\left\Vert B\right\Vert \frac{b^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + MN\frac{b^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + M\sum_{k=1}^{m}\beta_k \right) < 1.$$

Preuve.

Pour tout $\lambda>0$, nous définissons l'opérateur $F_\lambda : PC\left(J,X\right)\rightarrow PC\left(J,X\right)$ par

$$\begin{array}{rcl} \left(F_\lambda x\right)\left(t\right) & = & \mathcal{S}(t)x_0 + \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\mathcal{T}\left(t-s\right)\left[Bu_\lambda(s,x)+f(s,x(s))\right]ds \\ & & +\sum_{0<t_k<t}\mathcal{S}\left(t-t_k\right)I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right). \end{array}$$

Nous montrons que F_λ est un opérateur de contraction sur $PC\left(J,X\right)$. En fait pour tout $x,y\in PC\left(J,X\right)$ et $t\in J$, nous avons

$$\begin{array}{rcl} \left\Vert \left(F_\lambda x\right)(t) - \left(F_\lambda y\right)(t)\right\Vert_{PC(J,X)} & \leq & \sup\limits_{t\in J}\displaystyle\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left\Vert \mathcal{T}\left(t-s\right)B\left[u_\lambda\left(s,x\right)-u_\lambda\left(s,y\right)\right]\right\Vert ds \\ & & +\sup\limits_{t\in J}\displaystyle\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left\Vert \mathcal{T}\left(t-s\right)\left[f\left(s,x\left(s\right)\right)-f\left(s,y\left(s\right)\right)\right]\right\Vert ds \\ & & +\sup\limits_{t\in J}\displaystyle\sum_{0<t_k<t}\left\Vert \mathcal{S}\left(t-t_k\right)\left[I_k\left(x\left(t_k^-\right)\right)-I_k\left(y\left(t_k^-\right)\right)\right]\right\Vert \\ & \leq & \dfrac{M}{\Gamma\left(\alpha\right)}\hat{M}\left\Vert B\right\Vert \sup\limits_{t\in J}\displaystyle\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left\Vert x\left(s\right)-y\left(s\right)\right\Vert ds \\ & & +\dfrac{M}{\Gamma\left(\alpha\right)}N\sup\limits_{t\in J}\displaystyle\int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1}\left\Vert x\left(s\right)-y\left(s\right)\right\Vert ds \\ & & +M\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\beta_k\left\Vert x-y\right\Vert_{PC(J,X)} \\ & \leq & M\left(\left(\hat{M}\left\Vert B\right\Vert + N\right)\dfrac{b^{\alpha}}{\alpha\Gamma\left(\alpha\right)}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\beta_k\right)\left\Vert x-y\right\Vert_{PC(J,X)}. \\ & \leq & \gamma\left\Vert x-y\right\Vert_{PC(J,X)}. \end{array}$$

Puisque $0<\gamma<1$, l'opérateur F_λ est une contraction et d'après le théorème du point fixe de Banach il existe un unique point fixe $x\in PC\left(J,X\right)$ tel que $(F_\lambda x)(t)=x(t)$. Ce point fixe est la solution mild du système (3.1).

3.3 Contrôlabilité approchée

Dans cette section, nous nous intéressons aux résultats de contrôlabilité approchée des équations différentielles impulsives impliquant un opérateur dérivé fractionnaire de Caputo.

Théorème 3.2. *Si les hypothèses $(H_1)-(H_3)$ sont satisfaites, et que les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées, de plus si les fonctions f et I sont bornées, alors le système d'ordre fractionnaire de Caputo (3.1) est approximativement contrôlable sur J.*

Preuve.

Soit x_λ un point fixe de F_λ. Tout point fixe de F_λ est une solution douce de (3.1) sous le contrôle

$$\begin{aligned} u_\lambda(t,x_\lambda) &= B^*\mathcal{T}^*(b-t)\,R\left(\lambda,\Pi_0^b\right)\{x(b)-\mathcal{S}(b)\,x_0 \\ &\quad -\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\,\mathcal{T}(b-s)\,f(s,x_\lambda(s))ds \\ &\quad -\sum_{0<t_k<b}\mathcal{S}(b-t_k)\,I_k\left(x_\lambda\left(t_k^-\right)\right)\Bigg\}, \end{aligned}$$

et il satisfait l'égalité

$$x_\lambda(b)=x(b)-\lambda R\left(\lambda,\Pi_0^b\right)p\left(x_\lambda\right), \tag{3.6}$$

où

$$\begin{aligned} p\left(x_\lambda\right) = x(b)-\mathcal{S}(b)\,x_0-\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\,\mathcal{T}(b-s)\,f(s,x_\lambda(s))ds \\ -\sum_{0<t_k<b}\mathcal{S}(b-t_k)\,I_k\left(x_\lambda\left(t_k^-\right)\right) \end{aligned}$$

A l'aide de la bornitude des fonctions f et I_k,il existe $\hat{D}>0$ tel que

$$\|f(s,x_\lambda(s))\|\leq\hat{D},\quad\|I_k(x_\lambda)\|\leq\hat{D}$$

Alors, il se trouve des sous-suites notées par $\{f(s,x_\lambda(s))\}$ et $\{I_k(x_\lambda)\}$ qui convergent faiblement vers $f(s)$ et $\tilde{I}_k$ dans $L^2(J,X)$.

Notons par

$$\begin{aligned}\omega &= x(b) - \mathcal{S}(b)\,x_0 - \int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\,\mathcal{T}(b-s)\,f(s)ds \\ &\quad - \sum_{0<t_k<b} \mathcal{S}(b-t_k)\,\tilde{I}_k.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\|p(x_\lambda)-\omega\| &\leq \left\|\int_0^b (b-s)^{\alpha-1}\,\mathcal{T}(b-s)\,[f(s,x_\lambda(s))-f(s)]ds\right\| \\ &\quad + \left\|\sum_{0<t_k<b} \mathcal{S}(b-t_k)\left[I_k(x_\lambda)-\tilde{I}_k\right]\right\| \\ &\longrightarrow 0\end{aligned}$$

quand $\lambda \to 0^+$ à cause de la compacité de $\ominus(t)$ et de l'opérateur

$$l(\cdot) \longrightarrow \int_0^{\cdot} s^{\alpha-1}\ominus(\cdot - s)\,f(s)ds: \; L^2(J,X) \to C(J,X)$$

Ainsi, à partir de (3.6) et le fait que $\lambda R\left(\lambda, \Pi_0^b\right) \to 0$ *quand* $\lambda \to 0^+$, on obtient

$$\|x_\lambda(b)-x(b)\| \leq \left\|\lambda R\left(\lambda,\Pi_0^b\right)(\omega)\right\| + \left\|\lambda R\left(\lambda,\Pi_0^b\right)\right\|\,\|p(x_\lambda)-\omega\| \to 0$$

quand $\lambda \to 0^+$. Ceci prouve la contrôlabilité approchée de notre problème (3.1).

3.4 Exemple

Considérons l'équation aux dérivées partielles impulsives fractionnaires suivante :

$$\begin{cases} D^{\frac{2}{3}}x(t,z) &= \frac{\partial^2}{\partial z^2}x(t,z) + \mu(t,z) + \frac{x(t,z)}{1+t^2}, \\ & \quad t \in (0,1],\ t \neq t_k, \\ x(t,0) &= x(t,\pi) = 0, \quad t \in (0,1], \\ x(0,z) &= x_0(z), \quad z \in [0,\pi], \\ \Delta x(t_k) &= \int_0^{t_k} p(t_k - s)\,x(s,z)\,dz, \quad k = 1,2,...,m, \end{cases} \tag{4.1}$$

où ${}^C D^{\frac{2}{3}}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha = \frac{2}{3}$ et la fonction p est mesurable et continue sur $(0,1]$. La fonction de contrôle $u(t) = \mu(t,\cdot)$, où $\mu : (0,1] \times [0,\pi] \to [0,\pi]$ est continue.

Pour étudier ce système, soit $X = U = L^2([0,\pi])$ et l'opérateur
$A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ est donné par $A = -\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ avec
$D(A) = \left\{x \in X : x,\ \frac{\partial x}{\partial z} \in X,\ x(0) = x(\pi) = 0\right\}.$
Il est bien connu que $-A$ a un spectre discret avec des valeurs propres $-n^2,\ n \in \mathbb{N}$ et les fonctions propres normalisées correspondantes données par
$e_n(z) = \left(\sqrt{2/\pi}\right) \sin nz,\ (n = 1, 2, ...).$
De plus $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée complète sur X. Alors

$$-Ax = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x, e_n) e_n, \quad x \in D(A).$$

De plus, $-A$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\ominus(t)(t \geq 0)$ dans X et est donné par

$$\ominus(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}(x, e_n)e_n,\ \ x \in X,\ t \geq 0.$$

avec $||\ominus(t)|| \leq e^{-t} \leq 1.$
On définit l'opérateur borné $B : U \to X$ par $B = B^* = I$ (opérateur d'identité).
Aussi, nous définissons les fonctions :
$x(t)(z) = x(t,z),\ f\left(t, x(t)\right)(z) = \frac{x(t,z)}{1+t^2},\ I_k(x)(z) = \int_0^{t_k} p\left(t_k - s\right) x\left(s, z\right) dz$
Avec les choix ci-dessus de f et I, le système (4.1) peut s'écrire comme une formulation abstraite de (3.1).
Prenons $\alpha = \frac{2}{3},\ M = N = \hat{M} = 0.1,\ b = 1,\ \sum_{k=1}^{m} \beta_k = 1$. Alors, toutes les hypothèses des théorèmes **3.1** et **3.2** sont satisfaites et

$$\gamma := \left(M\hat{M} \left\|B\right\| \frac{b^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + MN \frac{b^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1\right)} + M \sum_{k=1}^{m} \beta_k \right) < 1.$$

Par conséquent, le système de contrôle impulsif fractionnaire (4.1) est approximativement contrôlable sur J.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié l'existence et la contrôlabilité approchée pour une classe d'équations différentielles impliquant un opérateur dérivé fractionnaire au sens de Caputo. Des conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée de l'équation différentielle impulsive fractionnaire de Caputo sont considérés, en basant sur le calcul fractionnaire, la théorié du semi-groupes et le théorème de point fixe (Principe de l'application contractante). Finalement, nous avons fourni un exemple pour illustrer l'applicabilité des résultats théoriques de notre étude.

Bibliographie

[1] A. Debbouche, D. Baleanu : Controllability of fractional evolution nonlocal impulsive quasilinear delay integro-differential systems. Comput. Math. Appl. 62 (**2011**), 1442-1450.

[2] A. Kilbas, M.H. Srivastava, J.J. Trujillo : Theory and Application of Fractional Differential Equations. North Holland Mathematics Studies. vol. 204, **2006**.

[3] R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef, M. Sababheh : A new definition of fractional derivative. J. Comput. Appl. Math. 264 (**2014**), 65–70.

[4] S. Kumar, N. Sukavanam : Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay. J. Differential Equations. 252 (**2012**), 6163–6174.

[5] V. Lakshmikantham, D.D. Bainov, P.S. Simeonov : Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore, **1989**.

[6] N.I. MAHMUDOV, S. ZORLU : On the approximate controllability of fractional evolution equations with compact analytic semigroup. J. Comput. Appl. Math. 259 (**2014**), 194-204.

[7] N.I. MAHMUDOV, S. ZORLU : Approximate controllability of fractional integro-differential equations involving nonlocal initial conditions. Bound. Value Probl. 2013, 118 (**2013**).

[8] L. MAHTO, S. ABBA : Approximate controllability and optimal control of impulsive fractional semilinear delay differential equations with non-local conditions. J. Abstr. Differ. Equ. Appl. 4(2) (**2013**), 44-59.

[9] A. PAZY : Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, **1983**.

[10] I. PODLUBNY : Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego CA, **1999**.

[11] R. SAKTHIVEL, R. GANESH, Y. REN, S.M. ANTHONI : Approximate controllability of nonlinear fractional dynamical systems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 18 (**2013**), 3498-3508.

[12] G. SAMKO, A.A. KILBAS, MARICHEV : Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon, **1993**.

[13] B. TRIKI ET K. ROUABHIA, Sur la contrôlabilité approchée des équations d'évolution fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de Hilfer, Mémoire de fin d'études (Master) soutenue en juillet **2021**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma.

[14] Y.C. ZANG, J.P. LI : Approximate controllability of fractional impulsive neutral stochastic differential equations with nonlocal conditions. Bound. Value Probl. 2013, 193 (**2013**).

[15] Z.F. ZHANG, B. LIU : A note on impulsive fractional evolution equations with nondense domain. Abstr. Appl. Anal. 2012, Article ID 291816 (**2012**).

[16] H.X. ZHOU : Approximate controllability for a class of semilinear abstract equations. SIAM J. Control Optim. 22 (**1983**), 405–422.