

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{elle} Chakar Randa

Intitulé

**Numerical development for an integro-differential equation
depending in acceleration**

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Bahloul Tarek	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. SEGNI Sami	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Menaceur Ameur	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2022

Remerciements

Mes remerciements s'adressent à mon encadrant Dr. SEGNI Sami, Chargé de cours Classe A, spécialisé dans le domaine des Équations intégrales et simulation numérique. Pour son travail professionnel notamment son sens de l'écoute et la qualité de ses préconisations et orientations.

Très chaleureusement, je remercie monsieur Pr. Guebbai Hamza, pour son dévouement, sa patience et tous ses sacrifices pour la science et pour moi en particulier.

Je remercie tout particulièrement mes amies KAMOUCHE Soumia ,ALLEL Nouha et Asma Guemrich spécial dédicace pour vous chers amis, frères et sœurs. Wassim, Hocine, Sina, Aziz en Russie et Sara et Mounia. Vous étiez toujours à mon service et un support direct pour l'atteinte de mes objectifs.

Je tiens à remercier mes chers parents, mon frangin et ma petite sœur à qui j'attribue aujourd'hui cette recherche scientifique.

ملخص

الهدف من هذه الرسالة هو الدراسة التحليلية والرقمية للمعادلات التكاملية التفاضلية بالطرق المعتمدة على طرق بيكار المتعاقبة والمختصرة. عملنا هو تعميم عمل آخر للدرجات الأولى في إطار فولتيرا غير الخطي، وهذا النوع من المعادلات جاء من نظام ديناميكي خاصة النظام الديناميكي يلخص المشاكل الزلزالية، والحالات المدروسة في العمل الرئاسي تعتمد فقط على السرعة وتعتمد وظيفتي على السرعة والتسارع، نحصل على الوجود والتفرد باستخدام طريقة نايستروم للتكيف لحل مشكلتنا

الكلمات المفتاحية: معادلة فولتيرا، طريقة بيكار، طريقة نايستر

Résumé

L'objectif de ce mémoire est l'étude analytique et numérique des équations intégrales par des méthodes basées sur les méthodes de Picard successives. Notre travail est la généralisation d'autres travaux de degrés 1 dans le cadre de Volterra non linéaires ce genre d'équations est venu de système dynamique surtout les systèmes dynamique esume les problèmes sisméque, les cas étudier dans le travail précédent dépend uniquement de la vitesse et mon travail dépend de la vitesse et l'accélération, on obtient l'existence et l'unicité en utilisant la méthode Nyström adapter pour résoudre notre problème.

Mots clés : équation de Voltaire, méthode de Picard, méthode de Nyström

Abstract

The objective of this dissertation is the analytical and numerical study of integro-differential equations by methods based on successive Picard methods. Our work is the generalization of other work of degrees 1 in the framework of nonlinear Volterra this kind of equations came from dynamic system especially the dynamic systems summarize the seismic problems, the cases studied in the previous work depend only on the speed and my work depends on velocity and acceleration, we get existence and uniqueness using Nyström adapt method to solve our problem.

Key words : Voltaire equation, Picard method, Nyström method

Table des matières

1 Définitions et rappels	4
1.1 Classification de l'équation intégro différentielle de deuxième degré . . .	4
1.2 La formule de dérivation	6
1.3 Théorème du point fixe de Banach :	7
1.4 Lemme de Gronewel :	9
1.5 Les méthodes d'intégration numérique	9
1.5.1 La méthode de trapèze	10
1.5.2 Théorème de convergence :	10
2 L'étude Analytique	12
2.1 Etude de l'existence de la solution	14
2.2 Etude de l'unicité de la solution	22
2.2.1 Prolongement de la solution	22
3 Etude Numérique de L'équation intégro-différentielle non linéaire de Volterra du seconde espèce de degré deux	24
3.1 Construction du Système	26
3.1.1 Existence et unicité de solution du système de Nystrom :	28
3.2 Test Numérique	31

Introduction

Les équations intégrales occupent un rôle très important dans le domaine des mathématiques appliquées. Elles modélisent plusieurs problèmes en élasticité, plasticité, transfert de la chaleur et de la masse, théorie des oscillations, théorie des jeux, théorie des files d'attente et en médecine.

Ces problèmes distinguent plusieurs catégories d'équations intégrales telles que :

– Les équations intégrales linéaires et non linéaires de Volterra où les noyaux sont réguliers qui sont sous la forme suivante :

$$\forall t \in [a, b], u(t) = \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t), \quad (1)$$

où leurs études analytiques et numériques sont présentées par [1].

– Les équations intégrales faiblement singulières de Volterra où les noyaux contiennent une singularité faible qui sont données par :

$$\forall t \in [a, b], u(t) = (t - s) \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t), \quad (2)$$

Le plan de travail de ce mémoire est le suivant :

Dans le chapitre 1, nous avons passé en revue quelques concepts de base analyse Fonctions comme (suite de Cauchy, Théorème de point fixe de Banach) et analyse numérique comme (Lemme de Gronewel) qui seront utilisées dans chaque chapitre qui se succèdent. Ensuite, nous passons également en revue les recherches menées sur équations intégrales non linéaires de Volterra.

Dans le Chapitre 2, nous présentons l'étude analytique du système d'équation intégrale non linéaire de Volterra. Notre recherche basées sur les méthodes de picard successives et réduite .en utiliser des approximations successives pour garantir l'existence et l'unicité de la solution du système. Nous allons ensuite construire une méthode numérique d'approximation de la solution pour laquelle nous appliquons la méthode de Nyström pour résoudre notre problème, nous terminerons ce Chapitre par un exemple

numérique afin de s'assurer la convergence et la précision de cette approximation, nous réaliserons ensuite des études analytiques et numériques sur les équations intégrales de Volterra.

Chapitre 1

Définitions et rappels

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats et des définitions qui vont intervenir dans le développement des idées traitées dans les chapitres 2 et 3.

Les liens qui relient ces notions apparaîtront clairement une fois les chapitres suivants seront achevés par le lecteur.

1.1 Classification de l'équation intégrale différentielle de deuxième degré

La forme générale des équations ciblées par notre travail est la suivante :

Trouver $u \in C^2[a, b]$ tel que :

$$\forall t \in [a, b], \quad \lambda(t) u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t),$$

Où, $f \in C^2[a, b]$ et λ est une fonction assez régulière qui dépendent du modèle qui donne naissance à cette équation :

$k : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est le noyau de cette équation.

Cette équation est en générale appelée équation intégral-différentielle de Voltera de degré deux, puisque la solution u dépend de sa dérivée u'' . Maintenant,

- Si $\lambda(t) = 0, \forall t \in [a, b]$: Notre équation

$$0 = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t),$$

est dite équation intégral-différentielle de Voltera de degré deux de première espèce.

- Si $\lambda(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$: Notre équation

$$\lambda(t) u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t),$$

devient une équation intégral-différentielle de Voltera de degré deux de troisième espèce.

- Si $\lambda(t) = 1, \forall t \in [a, b]$: Notre équation :

$$u(t) = \int_a^t k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t),$$

devient une équation intégral-différentielle de Voltera de degré deux de deuxième espèce.

- Si

$$k(t, s, x, y, z) = k_1(t, s) x + k_2(t, s) y + k_3(t, s) z, \forall t \in [a, b], \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

Notre équation :

$$\lambda(t) u(t) = \int_a^t k_1(t, s) u(s) ds + \int_a^t k_2(t, s) u'(s) ds + \int_a^t k_3(t, s) + \int_a^t k_3(t, s) u''(s) ds$$

devient linéaire, sinon elle est non linéaire.

1.2 La formule de dérivation

Soit ψ une fonction définie de $[a, b]^2$ à image dans \mathbb{R} , tel que pour tout $s \in [a, b]$, $\psi(\cdot, s) \in C^0[a, b]$.

On définit la fonction suivant :

$$\phi(t) = \int_a^t \psi(t, s) ds, \forall t \in [a, b]$$

Proposition 1.1

$$\forall t \in [a, b], \phi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) ds$$

Preuve. $\forall t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^t \psi(t+h, s) ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h, s) - \psi(t, s)}{h} ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t, s) ds. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]0, h[$ tel que

$$\frac{1}{h} \int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds = \psi(t+h, t+\xi).$$

On fessont tendre h vers 0 , nous obtenons le résultat. ■

1.3 Théorème du point fixe de Banach :

Soit $(X; \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $f : X \rightarrow X$ une application continue. Le théorème de Banach nous assure l'existence et l'unicité d'un point fixe x^* de f , c'est à dire :

$$x^* = f(x^*)$$

Théorème 1.1 *En utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]0, h[$ tel que $\int X = \frac{1}{2}X^2$.*

De plus, la suite : $\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n); n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Converge vers x^* et on a : $\|x_n - x^*\| \leq \frac{K^n}{1-K} \|x_1 - x_0\|, \forall n \geq 2$.

Preuve. Soit $f : X \rightarrow X$ tel que $X = [a, b]$,

1) On doit d'abord prouver l'existence et l'unicité du x^* qui appartient à $[a, b]$.

- En commence par démontrer que la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ est de Cauchy dans x pour montrer l'existence :

Soit $y \in M$ un point arbitraire M . dans

Considérons la suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ donnée par :

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$$

On doit prouver que est une suite $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de Cauchy dans M .

Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire :

$$\|x_m - x_n\| \leq \|x_m - x_{m+1}\| + \|x_{m+1} - x_{m+2}\| + \dots + \|x_{n-1} - x_n\|$$

Puisque f est une contraction, on a :

$$\|x_p - x_{p+1}\| = \|fx_{p-1} - fx_p\| \leq A \|x_{p-1} - x_p\|, \text{ pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq (A^m + A^{m+1} + \dots + A^{n-1}) \|x_0 - x_1\| \\ &\leq A^m (1 + A + \dots + A^{n-m-1}) \|x_0 - x_1\| \\ &\leq A^m (1 - A)^{-1} \|x_0 - x_1\|. \end{aligned}$$

On déduit que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy dans M qui est complet, donc $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge vers x dans M .

Par ailleurs puisque f est continue, on a :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = fx$$

Donc x est un point fixe de f (i.e. $fx = x$)

- Maintenant on va essayer de montrer l'unicité pour cela $\forall x$ et $y \in \cap$:

Supposons que $x = fx$, $y = fy$ alors :

$$\|x - y\| = \|fx - fy\| \leq A \|x - y\|$$

Ce qui implique que $\|x - y\| = 0$ i.e. $x = y$ (puisque $A < 1$) ■

1.4 Lemme de Gronewel :

Ce Lemme consiste à la justification et l'outil d'obtention des nombreuses approximations des solutions d'équations différentielles ordinaires. En particulier, il est utilisé pour démontrer l'unicité d'une solution de problème de Cauchy, au travers du Théorème de Cauchy-Lipschitz, on va l'utiliser pour démontrer la convergence de notre méthode numérique développé a la fin de ce mémoire.

Lemme 1.1 Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, n \in \mathbb{N}$$

où, $A > 0, |B_n| \leq B.v$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1}(B + A|\xi_0|), n \geq 1.$$

Preuve. Voir [1] ■

1.5 Les méthodes d'intégration numérique

La plupart des méthodes d'intégration numérique fonctionnent sur le même principe. On commence par couper le gros intervalle $[a, b]$ en n plus petits intervalles $[t_j, t_{j+1}]$, avec $t_0 = a$ et $t_1 = b$. Puis, pour chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, on essaie d'approcher .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est : $t_j = a + jh, 0 \leq j \leq n$ et $h = \frac{b-a}{n}$.

Les formules d'intégrations numériques sont données par :

$$\int_a^b f(t)dt \simeq h \sum_{j=0}^n w_j f(t_j).$$

Où, les poids w_j sont positifs, tel que $\max_{0 \leq j \leq n} |w_j| \leq W$ fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.5.1 La méthode de trapèze

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Nous définissons la méthode de trapèze qui donne l'approximation numérique d'une intégrale qui est sous la forme $\int_a^b f(t) dt$.

La méthode des trapèzes représente un cas particulier de la méthode de quadrature où les poids sont donnés par la suite suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_0 = w_n = \frac{1}{2} \\ w_j = 1, 1 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\}$$

Ce qui donne

$$\int_a^b f(t) dt \simeq \frac{h}{2} f(t_0) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) + \frac{h}{2} f(t_n)$$

Cette méthode est celle que nous allons utiliser dans nos calculs numériques, si l'intégrand est bornée. Nous l'avons choisi puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement.

Contrairement à d'autres méthodes, telle que Simpson, qui exige plus de régularité.,

1.5.2 Théorème de convergence :

Maintenant, nous présentons le Théorème de Convergence qui montre la convergence de la solution approchée vers la solution exacte on définit le module de continuité par

$$\forall f \in C^0[a, b], w_0(h, f) = \max_{\substack{|s-t| \leq h \\ a \leq s, t \leq b}} |f(s) - f(t)|,$$

on définit l'interpolant polynomiale par morceaux d'ordre 1 pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$ est donné par

$$\forall t \in [a, b], p_{n,1}[f](t) = \sum_{j=1}^n f(t_j) e_j(t),$$

$$\forall f \in C^0[a, b],$$

nous définissons l'intervalle $t \in [t_j, t_{j+1}]$

$$|p_n f(t) - f(t)| \leq |f(t_j) - f(t)| |1 - \alpha_j(t)| + |f(t_{j+1}) - f(t)| |\alpha_j(t)|$$

nous avons :

$$\begin{aligned} |\alpha_j(t)| &\leq 1 \\ &\leq w_0(f, h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b p_n f(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \int_a^b w_0(f, h) dt \\ &\leq (b - a) w_0(f, h) \end{aligned}$$

Chapitre 2

L'étude Analytique

Ce chapitre est consacré à l'étude analytique de l'équation intégrale-différentielle du deuxième espèce de Volterra avec un noyau régulier. Notre approche consiste à modifier l'équation pour la rendre complètement intégrale c-à-d la dérivée n'apparaît pas ni à l'intérieur ni à l'extérieur de notre égalité. Puis on procède par la construction d'une méthode de Picard sur des intervalles réduits à une petite taille afin d'assurer la convergence.

Comme nous l'avons déjà mentionné, notre équation est de la forme suivante :

$$u(t) = \int_a^t (t-s) k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t); \forall t \in [a, b], \quad (2.1)$$

ou, f est donnée dans $C^2[a, b]$ et u est la fonction inconnue à chercher dans le même espace.

La fonction k est supposée vérifier les hypothèses suivantes :

$$(1) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}),$$

$$(2) \exists M \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

$$\max \left(|k(t, s, x, y, z)|, \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y, z) \right|, \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, x, y, z) \right| \right) \leq M$$

(H1)

$$(3) \exists a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}, \forall x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b],$$

$$|k(t, s, x, y, z) - k(t, s, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| \leq a_1|x - \bar{x}| + b_1|y - \bar{y}| + c_1|z - \bar{z}|,$$

$$\left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y, z) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| \leq a_2|x - \bar{x}| + b_2|y - \bar{y}| + c_2|z - \bar{z}|,$$

$$\left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, x, y, z) - \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| \leq a_3|x - \bar{x}| + b_3|y - \bar{y}| + c_3|z - \bar{z}|,$$

$$(4) \quad c_1 < 1$$

Ces hypothèses nous permettent de calculer la dérivée de u comme suit

$$\forall t \in [a, b], \quad u'(t) = K(t, t, u(t), u'(t), u''(t)) + \int_a^t (t-s) \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f'(t); \quad (2.2)$$

et sa dérivée seconde par

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad u''(t) &= k(t, t, u(t), u'(t), u''(t)) \\ &+ 2 \int_a^t \left(\frac{\partial k}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) \right) ds \\ &+ \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f''(t); \end{aligned} \quad (2.3)$$

Soit $\{T_j\}_{j=0}^n$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ où $n \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire :

$$a = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n = b$$

n est choisie assez grand pour obtenir l'existence de $\rho \in \mathbb{R}^*$ qui vérifie pour tout $0 \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} & \left[(b_1 + 2c_2) (T_{j+1} - T_j) + \left(\frac{a_1}{2} + 2b_2 + \frac{c_3}{2} \right) (T_{j+1} - T_j)^2 \right. \\ & \left. + \left(a_2 + \frac{b_3}{2} \right) (T_{j+1} - T_j)^3 + a_3 \frac{(T_{j+1} - T_j)^4}{4} + c_1 \right] \\ & \leq \rho < 1 \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1 Etude de l'existence de la solution

Pour étudier l'existence de la solution de notre équation, on va appliquer la méthode de Picard sur des intervalles réduits, en commençant par le premier interval $[T_0, T_1[$.

Mais, tout d'abord nous effectuons le changement de variable suivant :

$$\forall t \in [a, b], \quad v(t) = u''(t). \quad \text{Mais } f'(a) = u'(a).$$

On obtient alors :

$$u'(t) = \int_a^t v(s) ds + f'(a), \quad \forall t \in [a, b].$$

En utilisant $u(a) = f(a)$, on obtient pour tout $t \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
\int_a^t u'(s) ds &= \int_a^t \int_a^s v(\theta) d\theta ds + \int_a^t f'(a) ds \\
[u(s)]_a^t &= \int_a^t \int_a^s v(\theta) d\theta ds + (t-a) f'(a) \\
u(t) - u(a) &= \int_a^t \int_a^s v(\theta) d\theta ds + (t-a) f'(a) \\
u(t) &= \int_a^t (t-s) v(s) ds + (t-a) f'(a) + f(a).
\end{aligned}$$

ce qui transforme l'équation (2.1) en

$$\begin{aligned}
\forall t \in [a, b], v(t) &= k(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) + 2 \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \\
&+ \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Où, A et B sont deux opérateurs, définis de $C^0[a, b]$ dans lui même tel que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in C^0 &\in [a, b], \\
Ax(t) &= \int_a^t (t-s) x(s) ds, \\
Bx(t) &= \int_a^t x(s) ds,
\end{aligned}$$

La méthode de Picard consiste à construire une suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C^0[a, b]$ définie pour

tout $t \in [a, b]$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_0(t) = f''(t), \\ v_n(t) = k(t, t, Av_{n-1}(t), Bv_{n-1}(t), v_{n-1}(t)) \\ + 2 \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av_{n-1}(s), Bv_{n-1}(s), v_{n-1}(s)) ds \\ + \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av_{n-1}(s), Bv_{n-1}(s), v_{n-1}(s)) ds + f''(t). \end{array} \right.$$

Théorème 2.1 *Sous les hypothèses (H1) et (2.4) l'équation(2.1) admet une solution.*

Preuve. Pour montrer l'existence de la solution, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(t) = f'(t) \\ \varphi_n(t) = v_n(t) - v_{n-1}(t), \quad \forall n \geq 1 \end{array} \right.$$

Rappelons que, $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ normalement convergente implique qu'elle est convergent, c-à-d

$$\sum_{n \geq 1} \|\varphi_n\| < +\infty \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \varphi_n < +\infty.$$

Notre but est de démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \varphi_n$ est normalement convergente sur $[T_0, T_2]$, en utilisant les hypothèses précédentes

On entame nos calculs : $\forall t \in [T_0, T_1]$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &\leq |k(t, t, Av_n(t), Bv_n(t), v_n(t)) - k(t, t, Av_{n-1}(t), Bv_{n-1}(t), v_{n-1}(t))| \\ &+ 2 \int_a^t \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av_n(s), Bv_n(s), v_n(s)) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av_{n-1}(s), Bv_{n-1}(s), v_{n-1}(s)) \right| ds \\ &+ \int_a^t (t-s) \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av_n(s), Bv_n(s), v_n(s)) - \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av_{n-1}(s), Bv_{n-1}(s), v_{n-1}(s)) \right| ds \end{aligned}$$

En appliquant les hypothèses (H1) – (3) on obtient :

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(t)| &\leq a_1 |Av_n(t) - Av_{n-1}(t)| + b_1 |Bv_n(t) - Bv_{n-1}(t)| + c_1 |v_n(t) - v_{n-1}(t)| \\
&\quad + 2 \int_a^t a_2 |Av_n(s) - Av_{n-1}(s)| + b_2 |Bv_n(s) - Bv_{n-1}(s)| + c_2 |v_n(s) - v_{n-1}(s)| ds \\
&\quad + \int_a^t (t-s) (a_3 |Av_n(s) - Av_{n-1}(s)| + b_3 |Bv_n(s) - Bv_{n-1}(s)| \\
&\quad \quad + c_3 |v_n(s) - v_{n-1}(s)|) ds
\end{aligned}$$

■

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
|Av_n(t) - Av_{n-1}(t)| &= \left| \int_a^t (t-s) v_n(s) ds - \int_a^t (t-s) v_{n-1}(s) ds \right| \\
&\leq \int_a^t (t-s) |v_n(s) - v_{n-1}(s)| ds \\
&\leq \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \int_a^t (t-s) ds \\
&\leq \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Aussi, nous avons

$$\begin{aligned}
|Bv_n(t) - Bv_{n-1}(t)| &= \left| \int_a^t v_n(s) ds - \int_a^t v_{n-1}(s) ds \right| \\
&\leq \int_a^t |v_n(s) - v_{n-1}(s)| ds \\
&\leq \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \int_a^t ds \\
&\leq (T_1 - T_0) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)}
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

Ce qui donne pour tout $t \in [T_0, T_1]$:

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(t)| &\leq a_1 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} + b_1 (T_1 - T_0) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
&\quad + c_1 \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
&\quad + 2 \int_a^t \left(a_2 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} + b_2 (T_1 - T_0) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \right. \\
&\quad \left. + c_2 \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \right) ds \\
&\quad + \int_a^t (t - s) \left(a_3 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} + b_3 (T_1 - T_0) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \right. \\
&\quad \left. + c_3 \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \right) ds \\
&\leq \left(a_1 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_1 (T_1 - T_0) + c_1 \right) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
&\quad + \left(a_2 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_2 (T_1 - T_0) + c_2 \right) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} 2 \int_a^t ds \\
&\quad + \left(a_3 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_3 (T_1 - T_0) + c_3 \right) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \int_a^t (t - s) ds
\end{aligned}$$

C'est à dire :

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(t)| &\leq \left(a_1 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_1 (T_1 - T_0) + c_1 \right) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
&\quad + \left(a_2 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_2 (T_1 - T_0) + c_2 \right) 2 (T_1 - T_0) \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
&\quad + \left(a_3 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_3 (T_1 - T_0) + c_3 \right) \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)}
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(t)| &\leq \left[(b_1 + 2c_2)(T_1 - T_0) + \left(\frac{a_1}{2} + 2b_2 + \frac{c_3}{2} \right) (T_1 - T_0)^2 \right. \\
&\quad \left. + \left(a_2 + \frac{b_3}{2} \right) (T_1 - T_0)^3 + a_3 \frac{(T_1 - T_0)^4}{4} \right] \\
&\quad + c_1 \|v_n - v_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)}
\end{aligned}$$

Ce qui donne : $\forall n \geq 1$,

$$\|\varphi_{n+1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \leq \rho \|\varphi_{n-1}\|_{C^0(T_0, T_1)},$$

Alors : $\forall n \geq 0$,

$$\|\varphi_{n+1}\|_{C^0(T_0, T_1)} \leq \rho^{n+1} \|\varphi_0\|_{C^0(T_0, T_1)}.$$

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} \|\varphi_n\|_{C^0(T_0, T_1)} \leq \sum_{n \geq 0} \rho^n \|\varphi_0\|_{C^0(T_0, T_1)} \leq \left(\frac{1}{1 - \rho} \right) \|\varphi_0\|_{C^0(T_0, T_1)}.$$

Maintenant, on a, $\sum_{n \geq 0} \|\varphi_n\|_{C^0(T_0, T_1)}$ une série normalement convergente donc $\sum_{n \geq 0} \varphi_n$ est une série convergente. Alors il est clair que pour $t \in [T_0, T_1]$,

$$v_n(t) = \sum_{j=0}^n \varphi_j.$$

Ce qui fait qu'il existe $v \in C^0([T_0, T_1])$ tel que,

$$v(t) = \sum_{n \geq 0} \|\varphi_n\| \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$$

Ce qui reste à démontrer maintenant est que v est vraiment une solution pour notre équation. On va le démontrer par la méthode suivante :

On suppose que $\delta_n(t) = v(t) - v_n(t)$,

pour tout $t \in [T_0, T_1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \left| v(t) - k(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) - 2 \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \right| \\
= & \left| \delta_{n+1}(t) + v_{n+1}(t) - k(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) - 2 \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \right| \\
\leq & |\delta_{n+1}(t)| + |k(t, t, Av_n(t), Bv_n(t), v_n(t)) - k(t, t, Av(t), Bv(t), v(t))| \\
& + 2 \int_a^t \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av_n(s), Bv_n(s), v_n(s)) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) \right| ds \\
& + \int_a^t (t-s) \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av_n(s), Bv_n(s), v_n(s)) - \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) \right| ds
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant (H1) – (3) et (2.5)(2.6), on obtient

$$\begin{aligned}
& \left| v(t) - k(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) - 2 \int_a^t \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \right. \\
& \quad \left. - \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \right| \\
& \leq |\delta_{n+1}(t)| + \left(a_1 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_1(T_1 - T_0) + c_1 \right) \|\delta_n(t)\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
& \quad + \left(a_2 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_2(T_1 - T_0) + c_2 \right) 2(T_1 - T_0) \|\delta_n(t)\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
& \quad + \left(a_3 \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} + b_3(T_1 - T_0) + c_3 \right) \frac{(T_1 - T_0)^2}{2} \|\delta_n(t)\|_{C^0(T_0, T_1)} \\
& \leq |\delta_{n+1}(t)| + \rho \|\delta_n(t)\|_{C^0(T_0, T_1)} \leq \|\delta_{n+1}(t)\|_{C^0(T_0, T_1)} + \rho \|\delta_n(t)\|_{C^0(T_0, T_1)}
\end{aligned}$$

on sait que $\|\delta_n(t)\|_{C^0(T_0, T_1)}$ tend vers zéro quand $n \rightarrow +\infty$, donc v est une solution pour notre équation sur le sous intervalle $[T_0, T_1]$.

2.2 Etude de l'unicité de la solution

Théorème 2.2 *si les conditions (H1) et (2.4) sont vérifiées alors la solution de l'équation (2.1) est unique*

On conclut que l'équation (2.1) admet une unique solution.

2.2.1 Prolongement de la solution

On revient à la forme initiale (2.1); nous venons de démontrer l'existence et l'unicité dans $[T_0, T_1]$. Pour $t \in [T_1, T_2]$

notre équation peut être présentée par

$$\forall t \in [T_1, T_2],$$

$$u(t) = \int_{T_1}^t (t-s) k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t) + \int_{T_0}^{T_1} (t-s) k(t, s, u_1(s), u_1'(s), u_1''(s)) ds,$$

qui a la même forme que (2.1) mais avec

$$F(t) = f(t) + \int_{T_0}^{T_1} (t-s) k(t, s, u_1(s), u_1'(s), u_1''(s)) ds$$

On fait les mêmes étapes pour obtenir une solution sur $[T_1, T_2]$

il suffit de coller ces solutions pour obtenir u solution de (2.1) sur $[a, b]$ car le nombre des sous intervalles est fini.

Chapitre 3

Etude Numérique de L'équation intégré-différentielle non linéaire de Volterra du seconde espèce de degré deux

Dans le chapitre précédente, nous avons montrer que l'équation suivante :

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = \int_a^t (t-s) k(t, s, u(s), u'(s), u''(s)) ds + f(t), \quad (3.1)$$

admet une unique solution pour tout $f \in C^2 [a, b]$, sous les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned}
 & (1) \quad \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \in C([0, T]^2 \times \mathbb{R}), \\
 & (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [0, T], \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \\
 & \quad \max \left(|k(t, s, x, y, z)|, \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y, z) \right|, \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, x, y, z) \right| \right) \leq M \\
 (H) \quad & (3) \quad \exists a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{R}, \forall x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}, \forall t, s \in [a, b], \\
 & \quad |k(t, s, x, y, z) - k(t, s, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| \leq a_1|x - \bar{x}| + b_1|y - \bar{y}| + c_1|z - \bar{z}|, \\
 & \quad \left| \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, x, y, z) - \frac{\partial k}{\partial t}(t, s, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| \leq a_2|x - \bar{x}| + b_2|y - \bar{y}| + c_2|z - \bar{z}|, \\
 & \quad \left| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, x, y, z) - \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, s, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| \leq a_3|x - \bar{x}| + b_3|y - \bar{y}| + c_3|z - \bar{z}|, \\
 & (4) \quad c_1 < 1
 \end{aligned}$$

Nous avons procédé par changement de variable, en introduisant la fonction $v = u''$.
Ce qui a donné l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
 \forall t \in [a, b], \quad v(t) &= k(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) + 2 \int_a^t \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) dt \\
 &+ \int_a^t (t-s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t, t, Av(t), Bv(t), v(t)) dt + f''(t). \tag{3.2}
 \end{aligned}$$

Ou,

$$\begin{aligned}
 Av(t) &= \int_a^t (t-s)v(s) ds +, \\
 Bv(t) &= \int_a^t v(s) ds +.
 \end{aligned}$$

L'objectif de ce chapitre est la construction d'une méthode de Nystrom adéquate pour approcher $v = u''$, puis en déduire u' et u .

3.1 Construction du Système

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une subdivision uniforme de $[a, b]$ comme suit :

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq n.$$

Pour $0 \leq i \leq n$, on fixe $t = t_i$, ce qui donne

$$\begin{aligned} v(t_i) &= k(t_i, t_i, Av(t_i), Bv(t_i), v(t_i)) + 2 \int_a^{t_i} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_i, t_i, Av(t_i), Bv(t_i), v(t_i)) dt \\ &\quad + \int_a^{t_i} (t_i - s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_i, t_i, Av(t_i), Bv(t_i), v(t_i)) dt + f''(t_i). \end{aligned} \quad (3.3)$$

On se donne maintenant une méthode d'intégration numérique définie sur la meme subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$ par :

$$\forall \varphi \in C^0[a, b], \quad \int_a^b \varphi(t) dt \approx \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j), \quad (3.4)$$

Ou, $\{w_j\}_{0 \leq j \leq n}$ sont les poids supposés bien choisi.

En utilisant cette quadrature, nous obtenons pour $1 \leq i \leq n$

$$\int_a^{t_i} \frac{\partial k}{\partial t}(t_i, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \approx \sum_{j=0}^i w_j \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_i, t_j, Av(t_j), Bv(t_j), v(t_j)) dt \quad (3.5)$$

$$\int_a^{t_i} (t_i - s) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_i, s, Av(s), Bv(s), v(s)) ds \approx \sum_{j=0}^{i-1} w_j \frac{\partial^2 k}{\partial t^2}(t_i, t_j, Av(t_j), Bv(t_j), v(t_j)) dt \quad (3.6)$$

On réutilise la meme quadrature pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq i$, ce qui donne

$$Av(t_i) \approx \sum_{j=0}^{i-1} w_j (t_i - t_j) v(t_j), \quad (3.7)$$

$$Bv(t_i) \approx \sum_{j=0}^i w_j v(t_j), \quad (3.8)$$

$$Av(t_j) \approx \sum_{p=0}^{j-1} w_p (t_i - t_p) v(t_p), \quad (3.9)$$

$$Av(t_j) \approx \sum_{p=0}^j w_p v(t_p), \quad (3.10)$$

On remplace $v(t_i) \approx v_i$, pour $1 \leq i \leq n$

Ce qui donne

$$v_i = k \left(t_i, t_i, \sum_{j=0}^{i-1} h w_j (t_i - t_j) v_j + (t_i - a) f'(a) + f(a), \sum_{j=0}^i h w_j v_j, v_i \right) \quad (3.11)$$

$$+ 2 \sum_{j=0}^i h w_j \frac{\partial k}{\partial t} \left(t_i, t_j, \sum_{p=0}^{j-1} h w_p (t_j - t_p) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a), \sum_{p=0}^j h w_p v_p + f'(a), v_j \right) \quad (3.12)$$

$$+ \sum_{j=0}^i h w_j (t_i - t_j) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \left(t_i, t_j, \sum_{p=0}^{j-1} h w_p (t_j - t_p) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a), \sum_{p=0}^j h w_p v_p + f'(a), v_j \right) \quad (3.13)$$

$$v_0 = f''(a) + k(a, a, f(a), 0, v_0) \quad (3.14)$$

notre méthode consiste à résoudre (3.13) et (3.14) et approcher

$$u''(t_i) = v(t_i) \approx v_i \quad (3.15)$$

$$u'(t_i) \approx \sum_{j=0}^i w_j v_j + f'(a) \quad (3.16)$$

$$u(t_i) = Av(t_i) \approx \sum_{j=0}^{i-1} w_j (t_i - t_j) v(t_j) \quad (3.17)$$

3.1.1 Existence et unicité de solution du système de Nystrom :

Dans cette section nous allons montrer que la solution $\{v_i\}_{i=0}^n$ du système de Nystrom existe est unique pour n assez grand, c-à-d le assez petit.

Théorème 3.1 *3.1 (3.2.1) (3 :13) a une solution unique , et pour h suffisamment petit ,*

(3.12) admet une solution unique .

Preuve. : On définit $Q_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;

$$x \rightarrow Q_0(x) = f''(a) + K(a, a, f(a), 0, V_0)$$

$$v_i(x) = k \left(t_i, t_i, \sum_{j=0}^{i-1} h w_j (t_i - t_j) v_j + (t_i - a) f'(a) + f(a), \sum_{j=0}^i h w_j v_j, x \right) \quad (3.18)$$

$$+ 2 \sum_{j=0}^i h w_j \frac{\partial k}{\partial t} \times \left(t_i, t_j, \sum_{p=0}^{j-1} h w_p (t_j - t_p) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a), \sum_{p=0}^j h w_p v_p + f'(a), v_j \right) \quad (3.19)$$

$$+ \sum_{j=0}^i h w_j (t_i - t_j) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \times \left(t_i, t_j, \sum_{p=0}^{j-1} h w_p (t_j - t_p) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a), \sum_{p=0}^j h w_p v_p + f'(a), v_j \right) \quad (3.20)$$

■

Clairement, sous l'hypothèse (H) ; Q_0 est une contraction, et en utilisant point fixe de Banach, on obtient que (3.12) admet une unique solution v_0 . Pour $0 \leq i \leq N$; on définit

Nous avons pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$|Q_0(x) - Q_0(y)| \leq \left| \begin{array}{l} k \left(t_i, t_j, \sum_{j=0}^{i-1} h w_j (t_i - t_j) v_j + (t_i - a) f'(a) + f(a), \sum_{j=0}^{i-1} h w_j v_j + h w_i x, x \right) \\ -k \left(t_i, t_j, \sum_{j=0}^{i-1} h w_j (t_i - t_j) v_j + (t_i - a) f'(a) + f(a), \sum_{j=0}^{i-1} h w_j v_j + h w_i y, y \right) \end{array} \right| \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left| \begin{array}{c} \sum_{j=0}^{i-1} h w_j \frac{\partial k}{\partial t} \left(\begin{array}{c} t_i, t_j, \sum_{p=0}^{j-1} h w_p (t_i - t_j) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a), \\ \sum_{p=0}^j h w_j v_p + f'(a), v_j \end{array} \right) \\ - \sum_{j=0}^i h w_j \frac{\partial k}{\partial t} \left(\begin{array}{c} t_i, t_j, \sum_{p=0}^{j-1} h w_p (t_i - t_j) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a), \\ \sum_{p=0}^j h w_j v_p + f'(a), v_j \end{array} \right) \end{array} \right| \\
& +2 \left| \begin{array}{c} h w_i \frac{\partial k}{\partial t} \left(\begin{array}{c} t_i, t_i, \sum_{p=0}^{i-1} h w_p (t_i - t_p) v_p + (t_i - a) f'(a) + f(a), \\ \sum_{p=0}^{i-1} h w_i v_p + h w_i y + f'(a), x \end{array} \right) \\ - h w_i \frac{\partial k}{\partial t} \left(\begin{array}{c} t_i, t_i, \sum_{p=0}^{i-1} h w_p (t_i - t_p) v_p + (t_i - a) f'(a) + f(a), \\ \sum_{p=0}^{i-1} h w_i v_p + h w_i y + f'(a), y \end{array} \right) \end{array} \right| \\
& + \left| h w_i (t_i - t_j) \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \left(\begin{array}{c} t_n, t_n, \sum_{p=0}^{i-1} h w_p (t_i - t_p) v_p + (t_j - a) f'(a) + f(a) \\ , \sum_{p=0}^1 h w_p v_p f'(a), v_j \end{array} \right) + f''(a) \right|
\end{aligned}$$

$$\leq (b_1 h w_p + c_1 + 2b_2 h^2 w_i^2 + c_2 h w_i) |x - y|$$

(3.22)

3.2 Test Numérique

Nous construisons l'exemple numérique suivant pour montrer l'efficacité de notre méthode numérique et confirmer la cohérence de l'étude théorique.

$$\forall t \in [0,1] \quad u(t) = \int_0^t \frac{ts}{1+u^2(s)+u'^2(s)+u''^2(s)} ds + f(t).$$

Si on prend

$$\forall t \in [0,1] \quad f(t) = -\frac{1}{2} \arctan(2)t + \frac{1}{2} \arctan(t^2 + 2)t,$$

On trouve que

$$\forall t \in [0,1] \quad u(t) = t^2.$$

Les figures suivantes montre l'erreur commise entre la solution exacte et approchée (la fonction, sa dérivée et sa dérivée seconde) pour $n = 10$, $n = 200$.

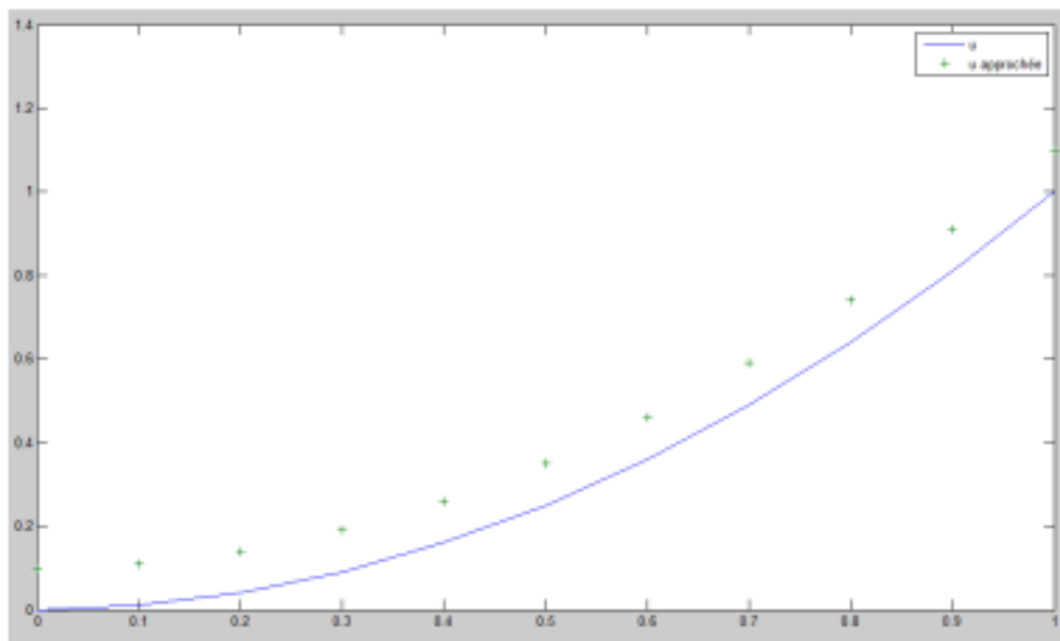


Figure 1 : Erreur pour la fonction pour n=10

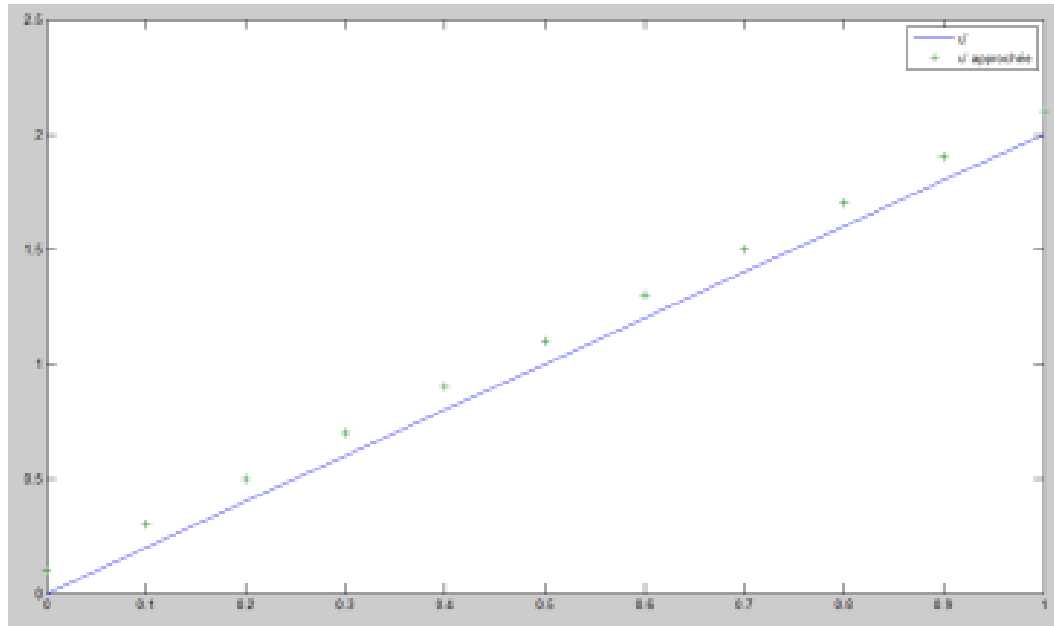


Figure 2 : Erreur pour la dérivée pour n=10

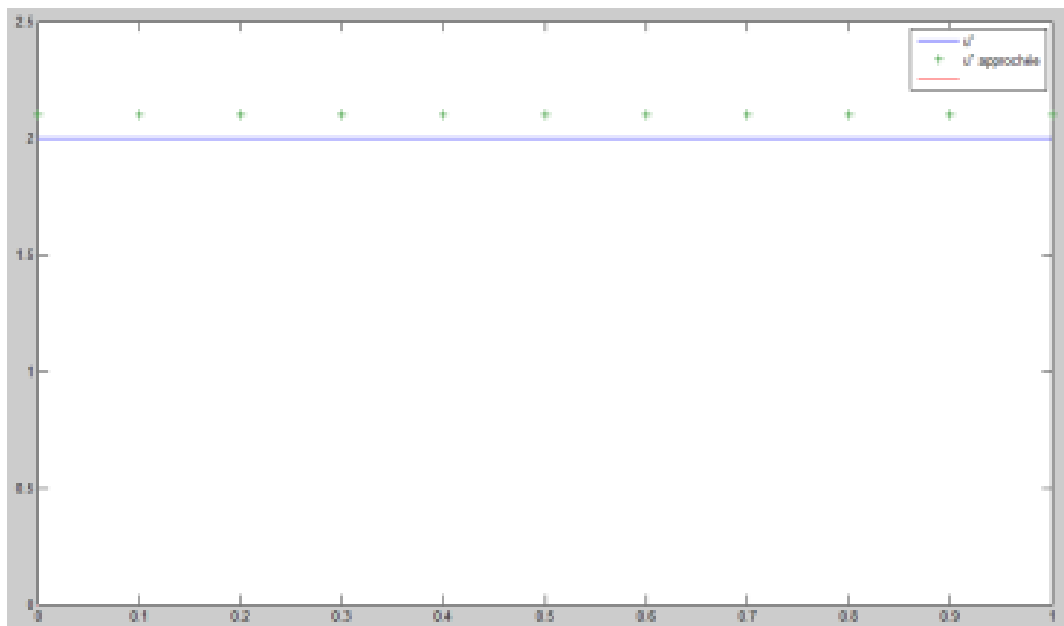


Figure 3 : Erreur pour la dérivée seconde pour n=10

Maintenant, nous présentons les résultats pour n=200.

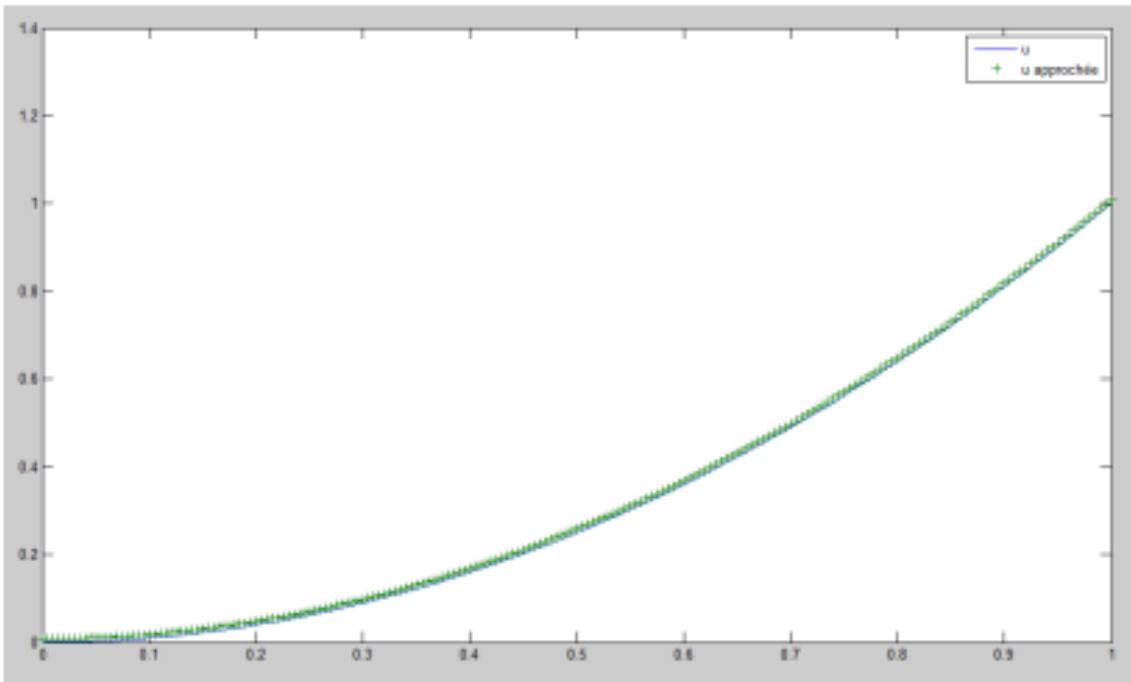


Figure 4 : Erreur pour la fonction pour $n=200$

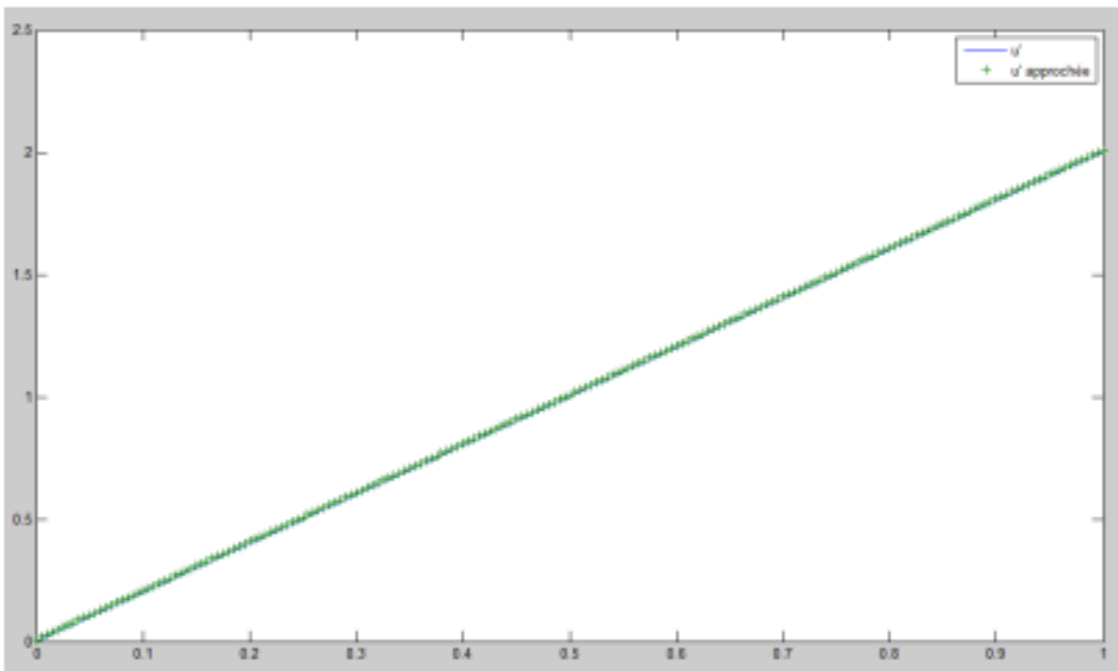


Figure 5: Erreur pour la dérivée pour $n=200$

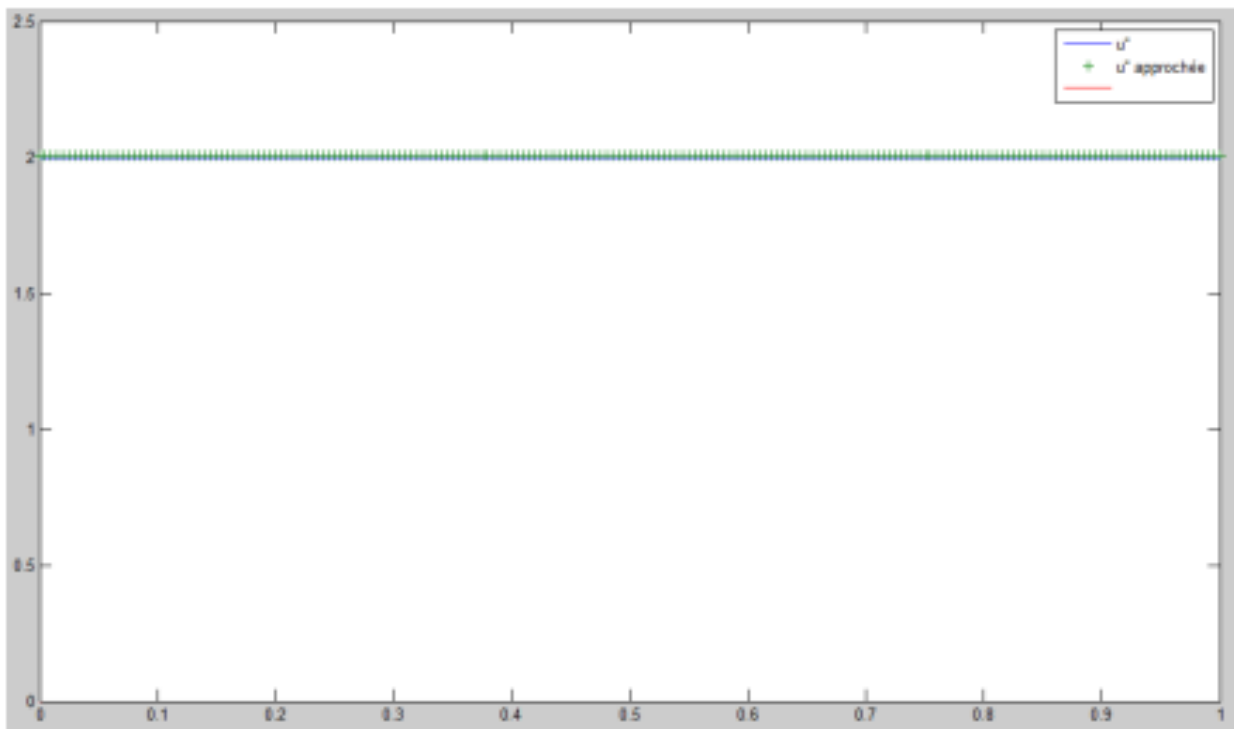


Figure 6 : Erreur pour la dérivée seconde pour $n=200$

Conclusion

Nous avons étudié un nouveau type d'équations integro-différentielles nommée équation integro-différentielle non linéaire de Volterra de deuxième espèce d'ordre 2. Pour cette raison, nous avons transformé notre équation à une équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce.

- Dans l'étude analytique, nous avons utilisé la méthode des suites successives de Picard pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de notre équation sous les hypothèses (H1), qui sont largement suffisantes pour notre étude.

- Dans l'étude numérique, nous avons construit une méthode numérique basée sur la méthode de quadrature des Trapèzes pour chercher la solution approchée de notre équation sous les mêmes conditions (H1).

- Enfin, nous avons présenté un exemple numérique afin de montrer la convergence et la précision de notre méthode.

Bibliographie

- [1] P. Linz, "Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations". SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.
- [2] Mourad Ghat, Hamza Guebbai, "Etude analytique et numérique des équations intègro-différentielle de Volterra : Traitement des noyaux faiblement singuliers". Mathématiques Appliquées, 2018.
- [3] Thèse : Amélioration des conditions d'existence et d'unicité pour les équations intègro-différentielles de Volterra.