République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles Et analyse numérique**

Par :

Mr. Kaour Aimen

Intitulé

Ordre stochastique et applications

Dirigé par : Dr. Ezzebsa Abdelali

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. Sakrani Samia**	**PROF**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Ezzebsa Abdelali**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Rebiai Ghania**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

Résumè

Le but de ce mémoire est de présenter et traiter de manière systématique les ordres stochastiques utilisés en actuariat et de prouver que l'espérance mathématique de la valeur absolue de la différence entre deux variables aléatoires (ne sont pas nécessairement indépendantes) c'est une mesure de sa variabilité au sens de Bickel et Lehmann, si nous ajoutons des conditions à ces variables (par la notion des copules), nous obtiendrons de nouvelles propriétés sur cette mesure. Nous avons également défini des conditions suffisantes pour comparer deux couples aléatoires, et nous avons mentionné deux applications, la première est sur les franchises et limites de la police d'assurance, et la seconde concerne les principes de prime d'assurance.

Mots clés :

Distance aléatoire, principes des primes d'assurance, mesure de la variabilité.

الملخص

الغرض من هذه المذكرة هو تقديم ومعالجة الترتيبات العشوائية المستخدمة في العلوم الاكتوارية بشكل منهجي وإثبات أن التوقع الرياضي للقيمة المطلقة للفرق بين متغيرين عشوائيين ليس بالضرورة مستقلان، هو مقياس لتقلبه حسب بيكل و ليمان. إذا أضفنا شروطًا إلى هذه المتغيرات (بمفهوم الكوبيلا) فسنحصل على خصائص جديدة في هذا المقياس، لقد حددنا أيضًا شروطًا كافية للمقارنة بين زوجين عشوائيين، وقد ذكرنا تطبيقين الأول يتعلق بخصومات وثيقة التأمين وحدودها، والثاني حول مبادئ أقساط التأمين.

الكلمات المفتاحية

مسافة عشوائية، مبادئ أقساط التأمين، قياس التقلب.

Abstract

The purpose of this memory is to systematically present and process the stochastic orders used in actuarial science and to prove that the mathematical expectation of the absolute value of the difference between two random variables not necessarily independent, it is a measure of its variability in the sense of Bickel and Lehmann, if we add conditions to these variables (by the notion of copulas), we will obtain new properties on this measure. We have also defined sufficient conditions to compare two random pairs, and we have mentioned two applications, the first is about insurance policy deductibles and limits, and the second is about insurance premium principles.

Keywords :

Random distance, principles of insurance premiums, variability measure.

Remerciements

Je voudrais dans un premier temps remercier, mon directeur de mémoire Dr. Ezzebsa Abdelali, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie mes chers parents, qui ont toujours été là pour moi, et mes deux frères Wail et Yakoub, pour leurs encouragements.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des ordres stochastiques est l'un des outils les plus importants adoptés par les sciences actuarielles et financières dans la gestion des risques, mesure du risque, sélection et analyse des principes de prime de risque...ect. Ces risques sont modélisés par des variables aléatoires et formulés dans des modèles stochastiques selon la nature des risques et le degré de leur impact, le rôle principal des ordres stochastiques est de permettre de classer les risques selon leur degré de gravité et leur impact sur l'environnement économique, social et humain.

Il y a plusieurs raisons qui m'ont fait choisir ce sujet, dont le plus important est la nouveauté de ce sujet et son traitement de nombreux problèmes auxquels sont confrontés la vie des gens, et qu'il se caractérise par la flexibilité et l'évolutivité, car il se caractérise par des axes de recherches ouverts qui permettent aux chercheurs de développer.

Soit X un couple aléatoire dont les composantes X_1 et X_2 ne sont pas nécessairement indépendantes. Les problèmes à traiter dans ce mémoire sont :

1) L'espérance mathématique de la valeur absolue de la différence entre les composantes de X pourrait-il être une mesure de sa variabilité au sens de Bickel et Lehmann.
2) Quelles sont les conditions suffisantes qui peuvent être fournies pour comparer deux couples aléatoires ?

Ce mémoire se compose de 4 chapitres, que nous expliquons comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons les ordres stochastiques les plus importants utilisés dans le domaine actuariel (ordres stochastiques usule, convexe, concave,...) et leurs propriétés, dans le deuxième chapitre, nous avons évoqué le concept de dépendance et certaines structures de dépendance, dans le troisième chapitre, nous avons abordé la définition des fonctions de copule, certaines de leurs propriétés, et la preuve des problèmes posés. Dans le quatrième chapitre, nous avons mentionné une application sur les franchises et les limites de la police d'assurance, et une application sur les principes de la prime

La méthode de recherche utilisée dans ce mémoire est la méthode inductive et déductive.

Les références les plus importantes sur lesquelles je me suis appuyé sont : [**1**, **4**, **6**]

Chapitre 1

Ordres stochastiques

Dans ce chapitre, nous présenterons et examinerons systématiquement certains types d'ordres stochastiques fréquemment utilisés dans la littérature, notamment en actuariat.

Les ordres stochastiques ne sont que des cas particuliers de relations d'ordre partiel, tout d'abord, nous définirons les relations d'ordre partiel.

Définition 1.0.1. Une relation binaire "$\leq$" sur un ensemble arbitraire A est une relation d'ordre partiel si elle remplit les conditions suivantes :

1 Réflexivité : $a \leq a\ \forall a \in A$.

2 Antisymétrie : si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b\ \forall a, b \in A$.

3 Transitivité : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c\ \forall a, b, c \in A$

Définition 1.0.2. La structure $(A, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné.

Maintenent, on considère $\mathcal{F}_r$ l'ensemble ou le sous-ensemble de toutes les fonctions de répartition des variables aléatoires à valeurs réelles.

Définition 1.0.3. Tout relation d'ordre définie sur $\mathcal{F}_r$ est appelé ordre stochastique

Remarque. L'ordre stochastique définit le concept selon lequel une variable aléatoire est supérieure à l'autre et permet ainsi de comparer deux distributions.

1.1 Ordres stochastiques usuels

Définition 1.1.1. [10] Soient X et Y deux variables aléatoires et soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition [1] (respectivement), et $\bar{F}_X$, $\bar{F}_Y$ sont des fonctions de survie [2] associées a F_X et F_Y (respectivement). On dit que la variable X est plus petite que la variable Y au sens de l'ordre stochastique usuel ($X \leq_{st} Y$), si l'une des deux conditions suivantes est remplie :

(i) $F_X(v) \geq F_Y(v)\ \forall v \in \mathbb{R}$

(ii) $\bar{F}_X(v) \leq \bar{F}_Y(v)\ \forall v \in \mathbb{R}$

Théorème 1. *Soient X et Y deux v.a* [3] *les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $X \leq_{st} Y$

(ii) Il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel sont définies deux v.a X_1 et Y_1 de même lois que X et Y telles que : $X_1 =_{st} X$, $Y_1 =_{st} Y$ et $P(X_1 \leq Y_1) = 1$

Démonstration. Soit Q^X la fonction de quantil de F_X défini par :

$$Q^X : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ v \longmapsto Q^X(v) = F_X^{-1}(v)$$

où : $F_X^{-1}(v) = \inf\{x : F_X(x) \geq v\}$.
Soit V une v.a tel que $V \sim U(0,1)$ et soient : $X_1 = F_X^{-1}(V)$, $Y_1 = F_Y^{-1}(V)$
Donc X_1 et Y_1 sont des v.a de fonctions de répartition F_X et F_Y (resp)
$X \leq_{st} Y \Longleftrightarrow F_X \geq F_Y \Longleftrightarrow F_X^{-1} \leq F_Y^{-1} \Longleftrightarrow X_1 \leq Y_1$ (p.s) $\Longleftrightarrow P(X_1 \leq Y_1) = 1$ □

Proposition 1.1.1. [6] Soient X et Y deux v.a. On considère respectivement F_X et F_Y leurs fonctions de répartitions, pour tout fonction croissante g dont les espérances précédentes existent on a :

$$X \leq_{st} Y \Longleftrightarrow E[g(X)] \leq E[g(Y)] \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.1. 1) Si $X \sim \exp(\lambda_1)$ et $Y \sim \exp(\lambda_2)$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $Y <_{st} X$
2) Si $X \sim Poisson(\lambda_1)$ et $X \sim poisson(\lambda_2)$ tel que $\lambda_1 < \lambda_2$ alors $X <_{st} Y$

1. Une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $F_X(v) = P(X \leq v)$ où P est une probabilité
2. Définie par : $\bar{F}_X = 1 - F_X$
3. Abréviation de la variable aléatoire

Proposition 1.1.2. Soient X et Y deux v.a. On considère respectivement F_X et F_Y leurs fonctions de répartition : $X \leq_{st} Y \Longrightarrow f(X) \leq_{st} f(Y) \quad (f(Y) \leq_{st} f(X))$ si f une fonction croissante (décroissante)

Démonstration. $X \leq_{st} Y \Longrightarrow P[X > x] \leq P[Y > x]$
Comme f est une fonction croissante on a :

$$P[f(X) > f(x)] \leq P[f(Y) > f(x)]$$

En posant $v = f(x)$, alors :

$$P[f(X) > v] \leq P[f(Y) > v]$$

$\forall v \in \mathbb{R}$.
Donc :

$$\bar{F}_{f(X)}(v) \leq \bar{F}_{f(Y)}(v)$$

$\forall v \in \mathbb{R}$.
Donc : $f(X) \leq_{st} f(Y)$
En utilisant la même raisonnement pour f décroissante. □

Proposition 1.1.3. Soient X et Y deux v.a. On considère respectivement F_X et F_Y leurs fonctions de répartition : $X \leq_{st} Y \Longrightarrow$ il existe X^*, Y^* (v.a) tel que : $X =_{st} X^*$ et $Y =_{st} Y^*$ et $X^* \leq Y^*$.

Démonstration. D'après le théorème 1, on trouve directement le résultat. □

Proposition 1.1.4. Soient X et Y deux v.a. On considère respectivement F_X et F_Y leurs fonctions de répartition :

$$X \leq_{st} Y \Longrightarrow E(X) \leq E(Y) \tag{1.2}$$

de plus :

$$X =_{st} Y \Longleftrightarrow E(X) = E(Y) \tag{1.3}$$

Démonstration. Comme $g(X) = x$ est une fonction croissante alors d'aprés la proposition 1.1.1 on a : $E(X) \leq E(Y)$

De plus : $E(X) \leq E(Y) \Longleftrightarrow 0 = E(X) - E(Y) = \int_0^{+\infty} [\bar{F}_X(v) - \bar{F}_Y(v)]dv$ avec : $E(X) = \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(v)dv$ et $E(Y) = \int_0^{+\infty} \bar{F}_Y(v)dv$. Comme $X \leq_{st} Y$ alors on a : $\bar{F}_X(v) - \bar{F}_Y(v) \leq 0$ pour tout v alors : $\bar{F}_X(v) = \bar{F}_Y(v)$, c'est à dire : $F_X(v) = F_Y(v)$ donc X et Y ont la même loi.

. □

La théorie traditionnelle du risque propose de nombreuse techniques pour traiter les risques (v.a). Un contrat de réassurance détermine les règles selon lesquelles le risque est transféré entre la cédante et le réassureur. Il existe deux types de contrats, proportionnel et non proportionnel. l'un des types de réassurance non proportionnelle, l'excédent de perte ou stop/loss. Il s'agit d'une réassurance globale pour un ensemble d'affaires lorsque les sinistres sont supérieurs à un certain pourcentage à déterminer lors de la signature du traité. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ on définit la prime stop loss comme suit :

$$E[(X-c)^+] = \int_c^{+\infty} \bar{F}_X(v)dv \tag{1.4}$$

où : $(X-c)^+ = \max(X-c, 0)$.

1.2 Ordres convexe et convexe croissant

Définition 1.2.1. (Ordre convexe croissant)[**7**] Soient X et Y deux v.a, on dit que X est plus petit que Y au sens de l'ordre convexe croissant ($X \leq_{icx} Y$) si et seulement si :

$$E[(X-c)^+] \leq E[(Y-c)^+]$$

(aussi appelé ordre de stop/loss).

Définition 1.2.2. (Ordre convexe) [**1**] Soient X et Y deux v.a, on dit que X est plus petit que Y au sens de l'ordre convexe ($X \leq_{cx} Y$) si et seulement si, pour tout fonction convexe K on a :

$$E[K(X)] \leq E[K(Y)]$$

En d'autre terme :

$$(X \leq_{cx} Y) \Longleftrightarrow (E(X) = E(Y) \quad et \quad X \leq_{icx} Y)$$

Les propriétés suivantes sont extraites de [2]

Propriété 1.2.1. Soient X et Y deux v.a. Si $X \leq_{cx} Y$ alors : $E(X) = E(Y)$ et $Var(X) \leq Var(Y)$.

Propriété 1.2.2. Soient X,Y et Z trois v.a de sorte que Z est indépendant de X et Y. Si $X \leq_{cx} Y$ alors $X + Z \leq_{cx} Y + Z$.

Propriété 1.2.3. Soient X et Y deux v.a. on a :

$$(X \leq_{cx} Y) \Longleftrightarrow (-X \leq_{cx} -Y)$$

Propriété 1.2.4. Soient X et Y deux v.a. On a :

$$(X \leq_{cx} Y) \Longleftrightarrow (\quad E(|X - b|) \quad \leq_{cx} \quad E(|Y - b|) \quad)$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$.

Théorème 2. *(Théorème de séparation) Soient X et Y deux v.a, on dit que $X \leq_{icx} Y$ si et seulement s'il existe v.a Z tel que $X \leq_{st} Z \leq_{cx} Y$*

Démonstration. Nous basons sur l'idée de comonotonie mentionnée au chapitre 2, section 2.1 □

1.3 Ordres concave et concave croissant

Définition 1.3.1. (Ordre concave croissant)[**1**] Soient X et Y deux variables aléatoires et soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition (respectivement). On dit que X est plus petite que Y au sensé de l'ordre concave croissante ($X \leq_{icv} Y$) si pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{t} F_Y(v)dv \leq \int_{-\infty}^{t} F_X(v)dv$$

Autrement dit, pour tout fonction concave croissante h on a :

$$E[h(X)] \leq E[h(Y)]$$

Définition 1.3.2. (Ordre concave)[**10**] Soient X et Y deux variables aléatoires et soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition (respectivement). On dit que X est plus petite que Y au sensé de l'ordre concave ($X \leq_{cv} Y$) si pour tout $c \in \mathbb{R}$:

$$E[(c-Y)^+] \leq E[(c-X)^+]$$

Avec : $E[(c-X)^+] = \int_{-\infty}^{+\infty}(c-t)dF_X(t) \quad \forall c \in \mathbb{R}$

1.4 Ordre en tranformée de Laplace

Nous avons écrit cette section sur la base de références [**10**] et [**12**]

Définition 1.4.1. Soient X et Y deux variables aléatoires positives. On dit que X est plus petite que Y au sens de l'ordre en transformée de Laplace ($X \leq_{Lt} Y$) si :

$$E[e^{-tY}] \leq E[e^{-tX}]$$

Définition 1.4.2. (Tranformée de Laplace) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X absolument continue et de densité f, $T_X(\alpha)$ et $T_X^*(\alpha)$ sont des transformées de Laplace de f et F (resp) :

$$T_X(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} f(v)dv \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$$

et :

$$T_X^*(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} F(v)dv \;\; \forall \alpha \in \mathbb{R}_+$$

Proposition 1.4.1. Soient X et Y deux variables aléatoires positives, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ on a :

(i) $X \leq_{Lt} Y \Longrightarrow T_Y(\alpha) \leq T_X(\alpha)$

(ii) $X \leq_{Lt} Y \Longrightarrow T_Y^*(\alpha) \leq T_X^*(\alpha)$

Proposition 1.4.2. Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X continue alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$T_X^*(\alpha) = \frac{1}{\alpha} T_X(\alpha) \tag{1.5}$$

Démonstration. En utilisant l'intégration par parties, nous obtenons directement le résultat □

Définition 1.4.3. (Tranformée de Laplace-Stieltjes) Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X et $\bar{F}_X$ fonction de survie associée a F_X. Pour tout $\alpha > 0$ on a :

* Tranformée de Laplace-Stieltjes de F défini par :

$$TG(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} dF(v)$$

* Tranformée de Laplace-Stieltjes de $\bar{F}$ défini par :

$$TG^*(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} d\bar{F}(v)$$

Proposition 1.4.3. Soit X v.a positive. Pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$TG^*(\alpha) = \frac{1 - TG(\alpha)}{\alpha} \tag{1.6}$$

Démonstration. Pour tout $\alpha > 0$ on a :

$$TG^*(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} \bar{F}(v) dv$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} (1 - F(v)) dv$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} F(v) dv$$

$$TG^*(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - [-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha v} F(v)]_0^{+\infty} - \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha v} dF(v) = \frac{1 - TG^*(\alpha)}{\alpha}$$

□

Proposition 1.4.4. Soient X et Y deux variables aléatoires positives, si $X \leq_{Lt} Y$ alors on a :

(i) $E(X) \leq E(Y)$,

(ii) Pour tout fonction g monotone on a : $E[g(Y)] \leq E[g(X)]$

Depuis longtemps, les mathématiciens ont introduit plusieurs ordres stochastiques, à cause de leurs besoin croissants, pour comparer les distributions de probabilités entre deux variables aléatoires, notamment : ordre dispersif, ordre de l'excès de richesse, ordre de hasard et ordre de rapport de vraisemblance.

1.5 Ordre dispersif

Définition 1.5.1. ([1] page 3) Soient X et Y deux variables aléatoires et soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition (respectivement). On dit que la variable X est plus petite que la variable Y au sens de l'ordre dispersif ($X \leq_{disp} Y$) si pour tout p_1,$p_2 \in [0,1]$ (où $p_1 \leq p_2$) on a :

$$F_X^{-1}(p_1) - F_X^{-1}(p_2) \leq F_Y^{-1}(p_1) - F_Y^{-1}(p_2) \tag{1.7}$$

Remarque. $X \leq_{disp} Y \Longleftrightarrow$ La fonction $t \longmapsto F_Y^{-1}(t) - F_X^{-1}(t)$ $(t \longmapsto \bar{F}_Y^{-1}(t) - \bar{F}_X^{-1}(t)$) est croissante (est décroissante)sur (0,1).

Proposition 1.5.1. Soient X et Y deux v.a et c réel, $X \leq_{disp} Y$ si et seulement si

$$(X + c \leq_{disp} Y \quad \forall c \in \mathbb{R})\ ou(-X \leq_{disp} -Y)$$

Proposition 1.5.2. Soient X v.a et $a \geq 1$, alors ona : $X \leq_{disp} aX$

Définition 1.5.2. [14] Soient X et Y deux vecteurs aléatoire dans $\mathbb{R}^n$. On dit que $X \leq_{disp} Y$ si

$$\left\|\hat{X}(v) - \hat{X}(u)\right\|_2 \leq \left\|\hat{Y}(v) - \hat{Y}(u)\right\|_2 \ \forall\ u,v \ \in (0,1)^n$$

où $\hat{X}$ et $\hat{Y}$ les fonctions quantiles de X et de Y.

1.6 Ordre de l'excès de richesse

Définition 1.6.1. ([1] page 4) Soient X et Y deux variables aléatoires et soient F_X et F_Y leurs fonctions de répartition, et $\bar{F}_X$, $\bar{F}_Y$ sont des fonctions de survie associées a F_X et F_Y. On dit que la variable X est plus petite que la variable Y au sens de l'ordre l'excès de richesse ($X \leq_{ew} Y$) si :

$$\int_{F_X^{-1}(\beta)}^{+\infty} \bar{F}_X(v)dv \leq \int_{F_Y^{-1}(\beta)}^{+\infty} \bar{F}_Y(v)dv, \quad \forall \beta \in (0,1)$$

1.7 Ordre de hasard

Définition 1.7.1. (Fonction de hasard) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F_X absolument continue et $\bar{F}_X$ fonction de survie associée a F_X et f_X la densité de X. La fonction de hasard à l'instant t (ou taux de panne, taux de défaillance, taux de décès, risque instantané, etc.) est définie par :

$$h_X(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{P[X \leq t + \Delta t | X > t]}{\Delta t}$$

Remarque. Comme $P[X \leq t{+}\Delta t | X > t] = \frac{P[t<X\leq t+\Delta t]}{P[X>t]}$ et $f_X(t) = F'(t) = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{P[t<X\leq t+\Delta t]}{\Delta t}$ alors on a : $h_X(t) = \frac{f_X(t)}{\bar{F}_X(t)} = -\frac{d\ln(\bar{F}_X(t))}{dt}$

Définition 1.7.2. (Ordre de hasard) Soient X et Y deux variables aléatoires et soient $h_X(t)$ et $h_Y(t)$ leurs fonctions de hasard (respectivement). On dit que la variable X est plus petite que la variable Y au sens de l'ordre de hasard ($X \leq_{hr} Y$) si :

$$h_X(t) \leq h_Y(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Autrement dite : $X \leq_{hr} Y$ si : La fonction $t \longrightarrow \frac{\bar{F}_Y(t)}{\bar{F}_x(t)}$ est croissante.

Propriété 1.7.1. Soient X et Y deux variables aléatoires, si $X \leq_{hr} Y$ alors on a :

(i) Pour tout fonction f croissante : $f(X) \leq_{hr} f(Y)$.

(ii) Pour tout fonction g décroissante : $g(Y) \leq_{hr} g(X)$

Définition 1.7.3. Soient X et Y deux variables aléatoires continues. On dit que $X \leq_{hr} Y$ si l'une des conditions suivantes est remplie :

1) $\frac{f_X(t_1)}{\bar{F}_X(t_2)} \leq \frac{f_Y(t_1)}{\bar{F}_Y(t_2)} \quad \forall t_1 \leq t_2$

2) $\frac{\bar{F}_X(t+s)}{\bar{F}_X(t)} \leq \frac{\bar{F}_Y(t+s)}{\bar{F}_Y(t)} \quad \forall s > 0 \; et \; t \in \mathbb{R}$

3) $P[X - t > s|X > t] \leq P[Y - t > s|Y > t] \;\; \forall s, t \in \mathbb{R}$

4) $\frac{1-F_X(F_Y^{-1}(1-v))}{v} \leq \frac{1-F_X(F_Y^{-1}(1-u))}{u} \;\; \forall 0 < v \leq u < 1$

Définition 1.7.4. X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que $X \leq_{hr} Y$ si

$$P[X \geq n_1]P[Y \geq n_2] \geq P[X \geq n_2]P[Y \geq n_1] \;\; \forall n_1 \leq n_2$$

Définition 1.7.5. (Ordre de hasard inverse) Soient X et Y deux variables aléatoires et soient $h_X(t)$ et $h_Y(t)$ leurs fonctions de hasard (respectivement). On dit que la variable X est plus petite que la variable Y au sens de l'ordre de hasard inverse ($X \leq_{rh} Y$) si la fonction $t \longmapsto \frac{F_Y(t)}{F_X(t)}$ est croissante.

1.8 Ordre de rapport de vraisemblance $\leq_{Lr}$

Définition 1.8.1. Soient X et Y deux variables aléatoires et soient f_X et f_Y leurs densités (respectivement) par rapport a une mésure commune. On dit que $X \leq_{Lr} Y$ si :

$$f_X(t)f_Y(s) \leq f_X(s)f_Y(t) \quad \forall s \leq t \tag{1.8}$$

Proposition 1.8.1. ([**12**] page 46) Si $X \leq_{lr} Y$ et h est toute fonction décroissante, alors

$$h(Y) \leq_{Lr} h(X) \tag{1.9}$$

Chapitre 2

Dépendance

La théorie classique du risque repose sur l'hypothèse de l'indépendance des variables aléatoires, ce qui conduit à des difficultés de couverture des événements exclus du contrat d'assurance (comme les inondations et les tremblements de terre). Les relations de dépendance entre variables aléatoires sont parmi les sujets les plus étudiés en probabilités et statistiques, la nature de la dépendance peut prendre plusieurs formes à moins que certaines conditions ne soient fixées autour de la dépendance par conséquent, des conditions précises doivent être définies pour atteindre un modèle stochastique significatif.

Dans ce chapitre, nous discuterons de certaines méthodes pour étudier et mesurer la dépendance entre variables aléatoires, et nous discuterons également de leurs propriétés, et nous découvrirons également les structures de dépendance les plus importantes.

Les références utilisées dans ce chapitre sont [**4**], [**8**], [**6**] et [**1**]

2.1 Comonotonie et antimonotonie

Définition 2.1.1. (Classe de Fréchet) On note $\mathcal{K}(F_1, F_2)$ l'ensemble des fonctions de répartition bivariées dont les fonctions de répartition marginales sont F_1 et F_2 respectivement.

Remarque. $\mathcal{K}(F_1,...,F_n)$ est l'espace de Fréchet de tous les vecteurs aléatoires à n-dimensions dont les distributions marginales sont $F_1,...,F_n$ respectivement.

Définition 2.1.2. (Bornes de Fréchet)

1) On appelle borne supérieure de Fréchet dans $\mathcal{K}(F_1,F_2)$, tout fonction de répartition définie comme suit :

$$W(x,y) = \min\{F_1(x), F_2(y)\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.1}$$

2) On appelle borne inférieure de Fréchet dans $\mathcal{K}(F_1,F_2)$, tout fonction de répartition définie comme suit :

$$M(x,y) = \max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.1. La classe $\mathcal{K}(F_1,F_2)$ est bornée, c'est à dire, pour tout $F_X \in \mathcal{K}(F_1,F_2)$ on a :

$$M(x,y) \leq F_X(x,y) \leq W(x,y) \tag{2.3}$$

Démonstration. Soient D_1 , D_2 deux événements aléatoires quelconques, on a la majoration suivante :

$$\max\{P(D_1) + P(D_2) - 1, 0\} \leq P(D_1 \cap D_2) \leq \min\{P(D_1), P(D_2)\} \tag{2.4}$$

On pose : $D_1 = \{X \leq x\}$ et $D_2 = \{Y \leq y\}$, alors donc :

$$\max\{P(X \leq x) + P(Y \leq y) - 1, 0\} \leq P(X \leq x, Y \leq y) \leq \min\{P(X \leq x), P(Y \leq y)\}$$

Donc :

$$\max\{F_1(x) + F_2(y) - 1, 0\} \leq F_U(x,y) \leq \min\{F_1(x), F_2(y)\}$$

avec : $U = (X,Y)$ □

Remarque. $\mathcal{K}(F_1,F_2)$ est non vide.

Définition 2.1.3. (Dépendance parfaite) Soit $T = (T_1, T_2)$ est un couple aléatoire,

1) On dit que T est comonotone s'il existe des fonctions croissantes h_1 et h_2 et une variable aléatoire V telles que :

$$T =_{loi} (h_1(V), h_2(V))$$

2) On dit que T est antimonotonie s'il existe une fonction croissante h_1, une fonction décroissante h_2 et une variable aléatoire V telles que

$$T =_{loi} (h_1(V), h_2(V))$$

Proposition 2.1.2. (Dépendance parfaite et bornes de Fréchet)

(i) $T = (T_1, T_2)$ est comonotone $\Longleftrightarrow$ W est la fonction de répartition de T

(ii) $T = (T_1, T_2)$ est antimonotone $\Longleftrightarrow$ M est la fonction de répartition de T

Proposition 2.1.3. Supposons F_1 et F_2 continues, alors

(i) $T = (T_1, T_2)$ est comonotone $\Longleftrightarrow (T_1, T_2) =_{loi} (T_1, F_2^{-1}(F_1(T_1))$

(ii) $T = (T_1, T_2)$ est antimonotone $\Longleftrightarrow (T_1, T_2) =_{loi} (T_1, F_2^{-1}(\bar{F}_1(T_1))$

Théorème 3. *On dit que le vecteur aléatoire $X = (X_1, ...X_n)$ est comonotone si et seulement si (X_i, X_j) est comonotone, pour tout $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ tel que i différent de j*

Proposition 2.1.4. Le vecteur aléatoire$X = (X_1, ..., X_n)$ est comonotone si et seulement s'il existe un variable aléatoire Z et des fonctions croissantes$(f_1, ..., f_n)$ tel que :

$$X =_{loi} (f_1(Z), ..., f_n(Z)) \tag{2.5}$$

Proposition 2.1.5. Si $(Y_1, ..., Y_n) \in \mathcal{K}(F_1, ..., F_n)$ est comonotone alors, pour tout $(X_1, ..., X_n) \in \mathcal{K}(F_1, ..., F_n)$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{2.6}$$

2.2 Mesure de dépendance

L'idée d'étudier l'association entre deux ou plusieurs variables aléatoires est de vérifier l'existence d'une relation entre deux phénomènes, si elle n'existe pas, on dit alors que les variables sont indépendantes, mais s'il existe une relation entre les deux phénomènes, on cherche à connaître l'effet de l'un sur l'autre.

Dans cette section, nous étudierons certaines mesures de dépendance. Nous verrons que le coefficient de corrélation linéaire perd beaucoup de son importance pour les variables continues. Par contre, nous verrons qu'il existe certains coefficients qui fournissent de bonnes mesures de dépendance, à savoir le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Définition 2.2.1. (Mesure de concordance) Soient X et Y deux variables aléatoires. Soit $\beta(.,.)$ une mesure de dépendance. On dit que $\beta(.,.)$ est une mesure de concordance si :

1) Pour tout deux v.a Z_1 et Z_2 on a : $\beta(Z_1, Z_2) = \beta(Z_2, Z_1)$

2) Pour tout deux v.a Z_1 et Z_2 on a : $\beta(Z_1, Z_2) \in [-1, 1]$

3) Pour tout deux v.a Z_1 et Z_2 on a : $\beta(Z_1, Z_2) = 1 \Longleftrightarrow Z_1$ et Z_2 sont comonotones

4) Pour tout deux v.a Z_1 et Z_2 on a : $\beta(Z_1, Z_2) = -1 \Longleftrightarrow Z_1$ et Z_2 sont antimonotones

5) Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante ou strictement décroissante, pour tout deux v.a Z_1 et Z_2 on a :

$$\beta(g(Z_1), Z_2) = \beta(Z_1, Z_2), \; si \;\; g \;\; strictement \;\; croissante$$

et

$$\beta(g(Z_1), Z_2) = -\beta(Z_1, Z_2) \;\; sinon$$

Définition 2.2.2. (Covariance et covariance conditionnelle)

1) La covariance entre les v.a X et Y donnée par la formule :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

2) Soit Γ un vecteur aléatoire de dimension n. La covariance conditionnelle des v.a X et Y étant donné Γ est la v.a :

$$Cov(X,Y|\Gamma) = E(XY|\Gamma) - E(X|\Gamma)E(Y|\Gamma)$$

Définition 2.2.3. (Le coefficient de corrélation)

Soient X et Y des variables aléatoires admettant une covariance, et des variances non nulles. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est définie par :

$$C_c(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

Remarque. Pour tout deux v.a X et Y on a :

$$-1 \leq C_c(X,Y) \leq 1 \tag{2.7}$$

Proposition 2.2.1. Pour tout couple des v.a $Z = (X,Y)$ de fonction de répartition jointe F_Z, alors on a :

$$E(XY) = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \bar{F}_Z(x,y)dxdy \tag{2.8}$$

et :

$$Cov(X,Y) = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \Big(\bar{F}_Z(x,y) - \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(y)\Big)dxdy \tag{2.9}$$

et :

$$Cov(X,Y) = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{+\infty} \Big(F_Z(x,y) - F_1(x)F_2(y)\Big)dxdy \tag{2.10}$$

Proposition 2.2.2. Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y $Cov(X,Y)$, réalise l'inégalité suivante :

$$C_c^{min} \leq C_c(X,Y) \leq C_c^{max} \tag{2.11}$$

où : $C_c^{min} = \frac{Cov(F_1^{-1}(V), F_2^{-1}(1-V))}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$, $C_c^{max} = \frac{Cov(F_1^{-1}(V), F_2^{-1}(V))}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$

Démonstration. On a :

$$M(x,y) \leq F_Z(x,y) \leq W(x,y)$$

$$M(x,y) - F_1(x)F_2(y) \leq F_Z(x,y) - F_1(x)F_2(y) \leq W(x,y) - F_1(x)F_2(y)$$

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} M(x,y) - F_1(x)F_2(y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} F_Z(x,y) - F_1(x)F_2(y)dxdy \leq \int_{\mathbb{R}_+^2} W(x,y) - F_1(x)F_2(y)dxdy$$

donc :

$$Cov(F_1^{-1}(V), F_2^{-1}(1-V)) \leq Cov(X,Y) \leq Cov(F_1^{-1}(V), F_2^{-1}(V))$$

d'où :

$$C_c^{min} \leq C_c(X,Y) \leq C_c^{max}$$

□

Proposition 2.2.3. Soit $Z = (X,Y)$ de fonction de répartition F_Z. Alors,

(i) $Z = (X,Y)$ est comonotone $\Longleftrightarrow C_c(X,Y) = C_c^{max}$

(ii) $Z = (X,Y)$ est antimonotone $\Longleftrightarrow C_c(X,Y) = C_c^{min}$

Démonstration. (i) Selon la Proposition 1.2.2 nous trouvons que,
$Z = (X,Y)$ comonotone $\Longleftrightarrow F_Z(x,y) = W(x,y) \Longleftrightarrow F_Z(x,y) - F_1(x)F_2(y) = W(x,y) - F_1(x)F_2(y) \Longleftrightarrow C_c(X,Y) = C_c^{max}$.
la même pour (ii)

□

Le coefficient de corrélation linéaire perd sa crédibilité dans la réalité, car il ne donne pas de résultats satisfaisants, pour résoudre les problèmes auxquels est confronté le coefficient de corrélation linéaire, il est nécessaire d'utiliser les coefficients de corrélation de rangs (comme tau de Kendall et tau de Spearman) qui dépend principalement de concordance et discordance entre les observations recueillies.

Soient $Z = (X, Y)$, $Z' = (X', Y')$ deux couples des v.a indépendants et identiquement distribués, le tau de Kendall T_K est la différence entre la probabilité concordance et la probabilité de discordance cet à dire :

$$T_K(X, Y) = P\Big((X - X')(Y - Y') > 0\Big) - P\Big((X - X')(Y - Y') < 0\Big) \tag{2.12}$$

Le rho de Spearman R_S est le triple de la différence entre la probabilité concordance et la probabilité de discordance c'est à dire :

$$R_S(X, Y) = 3\Bigg(P\Big((X - X')(Y - Y') > 0\Big) - P\Big((X - X')(Y - Y') < 0\Big)\Bigg) \tag{2.13}$$

De (1.21) et (1.22) nous pouvons arriver à la définition suivante :

Définition 2.2.4. (Tau de Kendall et le rho de Spearman) Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a possédant des fonctions de répartition marginales continues,

1) Le tau de Kendall associé au Z est la quantité qui appartenir à $[-1, 1]$ et définie par :
$$T_K(X, Y) = 4E(F_Z(X, Y)) - 1$$
2) Le rho de Spearman associé au Z est la quantité qui appartenir à $[-1, 1]$ et définie par :
$$R_S(X, Y) = C_c(F_1(X), F_2(Y))$$

Proposition 2.2.4. (Invariance fonctionnelle) Soit $Z = (X, Y)$ un couple de v.a, quelles que soient les fonctions h_1 et h_2, toutes deux croissantes ou toutes deux décroissantes sur les supports de X et Y, on a :

$$T_K(h_1(X), h_2(Y)) = T_K(X, Y) \tag{2.14}$$

et,

$$R_S(h_1(X), h_2(Y)) = R_S(X, Y) \tag{2.15}$$

Proposition 2.2.5. Supposons les fonctions de répartition F_1 de X et F_2 de Y continues, on a alors :

1) $Z = (X, Y)$ est comonotone $\Longleftrightarrow$ ($T_K(X, Y) = 1$ ou $R_S(X, Y) = 1$)
2) $Z = (X, Y)$ est antimonotone $\Longleftrightarrow$ ($T_K(X, Y) = -1$ ou $R_S(X, Y) = -1$)

Nous notons qu'il existe une relation entre T_K et R_S représentée par les inégalités dans la proposition suivant :

Proposition 2.2.6. (Liens entre le tau de Kendall et le rho de Spearman) Soit le couple aléatoire $Z = (X, Y)$ dont les margenales F_1 et F_2 sont continues, ona :

1) $-1 \leq 3T_K - 2R_S \leq 1$

2) $\frac{1+R_S}{2} \leq \left(\frac{1+T_K}{2}\right)^2$

3) $\frac{1-R_S}{2} \leq \left(\frac{1-T_K}{2}\right)^2$

4) $\frac{3T_K-1}{2} \leq R_s \leq \frac{1+2T_K-T_K^2}{2}$, si $T_K \geq 0$

5) $\frac{T_k^2+2T_K-1}{2} \leq R_s \leq \frac{1+3T_K}{2}$, si $T_K \leq 0$

Démonstration. voir [**5**] □

2.3 Structures de la dépendance

Définition 2.3.1. (Ordre de dépendance) Soient la classe de Fréchet $\mathcal{K}(F_1, F_2)$ et G_{Z_1}, G_{Z_2} les fonctions de répartition des couples $(g(X_1), Y_1)$, $(g(X_2), Y_2)$, et soit $\leq_d$ ordre partiel, $\leq_d$ est un ordre de dépendance dans $\mathcal{K}(F_1, F_2)$ lorsqu'elle satisfait les conditions suivante

1) Réflexivité (i.e $F_Z \leq_d F_Z, \quad \forall F_Z \in \mathcal{K}(F_1, F_2)$)

2) Transitivité (i.e $F_{Z_1} \leq_d F_{Z_2}$ et $F_{Z_2} \leq_d F_{Z_3}$ alors $F_{Z_1} \leq_d F_{Z_3}, \quad \forall F_{Z_1}, F_{Z_2}, F_{Z_3} \in \mathcal{K}(F_1, F_2)$)

3) Antisymmétrie (i.e $F_{Z_1} \leq_d F_{Z_2}$ et $F_{Z_2} \leq_d F_{Z_2}$ alors $F_{Z_1} = F_{Z_2}$ $\forall F_{Z_1}, F_{Z_2}, \in \mathcal{K}(F_1, F_2)$)

4) $F_{Z_1} \leq_d F_{Z_2}$ alors $F_{Z_1}(x,y) \leq F_{Z_2}(x,y)$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

5) (Bornes de Fréchet) $M(x,y) \leq_d F_Z(x,y) \leq_d W(x,y)$

6) Si $F_{Z_n^1} \leq_d F_{Z_n^2}$ et $Z_n^1 \longrightarrow_{loi} Z^1$, $Z_n^2 \longrightarrow_{loi} Z^2$ alors $F_{Z^1} \leq_d F_{Z^2}$

7) $F_{Z_1} \leq_d F_{Z_2} \Longrightarrow G_{Z_1} \leq_d G_{Z_2}$, si g est une fonction croissante.

8) $F_{Z_1} \leq_d F_{Z_2} \Longrightarrow G_{Z_2} \leq_d G_{Z_1}$, si g est une fonction décroissante.

Définition 2.3.2. Le couple aléatoire $Z = (X, Y)$ est dit PQD [1] si l'une des inégalités suivantes est satisfaite,

1) $F_Z(x,y) \geq F_1(x)F_2(y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) $P(X > x|Y > y) > P(X > x) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3) $P(Y > y|X > x) > P(Y > y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
4) $Cov(h(X), K(Y)) \geq 0$ si les fonctions h et K sont croissantes.

Définition 2.3.3. (Association) Le couple $Z = (Z_1, Z_2)$ (la covariance existe) est dit associe si :

$$Cov(Q(Z_1,Z_2), L(Z_1,Z_2)) \geq 0$$

Où : $Q(.,.)$ et $L(.,.)$ sont des fonctions croissantes.

Définition 2.3.4. Soit le couple aléatoire $Z = (Z_1, Z_2)$, on dit que Z est dépendant par mélange si :

il existe T (v.a), tel que $(Z_1|T = t)$ et $(Z_2|T = t)$ soient indépendant.

Proposition 2.3.1. Soit $Z = (Z_1, Z_2)$ un couple aléatoire, si Z est PQD on a :

(i) $(f(Z_1), g(Z_2))$ est PQD, où f et g fonctions continues et croissantes.
(ii) $C_c(X,Y)$, $R_S(X,Y)$ et $T_K(X,Y)$ sont des quantités positives.

Définition 2.3.5. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple aléatoire, on dit que X est positivement dépendant par ordre stochastique (PDS) si les deux fonctions $x_2 \longmapsto P[X_1 > x_1|X_2 = x_2]$ et $x_1 \longmapsto P[X_2 > x_2|X_1 = x_1]$ sont croissantes.

1. Dépendance positive par quadrant

Définition 2.3.6. Soit $X = (X_1, X_2)$ un couple aléatoire, on dit que X est négativement dépendant par ordre stochastique (NDS) si les deux fonctions $x_2 \longmapsto P[X_1 > x_1 | X_2 = x_2]$ et $x_1 \longmapsto P[X_2 > x_2 | X_1 = x_1]$ sont décroissantes.

Chapitre 3

Copules et ordres stochastiques

3.1 Copules

En 1956, le mathématicien Sklar a introduit le concept de copule pour résoudre un problème probabiliste proposé par Morris Fréchet, depuis lors les utilisations de la copule ont été très peu nombreuses. Le point de départ est bien sûr l'article The joy of copulas de Genest et MacKey [1986] publié dans The American Statistician. Suivront de nombreux travaux de Christian Genest avec différents co-auteurs (MacKey, Louis-Paul Rivest,...). Maintenant, les copules sont un outil standard largement utilisé pour étudier la dépendance, les modèles de survie, etc... (pour un aperçu , voir l'introduction du livre [**5**]).

Une copule est un outil statistique relativement ancien introduit par Sklar [1959].

Définition 3.1.1. Soit la fonction $C : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, on dit que C est une 2-copule [1] si les trois conditions sont remplies,

1) $C(0,v) = C(v,0) = 0 \ \forall v \in [0,1]$
2) $C(1,v) = C(v,1) = 1 \ \forall v \in [0,1]$
3) $C(v_1,v_2) - C(v_1,u_2) - C(u_1,v_2) + C(u_1,u_2) \geq 0 \quad \forall (v_1,v_2),(u_1,u_2) \in [0,1]^2, u_1 \leq v_1 \ et \ u_2 \leq v_2$

1. Copule bidimensionnelle

Définition 3.1.2. (La densité de 2-copule) Soit $Z = (Z_1, Z_2)$ un couple aléatoire tel que $F_Z \in \mathcal{K}_c(F_1, F_2)$ [2], la densité de F_Z donne par :

$$f_Z(z_1, z_2) = c_d(F_1(z_1), F_2(z_2))f_1(z_1)f_2(z_2)$$

où : c_d la densité de C, f_1 f_2 les densités marginales de Z_1et Z_2

Définition 3.1.3. Une copule multidimensionnelle C (ou n-copule $n > 2$) est une fonction défine sur $[0,1]^n$ a vleurs dans $[0,1]$ tel que :

i) $C(0,...,0) = 0$
ii) $C(1,...,1,v_i,1,...1) = v_i \ \forall i \in \mathbb{N}^*$
iii) C est n-croissante

Exemple 3.1.1. Il facile de montre que $C(u_1, u_2) = u_1u_2$ est une fonction de copule , on a $C(0, u_2) = 0$ et $C(u_1, 0) = 0$ et pour tout (v_1, v_2), $(u_1, u_2) \in [0,1]^2$ tel que $u_1 \leq u_2$ et $v_1 \leq v_2$ on a :

$$C(v_1,v_2)-C(v_1,u_2)-C(u_1,v_2)+C(u_1,u_2) = v_1v_2-v_1u_2-u_1v_2+u_1u_2 = v_1(v_2-u_2)-u_1(v_2-u_2)$$

mais :

$$v_1(v_2 - u_2) \geq u_1(v_2 - u_2)$$

donc :

$$C(v_1, v_2) - C(v_1, u_2) - C(u_1, v_2) + C(u_1, u_2) \geq 0$$

3.2 Propriétés des fonctions copules

Propriété 3.2.1. $C(w_1, w_2) = w_1 - P(W_1 \leq w_1, W_2 > w_2)$

Démonstration.

$$P(W_1 \leq w_1, W_2 > w_2) = P(W_1 \leq w_1) - P(W_1 \leq w_1, W_2 \leq w_2)$$

$$= w_1 - C(w_1, w_2)$$

□

2. L'ensemble des fonctions de répartition bivariées absoulement continues

Propriété 3.2.2. $C(w_1,w_2) = w_2 P(W_1 \leq w_1 | W_2 \leq w_2)$

Démonstration.

$$P(W_1 \leq w_1 | W_2 \leq w_2) = \frac{P(W_1 \leq w_1, W_2 \leq w_2)}{P(W_2 \leq w_2)}$$

$$= \frac{C(w_1,w_2)}{w_2}$$

□

Propriété 3.2.3. $C(w_1,w_2) = (w_2 - 1)P(W_1 \leq W_1 | W_2 > w_2) + w_1$

Démonstration.

$$P(W_1 \leq W_1 | W_2 > w_2) = \frac{P(W_1 \leq w_1, W_2 > w_2)}{P(W_2 > w_2)}$$

$$= \frac{w_1 - C(w_1,w_2)}{1 - P(W_2 \leq w_2)}$$

$$= \frac{w_1 - C(w_1,w_2)}{1 - w_2}$$

□

Propriété 3.2.4. $C(w_1,w_2) = w_2 + w_1 - 1 + P(W_1 > w_1, W_2 > w_2)$

Démonstration.

$$P(W_1 > w_1, W_2 > w_2) = 1 - P(W_1 \leq w_1 \ ou \ W_2 \leq w_2)$$

$$= 1 - P(W_1 \leq w - 1) - P(W_2 \leq w_2) + P(W_1 \leq w_1, W_2 \leq w_2)$$

$$= 1 - w_1 - w_2 + C(w_1,w_2)$$

□

Propriété 3.2.5. $C(w_1,w_2) = w_1 + w_2 - 1 + (1 - w_2)P(W_1 > w_1 | W_2 > w_2)$

Démonstration.

$$P(W_1 > w_1 | W_2 > w_2) = \frac{1 - P(W_1 \leq w_1 ou W_2 \leq w_2)}{1 - P(W_2 \leq w_2)}$$

$$= \frac{1 - P(W_1 \leq w_1) - P(W_2 \leq w_2) + P(W_1 \leq w_1, W_2 \leq w_2)}{1 - P(W_2 \leq w_2)}$$

$$= \frac{1 - w_1 - w_2 + C(w_1, w_2)}{1 - w_2}$$

□

A partir de la copule C, nous pouvons construire de nouveaux copules :

Définition 3.2.1. Une copule de survie est définie par :

$$\bar{C}(v_1, v_2) = v_1 + v_2 - 1 + C(1 - v_1, 1 - v_2)$$

Une copule de dual est définie par :

$$C_{du}(v_1, v_2) = v_1 + v_2 - C(u_1, u_2)$$

Une co-copule est définie par :

$$C_*(v_1, v_2) = 1 - C(1 - v_1, 1 - v_2)$$

Proposition 3.2.1. Soit $Z = (Z_1, Z_2)$ dont la répartition $F_Z \in \mathcal{K}(F_1, F_2)$, alors on a :

1) $C(F_1(z_1), F_2(z_2)) = P(Z_1 \leq z_1, Z_2 \leq z_2)$

2) $\bar{C}(\bar{F}_1(z_1), \bar{F}_2(z_2)) = P(Z_1 > z_1, Z_2 > z_2)$

3) $C_{du}(F_1(z_1), F_2(z_2)) = P(Z_1 \leq z_1 ou Z_2 \leq z_2)$

4) $C_*(\bar{F}_1(z_1), \bar{F}_2(z_2)) = P(Z_1 > z_1 ou Z_2 > z_2)$

3.3 Comparaison de distances stochastique entre deux v.a

Soient X_1, X_2 deux copies d'un vecteur aléatoire X (i.e les marges de X_1 et X_2 sont égales à la fonction de distribution de X) et C_X la fonction copule de X et F_1, F_2 les fonctions de distribution marginales, et F la fonction répartition de X comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, nous voulons prouver que l'espérance mathématique de la valeur absolue [3] de la différence entre X_1 et X_2 (ne sont pas nécessairement indépendantes), définie comme suit :

$$v(X) = E(|X_1 - X_2|) = \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(x) + F_2(x) - 2C_X(F_1(x), F_2(x))]dx \tag{3.1}$$

c'est une mesure de la variabilité au sens de Bickel et Lehmann. Autrement dit, il remplit les cinq conditions de la définition suivante :

Définition 3.3.1. [1] $m(.)$ est une mesure de la variabilité au sens de Bickel et Lehmann si les conditions suivantes sont remplies :

1) Si $F_X = F_Y$ alors $m(X) = m(Y)$ (invariance de loi).
2) Pour tout constante a on a $m(X + a) = m(X)$ (invariance par translation).
3) $m(0) = 0$ et $m(bX) = bm(X)$ pour tout b est strictement positif (homogénéité positive).
4) $m(X) \geq 0$ pour tout X, avec $m(X) = 0$ si X dégénérer à $a \in \mathbb{R}$ (positivité)
5) Si $X \leq_{disp} Y$ alors $m(X) \leq m(Y)$ (cohérente avec l'ordre dispersif).

Nous allons d'abord prouver que $v(X)$ est cohérente avec l'ordre dispersif. Dans la suit nous prouverons que si les marges $X = (X_1, X_2)$ (de $Y = (Y_1, Y_2)$) sont liées entre elles par la relation suivante $F_1 = k \circ F \ et \ F_2 = F \quad (G_1 = k \circ G \ et \ G_2 = G)$ où k est une fonction de distorsion, elle définie comme suit :

Définition 3.3.2. On appelle fonction de distorsion chaque fonction croissante de $[0, 1]$ à $[0, 1]$ où elle prend la valeur 1 quand $x = 1$ et 0 quand $x = 0$

3. $|X_1 - X_2|$ décrit la distance entre X_1 et X_2 dans un sens qui dépend de la structure de dépendance du vecteur X

Remarque. Soient les deux fonctions de répartitions F et G, si $G = K \circ F$ on dit que G est une distorsion de F via k

Si nous supposons aussi que X et Y ont la même copule on a alors

$$X \leq_{disp} Y \Longrightarrow |X_2 - X_1| \leq_{st} |Y_2 - Y_1| \tag{3.2}$$

Lemme 1. [**15**] Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires de même copule C, alors on a :

$$X \leq_{disp} Y \Longleftrightarrow X_i \leq_{disp} Y_i \quad i = 1, 2$$

Théorème 4. *Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires avec F et G leures fonctions de répartition, en suppant que :*

i) F_1 est une distorsion de F via k et $F_2 = F$ (F_1, F_2 les marges de X)

ii) G_1 est une distorsion de G via k et $G_2 = G$ (G_1, G_2 les marges de Y)

iii) X et Y ont la même copule C

alors ona,

$$X \leq_{disp} Y \Longrightarrow |X_2 - X_1| \leq_{st} |Y_2 - Y_1|$$

Démonstration. Supposons que X et Y ont la même copule C où $X \leq_{disp} Y$ et à partir de celle-ci, selon la définition 1.5.2 et le théorème 1 dans [**15**] il existe une fonction S vérifiée $S(X_1, X_2) =_{st} (Y_1, Y_2)$ et définie par $S(x_1, x_2) = (G_1^{-1}(F_1(x_1)), G_2^{-1}(F_2(x_2))$. Comme les deux composantes de la fonction S croissant, et d'apres ii) , iii) alors on trouve

$$|X_2 - X_1| \leq_{st} |Y_2 - Y_1|$$

□

Si nous prenons la fonction de distorsion $k(x) = x$ dans le théorème précédent, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 1. Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples alétoire ont la même copule tel que $F_1 = F_2$ et $G_1 = G_2$, alors on a

$$X_1 \leq_{disp} Y_1 \Longrightarrow |X_1 - X_2| \leq_{st} |Y_1 - Y_2|$$

La proposition suivante nous montre que (3.1) une mesure de la variabilité au sens de Bickel et Lehmann et aussi est une mesure additive comonotone

Proposition 3.3.1. Soit la couple aléatoire $X = (X_1, X_2)$ avec la copule C et les marges de F_1, F_2 de X_1 et X_2, en suppant que $F_1 = k \circ F$ et $F_2 = F_1$ alors $v(X)$ est une mesure de la variabilité au sens de Bickel et Lehmann additive comonotone.

Démonstration. Soit C la copule de $X = (X_1, X_2)$, (3.1) devient :

$$v(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [k(F(x)) + F(x) - 2C(h(F(x)), F(x))]dx$$

on prend $w = F$ en expression précédente on trouve que :

$$v(X) = \int_0^1 [k(w) + w - 2C(h(w), w)]dF^{-1}(w) \tag{3.3}$$

les propriétés de la définition 3.3.1 sont assez claires, c'est à dire :

. $v(X) = 0$ si X est dégénéré à $c \in \mathbb{R}$

. $F^{-1}_{X+\alpha} = F^{-1}_X(x) + \alpha \quad \forall \alpha$

. $F^{-1}_{\lambda X} = \lambda F^{-1}_X(x) \quad \forall \lambda$

. Le théorème 1 affirme que la cinquième condition de la définition 3.3.1 est satisfaite

Si l'on considère deux variables Y et $Y^{'}$ sont comonotones alors on a

$$F^{-1}_{Y+Y'}(w) = F^{-1}_Y(w) + F^{-1}_{Y'}(w)$$

et c'est ce qui conduit à $v(X)$ est additive comonotone. □

Si nous supposons que X a copule C NDS alors nous obtenons :

Proposition 3.3.2. Soit la couple aléatoire $X = (X_1, X_2)$ avec la copule C est NDS (i.e convexe par composant) et les marges de F_1, F_2 de X_1 et X_2, en suppant que $F_1 = F = F_2$ alors la mesure de la variabilité au sens de Bickel et Lehmann $v(X)$ est atteint les propriétés suivantes :

1) $v(X)$ est comonotone additive.
2) $v(X)$ est cohérente avec l'ordre de l'excès de richesse.

3) $v(X)$ est sous-additive.

Démonstration. Puisque $F_1 = F = F_2$ alors on a :

$$v(X) = 2\int_0^1 [w - C(w,w)]dF^{-1}(w)$$

En utilisant l'intégration par partie, nous trouvons :

$$v(X) = 2\int_0^1 F^{-1}(w)d[C(w,w) - w]$$

Comme C est convexe par composant alors par la théorème 8 dans ([**16**] page 1032) on a $v(x)$ est cohérente avec l'ordre de l'excès de richesse et par la théorème dans ([**17**] page 7) on trouve que $v(X)$ est sous-additive. □

3.4 Copules et comparaison stochastique

Le but de cette section est d'essayer de donner des conditions suffisantes pour comparer des paires aléatoires, en termes de divers ordres stochastiques.

Théorème 5. *Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires, avec F_X, F_Y $\in \mathcal{K}(F_1, F_2)$. Supposons que $C_X(p,q) \leq C_Y(p,q)$ $\forall p,\ q\ \in (0,1)$ (où C_X, C_Y les copules de X, Y), alors*

i) $|X_1 - X_2| \leq_{icx} |Y_1 - Y_2|$

ii) $(X_1 - X_2)^+ \leq_{icx} (Y_1 - Y_2)^+$

Démonstration. Les hypothèses de ce théorème confirment que Y est inférieur à X au sens de PQD (voir définition 1 de [**18**]) alors d'après le théorème 4 de [**18**] on trouve que :

$$(X_1 - X_2) \leq_{icx} (Y_1 - Y_2)$$

alors pour tout fonction convexe croissante g on a

$$E\Big(g(X_1, X_2)\Big) \leq E\Big(g(Y_1, Y_2)\Big)$$

Si l'on considère que $g(t) = w(|t|)$ ($w((t)^+)$) où w est une fonction convexe croissante, on obtient directement i) (resp ii)) □

Théorème 6. *Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires, avec F_X, $\in \mathcal{K}(F_1, F_2)$ et $F_Y \in \mathcal{K}(G_1, G_2)$. Supposons que X et Y ont la même copule C, $X_1 \leq_{st} Y_1$ et $Y_2 \leq_{st} X_2$, alors*

$$(X_1 - X_2)^+ \leq_{st} (Y_1 - Y_2)^+$$

Démonstration. D'après les hypothèses, on trouve directement que :

$$\bar{F}_{(X_1 - X_2)^+}(x) \leq \bar{G}_{(Y_1 - Y_2)^+}(x) \ \forall x \in \mathbb{R}_+$$

□

Théorème 7. *[1] Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires, avec F_X $\in \mathcal{K}(F_1, F_2)$ et $F_Y \in \mathcal{K}(G_1, G_2)$, avec C_X, C_Y les copules de X et Y. Supposons que C_X est NDS, $C_Y(p,q) \leq C_X(p,q)$ $\forall p,\ q \ \in (0,1)$, $X_1 \leq_{icx} Y_1$ et $Y_2 \leq_{icv} X_2$, alors*

$$(X_1 - X_2)^+ \leq_{icx} (Y_1 - Y_2)^+$$

Lemme 2. Soient X Y deux v.a symétriues,[4] alors :
i) si $X^+ \leq_{st} Y^+$, alors $|X| \leq_{st} |Y|$
ii) si $X^+ \leq_{icx} Y^+$, alors $|X| \leq_{icx} |Y|$

Démonstration. Application directe du théorème 2.6 ((i) et (v)) dans [**19**] □

D'après le théorème.6 et le lemme.2 nous trouvons le résultat suivant :

Corollaire 2. Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires. Supposons que X et Y qui remplissent les conditions du théorème.6 alors on a :

$$|X_1 - X_2| \leq_{st} |Y_1 - Y_2|$$

Supposons maintenant que X et Y aient chacun une copule symétrique, et donc selon le théorème.7 et le lemme .2 nous arrivons au résultat suivant :

Corollaire 3. $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires aient chacun une copule symétrique. Supposons que X et Y qui remplissent les conditions du théorème.7 alors on a :

$$|X_1 - X_2| \leq_{icx} |Y_1 - Y_2|$$

4. X et $-X$ ont la même loi

Proposition 3.4.1. Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires, avec $F_X \in \mathcal{K}(F_1, F_2)$ et $F_Y \in \mathcal{K}(G_1, G_2)$, avec C_X, C_Y les copules de X et Y. Supposons que X et Y ont la même copule NDS C, $X_1 \leq_{cx} Y_1$ et $X_2 \leq_{cx} Y_2$ alors on a :

$$|X_1 - X_2| \leq_{icx} |Y_1 - Y_2|$$

Corollaire 4. Soient $X = (X_1, X_2)$ et $Y = (Y_1, Y_2)$ deux couples aléatoires ont la même copule NDS C. Supposons que $X_1 =_{st} X_2$ $Y_1 =_{st} Y_2$ (de espérance finie) et $X_1 \leq_{ew} Y_1$, alors on a :

$$|X_1 - X_2| \leq_{icx} |Y_1 - Y_2|$$

Chapitre 4

Applications

4.1 Application 1

Parmi les défis auxquels sont confrontés les actuaires, il y a la détermination de la limite de police d'assurance et la valeur des déductions ce défi est un domaine appliqué de la théorie des ordres stochastique. d'abord, nous donnerons un aperçu des limites police d'assurance et déductions :

La limite de police est le montant global que la compagnie d'assurance paiera pour une perte couverte en vertu du contrat d'assurance, de nombreuses polices ont plusieurs limites telles que par incident ou par personne, de nombreuses polices limitent le nombre réel d'occurrences ou d'incidents au cours d'une période d'année d'assurance donnée. La déduction est le montant initial que l'assuré doit payer en premier lorsqu'un sinistre est déclaré et approuvé par l'assureur. [**13**]

Dans ce chapitre, nous mentionnerons les découvertes les plus importantes des chercheurs concernant l'application de la théorie des ordres stochastiques dans la détermination des limites d'une police d'assurance et des déductions, sur la base de [**6**].

4.1.1 Le Modèle

On considère le modèle suivant :

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i e^{-\sigma_i T_i} \tag{4.1}$$

où :

- X_i : V.a postive, représente la perte du au i-ème risque.
- T_i : V.a postive, représente le moment de la survence du i-risque assuré.
- σ_i :Constante positive représente le taux d'actualisation.

alors, S est représente la perte totale actulisée. si le i-ième risque n'est jamais se produit alors nous posons $T_i = +\infty$. L'une des bonnes caractéristiques de ce modèle est queX_i il représente les échelles des pertes alors que $e^{-\sigma_i T_i}$ il distingue les chances de pertes et σ_i c'est l'effet de l'environnement financier, pour simplifier, supposons que : $\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma$.

Le problème de l'allocation optimale des limites des polices

Par le biais d'un dispositif d'assurance, supposons que l'assuré est exposé à n-risque $X_1, ..., X_n$ bénéficie d'un total de k dinars algériens ($k > 0$) comme limite de police avec laquelle il peut répartir arbitrairement entre les n-risques. Si certains risques survient, l'assureur effectuera le paiement juste après la en cas de sinistre et la couverture d'assurance pour ce risque prendra fin. Cependant, la couverture d'assurance pour les autres risques est toujours en vigueur. Si $(k_1, k_2, ..., k_n)$ sont les limites de police allouées alors pour tout $i \in \{1, 2, ..., n\}$ on a $k_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} k_i = k$, on appelle ce n-uplet admissible, et utilisons $A_n(k)$ pour désigner la classe de tous ces n-uplets. Si $(k_1, ..., k_n) \in A_n(k)$ est choisi alors la valeur actualisée des prestations obtenues de l'assureur serait :

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i \wedge k_i) e^{-\sigma T_i} \tag{4.2}$$

Si nous prenons l'utilité espérée de la richesse comme critère d'allocation optimale, alors le problème de l'allocation optimale des limites de la police est :

$$\max_{(k_1,\dots,k_n)\in A_n(k)} E\left[u\Big(w-\sum_{i=1}^{n}[X_i-(X_i\wedge k_i)]e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.3}$$

où :

- u : est la fonction d'utilité de l'assuré.
- w : est la richesse (après prime).

Le problème de l'allocation optimale des déductions

De même, l'assuré peut se voir accorder un montant de c dinars algériens en contre des limites du contrat d'assurance, ce qu'on appelle déductions contrat d'assurance, avec laquelle il peut répartir arbitrairement entre les n- risques. Si $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in A_n(c)$ sont déductions allouées alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a $c_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} c_i = c$ et la valeur actualisée des prestations obtenues de l'assureur serait :

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-c_i)^+e^{-\sigma T_i} \tag{4.4}$$

Alors le problème de l'allocation optimale des déductions des polices d'assurance est :

$$\max_{(c_1,\dots,c_n)\in A_n(c)} E\left[u\Big(w-\sum_{i=1}^{n}[X_i-(X_i-c_i)^+]e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.5}$$

où u et w admettent les mêmes interprétations que dans le problème (4.3).

Remarque. Nous ne pouvons pas donner de solutions exactes à (4.3) et (4.5) en raison de non-linéarités.

4.1.2 Limites de police et déductibles

Dans la section 5 de l'article [**6**], les auteurs proposent 3 hypothèses (pour rendre le modèle analysable) qui sont :

1) L'assuré est averse au risque, donc la fonction d'utilité est croissante et concave.

2) Le vecteur aléatoire $X = (X_1, ..., X_n)$, qui représente les sévérités des pertes, et le vecteur aléatoire $T = (T_1, ..., T_n)$, qui représente l'instant d'apparition des pertes, sont indépendants ; de plus, $T_1, ..., T_n$ sont mutuellement indépendants.
3) La structure de dépendance des sévérités des risques est inconnue.

Le sens de la troisième hypothèse : Nous supposons que les distributions marginales de$X_1, ..., X_n$sont connues de l'assuré, mais la distribution conjointe est inconnue.

En suivant la méthodologie de [**11**], on défineront d'abord la pire structure de dépendance, puis maximisera l'espérance d'utilité comme la pire structure de dépendance était actuel.

Limites de police avec structures dépendantes inconnues

Le premier problème à considérer est de maximiser l'utilité espérée de la richesse :

$$\max_{K\in A_n(k)} \min_{X\in\mathcal{K}} E\left[u\Big(w - \sum_{i=1}^{n}[X_i - (X_i \wedge k_i)]e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.6}$$

où :

- u : La fonction d'utilité (croissant et concave).
- w : La richesse (après prime).

Puisque $p \longrightarrow -u(w-p)$ est une fonction convexe croissante, le problème (4.6) est équivalent à :

$$\min_{K\in A_n(k)} \max_{X\in\mathcal{K}} E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.7}$$

où : u^* est une fonction convexe croissante.
Nous identifions d'abord la structure de dépendance qui résout la partie "max" du problème ci-dessus.

Supposons maintenant que $(Y_1, ..., Y_n) \in \mathcal{K}(F_1, ..., F_n)$ est comonotone, et u^* est une fonction croissante et convexe, alors pour tout $(k_1, ..., k_n) \in A_n(k)$ et $X =$

$(X_1,...,X_n) \in \mathcal{K}(F_1,...,F_n)$ indépendant de $T = (T_1,...,T_n)$ alors on a :

$$E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \leq E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(Y_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.8}$$

En effet, la proposition 2.1.4 nous conduit au vecteur aléatoire suivant est comonotone :

$$((Y_1 - k_1)^+ e^{-\sigma t_1},...,(Y_n - k_n)^+ e^{-\sigma t_n})$$

pour tout fixe t_i.
donc, d'après la proposition 2.1.5 on a :

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma t_i} \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - k_i)^+ e^{-\sigma t_i}$$

et donc

$$E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma t_i}\Big)\right] \leq E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(Y_i - k_i)^+ e^{-\sigma t_i}\Big)\right]$$

car u^* est croissante et convexe. par l'indépendance de X et T on a :

$$\begin{aligned} E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] &= E\left[E\left(u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\middle| T_1,...,T_n\right)\right] \\ &\leq E\left[E\left(u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(Y_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\middle| T_1,...,T_n\right)\right] \\ &= E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(Y_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \end{aligned}$$

A partir de (4.8), notre problème initial devient

$$\min_{K \in A_n(k)} E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n}(X_i - k_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.9}$$

où, u^* est croissante et convexe, et $X = (X_1,...,X_n)$ est comonotone et indépendant de $T = (T_1,...,T_n)$

Proposition 4.1.1. Soit $K^* = (k_1^*, ..., k_n^*)$ la solution du problème (4.9), alors

$$T_i \geq_{lr} T_j, X_i \leq_{st} X_j \Longrightarrow k_i^* \leq k_j^*$$

Démonstration. voir [**6**] page 13 □

Déductibles de police avec structures dépendantes inconnues

Parallèlement à l'étude des limites des polices, nous considérons maintenant le problème de l'allocation optimale des déductibles :

$$\max_{C \in A_n(c)} \min_{X \in \mathcal{K}} E\left[u\Big(w - \sum_{i=1}^{n} [X_i - (X_i - c_i)^+] e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.10}$$

qui équivaut à

$$\min_{C \in A_n(c)} \max_{X \in \mathcal{K}} E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n} (X_i \wedge c_i) e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.11}$$

où u^* est une fonction convexe croissante.
Nous identifions d'abord la structure de dépendance qui résout la partie "max" du problème ci-dessus.

En s'appuyant sur les mêmes conditions et la méthode de preuve de la relation (4.8), on trouve que

$$E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n} (X_i \wedge c_i) e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \leq E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n} (Y_i \wedge c_i)^+ e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.12}$$

De la relation ci-dessus, notre problème devient

$$\min_{C \in A_n(c)} E\left[u^*\Big(\sum_{i=1}^{n} (X_i \wedge c_i) e^{-\sigma T_i}\Big)\right] \tag{4.13}$$

où, u^* est croissante et convexe, et $X = (X_1, ..., X_n)$ est comonotone et indépendant de $T = (T_1, ..., T_n)$.

Proposition 4.1.2. Soit $C^* = (c_1^*, ..., c_n^*)$ la solution du problème (4.13), alors

$$T_i \geq_{lr} T_j, X_i \leq_{st} X_j \Longrightarrow c_i^* \geq c_j^*$$

Démonstration. voir [**6**] page 14 □

À partir des propositions (4.1.1) et (4.1.2) nous pouvons tirer la conclusion suivante :

Lorsque la sévérité d'un sinistre particulier est relativement plus grand et que la durée de sa survenance est relativement courte dans ce cas, l'assuré doit attribuer un niveau relativement plus élevé à la limite de la police et un niveau inférieur à la franchise pour ce sinistre afin d'obtenir une rémunération potentielle plus élevée.

4.2 Application 2

Parmi les règles de décision adoptées par la compagnie d'assurance pour déterminer le prix du risque figure le principe de prime, qui peut être défini comme suit :

Définition 4.2.1. Un principe de prime $P(.)$ est une fonctionnelle qui, à une v.a réelle associe un montant de prime non aléatoire, c'est à dire

$$P : L^0 \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}, \; X \longmapsto P(X)$$

Remarque. Si $P(X) = +\infty$ alors X est non assurable

Il existe de nombreux principes de versement, dont les plus importants sont :

1) Principe de prime pure : $P(X) = E(X)$.
2) Principe de l'espérance : $P(X) = (1 + \lambda)E(X)$ avec λ strictement positif.
3) Principe de la variance : $P(X) = E(X) + \beta Var(X)$ avec β strictement positif.
4) Principe de l'écart-type : $E(X) + \alpha\sqrt{Var(X)}$ avec α strictement positif.

Dans l'article ([**1**] section 5.1) les auteurs ont suggéré une classe générale de principes de primes $\mathcal{F}$ ses éléments définie sous la forme :

$$P_C(X) = E(X) + \lambda E(|X_1 - X_2|) \tag{4.14}$$

avec X_1 et X_2 deux copies de la vecteur aléatoire $X = (X_1, X_2)$.

Exemple 4.2.1. Dans la section.2 de [**1**], nous pouvons trouver quelques principes qui appartiennent à la famille $\mathcal{F}$ sont :

1) $P_1(X) = E(X) + \lambda GMD(X)$ (Principe de la prime de Gini)
2) $P_2(X) = E(X) + \lambda E(|X - m_X|)$ (Principe de la prime de Denneberg)
3) $P_3(X) = E(X) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |F_h(X) - F(x)|^p dx)$ avec $p \geq 0$ et h est une fonction de distorsion

Où, $GMD(X) = 2(E(\max X_1, X_2) - E(X))$

Les principes mentionnés dans l'exemple vérifient tous les propriétés de [**1**].

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une brève compilation sur les ordres stochastiques et avons également parlé de la dépendance entre les variables aléatoires, et nous avons conclu d'après [**1**] que l'espérance mathématique de la valeur absolue de la différence entre copies d'un couple aléatoire avec copule NDS, il a les huit propriétés suivantes : invariance de loi, invariance par translation, homogénéité positive, positivité, cohérente avec l'ordre dispersif, cohérente avec l'ordre de l'excès de richesse, comonotone additive et sous-additive, nous avons également conclu que lors de la comparaison de 2 paires aléatoires avec la possibilité de différentes fonctions de distribution marginales et de la copule, les deux conditions suivantes doivent être satisfaites : la valeur absolue de la différence entre les composants de la première paire doit être plus petite (au sense de $\leq_{icx}$, $\leq_{st}$) que la valeur absolue de la différence entre les composantes de la seconde, La deuxième condition est la même que la première, mais en remplaçant la valeur absolue par la fonction max.

Dans la partie d'applications, nous avons extrait ce qui suit : dans l'application des franchises et limites de la police d'assurance, nous avons conclu que lorsque la gravité d'une réclamation particulière est relativement importante, nous devons augmenter le niveau des limites de la police, en retour, nous diminuons le niveau des les franchises. Dans l'application des principes de la prime, nous avons conclu qu'il pourrait s'agir de $\lambda E(|X_1 - X_2|)$ la valeur ajoutée de la prime nette, où λ positive, X_1 et X_2 deux copies de X avec la copule C.

Bibliographie

[1] ORTEGA-JIMÉNEZ, Patricia, SORDO, Miguel A., et SUÁREZ-LLORENS, Alfonso. Stochastic comparisons of some distances between random variables. Mathematics, 2021, vol. 9, no 9, p. 981.

[2] GUPTA, Arjun K. et AZIZ, Mohammad AS. Convex ordering of random variables and its applications in econometrics and actuarial science. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 2010, vol. 3, no 5, p. 779-785.

[3] THEROND, Pierre-E. Mesures et comparaison de risques. Année universitaire, 2004, vol. 2005.

[4] DENUIT, Michel, CHARPENTIER, Arthur, et BÉBÉAR, Claude. Mathématiques de l'Assurance Non-Vie. Tome I : Principes Fondamentaux de Théorie du Risque. 2004.

[5] NELSEN, Roger B. An introduction to copulas. Springer Science and Business Media, 2007.

[6] HUA, Lei et CHEUNG, Ka Chun. Stochastic orders of scalar products with applications. Insurance : Mathematics and Economics, 2008, vol. 42, no 3, p. 865-872.

[7] RÜSCHENDORF, Ludger. Ordering of insurance risk. Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment, 2008, vol. 3.

[8] DHAENE, Jan, DENUIT, Michel, GOOVAERTS, Marc J., et al. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance : theory. Insurance : Mathematics and Economics, 2002, vol. 31, no 1, p. 3-33

[9] DENUIT, MICHEL et DHAENE, JAN. CONVEX ORDER AND COMONOTONIC CONDITIONAL MEAN RISK SHARING. 2010.

[10] ARROUDJ Manal et AIT MESSAOUD Imane. Bornes stochastiques du réseaux [M/G/1/1 $\longrightarrow$. /M/1/1] avec rappels exponentiel. 2019

[11] CHEUNG, Ka Chun. Optimal portfolio problem with unknown dependency structure. Insurance : Mathematics and Economics, 2006, vol. 38, no 1, p. 167-175.

[12] SHAKED, Moshe et SHANTHIKUMAR, J. George (ed.). Stochastic orders. New York, NY : Springer New York, 2007.

[13] Clayton, J. (2021, 12 mai). Insurance Policy Limits, Sub-Limits, and Deductibles. ASI Policyholder. https ://policyholder.naswassurance.org/insurance-policy-limits-sub-limits-and-deductibles/

[14] FERNÁNDEZ-PONCE, J. M. et SUÁREZ-LLORENS, A. A multivariate dispersion ordering based on quantiles more widely separated. Journal of Multivariate Analysis, 2003, vol. 85, no 1, p. 40-53.

[15] ARIAS-NICOLÁS, J. P., FERNÁNDEZ-PONCE, J. M., LUQUE-CALVO, P., et al. Multivariate dispersion order and the notion of copula applied to the multivariate t-distribution. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2005, vol. 19, no 3, p. 363-375.

[16] SORDO, Miguel A. Characterizations of classes of risk measures by dispersive orders. Insurance : Mathematics and Economics, 2008, vol. 42, no 3, p. 1028-1034.

[17] FURMAN, Edward, WANG, Ruodu, et ZITIKIS, Ričardas. Gini-type measures of risk and variability : Gini shortfall, capital allocations, and heavy-tailed risks. Journal of Banking and Finance, 2017, vol. 83, p. 70-84.

[18] MÜLLER, Alfred. On the waiting times in queues with dependency between interarrival and service times. Operations research letters, 2000, vol. 26, no 1, p. 43-47.

[19] NAVARRO, Jorge, DEL ÁGUILA, Yolanda, SORDO, Miguel A., et al. Stochastic ordering properties for systems with dependent identically distributed components. Applied Stochastic Models in Business and Industry, 2013, vol. 29, no 3, p. 264-278.