République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique**

Par:

Bouhdiche Rayane

Intitulé

Etude de l'équation différentielle fractionnaire de Mathieu au sens ψ-Caputo

Dirigé par : Dr.TABOUCHE Nora

Devant le jury

PRESIDENT	**FERNANE Khaireddine**	**PROF**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**TABOUCHE Nora**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**ELLAGGOUNE Fateh**	**PROF**	**Univ-Guelma**

Session 15 Juin 2022

Louange a Dieu Allah

L'éternel tout puissant.

Qui m'a donné la volonté,

La force et le courage pour réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes très chers parents.

Qui ont toujours prié pour moi,

m'ont encouragé, soutenu dans toutes les circonstances

et qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

A mes sœurs Warda, Sara, Souad et Amina.

A mes frères Yazid, Abd elkader, Mourad et Salah.

A mes amies Amina, Chayma pour leur soutien moral et leurs encouragements.

A tous ceux qui me sont chers, et tous les enseignants qui ont contribués à ma formation.

À vous chers lecteurs.

Bouhdiche Rayane

Remerciements

Premièrement et avant tout je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à « ALLAH » qui a éclairé mon chemin du savoir.

« اللهم لك الحمد »

Par ces quelques mots modestes je souhaite remercier et témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à lancer ce travail.

A ma famille : mon père, ma mère, mes sœurs, mes frères, qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragement que Dieu vous protège et vous donne longue vie.

A mon enseignante encadreur Mme Tabouche Nora qui a accepté de m'encadrer, qui m'a donné la confiance de réaliser ce présent travail

et qui m'a rendu fière de travailler avec elle.

Merci vivement pour votre patience et vos précieux conseils.

On tient à remercier le professeur Fernane Khaireddine pour l'honneur qu'il nous a accordé en présidant le jury.

On remercie le professeur Ellaggoune Fateh

d'avoir accepter d'examiner notre travail.

Je tiens aussi, à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à la réalisation de ce mémoire.

الملخص

في هذه المذكرة، المستوحاة من عمل كل من طابوش. ن ، برحايال. أ، متار. م.م، الزبوت .ج، فينياش. د [38] الذي عالج وجود حل واستقرار معادلة ماثيو ذات الترتيب الكسري من نوع كابوتو بناء على ذلك نعتبر مشكلة ماثيو ذات الترتيب الكسري من نوع Ψ-كابوتو (مشكلة جديدة).

تطرقنا إلى دراسة وجود و وحدانية الحل باستخدام نظرية النقطة الثابتة لشودار وكذلك نظرية باناخ.

وأخيرا، قمنا بدراسة استقرار الحل حسب أولام-هايرز وأولام-هايرز المعمم ووضحنا النتائج التي تم الحصول عليها بتقديم مثال.

الكلمات المفتاحية : معادلة ماثيو، الاشتقاق الكسري لكابوتو، الاشتقاق الكسري ل Ψ-كابوتو، نظرية النقطة الثابتة لشودار، مبدأ باناخ للتقلص، الاستقرار حسب أولام-هايرز.

Abstract

In our memory, inspired by the work Tabouche,N. Brehail,A. Matar,M.M. Alzabut,J. Selvam,A.G.M. Vignesh,D [38] which deals with the existence and stability of the solution of Mathieu's equation of fractional order of Caputo, we consider a new Mathieu's problem of fractional order in the sense of ψ-Caputo with initial condition (problem not studied before).

We establish the existence and uniqueness of the solution by employing the fixed point theorem of Schauder and Banach's theorem.

Finally, we explore the stability of the solution in the sense of Ulam-Hyers and generalized Ulam-Hyers and we illustrate the obtained results by an application.

Key words : Mathieu's equation, Caputo fractional derivative, ψ-Caputo fractional derivative, Schauder's fixed point theorem, Banach contraction principal, Ulam-Hyers stability, generalized Ulam-Hyers stability.

Résumé

Dans notre mémoire, en s'inspirant du travail Tabouche,N. Brehail,A. Matar,M.M. Alzabut,J. Selvam,A.G.M. Vignesh.D [38] qui traite l'existence et la stabilité de la solution de l'équation de Mathieu d'ordre fractionnaire de Caputo, nous considérons un nouveau problème de Mathieu d'ordre fractionnaire au sens de ψ-Caputo avec condition initiale (problème non étudié auparavant).

Nous établissons l'existence et l'unicité de la solution en employant le théorème du point fixe de Schauder et le théorème de Banach.

Finalemment, nous explorons la stabilité de la solution au sens du Ulam-Hyers et Ulam-Hyers généralisé et nous illustrons les résultats obtenus par une application.

Mots clés : Equation de Mathieu, dérivée fractionnaire de Caputo, dérivée fractionnaire de ψ-Caputo, théorème du point fixe de Schauder, principe de contraction de Banach, stabilité de Ulam-Hyers, stabilité de Ulam-Hyers généralisé.

Table des matières

0.1 ***Introduction*** 8

1 Préliminaires et rappels de calcul fractionnaire 11

1.1 Fonctions spéciales 11

1.1.1 La fonction Gamma 11

1.1.2 La fonction Bêta 12

1.2 Calcul Fractionnaire 12

1.2.1 Intégrale fractionnaire 13

1.2.2 Dérivée fractionnaire 15

1.3 Théorèmes 17

1.3.1 Théorème d'Arzela -Ascoli 17

1.3.2 Théorème du point fixe de Banach 18

1.3.3 Théorème du point fixe de Schauder 18

2 Etude de l'équation de Mathieu d'ordre fractionnaire au sens ψ-Caputo 19

2.1 Définitions et lemmes 19

2.2 Position du problème 22

2.3 Existene et Unicité 23

2.3.1 Existence 25

2.3.2 Unicité 30

3 Stabilité au sens de Ulam-Hyers 33

3.1 Introduction 33

3.2 Etude de la stabilité 35

3.3 Application 37

Conclusion 40

Bibliographie 41

0.1 *Introduction*

En mathématiques, l'analyse fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la possibilité qu'un opérateur différentiel puisse être élevé à un ordre non entier. Le sujet du calcul fractionnaire a gagné une populatité considérable et importante au cours des trois dernières décennies, principalement par ses applications démontrées dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie. Il fournit en effet plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations différentielles et intégrales, et divers autres problèmes impliquant des fonctions spéciales de la physique mathématique, ainsi que leurs extensions et généralisations à une et plusieurs variables.

Le concept de calcul fractionnaire découle historiquement d'une question soulevée en 1695 par Marquis de L'Hôpital (1661-1704) à Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Lorsque Leibniz a répondu par une lettre à L'Hôpital, il a désigné la nième dérivée d'une fonction f par le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu alors, "Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?". Dans sa réponse, datée du 30 Septembre 1695, Leibniz écrit à l'Hôpital comme suit : "... C'est un paradoxe apparent, à partir duquel un jour, des conséquences utiles seront tirées...".

La mention des dérivées fractionnaires a été faite dans un certain contexte, (par exemple) Euler en 1730, Lagrange en 1772, Laplace en 1812, Lacroix en 1819, Fourier en 1822, et la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neufs documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le nom "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs application comme celle de Grunwald-Letnikov, de weyl et de Caputo (voir[38]), Green en 1859, Holmgren en 1865, Grunwald en 1867, Letnikov en 1868, Sonin en 1869, Laurent en 1884, Nekrassov en 1888, Krung en 1890 et Weyl en 1917 [11]. En effet, dans son manuel de 700 pages, intitulé "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" (deuxième édition ; Courcier, Raris , 1819), S.F.Lacroix consacra deux pages (pp.409-410) au calcul fractionnaire, montrant finalement que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dv^{\frac{1}{2}}} v = \frac{\sqrt[2]{v}}{\sqrt{\pi}}.$$

A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considérée comme abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des application, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingenierie, la biologie, la mécanique etc.

De nombreuses défnitions des opérateurs non entiers ont été introduites [6, 20]. On cite les approches de dérivations fractionnaires suivantes : l'approche de Riemann-Liouville, Hadamard et Caputo [24], Par exemple : les dérivées fractionnaires ont été utilisées largement dans le modèle mathématiques de la visco-élasticité des matières [19, 35] diffusion [42, 17], processus stochastique [10, 24], signal et image processing [26], modèles fractionnaires et contrôle [21, 27],... etc.

L'équation de Mathieu est une équation importante de la physique mathématique car elle présente de nombreuses applications dans les domaines des sciences physiques, tels que l'optique, la mécanique quantique, la modulation de fréquence, la focalisation à gradient alternatif, piège miroir pour particules neutres, pendule inversé, vibrations dans un tambour elliptique, stabilité d'un corps flottant et relativité générale [15, 17, 29]. L'équation de Mathieu a été introduite pour la première fois par le mathématicien français Emile Leonard Mathieu qui a étudié les membranes de tambour elliptiques vibrantes [17, 28, 29]. L'équation de Mathieu est une équation différentielle du second ordre de la forme

$$D^2u(t) + [p - 2q\cos(2t)]u(t) = 0, \tag{0.1}$$

où $D^2u(t) = \frac{d^2u}{dt^2}$, $p, q \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.
La solution de (0.1) se construit sous la forme

$$u(t) = \exp(i\delta t)\eta(t),$$

où η est une fonction périodique de période π et δ est un indice dit caractéristique dépendant des valeurs de p et q.

La première tentative d'étude de l'équation de Mathieu à été réalisée dans le contexte fractionnaire par Rand RH, Sah SM et Suchorsky en 2010 ([31]), Ebaid, Elsayed et Aljoufi en 2012 ont discuté la solution analytique approximative de l'équation fractionnaire de Mathieu en utilisant la décomposition de domaines et les méthodes de séries [18].
Pour une revue relativement exhaustive de dévelopement de l'équation de Mathieu le lecteur peut consulter [17, 21, 25].

Trés recemment, Tabouche,N. Brehail,A. Matar,M.M. Alzabut,J. Selvam,A.G.M. Vignesh.D ont étudié l'existence et l'analyse de la stabilité de l'équation différentielle de Mathieu avec applications sur certains phénomènes physiques

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\mu}z(t) + \Lambda(t)z(t) = \psi(t, z(t), {}^{C}D^{\nu}z(t)),\ \mu \in (1,2],\ \nu \in (1,2], \\ z(0) = 0,\ z'(0) = z_1, \end{cases}$$

avec $\Lambda(t) = p - 2q\cos(2t)$, $p, q \in \mathbb{R}$, ${}^{C}D^{\diamond}$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\diamond \in \{\mu, \nu\}$ et $\psi : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.

Motivés par ce dernier problème nous abordons, l'étude du nouveau problème de Mathieu avec dérivée de ψ-Caputo

$$\begin{cases} {}^C D^{\mu,\psi} u(t) + \Lambda(t)u(t) = f(t, u(t), {}^C D^{\nu,\psi} u(t)), \quad t \in [a, T], \quad a \geq 0, \\ u(a) = u'(a) = 0, \end{cases}$$

avec $\Lambda(t) = p - 2q\cos(2t)$, p et q $\in \mathbb{R}$, ${}^C D^{\diamond,\psi}$ est la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo d'ordre $\diamond \in \{\mu, \nu\}$, où $1 < \mu \leq 2,\ 0 < \nu \leq 1$ et $f : [a, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.

Recemment, Almeida [5] a présenté un nouveau type d'opérateur différentiel fractionnaire appelé ψ-Caputo et a pu faire l'extension du travail de Caputo [31, 21].

Almeida et al [6] ont prouvé des résultats d'existence et d'unicité d'equation de type Caputo par rapport à une autre fonction en utilisant le théorème du point fixe et la méthode d'itération de Picard.

Plus recemment, M.S. Abdo, A.G. Ibrahim, et S.K. Panchalont [2] ont étudié l'existence et l'unicité d'une équation fractionnaire implicite de type ψ-Caputo.

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire est composé de trois chapitres. le chapitre 1 étant introductif. Dans le chapitre 2, on établit l'existence et l'unicité de la solution pour les équations différentielles fractionnaires de Mathieu avec dérivée fractionnaire de ψ-Caputo, le chapitre 3 est consacré à l'étude de la stabilité de la solution de notre problème.

1. **Premier chapitre** : Nous rappelons quelques définitions et résultats de base du calcul fractionnaire utiles tout au long de ce mémoire tel que : fonctions spéciales (la fonction Gamma, la fonction Bêta) [24, 18], des approches des dérivées et intégrales fractionnaires, ainsi que des théorèmes du point fixe [22].
2. **Deuxième chapitre** : Conserne l'étude d'un nouveau problème de l'équation différentielle fractionnaire de Mathieu avec dérivée fractionnaire de ψ-Caputo

$$\begin{cases} {}^C D^{\mu,\psi} u(t) + \Lambda(t)u(t) = f(t, u(t), {}^C D^{\nu,\psi} u(t)), \quad t \in [a, T], \quad a \geq 0, \\ u(a) = u'(a) = 0, \end{cases}$$

   avec $\Lambda(t) = p - 2q\cos(2t)$, $p,\ q \in \mathbb{R}$, ${}^C D^{\diamond,\psi}$ est la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo d'ordre $\diamond \in \{\mu, \nu\}$, où $1 < \mu \leq 2,\ 0 < \nu \leq 1$ et $f : [a, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.
   On établit l'existence et l'unicité de la solution de notre problème en appliquant le théorème de point fixe de Schauder et le principe du contraction de Banach.
3. **Troisième chapitre** : Nous explorons la stabilité de la solution au sens de Ulam-Hyers et Ulam-Hyers généralisé. Finalement, on présente un exemple illustrant les résultats obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires et rappels de calcul fractionnaire

Le but de ce chapitre est de présenter des rappels concernant les notions fondamentales du calcul fractionnaire (fonctions spéciales telles que : Fonction Gamma, Fonction Bêta), également les intégrales, les dérivées fractionnaires (au sens de Riemann-Liouvile, Caputo et Hadamard) et leurs propriétés. Finalement, nous rappelons des théorèmes du point fixe qui représentent des outils indispensables dans la suite de notre travail.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

En mathématiques, l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction eulérienne Gamma (ou fonction Gamma) qui généralise la fonction factorielle ($n\,!$).

Définition 1.1 [24, 20] Pour tout nombre complexe z tel que $\Re(z) > 0$ la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ z \in \mathbb{C} \text{ avec } \Re(\mathrm{z}) > 0. \tag{1.1}$$

Propriétés :

- Une propriété de base de la fonction gamma est qu'elle satisfait l'équation suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ z \in \mathbb{C}.$$

- pour $n \in \mathbb{N}, \ \Gamma(n+1) = n\,!$.
- $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}, \ z \in \mathbb{C}$.

- $\Gamma(2z) = \dfrac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\dfrac{1}{2}),\ z \in \mathbb{C}.$

- $\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}(2n\,!)}{2^{2n}n\,!},\ z \in \mathbb{C}.$

D'après ce qui précède,nous pouvons obtenir

1. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$
2. $\Gamma(\frac{-3}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$
3. $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$

1.1.2 La fonction Bêta

Définition 1.2 [24, 30] La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler donnée par la définition suivante

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt, \qquad z,w \in \mathbb{C} \tag{1.2}$$

avec $\Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0.$

Propriétés

- La fonction Bêta est symétrique $B(z,w) = B(w,z), \quad \Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0.$

- $B(z,w) = B(z+1,w) + B(z,w+1), \quad \Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0.$

- $B(z,1) = \dfrac{1}{z},\ \Re(z) > 0.$

- $B(z,w+1) = \dfrac{z}{w}B(z+1,w), \quad \Re(z) > 0,\ \Re(w) > 0.$

Remarque 1.1 La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.3}$$

1.2 Calcul Fractionnaire

Dans cette section, nous présentons différentes approches de généralisation de la notion de différenciation et intégration.

1.2.1 Intégrale fractionnaire

Intégrale d'ordre arbitraire (Formule de Cauchy)

Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction continue,(b pouvant être fini ou infini).
Une primitive de f est donnée par l'expression

$$(I_a^1 f)(t) = \int_a^t f(s)ds,$$

pour une primitive seconde on aura

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (\int_a^s f(\tau)d\tau)ds.$$

En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire

$$(I_a^2 f)(t) = \int_a^t (t-s)f(s)ds.$$

Plus généralement, le nième itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I_a^n f(t) = \int_a^t \mathrm{d}t_1 \int_a^{t_1} \mathrm{d}t_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)\mathrm{d}t_n = \frac{1}{(n-1)\,!} \int_a^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, \tag{1.4}$$

pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Cette formule est appelée formule de Cauchy.

Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy (1.4), en généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante

Définition 1.3 [24]
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale

$$I_{a_+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \;\; a \in \mathbb{R} \tag{1.5}$$

est appelée intégrale fractionnaire gauche de Riemann-Liouville d'ordre α (qu'on va utiliser dans tout ce qui suit), et l'intégrale

$$I_{b_-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds, \;\; b \in \mathbb{R},$$

est appelée intégrale fractionnaire droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Exemple

a) Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$. Alors

$$I_a^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1}(s-a)^\beta ds.$$

Une changement $s = a + (t-a)^\tau$, donne

$$\begin{aligned} I_a^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^\beta d\tau, \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times B(\beta+1,\alpha), \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}, \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

b) Soit la fonction $f(t) = C$. Alors

$$\begin{aligned} I_a^\alpha C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} C ds, \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds, \end{aligned}$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = t - s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha C &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t-a} \tau^{\alpha-1} d\tau, \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha}, \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)}(t-a)^\alpha. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *[24] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville possède la propriété suivante*

$$I_a^\alpha [I_a^\beta f(t)] = I_a^{\alpha+\beta} f(t), \ \ \alpha, \beta > 0.$$

De plus, on a

$$\frac{d}{dt}(I_a^\alpha f)(t) = I_a^{\alpha-1} f(t), \ \ \alpha > 0.$$

Intégrale fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.4 [24] Soit (a, b),$(0 \leq a \leq b \leq \infty)$ un intervalle fini ou infini, l'intégrale fractionnaire de Hadamard d'ordre α pour une fonction g est définie par

$$I_a^{\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{g(s)}{s} ds, \quad a \leq x \leq b. \tag{1.6}$$

1.2.2 Dérivée fractionnaire

On présente dans cette partie les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et d'Hadamard qui sont les plus utilisées dans plusieurs applications.

Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.5 [24] Soit $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville gauche d'ordre α d'une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ est définie par

$$^{RL}D_{a_+}^{\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{a_+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) \mathrm{d}s. \tag{1.7}$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville droite d'ordre α de la fonction f est définie par

$$^{RL}D_{b_-}^{\alpha} f(t) = \left(-\frac{d}{dt} \right)^n I_{b_-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) \mathrm{d}s. \tag{1.8}$$

Remarque 1.2 Dans ce qui suit, nous considérons que la dérivée fractionnaire gauche.

propriétés

- **Linéarité**

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda \ ^{RL}D_{a+}^{\alpha} f(t) + \mu \ ^{RL}D_{a+}^{\alpha} g(t). \tag{1.9}$$

- En général on a

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha}(\ ^{RL}D_{a+}^{\beta} f)(t) \neq \ ^{RL}D_{a+}^{\beta}(\ ^{RL}D_{a+}^{\alpha} f)(t) \neq \ ^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \tag{1.10}$$

- **Formules de composition**

Soient $m-1 \leq \alpha < m$ et $n-1 \leq \beta < n$,

$$^{RL}D_{a+}^{\alpha}(\ ^{RL}D_{a+}^{\beta} f)(t) = \ ^{RL}D_{a+}^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^{n} [\ ^{RL}D_{a+}^{\beta-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(-\alpha-j+1)}. \tag{1.11}$$

$$^{RL}D^{\beta}_{a+}(\,^{RL}D^{\alpha}_{a+}f)(t) = \,^{RL}D^{\alpha+\beta}_{a+}f(t) - \sum_{j=1}^{m}[\,^{RL}D^{\alpha-j}_{a+}f(t)]_{t=a}\frac{(t-a)^{-\beta-j}}{\Gamma(-\beta-j+1)}. \tag{1.12}$$

• La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une constante C est donnée par

$$^{RL}D^{\alpha}_{a+}C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}, \qquad t > a. \tag{1.13}$$

• La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une fonction puissance $(t-a)^{\nu}$ pour $\nu > -1$

$$^{RL}D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu-\alpha+1)}(t-a)^{\nu-\alpha}, \tag{1.14}$$

et

$$^{RL}D^{\alpha}_{a+}(t-a)^{\alpha-j} = 0, \qquad j = 1, 2, \cdots, \alpha+1. \tag{1.15}$$

Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.6 [24] La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f de classe $C^n([a,b])$ est définie par

$$^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = I^{n-\alpha}_{a^+}f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds, \quad t > a, \tag{1.16}$$

avec $n-1 < \alpha < n$.

Propriétés

• Linéarité

Soient $n-1 < \alpha < n,\ m,\ n \in \mathbb{N},\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}$. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateur linéaire

$$^{C}D^{\alpha}_{a^+}(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda\,^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) + \mu\,^{C}D^{\alpha}_{a^+}g(t).$$

• Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n, (n \in \mathbb{N}^*)$, supposons que f est une fonction telle que $^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ et $^{RL}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ existent alors

$$^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = \,^{RL}D^{\alpha}_{a^+}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)(t-a)^{k-a}}{\Gamma(k-\alpha+1)}.$$

On déduit que si $f^k(a) = 0$ pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura $^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t) = \,^{RL}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$.

• Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue on a

$$^{C}D^{\alpha}_{a^+}(I^{\alpha}_{a^+}f) = f \;\texttt{ et }\; I^{\alpha}_{a^+}(\,^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^k(a)(t-a)^k}{k\,!},$$

• La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$^{C}D_{a}^{\alpha}C=0,\ C constante.$$

Dérivée fractionnaire au sens de Hadamard

Définition 1.7 [24] Soit $(a,b),(0\leq a\leq b\leq\infty)$ un intervalle fini ou infini, la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre α pour une fonction g est définie par

$$D_{a}^{\alpha}g(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{a}^{t}\left(log\frac{t}{s}\right)^{n-\alpha-1}\frac{g(s)}{s}\,ds,\quad n=[\alpha]+1,a\leq x\leq b.\quad(1.17)$$

Lemme 1.1 *[24] Si $a,\ \alpha,\ \beta>0$ alors*

$$\left(D_{a}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta-\alpha-1},$$

et

$$\left(I_{a}^{\alpha}\left(\log\frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\beta+\alpha-1}.$$

1.3 Théorèmes

Dans cette partie, nous présentons des théorèmes utiles dans la suite de notre travail.

1.3.1 Théorème d'Arzela -Ascoli

Ce théorème est connu pour son nombre considérable d'applications. Il caractérise les parties relativement compactes de l'espace des fonctions continues d'un espace compact dans un espace quelconque.

Théorème 1.1 *[22] Soit $Y=C([a,b])$ muni de la norme*

$$\|u\|=\max_{t\in[a,b]}\mid u(t)\mid.$$

Si M est un sous ensemble de Y tel que

(i) M est uniformément borné, i.e $\exists r>0,\|u\|\leq r,\forall u\in M$.

(ii) M est équicontinu c'est-à-dire

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall t_1,t_2\in[a,b]\ \text{ tel que } \mid t_1-t_2\mid<\delta \text{ et } u\in M\Longrightarrow\mid u(t_1)-u(t_2)\mid<\varepsilon.$$

Alors, M est relativement compact.

1.3.2 Théorème du point fixe de Banach

Théorème 1.2 *[22] (Banach 1922)*
Soit $\mathcal{U} \subset E$ (fermé), où E espace de Banach et $\mathcal{F} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ un opérateur contraction. Alors, il existe un unique $u \in \mathcal{U}$ tel que $\mathcal{F}(u) = u$.

1.3.3 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.3 *[22](Schauder 1930)*
Soit C un convexe fermé d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ continu telle que $T(C) \subset E$ est relativement compact. Alors T admet au moins un point fixe dans C.

Chapitre 2

Etude de l'équation de Mathieu d'ordre fractionnaire au sens ψ-Caputo

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressées à l'étude du problème différentiel fractionnaire de Mathieu étudié dans [38] avec extension de la dérivée fractionnaire de Caputo au sens ψ-Caputo.
Nous établissons l'existence de la solution de notre problème en utilisant le théorème du point fixe de Schauder, et nous prouvons l'unicité à l'aide du principe de contraction de Banach.

2.1 Définitions et lemmes

Dans cette partie, nous présentons des définitions et des lemmes des intégrales et dérivées fractionnaires d'une fonction par rapport à une autre fonction, pour une lecture plus exhaustive voir [2, 3, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 24, 42].

Définition 2.1 [24] Soit $\alpha > 0$ et ψ une fonction croissante, ayant une dérivée continue ψ' dans (a, b). Alors les intégrales fractionnaires gauche et droite d'une fonction h intégrable sur $[a, b]$ par rapport à ψ sont définies par

$$(I_{a^+}^{\alpha,\psi}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}h(s)ds,$$

$$(I_{a^-}^{\alpha,\psi}h)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}h(s)ds.$$

Notons que lorsque $\psi(t) = t$ ou $\psi(\mathrm{t}) = \ln(\mathrm{t})$ nous obtenons respectivement les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville et d'Hadamard.

Définition 2.2 [24] Soit α un réel strictement positif, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et ψ une fonction croissante telle que $\psi'(t) \neq 0$, pour tout $t \in [a,b]$. Alors les dérivées fractionnaires d'ordre α gauche et droite de la fonction h par rapport à une autre fonction ψsont définies par

$$\begin{aligned} D_{a^+}^{\alpha,\psi} h(t) &= \left[\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right]^n I_{a^+}^{n-\alpha,\psi} h(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left[\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right]^n \int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{n-\alpha-1} h(s)ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{b^-}^{\alpha,\psi} h(t) &= \left[-\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right]^n I_{b^-}^{n-\alpha,\psi} h(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left[-\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right]^n \int_t^b \psi'(s)(\psi(s)-\psi(t))^{n-\alpha-1} h(s)ds. \end{aligned}$$

où $n = [\alpha] + 1$, et $[\alpha]$ désigne la partie entière du nombre réel α.

Remarque 2.1 Dans ce qui suit, nous considérons que les intégrales et les dérivées gauches.

Définition 2.3 [5] Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\psi, h \in C^n([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions telles que ψ est croissante et $\psi'(t) \neq 0$, pour tout $t \in [a,b]$. La dérivée fractionnaire ψ-Caputo gauche de h d'ordre α est définie par

$$^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi} h(t) = I_{a^+}^{n-\alpha,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^n h(t), \tag{2.1}$$

où $n = [\alpha] + 1$, pour $\alpha \notin \mathbb{N}, n = \alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Définition 2.4 [6] Soit $\alpha > 0$, $h \in C^{n-1}[a,b]$. Alors la dérivée fractionnaire ψ-Caputo gauche de h d'ordre α est définie comme suit

$$({}^{c}D_{a^+}^{\alpha,\psi} h)(t) = D_{a^+}^{\alpha,\psi}\left[h(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h_{\psi}^{[k]}(a)}{k\,!}(\psi(t)-\psi(a))^k\right]$$

où $h_{\psi}^{[k]}(t) = \left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^k h(t)$, et $n = [\alpha] + 1$.
De plus, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors ${}^{c}D_{a^+}^{\alpha,\psi} h(t) = h_{\psi}^{[n]}(t)$. En particulier si $0 < \alpha < 1$, alors

$$({}^{c}D_{a^+}^{\alpha,\psi} h)(t) =^{c} D_{a^+}^{\alpha,\psi}[h(t) - h(a)].$$

Lemme 2.1 [5]
Soit $\alpha > 0,\ h \in C^{n-1}[a,b]$ une fonction donnée, alors on a

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi}(\,{}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}h)(t) = h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h_{\psi}^{[k]}(a)}{k\,!}(\psi(t)-\psi(a))^k. \tag{2.2}$$

En particulier, si $0 < \alpha < 1$, alors

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi}({}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}h)(t) = h(t) - h(a).$$

Lemme 2.2 [5, 37]
Soit $\alpha, \beta > 0$, alors

1) $I_{a^+}^{\alpha,\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}[\psi(t)-\psi(a)]^{\alpha+\beta-1}.$

2) ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}[\psi(t)-\psi(a)]^{\beta-\alpha-1}.$

3) ${}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}(\psi(t)-\psi(a))^{k} = 0,\ \forall k \in \{0,1,\cdots,n-1\}.$

Lemme 2.3 [2, 37]
Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, alors

$$I_{a^+}^{\alpha,\psi}(I_{a^+}^{\beta,\psi}h)(t) = (I_{a^+}^{\alpha+\beta,\psi}h)(t), \quad p.p.\ t \in [a,b], \tag{2.3}$$

et pour $h \in L^p[a,b]$ et $p \geq 1$. Si $\alpha+\beta > 1$ alors la relation est vraie en tout point de $[a,b]$. De plus, on a

$$\frac{d}{dt}I_{a^+}^{\alpha,\psi}h(t) = \psi'(t)I_{a^+}^{\alpha-1,\psi}h(t).$$

Théorème 2.1 [5]
Soit $\alpha > 0$ et $h \in C^1[a,b]$ alors on a

$${}^{C}D_{a^+}^{\alpha,\psi}(I_{a^+}^{\alpha,\psi}h)(t) = h(t). \tag{2.4}$$

Preuve voir [5].

Dans toute la suite, on note respectivement $I_{a^+}^{\diamond,\psi}u(.)$ et ${}^{C}D_{a^+}^{\diamond,\psi}u(.)$ par $I^{\diamond,\psi}u(.)$ et ${}^{C}D^{\diamond,\psi}u(.)$, tel que $\diamond \in \{\mu,\nu\}$ où $1 < \mu \leq 2,\ 0 < \nu \leq 1$.

2.2 Position du problème

On considère le problème différentiel fractionnaire de Mathieu suivant

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\mu,\psi}u(t) + \Lambda(t)u(t) = f(t, u(t),\ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)), \quad t \in [a, T], \quad a \geq 0, \\ u(a) = u'(a) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

avec $\Lambda(t) = p - 2q\cos(2t),\ p, q \in \mathbb{R}$, ${}^{C}D^{\diamond,\psi}$ est la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo d'ordre $\diamond \in \{\mu, \nu\}$ où $1 < \mu \leq 2, 0 < \nu \leq 1$ et $f : [a, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.

Dans ce qui suit, nous présentons un lemme crucial pour établir les principaux théorèmes d'existence et d'unicité de la solution de notre problème (2.5).

Lemme 2.4 *Soit* $1 < \mu < 2, \xi \in C[a, T]$, *le problème fractionnaire de Mathieu*

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\mu,\psi}u(t) + \Lambda(t)u(t) = \xi(t),\ \mu \in (1, 2], \\ u(a) = u'(a) = 0, \quad a \geq 0, \end{cases} \tag{2.6}$$

est équivalent à l'équation intégrale suivante

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(\xi(s) - \Lambda(s)u(s))ds \tag{2.7}$$

Preuve
On commence par montrer l'implication dans ce sens $(\Rightarrow)$

On applique $I^{\mu,\psi}$ aux deux membres de l'équation du problème (2.5) et en utilisant le lemme 2.1 on obtient

$$I^{\mu,\psi}(\ {}^{C}D^{\mu,\psi}u(t)) = I^{\mu,\psi}(\xi(t) - \Lambda(t)u(t)),$$

$$u(t) - \sum_{k=0}^{1} \frac{u_\psi^{[k]}(a)}{k\,!}(\psi(t) - \psi(a))^k = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(\xi(s) - \Lambda(s)u(s))ds,$$

$$u(t) - u_\psi(a) - u'_\psi(a)(\psi(t) - \psi(a)) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(\xi(s) - \Lambda(s)u(s))ds,$$

$$u(t) = u_\psi(a) + u'_\psi(a)(\psi(t) - \psi(a)) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(\xi(s) - \Lambda(s)u(s))ds.$$

Par les conditions initiales du problème(2.5), on a $u_\psi(a) = 0$ et $u'_\psi(a) = 0$ (puisque $u'_\psi(a) = \frac{1}{\psi'(a)}u'(a)$) et par suite on obtient l'équation intégrale (2.7).

Maintenant, on montre l'implication dans le sens contraire ($\Leftarrow$)
On applique ${}^{C}D^{\mu,\psi}$ des deux côtés de l'équation (2.7) et par le théorème 2.1 il suit que

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{\mu,\psi}u(t) &= {}^{C}D^{\mu,\psi}\left(\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}(\xi(s)-\Lambda(s)u(s))ds\right), \\ &= {}^{C}D^{\mu,\psi}I^{\mu,\psi}\big(\xi(t)-\Lambda(t)u(t)\big), \\ &= \xi(t)-\Lambda(t)u(t). \end{aligned}$$

Par l'équation (2.7) on a

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t \psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}(\xi(s)-\Lambda(s)u(s))ds,$$

pour $t = a$ et par le lemme 2.3 on obtient

$$u(a) = u'(a) = 0.$$

D'où le problème(2.6), ce qui achève la démonstration. ■

2.3 Existene et Unicité

Pour l'étude de l'existence et l'unicité du problème (2.5), on considère $\mathcal{C} = C([a,T],\mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues de $[a,T]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme du supremum usuelle.
On désigne par $\Im$ l'espace de Banach des fonction u continues sur $[a,T]$ tel que

$$\Im = \{u | u \in \mathcal{C},\ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t) \in \mathcal{C}\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\Im} = \max\left\{\sup_{a\leq t\leq T}|u(t)|,\ \sup_{a\leq t\leq T}|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)|\right\}.$$

On considère les notations et les hypothèses suivantes

Notations

On note

$$d_1 = \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}(N+|p+2q|)}{\Gamma(\mu+1)}, \qquad d_2 = \frac{M(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)},$$

$$d_3 = \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}(N+|p+2q|)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}, \qquad d_4 = \frac{M(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}.$$

De plus, nous supposons

$$K = \max\{d_1+d_2, d_3+d_4\} < 1. \tag{2.8}$$

Hypothèses

$(H1)$ Pour tout $u, v \in \mathbb{R}$, il existe une constante L>0 telle que

$$|f(t,u,v)| \leq L, \ t \in [a,T].$$

$(H2)$ Il existe une constante $N > 0, M > 0$ telle que

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leq N\|u_1 - u_2\| + M\|v_1 - v_2\|, \ \forall t \in [a,T], u_i, v_i \in \mathbb{R} \ \ i = 1,2.$$

Dans toute la suite, on considère l'opérateur $\mathcal{T} : \Im \to \Im$ muni de la norme

$$\|\mathcal{T}u\|_{\Im} = \max\{\sup_{a\leq t\leq T} |\mathcal{T}u(t)|, \sup_{a\leq t\leq T} | {}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t)|\},$$

où

$$(\mathcal{T}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(f(s,u(s), \ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s))ds.$$

Par la définition 2.3 et le lemme 2.3 on a

$$\begin{aligned}
{}^{C}D^{\nu,\psi}(\mathcal{T}u)(t) &= {}^{C}D^{\nu,\psi}\Big(I^{\mu,\psi}\big(f(t,u(t), \ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)) - \Lambda(t)u(t)\big)\Big),\\
&= I^{1-\nu,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\frac{d}{dt}\right)^1\Big(I^{\mu,\psi}\big(f(t,u(t), \ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)) - \Lambda(t)u(t)\big)\Big),\\
&= I^{1-\nu,\psi}\left(\frac{1}{\psi'(t)}\psi'(t)I^{\mu-1,\psi}\big(f(t,u(t), \ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)) - \Lambda(t)u(t)\big)\right),\\
&= I^{1-\nu,\psi}\big(I^{\mu-1,\psi}\big(f(t,u(t), \ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)) - \Lambda(t)u(t)\big)\big),\\
&= I^{\mu-\nu,\psi}\big(f(t,u(t), \ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)) - \Lambda(t)u(t)\big).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$${}^{C}D^{\nu,\psi}(\mathcal{T}u)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-\nu-1}(f(s,u(s), \ {}^{C}D^{\nu}u(s)) - \Lambda(s)u(s))ds.$$

2.3.1 Existence

Dans cette partie , nous établissons l'existence de la solution du problème (2.5) qui est basée sur le théorème du point fixe de Shauder.

Théorème 2.2
Sous l'hypothèse (H1) le problème (2.5) *admet au moins une solution.*

Preuve
Pour prouver le résultat d'existence, nous transformons le problème (2.5) en un problème du point fixe. En effet, puisque le problème(2.5) est équivalent à l'équation intégrale (2.7), les points fixes de $\mathcal{T}$ sont solutions du problème(2.5). Ceci, nécessite plusieurs étapes.

Pour commencer, considérons $\mathcal{U} \subset \Im$ un borné tel que

$$\mathcal{U} = \{u \in \Im, \|u\|_{\Im} \leq \omega \}, \ \ \omega > 0,$$

avec

$$\omega \geq \max\left(\frac{d_2 L}{M - d_2|p+2q|}, \frac{d_4 L}{M - d_4|p+2q|}\right).$$

Etape 1
Nous prouvons que l'opérateur $\mathcal{T}$ est continu.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}$ une suite de réels tel que $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\Im} = 0$.
Alors pour tout $u \in \mathcal{U}$, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}u_n(t) - \mathcal{T}u(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \times \\
& \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right|\left|f(s,u_n(s),^C D^{\nu,\psi}u_n(s)) - f(s,u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s))\right|ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right|\left|\Lambda(s)\right|\left|u_n(s)-u(s)\right|ds, \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right|\left|f(s,u_n(s),^C D^{\nu,\psi}u_n(s)) - f(s,u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s))\right|ds \\
& + \|u_n - u\| \frac{|p+2q|}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right|ds, \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right|\left|f(s,u_n(s),^C D^{\nu,\psi}u_n(s)) - f(s,u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s))\right|ds \\
& + \frac{|p+2q|(\psi(t)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \|u_n - u\|,
\end{aligned}$$

Comme f est une fonction continue alors

$$\left|f(s,u_n(s),^c D^{\nu,\psi}u_n(s)) - f(s,u(s),^c D^{\nu,\psi}u(s))\right| \to 0 \text{ quand n} \to \infty.$$

De plus, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{\Im}=0$ il suit que

$$\left|\mathcal{T}u_n(t)-\mathcal{T}u(t)\right|\to 0 \text{ quand n} \to\infty.$$

De la même manière, on trouve

$$\begin{aligned}
|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u_n(t)-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t)|\leq&\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\Big(\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right|\\
&\times\left|f(s,u_n(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u_n(s))-f(s,u(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u(s))\right|\Big)ds\\
&+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right|\left|\Lambda(s)\right|\left|u_n(s)-u(s)\right|ds,\\
\leq&\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\Big(\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right|\\
&\times\left|f(s,u_n(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u_n(s))-f(s,u(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u(s))\right|\Big)ds\\
&+\|u_n-u\|\frac{|p+2q|}{\Gamma(\mu-\nu)}\times\int_a^t\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right|ds,\\
\leq&\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\Big(\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right|\\
&\times\left|f(s,u_n(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u_n(s))-f(s,u(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u(s))\right|\Big)ds\\
&+\frac{|p+2q|(\psi(t)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\|u_n-u\|.
\end{aligned}$$

Puisque, f est continue et u_n tend vers u quand $n\to\infty$ on obtient bien

$$\left|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u_n(t)-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t)\right|\to 0 \text{ quand n}\to\infty,$$

d'où

$$\|(\mathcal{T}u_n)(t)-(\mathcal{T}u)(t)\|_{\Im}\longrightarrow 0 \text{ quand } \quad \text{n}\to\infty.$$

Par conséquent, $\mathcal{T}$ est bien continu.

Etape 2 Nous allons montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.
Par l'hypothèse (H1), pour tout $t \in [a,T]$ et pour tout $u \in \mathcal{U}$, on a

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}u(t)| =& \left| I^{\mu,\psi}\big(f(t,u(t),{}^C D^{\nu,\psi}u(t)) - \Lambda(t)u(t)\big)\right|, \\
\leq & \left| I^{\mu,\psi}\big(f(t,u(t),{}^C D^{\nu,\psi}u(t))\big)\right| + \left| I^{\mu,\psi}\big(\Lambda(t)u(t)\big)\right|, \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right| (L + |p+2q| \, \|u(t)\|) ds, \\
\leq & \frac{(L + |p+2q| \, \|u(t)\|)}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right| ds, \\
\leq & \frac{(L + |p+2q| \ \omega)}{\Gamma(\mu+1)} (\psi(t)-\psi(a))^{\mu}, \\
\leq & \frac{(L + |p+2q| \ \omega)}{\Gamma(\mu+1)} (\psi(T)-\psi(a))^{\mu}, \\
\leq & \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} L + \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} |p+2q| \ \omega, \\
\leq & \frac{d_2}{M} L + \frac{d_2|p+2q|}{M} \omega, \\
\leq & \frac{d_2 L}{M} \left(\frac{1 - \frac{d_2|p+2q|}{M}}{1 - \frac{d_2|p+2q|}{M}} \right) + \frac{d_2|p+2q|}{M} \omega, \\
\leq & \frac{d_2 L}{M - d_2|a+2b|} - \frac{d_2|a+2b|}{M} \frac{d_2 L}{M - d_2|a+2b|} + \frac{d_2|a+2b|}{M} \omega, \\
\leq & \omega - \frac{d_2|a+2b|}{M} \omega + \frac{d_2|a+2b|}{M} \omega, \\
\leq & \omega.
\end{aligned}
$$

De même, on a

$$
\begin{aligned}
\left| {}^C D^{\nu,\psi} \mathcal{T}u(t) \right| \leq & \frac{(L + |p+2q|\omega)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} (\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}, \\
\leq & \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} L + \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} |p+2q|\omega, \\
\leq & \frac{d_4 L}{M} + \frac{d_4|p+2q|}{M} \omega, \\
\leq & \omega.
\end{aligned}
$$

Nous obtenons $\|\mathcal{T}u\|_{\mathfrak{I}} \leq \omega$. Il suit que $\mathcal{T}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$.

Etape 3

Nous montrons que l'opérateur $\mathcal{T}$ est uniformément borné. Pour tout $u \in \mathcal{U}$, nous avons

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{T}u(t)| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right| \left|(f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s))\right| ds, \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right| \Big(\left|(f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))\right| + \left|\Lambda(s)\right|\left|u(s)\right| \Big) ds, \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right| (L + |p+2q| \|u(t)\|) ds, \\
\leq & \frac{(L+|p+2q|\omega)}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\right| ds, \\
\leq & \frac{(L+|p+2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu+1)} (\psi(t)-\psi(a))^{\mu}, \\
\leq & \frac{(L+|p+2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu+1)} (\psi(T)-\psi(a))^{\mu}, \\
\leq & \frac{d_2}{M}(L+|p+2q|\ \omega)
\end{aligned}
$$

de même, on a

$$
\begin{aligned}
\left|{}^C D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t)\right| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)} \int_a^t \Big(\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right| \\
& \times \left|\big(f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big)\right| \Big) ds, \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)} \int_a^t \Big(\left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right| \\
& \times \big(\left|f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))\right| + \left|\Lambda(s)\right|\left|u(s)\right| \big) \Big) ds, \\
\leq & \frac{(L+|a+2b|\omega)}{\Gamma(\mu-\nu)} \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right| ds, \\
\leq & \frac{(L+|p+2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} (\psi(t)-\psi(a))^{\mu-\nu}, \\
\leq & \frac{(L+|p+2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu-\nu+1)} (\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu} \leq \frac{d_4}{M}(L+|p+2q|\ \omega).
\end{aligned}
$$

Par conséquent, $\|\mathcal{T}u\|_{\Im} \leq \max\left\{ \frac{d_2}{M}(L+|p+2q|\ \omega), \frac{d_4}{M}(L+|p+2q|\ \omega) \right\}$. Il suit que $\mathcal{T}$ est uniformément borné.

Etape 4

Finalement, nous montrons que $\mathcal{T}$ est équicontinu.
Soient $u \in \mathcal{U}$ et $t_1, t_2 \in [a, T], a \leq t_1 < t_2 \leq T$, on en déduit

$$\begin{aligned}
\big|\mathcal{T}u(t_2) - \mathcal{T}u(t_1)\big| = \bigg| & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_2} \psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big(f(s, u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big)ds \\
& -\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_1) - \psi(s))^{\mu-1}(f(s, u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s))ds\bigg|, \\
& =\bigg|\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big(f(s, u(s),^c D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big)ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{t_1}^{t_2} \psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big(f(s, u(s),^c D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big)ds \\
& -\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_1} \psi'(s)(\psi(t_1) - \psi(s))^{\mu-1}\big(f(s, u(s),^c D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big)ds\bigg|, \\
& \leq\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_1} \big|\psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1} - \psi'(s)(\psi(t_1) - \psi(s))^{\mu-1}\big| \\
& \times\big|f(s, u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big|ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{t_1}^{t_2} \big|\psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big|\big|f(s, u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s)) - \Lambda(s)u(s)\big|ds, \\
& \leq\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_1} \big|\psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1} - \psi'(s)(\psi(t_1) - \psi(s))^{\mu-1}\big| \\
& \times\big(\big|f(s, u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s))\big| + \big|\Lambda(s)\big|\big|u(s)\big|\big)ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{t_1}^{t_2} \big|\psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big|\big(\big|f(s, u(s),^C D^{\nu,\psi}u(s))\big| + \big|\Lambda(s)u(s)\big|\big)ds, \\
& \leq\frac{(L + |p + 2q|\ \|u\|)}{\Gamma(\mu)} \int_a^{t_1} \big|\psi'(s)(\psi(t_1) - \psi(s))^{\mu-1} - \psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big|ds \\
& +\frac{(L + |p + 2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu)} \int_{t_1}^{t_2} \big|\psi'(s)(\psi(t_2) - \psi(s))^{\mu-1}\big|ds, \\
& \leq\frac{(L + |p + 2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu + 1)} \Bigg((\psi(t_1) - \psi(a))^{\mu} + 2(\psi(t_2) - \psi(t_1))^{\mu} - (\psi(t_2) - \psi(a))^{\mu}\Bigg),
\end{aligned}$$

puisque ψ est croissante il vient que

$$\big|\mathcal{T}u(t_2) - \mathcal{T}u(t_1)\big| \leq \frac{2(L + |p + 2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu + 1)}(\psi(t_2) - \psi(t_1))^{\mu}.$$

De même, on trouve

$$\begin{aligned}\left|{}^C D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t_2) -{}^c D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t_1)\right| =& \Bigg|\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^{t_2}\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\\ &\times(f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))-\Lambda(s)u(s))ds\\ &-\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^{t_1}\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\\ &\times(f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))-\Lambda(s)u(s)))ds\Bigg|\\ \leq&\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^{t_1}\left|\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}-\psi'(s)(\psi(t_1)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right|\\ &\times(\left|f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))\right|+\left|\Lambda(s)\right|\left|u(s)\right|)ds\\ &+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{t_1}^{t_2}\left|\psi'(s)(\psi(t_2)-\psi(s))^{\mu-1}\right|\\ &\times\left(\left|f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))\right|+\left|\Lambda(s)u(s)\right|\right)ds,\\ \leq&\frac{(L+|p+2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\Bigg((\psi(t_1)-\psi(a))^{\mu-\nu}+2(\psi(t_2)-\psi(t_1))^{\mu-\nu}\\ &-(\psi(t_2)-\psi(a))^{\mu-\nu}\Bigg)\\ \leq&\frac{2(L+|p+2q|\ \omega)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(\psi(t_2)-\psi(t_1))^{\mu-\nu}.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\|\mathcal{T}u(t_2)-\mathcal{T}u(t_1)\|_{\Im}\to 0 \text{ quand } \mathrm{t}_1\to\mathrm{t}_2$$

ce qui implique que $\mathcal{T}$ est équicontinu.

Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{T}$ est complètement continu par le théorème d'Arzela-Ascoli et par suite le théorème du point fixe de Schauder nous permet de conclure que l'opérateur $\mathcal{T}$ a bien un point fixe $u\in\mathcal{U}$. ■

2.3.2 Unicité

Théorème 2.3
Supposons que l'hypothèse (H2) et (2.8) *soient satisfaites,alors le problème (2.5) a une solution unique dans* $\Im$.

Preuve

Pour tout $u, v \in \Im$, on a

$$
\begin{aligned}
\big|\mathcal{T}u(t)-\mathcal{T}v(t)\big| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t \Big(\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\big| \\
& \times\big|f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))-f(s,v(s),{}^C D^{\nu,\psi}v(s))\big|\Big)ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\big|\big|\Lambda(s)\big|\big|u(s)-v(s)\big|ds, \\
\leq & \frac{N\|u-v\|+M\|\,{}^C D^{\nu,\psi}u-\,{}^C D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu)}\int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\big|ds \\
& +\frac{|p+2q|}{\Gamma(\mu)}\|u-v\|\int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-1}\big|ds \\
\leq & \frac{N\|u-v\|+M\|\,{}^C D^{\nu,\psi}u-\,{}^C D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\mu} \\
& +\frac{|p+2q|(\psi(t)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|u-v\| \\
\leq & \frac{N\|u-v\|+M\|\,{}^C D^{\nu,\psi}u-\,{}^C D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu+1)}(\psi(T)-\psi(a))^{\mu} \\
& +\frac{|p+2q|(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|u-v\| \\
\leq & \|u-v\|\left(\frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}(N+|p+2q|)}{\Gamma(\mu+1)}\right) \\
& +\frac{M(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|\,{}^C D^{\nu,\psi}u-\,{}^C D^{\nu,\psi}v\| \\
\leq & d_1\|u-v\|+d_2\|\,{}^C D^{\nu,\psi}u-\,{}^C D^{\nu,\psi}v\| \\
\leq & (d_1+d_2)\|u-v\|_{\Im}.
\end{aligned}
$$

De même, on a

$$
\begin{aligned}
\big|\,{}^C D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t)-\,{}^C D^{\nu,\psi}\mathcal{T}v(t)\big| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t \Big(\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big| \\
& \times\big|f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s))-f(s,v(s),{}^C D^{\nu,\psi}v(s))\big|\Big)ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big|\big|\Lambda(s)\big|\big|u(s)-v(s)\big|ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| {}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}u(t) - {}^{C}D^{\nu,\psi}\mathcal{T}v(t)\right| \leq{}& \frac{N\|u-v\| + M\|^{C}D^{\nu,\psi}u - ^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu-\nu)} \\
&\times \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right| ds \\
&+ \frac{|p+2q|}{\psi'(t)\Gamma(\mu-\nu)}\|u-v\| \int_a^t \left|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\right| ds \\
&\leq \frac{N\|u-v\| + M\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(\psi(t)-\psi(a))^{\mu-\nu} \\
&+ \frac{|p+2q|(\psi(t)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\|u-v\| \\
&\leq \frac{N\|u-v\| + M\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu} \\
&+ \frac{|p+2q|(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\|u-v\| \\
&\leq \left(\frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}(N+|p+2q|)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\right)\|u-v\| \\
&+ \frac{M(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\| \\
&\leq d_3\|u-v\| + d_4\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\| \\
&\leq (d_3+d_4)\|u-v\|_{\Im}.
\end{aligned}
$$

D'où,

$$\|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\|_{\Im} \leq K\|u-v\|_{\Im}$$

Où $K = \max\{d_1+d_2, d_3+d_4\}$, puisque $K < 1$, l'opérateur $\mathcal{T}$ est une contraction. Ainsi, selon le principe de contraction de Banach le problème(2.5) a une solution unique dans $\Im$.

■

Chapitre 3

Stabilité au sens de Ulam-Hyers

3.1 Introduction

La stabilité des équations fonctionnelles a fait l'objet d'une attention accrue en raison de son important rôle dans les domaines de la science et de l'ingénierie. Un nombre considérable de différentes notions de stabilité ont été étudiées, les définitions de ces notions ne sont pas équivalentes. Cependant, les auteurs dans leurs travaux autour de ce sujet utilisent le même terme "stabilité" (stabilité au sens de Lyapounov, stabilité de Von Neumann, stabilité asymptotique $\cdots$).

En 1940, dans une conférence donnée à l'université du Wisconsin [41] Ulam a soulevé un problème lié à la stabilité des équations fonctionnelles (d'homomorphismes de groupe) "sous quelles conditions existe-t-il une application additive suffisamment proche d'une application additive approchée ?".
Soit $G1$ un groupe et $G2$ un groupe métrique muni de la métrique $d(\cdot,\cdot)$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si la fonction $h : G1 \to G2$ satisfait l'inégalité

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta, \quad \textit{pour tout } x,\ y \in G1,$$

alors existe-il un homomorphisme $H : G1 \to G2$ tel que

$$d(h(x), H(x)) < \varepsilon, \quad \textit{pour tout } x \in G1?$$

Plus tard, en 1941 Hyers [23] donna une première réponse partielle à la question et entre 1982 et 1998 Rassias [32, 33] établit la stabilité au sens de Hyers-Ulam.
Depuis, plusieurs chercheurs se sont interessés au problème du type stabilité au sens Ulam-Hyers et un grand nombre de monographies et d'articles sont publiés a fin de généraliser les résultats de Hyers, voir par exemple [1, 4, 9, 14, 23, 34, 36, 38, 39, 40].

Dans ce qui suit, on va donner la signification de différentes stabilités au sens de Ulam-Hyers et Ulam-Hyers généralisé de notre problème fractionnaire de Mathieu

$$\begin{cases} {}^{C}D^{\mu,\psi}u(t) + \Lambda(t)u(t) = f(t, u(t),\ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)), \quad t \in [a, T],\ a \geq 0, \\ u(a) = u'(a) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec $\Lambda(t) = p - 2q\cos(2t)$, $p,\ q \in \mathbb{R}$, ${}^{C}D^{\diamond,\psi}$ est la dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo d'ordre $\diamond \in \{\mu, \nu\}$ où $1 < \mu \leq 2, 0 < \nu \leq 1$ et $f : [a, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue non linéaire.
Nous supposons que $\Phi : \Im \to \Im$ tel que

$$\Phi u(t) = {}^{C}D^{\mu,\psi}u(t) + (p - 2q\cos(2t))u(t) - f(t, u(t),\ {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)).$$

Stabilité au sens de Ulam-Hyers

Définition 3.1 L'équation du problème (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers s'il existe un nombre réel $\rho > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $u \in \Im$ de l'inégalité

$$|\Phi u(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, T], \tag{3.2}$$

il existe une solution $v \in \Im$ de l'équation du problème (3.1) avec

$$\|u - v\|_{\Im} \leq \rho\varepsilon$$

Stabilité au sens de Ulam-Hyers généralisé

Définition 3.2 L'équation du problème (3.1) est stable au sens de Ulam-Hyers généralisé s'il existe une fonction $\gamma \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ avec $\gamma(0) = 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque solution $u \in \Im$ de l'inégalité

$$|\Phi u(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [a, T],$$

il existe une solution $v \in \Im$ de l'équation du problème (3.1) avec

$$\|u - v\|_{\Im} \leq \gamma(\varepsilon)$$

Remarque 3.1 [14] Une fonction $u \in \Im$ est solution de l'inégalité (3.2), si et suelment s'il existe une fonction $g \in C([a, T], \mathbb{R}^+)$ telle que

- $|g(t)| \leq \varepsilon$, pour $t \in [a, T]$.
- ${}^{C}D^{\mu,\psi}u(t) + \Lambda(t)u(t) = f(t, u(t), {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)) + g(t)$.

3.2 Etude de la stabilité

Théorème 3.1 *On suppose que les hypothèses suivantes sont satisfaites*
$(A1)$. *Il existe une constante* $N > 0, M > 0$ *telle que*

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leq N\|u_1 - u_2\| + M\|v_1 - v_2\|, \ \forall t \in [a,T], u_i, v_i \in \mathbb{R} \ \ i = 1,2.$$

$(A2)$. $K = \max\{d_1 + d_2, d_3 + d_4\} < 1$,
alors la solution du problème (3.1) est stable au sens Ulam-Hyers (UH) et Ulam-Hyers généralisé (UHG).

Preuve
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $u \in \Im$ une solution quelconque de l'inégalité de (3.2) alors par la remarque 3.1 et le lemme 2.4 on a

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s)) + g(s) - \Lambda(s)u(s))ds.$$

Soit $v \in \Im$ la solution unique du problème (3.1) alors par le lemme 2.4 l'équation intégrale du problème (3.1) est donnée par

$$v(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}(f(s,v(s),{}^C D^{\nu,\psi}v(s)) - \Lambda(s)v(s))ds.$$

D'autre part, pour tout $t \in [a,T]$ on a

$$\begin{aligned}
\big|u(t) - v(t)\big| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \Big(\big|\psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}\big| \\
& \times \big|f(s,u(s),{}^C D^{\nu,\psi}u(s)) - f(s,v(s),{}^C D^{\nu,\psi}v(s))\big| \Big) ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}\big|\big|\Lambda(s)\big|\big|u(s) - v(s)\big| ds \\
& + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}\big|\big|g(s)\big| ds. \\
\leq & \frac{N\|u - v\| + M\| \,{}^C D^{\nu,\psi}u - \,{}^C D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}\big| ds \\
& + \frac{|p + 2q|}{\Gamma(\mu)}\|u - v\| \int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}\big| ds \\
& + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\mu)} \int_a^t \big|\psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}\big| ds,
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (A1), on trouve

$$\begin{aligned}
\big|u(t)-v(t)\big| \leq & \frac{N\|u-v\|+M\|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}u-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu+1)}\,(\psi(t)-\psi(a))^{\mu} \\
& +\frac{|p+2q|(\psi(t)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|u-v\|+\frac{\varepsilon\,(\psi(t)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \\
\leq & \|u-v\|\left(\frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}(N+|p+2q|)}{\Gamma(\mu+1)}\right) \\
& +\frac{M(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}\|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}u-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}v\|+\frac{\varepsilon\,(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \\
\leq & \ d_1\|u-v\|+d_2\|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}u-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}v\|+\frac{\varepsilon\,(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \\
\leq & (d_1+d_2)\|u-v\|_{\Im}+\frac{\varepsilon\,(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}.
\end{aligned}$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\big|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}u(t)-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}v(t)\big| \leq & \frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\Big(\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big| \\
& \times\big|f(s,u(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}u(s))-f(s,v(s),{}^{C}D^{\nu,\psi}v(s))\big|\Big)ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big|\big|\Lambda(s)\big|\big|u(s)-v(s)\big|ds \\
& +\frac{1}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big|\big|g(s)\big|ds, \\
\leq & \ \frac{N\|u-v\|+M\|\,{}^{C}D^{\nu,\psi}u-\,{}^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big|ds \\
& +\frac{|p+2q|}{\Gamma(\mu-\nu)}\|u-v\|\int_a^t\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big|ds \\
& +\frac{\varepsilon}{\Gamma(\mu-\nu)}\int_a^t\big|\psi'(s)(\psi(t)-\psi(s))^{\mu-\nu-1}\big|ds,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\big| {}^{C}D^{\nu,\psi}u(t) - {}^{C}D^{\nu,\psi}v(t)\big| \leq & \frac{N\|u-v\| + M\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\mu-\nu} \\
& + \frac{|p+2q|\big(\psi(t)-\psi(a)\big)^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\|u-v\| + \frac{\varepsilon\ (\psi(t)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} \\
& \leq \frac{N\|u-v\| + M\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\|}{\Gamma(\mu-\nu+1)}(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu} \\
& + \frac{|p+2q|(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\|u-v\| + \frac{\varepsilon\ (\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} \\
& \leq \left(\frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}(N+|p+2q|)}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\right)\|u-v\| \\
& + \frac{M(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}\| {}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\| + \frac{\varepsilon\ (\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} \\
& \leq d_3\|u-v\| + d_4\|{}^{C}D^{\nu,\psi}u - {}^{C}D^{\nu,\psi}v\| + \frac{\varepsilon(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)} \\
& \leq (d_3+d_4)\|u-v\|_{\Im} + \frac{\varepsilon\ (\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)}.
\end{aligned}
$$

par conséquent,

$$\|u-v\|_{\Im} \leq K\|u-v\|_{\Im} + \theta\ \varepsilon,$$

où

$$\theta = \max\left(\frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu}}{\Gamma(\mu+1)}, \frac{(\psi(T)-\psi(a))^{\mu-\nu}}{\Gamma(\mu-\nu+1)},\right),$$

On a

$$\|u-v\|_{\Im} \leq \frac{\theta}{1-K}\varepsilon.$$

Cela montre l'existence d'un nombre réel positif $\rho = \frac{\theta}{1-K}$,
et donc, d'après la définition (3.1)la solution de (3.1) est UH stable.

Posant $\gamma(\varepsilon) = \rho\varepsilon$, le problème (3.1) est donc stable au sens Ulam-Hyers généralisé. ■

3.3 Application

Dans cette section, nous présentons un exemple dans lequel on confirme les résultats théoriques établis dans les chapitres 2 et 3.

On considère le problème différentiel fractionnaire de Mathieu suivant

$$\begin{cases} {}^cD^{1.1,t^2+t}u(t) + \Lambda(t)u(t) = -\frac{t}{10}\sin(u) - \frac{2t}{10}\sin\left({}^cD^{0.6,t^2+t}u\right), \ t \in [0,1] \\ u(0) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

On a
$\mu = 1.1,\ \nu = 0.6,\ p = -\frac{1}{9},\ q = \frac{1}{9},\ \psi(t) = t^2 + t$ et $f(t,u,\overline{u}) = -\frac{t}{10}\sin(u) - \frac{2t}{10}\sin(\overline{u})$.
Avec $\overline{u} =^c D^{0.6,t^2+t}u$.
En utilisant toutes les données fournies de notre problème(3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} \big|f(t,u,\overline{u}) - f(t,v,\overline{v})\big| =& \left|\left(-\frac{t}{10}\sin(u) - \frac{2t}{10}\sin(\overline{u})\right) - \left(-\frac{t}{10}\sin(v) - \frac{2t}{10}\sin(\overline{v})\right)\right|, \\ \leq& \left|\frac{t}{10}\left(\sin(u) - \sin(v)\right) - \frac{2t}{10}\left(\sin(\overline{u}) - \sin(\overline{v})\right)\right|, \\ \leq& \frac{1}{10}\big|\sin(u) - \sin(v)\big| + \frac{2}{10}\big|\sin(\overline{u}) - \sin(\overline{v})\big|, \\ \leq& \frac{1}{10}\big|u - v\big| + \frac{2}{10}\big|\overline{u} - \overline{v}\big|, \\ \leq& \frac{1}{10}\big\|u - v\big\| + \frac{2}{10}\big\|\overline{u} - \overline{v}\big\|, \end{aligned}$$

avec

$$N = \frac{1}{10}, \quad M = \frac{2}{10}$$

et

$$\big|f(t,u,\overline{u})\big| \leq \frac{3}{10}.$$

Par conséquent, les hypothèses (H1) et (H2) sont satisfaites avec

$$\begin{cases} d_1 = \dfrac{(\psi(1) - \psi(0))^{1.1}(\frac{1}{10} + |\frac{-1}{9} + 2\frac{1}{9}|)}{\Gamma(1.1 + 1)}, \\ d_2 = \dfrac{\frac{2}{10}(\psi(1) - \psi(0))^{1.1}}{\Gamma(1.1 + 1)}, \\ d_3 = \dfrac{(\psi(1) - \psi(0))^{1.1-0.6}(\frac{1}{10} + |\frac{1}{9}|)}{\Gamma(1.1 - 0.6 + 1)}, \\ d_4 = \dfrac{\frac{2}{10}(\psi(1) - \psi(0))^{1.1-0.6}}{\Gamma(1.1 - 0.6 + 1)}. \end{cases}$$

Il vient que

$$\begin{cases} d_1 = 0.43242493, \\ d_2 = 0.40966573, \\ d_3 = 0.33688459, \\ d_4 = 0.31915382, \end{cases}$$

tel que

$$\begin{cases} d_1 + d_2 = 0.84209066, \\ d_3 + d_4 = 0.65603841. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$K = \max\{d_1 + d_2, d_3 + d_4\} = 0.84209066 < 1$$

La condition (2.8) est bien vérifiée.

Ainsi, Les hypothèses du théorème 2.3 étant satisfaites. Alors, le problème (3.3) admet une unique solution.
D'autre Part, Les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites ce qui assure la stabilité au sens de Ulam-Hyers et Ulam-Hyers généralisée.

Conclusion

L'apport de notre travail consiste principalement en un point qui est le suivant Nouvelle extension à l'étude d'un problème a valeur initiale défini par l'équation différentielle fractionnaire de Mathieu avec dérivée fractionnaire au sens de ψ-Caputo.
Nous avons pu établir une représentation intégrale de notre problème qui nous a permis de transformer celui-ci en un problème du point fixe. Le théorème du point fixe de Schauder fût la clé de notre analyse pour établir l'existence de la solution du problème. Cependant, en ajoutant une condition supplémentaire nous avons réussi a obtenir l'unicité de la solution en utilisant le principe de contraction de Banach. En plus, sous les mêmes conditions de l'existence et l'unicité de la solution nous avons pu exploré et établir la stabilité de la solution au sens de Ulam-Hyers et Ulam-Hyers généralisé.
Finalement, Nous avons présenté une application qui confirme les résultats théoriques obtenus.

Bibliographie

[1] S. Abbas, M. Benchohra, J. E. Lazreg, A Alsaedi and Y. Zhou : Existence and Ulam stability for fractional differential equations of Hilfer-Hadamard type. Adv. Difference Equ., 180 (2017).

[2] M.S. Abdo, A. G. Ibrahim, And S.K. Panchal : Non linear implicit fractional differential equation invloving ψ-Caputo fractional derivative. Proccedings of the Jangieon mathematical society 22,No.3. pp. 387-400, www.jangjeon.or.kr, http ://dx.doi.org/10.17777/pjms 2019.22.3.387 (2019).

[3] N. Adjimi, M. Benbachir, K. Guerbati : Existence results for ψ-Caputo hybrid fractional integro-differential equations. Malaya Journa of Matematik. Malaya J. Mat. 09(02), 46-54 (2021).

[4] M. Akkouchi : Stability of certain functional equation via a fixed point of Ćirić, Filomatl,2. doi :10.2298/Fil1102121a (2011).

[5] R. Almeida, : A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function, Commun Nonlinear Sci. Simul. 44, 460-481.(2017).

[6] R. Almeida, A.B. Malinowska and M.T. Monteiro : Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to kernel function and their application. Math. Methods Appl. Sci, 41, 336-352 (2018).

[7] Z. Baitiche, C. Derbazi, J. Alzabut, M.E. Samei, M.K.A. Kaabar and Z. Siri : Monotone iterative method for ψ-Caputo fractional differntial equation with nonlinear boundary conditions. Fractal Fract. 5,81. https ://doi.org/10.3390/fractalfract5030081 (2021).

[8] Z. Baitiche, C. Derbazi, M. Benchohra : ψ-Caputo differntial equations with multipoint boundary conditions by topological degree thepty, Results in Nonlinear Analysis. 3, no. 4,167-178, Available online at www.resultsinnolinearanalysis.com.(2020).

[9] J. Baker : The stability of certain functional equations, Proceedings of The American Mathematical Society- Proc Amer Math Soci, 112, pages 729-729. doi :10.1090/S0002-9939-1991-1052568-7 (1991).

[10] D. Baleanu, J.A.T. Machado, A.C.J. Luo : Fractional dynamics and control. Springer, New York (2002).

[11] F. Bouchelagem : Étude la stabilité pour certaines équations différentielles fractionnaires. Memoire de magister en mathématiques. Universite Badji Mokhtar Annaba. (2013).

[12] S. Bouriah, D. Foukrach, M. Benchohra : Existence and uniqueness of periodic solutions for some nonlinear fractional pantograph differntial equations with ψ-Caputo derivative. Arab.J.Math. 10 :575-587 (2021).

[13] A. Boutiara, M.S. Abdo and M. Benchohra : Existence results for ψ-Caputo fractional neutral functional integro-differntial equations with finite delay, Turk. J.Math, 44, 2380-2401 (2020).

[14] A. Boutiara, S. Etemad, A. Hussain and S. Rezapour : The generalized U-H and U-H stability and existence analysis of a coupled hybrid system of integro-differential IVPs involving ψ-Caputo fractional operators. Advances in Difference Equations. 95(2021).

[15] R. Campbell : Contribution à l'étude des solutions de l'équation de Mathieu associée. Bulletin de la S M F tome 78 :185-218 (1950).

[16] C. Derbazi, Z. Batiche, M. Benchohra : Cauchy problem with ψ-Caputo fractional derivative in Banach spaces. Advances in Theory of Nonlinear Analysis and its Applications. No. 4, 349-360 (2020).

[17] R.B. Dingle, H.J.W. Müller : The form of the coefficients of the late terms in asympotic expansions of the characteristic numbers of Mathieu and Spheroidal-wave functions. J für die reine und angewandte Math 216 :123-133 (1964).

[18] A. Ebaid, D.M.M. Elsayed, M.D. Aljoufi : Fractional calculus model for damped Mathieu equation approximate analytical solution. Appl Math Sci 6(82) :4075-4080 (2012).

[19] C.Q. Fang, H.Y. Sun and J.P. Gu : Application of fractional calculus methods to viscoelastic respence of amorphous shape memory. Polymers, J. Mech. 31(4), 427-432 (2015).

[20] M. François : Fonction Gamma d'Euler et fonction Zêta de Riemann, Département de Mathématiques d'Orsay Université Paris-Sud, Francel.

[21] Z.M. Ge, C.X. Yi : Chaos in a nonlinear damped Mathieu system in a nano resonator system and in its fractional order systems. Chaos, solitons and Fractals 32(1) :42-61 (2007).

[22] A. Granas, J. Dugundji : Fixed Point Theory. Springer, New York (2003).

[23] D.H. Hyers : On the stability of the linear Functional Equation. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 27,4, pages 729-729. doi :10.1073/pnas.27.4.222 (1941).

[24] A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo : Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands, (2006).

[25] B.J. Koo, M.H. Kim, R.E. Randall : Mathieu instability of a spar platform with mooring and risers. Cambridge Scientific Publishers (2004).

[26] V. Lakshmikantham, S. Leela, J.V. Devi : Theory of fractional dynamic systems. Cambridge Scientific Publishers, Cambridge (2009).

[27] S.W. Liao, R.W. Yeung : In proceedings of 16th international workshop on water waves and floating bodies. Hiroshima, Japan (2001).

[28] E. Mathieu : Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. J de Mathématiques pures et Appliquées 13 :137-203 (1868).

[29] H.J.W. Müller-Kirsten : Introduction to quantum Mechanics : Schrödinger equation and path integral. World Scientific (2006).

[30] I. Podlubny, Fractional Differential Equations : An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional diferential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications, vol. 198 of Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, San Diego, Calif,USA, (1993).

[31] R.H. Rand, S.M. Sah, M.K. Suchorsky, : Fractional Mathieu equation. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 15, 3254-3262 (2010).

[32] Th. M. Rassias : On the stability of the linear mapping in Banach spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 72, 297-300 (1978).

[33] J. M. Rassias : Functional Equations, Difference Inequalities and Ulam Stability Notions (F.U.N.), Nova Science Publishers, Inc. New York, (2010).

[34] IA. Rus : Ulam stability of ordinary differential equations. Stud.Univ.Babes- Bolyai, Math. 4 , 125-133 (2009).

[35] A. Sapora, A. Cornetti, A. Carpinteri, O. Baglieri and E. Santogata : The use of fractional Calculs to model the experimental creep-recovery behavior of modified binders, Mater. Structures, 49 (1), 45-55 (2014).

[36] J. V. Sousa, K. D. Kucche and E. C. Oliveira : On the Ulam-Hyers stabilities of the solutions of Î¨-Hilfer fractional differential equation with abstract Volterra operator. Comput. Appl. Math. 37, no.3, 3672-3690 (2018).

[37] I. Suwan, M.S. Abdo, A. Thabet, M.M. Matar, A. Boutiara and M.A. Almalahi : Existence theorems for ψ-fractional hybrid systems with periodic boundary conditions. AIMS Mathematics, 7(1) :171-186 (2021).

[38] N. Tabouche, A. Brehail, M.M. Matar, J. Alzabut, A.G.M. Selvam, D. Vignesh : Existence and Stability Analysis of Solution for Mathieu Fractional Differential Equa-

tions with Applications on Some Physical Phenomena. Iran J Sci Technol Trans Sci, https ://doi.org/10.1007/s40995-021-01076-6.(2021).

[39] S. M. Ulam : Problems in Modern Mathematics, Chapter 6, JohnWiley and Sons, New York, USA, (1940).

[40] S. M. Ulam : A collection of mathematical problems. Interscience Publishers, New York, (1968).

[41] S .M. Ulam : Problems in modern mathematics. Courier Corporation, (2004).

[42] D. Vivek, E.M. Elsayed, and k. Kanagarajan : Theory and Analysis of partial differential equations with a ψ-Caputo fracttional derivative. Rocky Mountain Journal of Mathematics volume 49, Number 4, (2019).