République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{elle} Nouha ALLEL

Intitulé

Inégalités intégrales de type Maclaurin

Dirigé par : **MEFTAH Badr Eddine**

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. MERAD Meriem**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. MEFTAH Badr Eddine**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. LAKHAL Fahim**	**Prof.**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ اقْرَأْ بِاسْمِ رَبِّكَ الَّذِي خَلَقَ * خَلَقَ الْإِنسَانَ مِنْ عَلَقٍ * اقْرَأْ وَرَبُّكَ الْأَكْرَمُ * الَّذِي عَلَّمَ بِالْقَلَمِ * عَلَّمَ الْإِنسَانَ مَا لَمْ يَعْلَم * ﴾.

[سورة العلق 1-5]

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ يَرْفَعِ اللَّهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۚ وَاللَّهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ ۚ ﴾.

[سورة المجادلة 11]

قال رَسُولُ اللَّهِ صَلَّى اللَّهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ

« مَنْ سَلَكَ طَرِيقًا يَطْلُبُ فِيهِ عِلْمًا، سَلَكَ اللَّهُ بِهِ طَرِيقًا مِنْ طُرُقِ الْجَنَّةِ، وإِنَّ الْمَلَائِكَةَ لَتَضَعُ أَجْنِحَتَهَا رِضًا لِطَالِبِ الْعِلْمِ، وَإِنَّ الْعَالِمَ لِيَسْتَغْفِرُ لَهُ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ، وَمَنْ فِي الأَرْضِ، وَالْحِيتَانُ فِي جَوفِ الْمَاءِ، وَإِنَّ فَضْلَ الْعَالِمِ عَلَى الْعَابِدِ، كَفَضْلِ الْقَمَرِ لَيْلَةَ الْبَدْرِ عَلَى سَائِرِ الْكَوَاكِبِ، وَإِنَّ الْعُلَمَاءَ وَرَثَةُ الأَنْبِيَاءِ، وَإِنَّ الأَنْبِيَاءَ لَمْ يُوَرِّثُوا دِينَارًا وَلَا دِرْهَمًا، وَرَّثُوا الْعِلْمَ، فَمَنْ أَخَذَهُ أَخَذَ بِحَظٍّ وَافِرٍ ».

اللَّهمَّ إِنِّي أسأَلُكَ عِلمًا نافعًا، وقلبًا خاشعًا، ورزقًا مباركًا، وعملاً زاكياً مُتقبَّلًا.

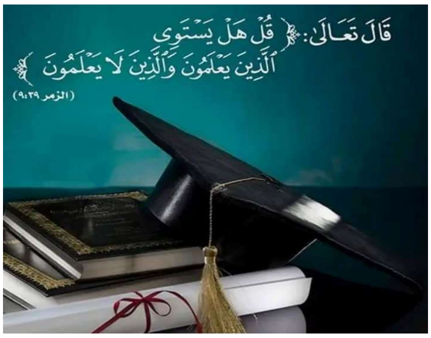
ربنا إفتح لنا أبواب رحمتك، وسهل لنا ما رزقتنا.

اللهمّ كما انعمت فَزِدْ وكما زدت فبارك وكما باركت فتمم وكما أتممت فثبت.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلْ رَبِّ زِدْنِي عِلْمًا ﴾.

[سورة طه 114]



Nouha ALLEL

Projet de fin d'étude de Master : Inégalités intégrales de type Maclaurin.

Dirigé par : Dr. MEFTAH Badr Eddine

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté MI-SM
Département de Mathématique

Remerciements

Au nom de Dieu, le plus gracieux, le plus miséricordieux.
Qui m'a donné la force, le courage, et la détermination Nécessaire pour terminer ce travail.
La rédaction de ce mémoire et sa soutenance marquent la fin d'une aventure à plusieurs facettes : aventure dans le monde de la recherche, qui ne devrait pas en rester là, aventure humaine, aventure familiale. Différentes personnes m'ont accompagnée tout au long de ce parcours

Au début, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide, je tiens à remercier tout particulièrement **Mon Enseignant Et Encadreur**
Et J'exprime toute ma gratitude à **Monsieur MEFTAH BADR EDDINE Docteur à l'université, 08 Mai 1945 Guelma.**
Qui a accepté de m'encadrer, qui m'a donné la confiance et m'a rendu fière de travailler avec lui
Pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée
J´ai eu l'honneur d'être parmi vos élèves et de bénéficier de votre riche enseignement.
Veuillez bien monsieur recevoir mes remerciement pour le grand honneur que vous m´ avez fait d'accepter l'encadrement de ce travail
Et pour votre aide pendant toutes les années de l'étude et tout au long de ma scolarité universitaire.

Aux membres du jury :
A notre maître et président de jury
Dr. MERAD Meriem Mes sincères remerciements Pour avoir accepté de présider le jury, vous nous offrez le grand honneur et le grand plaisir.
A notre maître et Examinateur de jury. Monsieur le Professeur LAKHAL Fahim, Vous nous avez fait un grand honneur en acceptant de siéger parmi les membres de jury de cette mémoire.
Mes sincères remercîments à tous les enseignants du département de Mathématique Guelma.
Mes remerciement à Monsieur **« GUEBBAI Hamza » Professeur à l'université, 08 Mai 1945 Guelma de Département Mathématique,** et aussi à Monsieur **« Farou Ibrahim » Docteur à l'université, 08 Mai 1945 Guelma de Département Informatique,** et à sa femme.

Mes Parents, Mes sœurs, Mes camarades, Ma famille et tous ceux qui m'ont soutenu, aidé et contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je commence mes dédicaces au nom de Dieu et puis de son prophète Mohamed.
Louange à Dieu tout puissant, qui m'a permis de voir ce jour tant attendu.
Par ces quelques modestes mots je souhaite témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à lancer ce travail.
Je tiens à dédier ce modeste travail.
Aux êtres les plus chers à mes yeux qui m'ont soutenu durant toutes mes études,

A l'homme à qui je dois ma vie, ma réussite et tout mon respect.

A mon très cher père Tahar ALLEL (Rabah)

De tous les pères, tu es le meilleur. Grâce à toi papa j'ai appris le sens du travail et de la responsabilité. Tes conseils ont toujours guidé mes pas vers la réussite.
Vous êtes et vous resterez pour moi ma référence, et la lumière qui illumine mon chemin.
Et j'espère que vous y trouverez le fruit vos efforts et le témoignage de ma grande fierté de vous avoir comme père.
Je te dois ce que je suis aujourd'hui et ce que je serai demain et je ferai toujours de mon mieux pour rester ta fierté et ne jamais te décevoir.
Je tiens à honorer l'homme que tu es. En ce jour, j'espère réaliser l'un de tes rêves…
Je t'aime papa et j'implore le tout-puissant pour qu'il t'accorde une bonne santé, une vie longue heureuse, quiétude de l'esprit et te protège de tout mal.

A celle qui a attendu avec patience les fruits de sa bonne éducation...
A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir.

A mon adorable mère EMebarka Messioud

Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études. Ta prière et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours pour mener à bien mes études et tout au long de ma vie.
En ce jour mémorable, pour moi ainsi que pour toi, reçoit ce travail en signe de ma vive reconnaissance et ma profonde estime. Puisse le tout puissant te donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse te combler à mon tour.
J'espère ne jamais te décevoir, ni trahir ta confiance et tes sacrifices.

En vous, je voie la maman parfaite, toujours prête à se sacrifier pour le bonheur de ses enfants. Merci pour tout.

A ma belle-sœur Loubna

Aucune dédicace ne peut exprimer mon amour et ma gratitude de t'avoir comme sœur, Tu es la sœur qui assure son rôle comme il faut, Tu as été à mes côtés pendant toutes les étapes de ce travail je vous suis très reconnaissante. Je te dis merci.

A mon cher frère Ali (mari de ma sœur Loubna)

Je vous dédie ce travail pour votre assistance, vos conseils et vos encouragements. Merci d'avoir me soutenu et merci pour tous les bons moments que nous avons passés ensemble, et ce n'est pas fini.
Que Dieu nous rassemble pour toujours,
Que Dieu vous accorde santé, succès et félicité pour faire de vous un couple uni et heureux à jamais.

A ma sœur Aida et son mari Ahmed

Vous avez été à mes côtés pendant toutes les étapes de ce travail merci pour votre assistance et encouragements, je t'en suis très reconnaissante. Puisse dieu vous protéger, garder et renforcer notre fraternité. Je te souhaite tout le bonheur du monde

A la mémoire de mon cher grand-père paternel

J'imagine quelle serait ta joie aujourd'hui, j'aurai voulu que tu assistes à l'aboutissement de ces années de dur labeur, Dieu en a décidé autrement. Que Dieu t'accorde la paix éternelle et t'accueille dans son paradis, et que ce travail soit une prière pour votre âme.

A Ma chère grand-mère maternelle

Que ce modeste travail, soit l'expression des vœux que vous n'avez cessé de formuler dans tes prières. Je te dédie ce mémoire pour vos attentions particulières, vos prières et votre amour inconditionnel. Merci pour tout et que Dieu vous donne bonne santé et longue vie parmi nous.

À mon âme sœur et ma meilleure amie wiam

Une amitié depuis plus de 12 ans, depuis des années m'encourage, me comprend et a toujours été à mes côtés. Tu comptes énormément pour moi.
Je te dis merci. Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel, et d'exaucer tous nos rêves.

À ma belle Amira
Je trouve en toi les conseils de la sœur et soutien de l'amie. Tu comptes énormément pour moi. Merci pour vos aides, et vos supports. Je te dédie ce travail avec mes vœux de réussite, de prospérité et de bonheur.

À ma chère Randa
Pour l'amour et l'affection qui nous unissent.
Merci pour vos aides et vos supports dans les moments difficiles.
Tu comptes énormément pour moi.
Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel,

À mes chères Hadjer, Chaima, Amel, Leila Hamida, Basma
Pour leurs soutiens moraux et vos conseils précieux tout au long de mes études. Vous êtes pour moi des sœurs et des amies sur qui je peux compter. En témoignage de l'amitié qui nous unit et des souvenirs de tous les moments que nous avons passés ensemble, je vous dédie ce travail et je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

À toute personne qui a participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail,
Spécialement Monsieur « Dr Meftah Badr Eddine »,
À tous mes amis et mes collègues, A toute ma famille et tous ceux qui me sont chers, Il me serait difficile de vous citer tous, vous êtes dans mon cœur,
Et à tous ceux que j'ai connus jusqu'à maintenant.
À tous ceux que j'aime.
À tous mes amis de promotion de 2éme année Master en Mathématiques
Toute personne qui occupe une place dans mon cœur.
À tous ceux qui me sont chers, et tous les enseignants qui contribué à ma formation. Je dédie ce modeste travail.

A vous les lecteurs de ces lignes.

Nouha.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type Maclaurin.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique, convexité généralisée ainsi que quelques identités intégrales importantes que nous utiliserons dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature sur les inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions convexes et les fonctions s-convexes.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Maclaurin, pour les fonctions s-convexes et les fonctions préinvexes.

Nous mentionnons que nous avons soumis deux papiers pour une éventuelle publication, dont l'un a été accepté dans la revue internationale :

« Journal d'Analyse Mathématique et de Modélisation » (JMAM).

Mots clés :

Inégalité de Maclaurin, inégalité de Hölder, fonctions s-convexes, fonctions préinvexes, fonctions bornées, fonctions hölderiennes.

Abstract

In this memory, we will focus on the study of integral inequalities of Maclaurin type for s-convex functions and preinvex functions.

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexity, as well as some important integral identities which we will invoke in the sequel.

In the second chapter, we cite some results already known in the literature on Simpson-type integral inequalities for convex functions and s-convex functions.

While the last chapter will be entirely devoted to the new results of the type of the Maclaurin type integral inequalities.

We mention that we have submitted two papers for possible publication, one oh which has been accepted in international journals :

« Journal of Mathematical Analysis and Modeling » (JMAM).

Keywords :
Maclaurin inequality, Hölder inequality, s-convex functions, preinvex functions, bounded functions, Hölderian functions.

ملخص

في هذه المذكرة، سنركز على دراسة المتراجحات التكاملية من نوع ماكلورين.

في الفصل الأول، نذكر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي، والتحدب المعمم، بالإضافة الى بعض المساواة التكاملية التي نستعملها لاحقا.

في الفصل الثاني، سنذكر ببعض النتائج المعروفة في الأدب حول المتراجحات التكاملية من نوع سيمسون للدوال المحدبة.

في حين ان الفصل الأخير سيخصص بالكامل لنتائج جديدة المتعلقة بالمتراجحات التكاملية من نوع ماكلورين.

نذكر أننا قدمنا ورقتين بحثيتين للنشرالمحتمل ثم قبول أحدهما في المجلة الدولية.

« Journal of Mathematical Analysis and Modeling » (JMAM).

الكلمات المفتاحية:
دوال محدبة، الدوال المحدودة، متراجحة هولدر، متراجحة ماكلورين، دوال هولدر.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches de mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [8, 9, 10].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Maclaurin dont les dérivées d'ordre un jouissent d'un certain type de convexité classique où généralisée et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexités classiques et généralisés pour les fonctions à une variable, ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson dont les premières dérivées sont convexes, s-convexes au second sens.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à des nouvelles inégalités de type Maclaurin dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication dans des revues internationales.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [11].

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([11]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([11]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1 - t)\, y) \leq tf\,(x) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([2]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$, on a*

$$f(tx + (1 - t)y) \;\leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y).$$

1.0.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de convexité classique, cette dernière a été introduite par Hanson [4].

Définition 1.4 ([4]) *Un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ est dit invexe au point x par rapport à η où $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$, si pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$x + t\eta(y,x) \in K.$$

Remarque 1.1 *K est dit un ensemble invexe par rapport à η, si K est invexe en chaque points $x \in K$.*

Définition 1.5 ([12]) *Soit K est un ensemble invexe sur $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction, f est dite préinvexe par rapport à η, si pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0,1]$, on a*

$$f(x + t\eta(y,x)) \leq (1-t) f(x) + tf(y).$$

1.0.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([1]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° $\left(I^{\circ}\right.$ est l'intérieur de $\left.I\right)$. Si $f' \in L[a,b]$, alors :*

$$\varsigma(a,b,n) = \frac{b-a}{(n+1)^2}\int_0^1 \left[\left(\frac{2}{3}-t\right) f'\left(\frac{n+t}{n+1}a + \frac{1-t}{n+1}b\right) + \left(t-\frac{2}{3}\right) f'\left(\frac{1-t}{n+1}a + \frac{n+t}{n+1}b\right)\right] dt,$$

où

$$\begin{aligned} \varsigma(a,b,n) &= \frac{1}{3(n+1)}\left[f(a) + 2f\left(\frac{n}{n+1}a + \frac{1}{n+1}b\right) + 2f\left(\frac{1}{n+1}a + \frac{n}{n+1}b\right) + f(b)\right] \\ &\quad - \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{\frac{n}{n+1}a+\frac{1}{n+1}b} f(\varkappa)\,dx + \int_{\frac{1}{n+1}a+\frac{n}{n+1}b}^{b} f(x)\,dx\right). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Lemme 1.2 ([5]) *soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° tel que $f' \in L[a,b]$, ou a,b $\in I$ avec $a < b$ et $\theta, \lambda \in [0,1]$. Alors l'égalité suivante est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&(1-\theta)(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) + \theta f((1-\lambda)a + \lambda b) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\
= \; &(b-a)\Bigg(-\lambda^2 \int_0^1 (t-\theta) f'(ta + (1-t)[(1-\lambda)a + \lambda b])\,dt \\
&+ (1-\lambda)^2 \int_0^1 (t-\theta) f'(tb + (1-t)[(1-\lambda)a + \lambda b])\,dt\Bigg).
\end{aligned}$$

Inégalité de Hölder et inégalité des moyennes d'ordre q

Théorème 1.1 ([8]) *Soit $p > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a,b]$ et si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

La version intégrale de l'inégalité des moyennes d'ordre q qui représente une variante de l'inégalité de Hölder est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2 ([3]) *Soit $q \geq 1$. Si $|f|$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Simpson

Dans ce chapitre nous étudierons certaines inégalités de type Newton-Cotes à trois points, dont la plus connue est sans aucun doute celle de Simpson, que l'on peut déclarer de la manière suivante :

Pour toute fonction quatre fois continûment différentiable sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{(b-a)^4}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty,$$

où $\left\|f^{(4)}\right\| = \sup\limits_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

2.0.4 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions convexes

Dans le travail qui suit Awan et Noor [1], ont discuté à travers l'identité établie par le Lemme 1.1 une inégalité à paramétrer qui génère l'inégalité des trapèzes pour $n = 0$, celle de Simpson pour $n = 1$ et des inégalités fermées de type Newton-Cotes à quatre points pour les valeurs positives de n distinctes de 0 et 1.

Théorème 2.1 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *et* $f' \in L[a,b]$. *Si* $|f'|^q$ *est une fonction convexe, où* $q,p>1$ *et* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
|\varsigma(a,b,n)| \quad &\leq \quad \tfrac{b-a}{9(n+1)^2}\left(\tfrac{q-1}{2q-1}\left[2^{(2q-1)\,/\,(q-1)}+1\right]\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\tfrac{3}{2(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[(2n+1)\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\left|f'(a)\right|^q+(2n+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\},
\end{aligned}$$

où $\varsigma(a,b,n)$ *est donnée par (1.1).*

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, l'inégalité de Hölder et la convexité de $|f'|^q$, on obtient

$$\begin{aligned}
&|\varsigma(a,b,n)| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(n+1)^2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{2}{3}-t\right|\left|f'\left(\tfrac{n+t}{n+1}a+\tfrac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1-t}{n+1}a+\tfrac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(n+1)^2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{2}{3}-t\right|^{q\,/\,(q-1)}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\tfrac{n+t}{n+1}a+\tfrac{1-t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|^{q\,/\,(q-1)}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|f'\left(\tfrac{1-t}{n+1}a+\tfrac{n+t}{n+1}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{(n+1)^2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{2}{3}-t\right|^{q\,/\,(q-1)}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left\{\tfrac{n+t}{n+1}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{1-t}{n+1}\left|f'(b)\right|^q\right\}dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|^{q\,/\,(q-1)}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left[\int_0^1\left\{\tfrac{1-t}{n+1}\left|f'(a)\right|^q+\tfrac{n+t}{n+1}\left|f'(b)\right|^q\right\}dt\right]^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \tfrac{b-a}{9(n+1)^2}\left(\tfrac{q-1}{2q-1}\left[2^{(2q-1)\,/\,(q-1)}+1\right]\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\tfrac{3}{2(n+1)}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\times\left\{\left[(2n+1)\left|f'(a)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}+\left[\left|f'(a)\right|^q+(2n+1)\left|f'(b)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Une autre variante du Théorème 2.1 et donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *et* $f' \in L[a,b]$. *Si* $|f'|^q$ $q > 1$ *est une fonction convexe, on a*

$$\begin{aligned} & |\varsigma(a,b,n)| \\ \leq\; & \tfrac{5(b-a)}{18(n+1)^2}\left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left\{\left(\tfrac{5}{18}n+\tfrac{8}{81}\right)|f'(a)|^q+\tfrac{29}{162}|f'(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\ & \left.\left\{\tfrac{29}{162}|f'(a)|^q+\left(\tfrac{5}{18}n+\tfrac{8}{81}\right)|f'(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right), \end{aligned}$$

où $\varsigma(a,b,n)$ *est donnée par (1.1).*

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, l'inégalité des moyennes d'ordre q et le fait que $|f'|^q$ soit une fonction convexe, on obtient

$$\begin{aligned} & |\varsigma(a,b,n)| \\ \leq\; & \tfrac{b-a}{(n+1)^2}\left(\int_0^1\left|\tfrac{2}{3}-t\right|\left|f'\left(\tfrac{n+t}{n+1}a+\tfrac{1-t}{n+1}b\right)\right|dt+\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|\left|f'\left(\tfrac{1-t}{n+1}a+\tfrac{n+t}{n+1}b\right)\right|dt\right) \\ \leq\; & \tfrac{b-a}{(n+1)^2}\left(\int_0^1\left|t-\tfrac{2}{3}\right|^{1-\frac{1}{q}}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left\{\int_0^1\left|\tfrac{2}{3}-t\right|\left(\tfrac{n+t}{n+1}|f'(a)|^q+\tfrac{1-t}{n+1}|f'(b)|^q\right)dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\ & \left.+\left\{\int_0^1\left|\tfrac{2}{3}-t\right|\left(\tfrac{n+t}{n+1}|f'(a)|^q+\tfrac{1-t}{n+1}|f'(b)|^q\right)dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right) \\ =\; & \tfrac{5(b-a)}{18(n+1)^2}\left(\tfrac{1}{n+1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left\{\left(\tfrac{5}{18}n+\tfrac{8}{81}\right)|f'(a)|^q+\tfrac{29}{162}|f'(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right. \\ & \left.\left\{\tfrac{29}{162}|f'(a)|^q+\left(\tfrac{5}{18}n+\tfrac{8}{81}\right)|f'(b)|^q\right\}^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.0.5 Inégalités intégrales à paramètre pour les fonctions s-convexes

Dans cette sous-section, par le biais l'identité donnée par le Lemme 1.2, İşcan [5], discute l'estimation d'erreur d'une nouvelle inégalité qui génère des inégalités de type Simpson et d'Ostrowski.

Théorème 2.3 ([12]) *Soit $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° et $a, b \in I$ avec $a < b$ telle que $f' \in L([a,b])$,*
$\theta, \lambda \in [0,1]$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned} &\left|(1-\theta)(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) + \theta f((1-\lambda)a + \lambda b) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ \leq\ & (b-a) A_1^{1-\frac{1}{q}}(\theta) \left(\lambda^2 \left[|f'(a)|^q A_2(\theta,s) + |f'(C)|^q A_3(\theta,s)\right]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + (1-\lambda)^2 \left[\left[|f'(b)|^q A_2(\theta,s) + |f'(C)|^q A_3(\theta,s)\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= \theta^2 - \theta + \tfrac{1}{2},\ A_2(\theta,s) = \tfrac{2\theta^{s+2}}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{\theta}{s+1} + \tfrac{1}{s+2}, \\ A_3(\theta,s) &= \tfrac{2(1-\theta)^{s+2}}{(s+1)(s+2)} - \tfrac{1-\theta}{s+1} + \tfrac{1}{s+2} \ \textit{et}\ C = (1-\lambda)a + \lambda b. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2 et l'inégalité des moyennes d'ordre q, on a

$$\begin{aligned} &\left|(1-\theta)(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) + \theta f(C) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\ \leq\ & (b-a)\left(\lambda^2 \int_0^1 |t-\theta|\,|f'(ta + (1-t)C)|\,dt \right. \\ & \left. + (1-\lambda)^2 \int_0^1 |t-\theta|\,|f'(tb + (1-t)C)|\,dt\right) \\ \leq\ & (b-a)\left(\lambda^2 \left(\int_0^1 |t-\theta|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t-\theta|\,|f'(ta + (1-t)C)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \left. + (1-\lambda)^2 \left(\int_0^1 |t-\theta|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |t-\theta|\,|f'(tb + (1-t)C)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$|f'(ta + C(1-t))|^q \leq t^s |f'(a)|^q + (1-t)^s |f'(C)|^q \tag{2.2}$$

et

$$|f'(tb + C(1-t))|^q \leq t^s |f'(b)|^q + (1-t)^s |f'(C)|^q. \tag{2.3}$$

En multipliant (2.2) et (2.3) par $|t-\theta|$ et en intégrant les inégalités obtenues par rapport à t sur $[0,1]$, on trouve

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |t-\theta| \, |f'(ta + (1-t)C)|^q \, dt \\ \leq \; & |f'(a)|^q \int_0^1 |t-\theta| \, t^s dt + |f'(C)|^q \int_0^1 |t-\theta| \, (1-t)^s \, dt \\ = \; & |f'(a)|^q A_2(\theta, s) + |f'(C)|^q A_3(\theta, s), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |t-\theta| \, |f'(tb + (1-t)C)|^q \, dt \\ \leq \; & |f'(b)|^q \int_0^1 |t-\theta| \, t^s dt + |f'(C)|^q \int_0^1 |t-\theta| \, (1-t)^s \, dt \\ = \; & |f'(b)|^q A_2(\theta, s) + |f'(C)|^q A_3(\theta, s) \end{aligned} \tag{2.5}$$

et

$$\int_0^1 |t-\theta| \, dt = \theta^2 - \theta + \tfrac{1}{2}. \tag{2.6}$$

En substituant (2.4)-(2.6) dans (2.1), on obtient l'inégalité souhaitée. La preuve est ainsi achevée. ∎

Une autre variante du Théorème 2.3 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.4 ([2]) *Soit* $f : I \subseteq [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *une application différentiable sur* I° *tel que* $f' \in L[a,b]$ *, où* $a, b \in I^{\circ}$ *avec* $a < b$ *et* θ *,* $\lambda \in [0,1]$*. Si* $|f'|^q$ *est s-convexe sur* $[a,b]$*,* $q > 1$*, alors l'inégalité suivante est vraie*

$$\begin{aligned} & \left| (1-\theta)(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) + \theta f((1-\lambda)a + \lambda b) - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq \; & (b-a) \left(\tfrac{\theta^{p+1} + (1-\theta)^{p+1}}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\lambda^2 \left(\tfrac{|f'(a)|^q + |f'(C)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} + (1-\lambda)^2 \left(\tfrac{|f'(b)|^q + |f'(C)|^q}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \right), \end{aligned}$$

où $C=(1-\lambda)\,a+\lambda b$ *et* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2 et par l'inégalité intégrale de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\left|(1-\theta)\left(\lambda f\left(a\right)+\left(1-\lambda\right)f\left(b\right)\right)+\theta f(C)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\lambda^2\int_0^1 |t-\theta|\,|f'(ta+(1-t)\,C)|\,dt\right. \\
&\left.+\,(1-\lambda)^2\int_0^1 |t-\theta|\,|f'(tb+(1-t)\,C)|\,dt\right) \\
\leq\ & (b-a)\left(\lambda^2\left(\int_0^1 |t-\theta|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(ta+(1-t)\,C)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\,(1-\lambda)^2\left(\int_0^1 |t-\theta|^p\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |f'(tb+(1-t)\,C)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right). \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, les inégalités (2.2) et (2.3) sont vérifiées. En intégrant ces deux dernières inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f'(ta+(1-t)\,C)|^q\,dt &\leq \int_0^1 t^s\,|f'(a)|^q+(1-t)^s\,|f'(C)|^q\,dt \\
&= \tfrac{|f'(a)|^q\,+\,|f'(C)|^q}{s+1} \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f'(tb+(1-t)\,C)|^q\,dt &\leq \int_0^1 t^s\,|f'(b)|^q+(1-t)^s\,|f'(C)|^q\,dt \\
&= \tfrac{|f'(b)|^q\,+\,|f'(C)|^q}{s+1}. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

La substitution de (2.8) et (2.9) dans (2.7) donne le résultat souhaité. La preuve est ainsi terminée. ■

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Maclaurin

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à une autre inégalité de type Newton-Cotes à trois points connus dans la littérature par l'inégalité intégrale de Maclaurin qui peut être déclarée comme suit :

Pour toute fonction quatre fois continûment différentiable sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{(b-a)^4}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty,$$

où $\left\|f^{(4)}\right\| = \sup\limits_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Nous notons que les résultats suivants sont nouveaux et sont soumis pour éventuelle publication.

3.0.6 Inégalités intégrales de type Maclaurin pour les fonctions s-convexes

Dans cette première sous-section nous allons examiner l'inégalité de Maclaurin sous l'hypothèse de la convexité de la dérivée première [6]. Nos résultats sont essentiellement basés sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$, et $f' \in L[a,b]$, alors l'égalité suivante est vérifiée*

$$\begin{aligned}
& \tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\,d\varpi \\
= {} & \tfrac{b-a}{9}\left(\int_0^1 \tfrac{1}{4}\varkappa f'\left((1-\varkappa)a+\varkappa\tfrac{5a+b}{6}\right)d\varkappa+\int_0^1 \tfrac{1}{4}(\varkappa-1)f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+5b}{6}+\varkappa b\right)d\varkappa\right. \\
& +\int_0^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)f'\left((1-\varkappa)\tfrac{5a+b}{6}+\varkappa\tfrac{a+b}{2}\right)d\varkappa \\
& \left.+\int_0^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+b}{2}+\varkappa\tfrac{a+5b}{6}\right)d\varkappa\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \tfrac{1}{4}\varkappa f'\left((1-\varkappa)a+\varkappa\tfrac{5a+b}{6}\right)d\varkappa, \\
I_2 &= \int_0^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)f'\left((1-\varkappa)\tfrac{5a+b}{6}+\varkappa\tfrac{a+b}{2}\right)d\varkappa, \\
I_3 &= \int_0^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+b}{2}+\varkappa\tfrac{a+5b}{6}\right)d\varkappa
\end{aligned}$$

et

$$I_4=\int_0^1 \tfrac{1}{4}(\varkappa-1)f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+5b}{6}+\varkappa b\right)d\varkappa.$$

En intégrant par partie I_1, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{3}{2(b-a)}\varkappa f\left((1-\varkappa)a+\varkappa\tfrac{5a+b}{6}\right)\Big|_{\varkappa=0}^{\varkappa=1}-\tfrac{3}{2(b-a)}\int_0^1 f\left((1-\varkappa)a+\varkappa\tfrac{5a+b}{6}\right)d\varkappa \\
&= \tfrac{3}{2(b-a)}f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)-\tfrac{3}{2(b-a)}\int_0^1 f\left((1-\varkappa)a+\varkappa\tfrac{5a+b}{6}\right)d\varkappa \\
&= \tfrac{3}{2(b-a)}f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)-\tfrac{9}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{5a+b}{6}} f(\varpi)\,d\varpi. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

De manière similaire on obtient

$$I_2 = \frac{9}{8(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{15}{8(b-a)} f\left(\frac{5a+b}{6}\right) - \frac{9}{(b-a)^2} \int_{\frac{5a+b}{6}}^{\frac{a+b}{2}} f(\varpi)\, d\varpi, \tag{3.2}$$

$$I_3 = \frac{15}{8(b-a)} f\left(\frac{a+5b}{6}\right) + \frac{9}{8(b-a)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{9}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+5b}{6}} f(\varpi)\, d\varpi \tag{3.3}$$

et

$$I_4 = \frac{3}{2(b-a)} f\left(\frac{a+5b}{6}\right) - \frac{9}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+5b}{6}}^{b} f(\varpi)\, d\varpi. \tag{3.4}$$

En additionnant (3.1)-(3.4), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{9}$, on obtient le résultat souhaité. Ainsi la preuve est terminée. ■

Théorème 3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) telle que $f' \in L[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe au seconde sens pour un certain $s \in (0,1]$ fixé, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\, d\varpi\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{36(s+1)(s+2)} \left(|f'(a)| + \left(\frac{7s+4}{2} + 3\left(\frac{3}{8}\right)^{s+1}\right)\left(\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right| + \left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|\right)\right. \\
&\left. + \left(3s - 2 + 10\left(\frac{5}{8}\right)^{s+1}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| + |f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

Preuve. A partir du Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, et la s-convexité au second sens de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\, d\varpi\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\int_0^1 \frac{1}{4}\varkappa \left|f'\left((1-\varkappa)a + \varkappa\frac{5a+b}{6}\right)\right| d\varkappa\right. \\
&+ \int_0^1 \left|\varkappa - \frac{5}{8}\right| \left|f'\left((1-\varkappa)\frac{5a+b}{6} + \varkappa\frac{a+b}{2}\right)\right| d\varkappa
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +\int_0^1 \left|\varkappa-\tfrac{3}{8}\right| \left|f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+b}{2}+\varkappa\tfrac{a+5b}{6}\right)\right| d\varkappa \\
& +\int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\left|f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+5b}{6}+\varkappa b\right)\right| d\varkappa \Bigg) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{9}\left(\int_0^1 \tfrac{1}{4}\varkappa\left((1-\varkappa)^s\left|f'(a)\right|+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\right)d\varkappa\right. \\
& +\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-\varkappa\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)d\varkappa \\
& +\int_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)d\varkappa \\
& +\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\right)d\varkappa \\
& +\int_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\right)d\varkappa \\
& \left.+\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|+\varkappa^s\left|f'(b)\right|\right)d\varkappa\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{9}\Bigg(\left|f'(a)\right|\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa(1-\varkappa)^s d\varkappa+\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa^{s+1}d\varkappa \\
& +\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-\varkappa\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-\varkappa\right)\varkappa^s d\varkappa \\
& +\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\int_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)\varkappa^s d\varkappa \\
& +\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa+\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)\varkappa^s d\varkappa \\
& +\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa+\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\int_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)\varkappa^s d\varkappa \\
& +\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)^{s+1}d\varkappa+\left|f'(b)\right|\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\varkappa^s d\varkappa\Bigg) \\
=\ & \tfrac{b-a}{9}\Bigg(\left|f'(a)\right|\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa(1-\varkappa)^s d\varkappa+\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|\Bigg(\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa^{s+1}d\varkappa
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8} - \varkappa\right)(1-\varkappa)^s \, d\varkappa + \int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(\varkappa - \tfrac{5}{8}\right)(1-\varkappa)^s \, d\varkappa \Bigg) \\
& + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \Bigg(\int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8} - \varkappa\right) \varkappa^s d\varkappa + \int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(\varkappa - \tfrac{5}{8}\right) \varkappa^s d\varkappa \\
& + \int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8} - \varkappa\right)(1-\varkappa)^s \, d\varkappa + \int_{\frac{3}{8}}^{1} \left(\varkappa - \tfrac{3}{8}\right)(1-\varkappa)^s \, d\varkappa \Bigg) \\
& + \left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right| \Bigg(\int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8} - \varkappa\right) \varkappa^s d\varkappa + \int_{\frac{3}{8}}^{1} \left(\varkappa - \tfrac{3}{8}\right) \varkappa^s d\varkappa \\
& + \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-\varkappa)^{s+1} \, d\varkappa \Bigg) + |f'(b)| \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\varkappa^s d\varkappa \Bigg) \\
= \; & \tfrac{b-a}{9(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{4} + \left(\tfrac{3s-2}{4} + 4\left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2} \right) \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \right. \\
& \left. + \left(\tfrac{7s+4}{8} + 2\left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2} \right) \left(\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right| + \left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right| \right) \right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$
\int_0^1 \tfrac{1}{4}\varkappa(1-\varkappa)^s \, d\varkappa = \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\varkappa^s d\varkappa = \tfrac{1}{4(s+1)(s+2)}, \tag{3.5}
$$

$$
\int_0^1 \tfrac{1}{4}\varkappa^{s+1} d\varkappa = \int_0^1 \tfrac{1}{4}(1-\varkappa)^{s+1} \, d\varkappa = \tfrac{1}{4(s+2)}, \tag{3.6}
$$

$$
\int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{8} - \varkappa\right)(1-\varkappa)^s \, d\varkappa \;=\; \int_{\frac{3}{8}}^{1} \left(\varkappa - \tfrac{3}{8}\right)\varkappa^s d\varkappa = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{5s+2}{8} + \left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2} \right), \tag{3.7}
$$

$$
\int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(\varkappa - \tfrac{5}{8}\right)(1-\varkappa)^s \, d\varkappa = \int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{8} - \varkappa\right)\varkappa^s d\varkappa = \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}, \tag{3.8}
$$

$$\int_{0}^{\frac{5}{8}}\left(\frac{5}{8}-\varkappa\right)\varkappa^{s}d\varkappa=\int_{\frac{3}{8}}^{1}\left(\varkappa-\frac{3}{8}\right)(1-\varkappa)^{s}\,d\varkappa=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{5}{8}\right)^{s+2} \tag{3.9}$$

et

$$\int_{\frac{5}{8}}^{1}\left(\varkappa-\frac{5}{8}\right)\varkappa^{s}d\varkappa=\int_{0}^{\frac{3}{8}}\left(\frac{3}{8}-\varkappa\right)(1-\varkappa)^{s}\,d\varkappa=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\left(\frac{3s-2}{8}+\left(\frac{5}{8}\right)^{s+2}\right). \tag{3.10}$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(\varpi)\,d\varpi\right| \\
\leq\ &\frac{25(b-a)}{288}\left(\frac{64|f'(a)|+379\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|+314\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+379\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|+64|f'(b)|}{1200}\right).
\end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) telle que $f'\in L[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|^{q}$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre $s\in(0,1]$ fixé et $q,p>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(\varpi)\,d\varpi\right| \\
\leq\ &\frac{b-a}{72(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2\left(\frac{|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+2\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^{q}}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la s-convexité au second sens de $|f'|^{q}$, on obtient

$$\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(\varpi)\,d\varpi\right|$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^1 \varkappa^p d\varkappa\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left|f'\left((1-\varkappa)a+\varkappa\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
& +\left(\int\limits_0^1 \left|\varkappa-\frac{5}{8}\right|^p d\varkappa\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left|f'\left((1-\varkappa)\frac{5a+b}{6}+\varkappa\frac{a+b}{2}\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
& +\left(\int\limits_0^1 \left|\varkappa-\frac{3}{8}\right|^p d\varkappa\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left|f'\left((1-\varkappa)\frac{a+b}{2}+\varkappa\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
& \left.+\frac{1}{4}\left(\int\limits_0^1 (1-\varkappa)^p d\varkappa\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left|f'\left((1-\varkappa)\frac{a+5b}{6}+\varkappa b\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left((1-\varkappa)^s\left|f'(a)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
& +\left(\int\limits_0^{\frac{5}{8}}\left(\frac{5}{8}-\varkappa\right)^p d\varkappa+\int\limits_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\frac{5}{8}\right)^p d\varkappa\right)^{\frac{1}{p}}\\
& \times\left(\int\limits_0^1 \left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
& +\left(\int\limits_0^{\frac{3}{8}}\left(\frac{3}{8}-\varkappa\right)^p d\varkappa+\int\limits_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\frac{3}{8}\right)^p d\varkappa\right)^{\frac{1}{p}}\\
& \times\left(\int\limits_0^1 \left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
& \left.+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1 \left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'(b)\right|^q\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
=\ & \frac{b-a}{72(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+2\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
& \left.+\left(\frac{5^{p+1}+3^{p+1}}{8}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème 3.2, si on prend $s = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\,d\varpi\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{72(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(2\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+2\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{3^{p+1}+5^{p+1}}{8}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Théorème 3.3 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) telle que $f' \in L[a,b]$ avec $0 \leq a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au seconde sens pour un certain nombre $s \in (0,1]$ fixé et $q \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\,d\varpi\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{17}{64}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left(\frac{8}{17}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(s+1)\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right. \\
&+\left(\left(\frac{5s+2}{8}+2\left(\frac{3}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\left(\frac{3s-2}{8}+2\left(\frac{5}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\left(\frac{3s-2}{8}+2\left(\frac{5}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left(\frac{5s+2}{8}+2\left(\frac{3}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, propriétés du la valeur absolue module, l'inégalité des moyennes d'ordre q, et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\,d\varpi\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{9}\left(\left(\int_0^1 \frac{1}{4}\varkappa d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \frac{1}{4}\varkappa\left|f'\left((1-\varkappa)a+\varkappa\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\int_0^1\left|\varkappa-\frac{5}{8}\right|d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\varkappa-\frac{5}{8}\right|\left|f'\left((1-\varkappa)\frac{5a+b}{6}+\varkappa\frac{a+b}{2}\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_0^1\left|\varkappa-\tfrac{3}{8}\right|d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\varkappa-\tfrac{3}{8}\right|\left|f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+b}{2}+\varkappa\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\,d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\left|f'\left((1-\varkappa)\tfrac{a+5b}{6}+\varkappa b\right)\right|^q d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\\
\leq\;&\tfrac{b-a}{9}\Bigg(\left(\tfrac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa\left((1-\varkappa)^s|f'(a)|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{17}{64}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-\varkappa\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)d\varkappa\\
&+\int_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)d\varkappa\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{17}{64}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q\right)d\varkappa\\
&+\int_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\varkappa^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q\right)d\varkappa\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\left((1-\varkappa)^s\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q+\varkappa^s|f'(b)|^q\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)\\
=\;&\tfrac{b-a}{9}\Bigg(\left(\tfrac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa(1-\varkappa)^s d\varkappa\right)|f'(a)|^q+\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}\varkappa^{s+1}d\varkappa\right)\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{17}{64}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\left(\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-\varkappa\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa+\int_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa\right)\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q\\
&+\left(\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{8}-\varkappa\right)\varkappa^s d\varkappa+\int_{\frac{5}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{5}{8}\right)\varkappa^s d\varkappa\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}\\
&+\left(\tfrac{17}{64}\right)^{1-\frac{1}{q}}\Bigg(\left(\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa+\int_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)(1-\varkappa)^s d\varkappa\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q
\end{aligned}
$$

$$+\left(\int_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)\varkappa^s d\varkappa+\int_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)\varkappa^s d\varkappa\right)\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\tfrac{1}{8}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)^{s+1}d\varkappa\right)\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q+\left(\int_0^1\tfrac{1}{4}(1-\varkappa)\varkappa^s d\varkappa\right)\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$\begin{aligned}
= \; & \tfrac{b-a}{9}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\tfrac{17}{64}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\left(\tfrac{8}{17}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{(s+1)\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right. \\
& +\left(\left(\tfrac{5s+2}{8}+2\left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)\right|^q+\left(\tfrac{3s-2}{8}+2\left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
& \left.+\left(\left(\tfrac{3s-2}{8}+2\left(\tfrac{5}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left(\tfrac{5s+2}{8}+2\left(\tfrac{3}{8}\right)^{s+2}\right)\left|f'\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé (3.5)-(3.10). Ce qui achève le résultat. ■

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.3, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\,d\varpi\right| \\
\leq \; & \tfrac{17(b-a)}{576}\left(\tfrac{8}{17}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{2\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right. \\
& \left.+\left(\tfrac{251\left|f'\left(\frac{5a+b}{6}\right)\right|^q+157\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{408}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{157\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+251\left|f'\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right|^q}{408}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

3.0.7 Inégalités intégrales de type Maclaurin pour les fonctions préinvexes

Dans cette sous-section nous allons établir l'analogue préinvexe de l'inégalité de Maclaurin qui est une généralisation des fonctions convexes [7]. Nos résultats sont essentiellement basés sur le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° avec $\eta(b,a) > 0$, et $f' \in L[a, a+\eta(b,a)]$, alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\tfrac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\\
=\ &\tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\int\limits_0^1 (1-\varkappa)\, f'\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa\right.\\
&+\int\limits_0^1 \left(\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right) f'\left(a+\tfrac{3-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa\\
&+\int\limits_0^1 \left(\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right) f'\left(a+\tfrac{5-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa\\
&\left.+\int\limits_0^1 (\varkappa-1)\, f'\left(a+\tfrac{5+\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa\right).
\end{aligned}$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^1 (1-\varkappa)\, f'\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa,\\
I_2 &= \int\limits_0^1 \left(\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right) f'\left(a+\tfrac{3-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa,\\
I_3 &= \int\limits_0^1 \left(\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right) f'\left(a+\tfrac{5+2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa,\\
I_4 &= \int\limits_0^1 (\varkappa-1)\, f'\left(a+\tfrac{5+\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa.
\end{aligned}$$

En intégrant par la partie I_1, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\tfrac{6}{\eta(b,a)}(1-\varkappa)\, f\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\Big|_{\varkappa=0}^{\varkappa=1} - \tfrac{6}{\eta(b,a)}\int\limits_0^1 f\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa\\
&= \tfrac{6}{\eta(b,a)} f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right) - \tfrac{6}{\eta(b,a)}\int\limits_0^1 f\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)d\varkappa\\
&= \tfrac{6}{\eta(b,a)} f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right) - \tfrac{36}{\eta^2(b,a)}\int\limits_a^{\frac{6a+\eta(b,a)}{6}} f(u)\,du. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

De manière similaire on obtient

$$I_2 = \frac{15}{2\eta(b,a)} f\left(\frac{6a+\eta(b,a)}{6}\right) + \frac{9}{2\eta(b,a)} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \frac{36}{\eta^2(b,a)} \int_{\frac{6a+\eta(b,a)}{6}}^{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}} f(u)\,du, \tag{3.12}$$

$$I_3 = \frac{9}{2\eta(b,a)} f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + \frac{15}{2\eta(b,a)} f\left(\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right) - \frac{36}{\eta^2(b,a)} \int_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}}^{\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}} f(u)\,du \tag{3.13}$$

et

$$I_4 = \frac{6}{\eta(b,a)} f\left(\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right) - \frac{36}{\eta^2(b,a)} \int_{\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}}^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du.$$

En additionnant (3.11)-(3.14), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{\eta(b,a)}{36}$, on obtient le résultat désiré. La preuve est ainsi terminée. ■

Théorème 3.4 *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $(a, a+\eta(b,a))$ telle que $f' \in L[a, a+\eta(b,a)]$ et $\eta(b,a) > 0$. Si $|f'|$ est préinvexe, on a*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{6a+\eta(b,a)}{6}\right) + 2f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + 3f\left(\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \\ \le\ & \frac{25\eta(b,a)}{576}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right). \end{aligned}$$

Preuve. Du Lemme 3.2, des propriétés de la valeur absolue, et de la préinvexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{6a+\eta(b,a)}{6}\right) + 2f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + 3f\left(\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right) - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du \right| \\ \le\ & \frac{\eta(b,a)}{36}\left(\int_0^1 (1-\varkappa)\left|f'\left(a + \tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right| d\varkappa\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 \left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right| \left|f'\left(a+\tfrac{3-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right| d\varkappa \\
&+\int_0^1 \left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right| \left|f'\left(a+\tfrac{5-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right| d\varkappa \\
&+\int_0^1 (1-\varkappa) \left|f'\left(a+\tfrac{5+\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right| d\varkappa\Bigg) \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\int_0^1 (1-\varkappa)\left(\left(1-\tfrac{1-\varkappa}{6}\right)|f'(a)|+\tfrac{1-\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa\right. \\
&+\int_0^1 \left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right| \left(\left(1-\tfrac{3-2\varkappa}{6}\right)|f'(a)|+\tfrac{3-2\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa \\
&+\int_0^1 \left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right| \left(\left(1-\tfrac{5-2\varkappa}{6}\right)|f'(a)|+\tfrac{5-2\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa \\
&\left.+\int_0^1 (1-\varkappa)\left(\left(1-\tfrac{5+\varkappa}{6}\right)|f'(a)|+\tfrac{5+\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa\right) \\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\int_0^1 (1-\varkappa)\left(\tfrac{5+\varkappa}{6}|f'(a)|+\tfrac{1-\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa\right. \\
&+\int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}|f'(a)|+\tfrac{3-2\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa \\
&+\int_{\frac{3}{8}}^1 \left(4\varkappa-\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}|f'(a)|+\tfrac{3-2\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa \\
&+\int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{1+2\varkappa}{6}|f'(a)|+\tfrac{5-2\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa \\
&+\int_{\frac{5}{8}}^1 \left(4\varkappa-\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{1+2\varkappa}{6}|f'(a)|+\tfrac{5-2\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa \\
&\left.+\int_0^1 (1-\varkappa)\left(\tfrac{1-\varkappa}{6}|f'(a)|+\tfrac{5+\varkappa}{6}|f'(b)|\right) d\varkappa\right) \\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right) \\
&\times\left(\int_0^1 (1-\varkappa)\left(\tfrac{5+\varkappa}{6}\right) d\varkappa+\int_0^{\frac{3}{8}} \left(\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa\right. \\
&+\int_{\frac{3}{8}}^1 \left(4\varkappa-\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa+\int_0^{\frac{5}{8}} \left(\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{1+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa
\end{aligned}
$$

$$
\left. + \int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(4\varkappa - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{1+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa + \int_{0}^{1} (1-\varkappa)\left(\frac{1-\varkappa}{6}\right) d\varkappa \right)
$$
$$
= \frac{25\eta(b,a)}{576}\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right),
$$

où nous avons utilisé

$$
\int_{0}^{1} (1-\varkappa)\left(\frac{5+\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \frac{4}{9}, \tag{3.14}
$$
$$
\int_{0}^{1} (1-\varkappa)\left(\frac{1-\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \frac{1}{18}, \tag{3.15}
$$
$$
\int_{0}^{\frac{3}{8}} \left(\frac{3}{2} - 4\varkappa\right)\left(\frac{3+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(4\varkappa - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{5-2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \frac{39}{256}, \tag{3.16}
$$
$$
\int_{0}^{\frac{3}{8}} \left(\frac{3}{2} - 4\varkappa\right)\left(\frac{3-2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \int_{\frac{5}{8}}^{1} \left(4\varkappa - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{1+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \frac{33}{256}, \tag{3.17}
$$
$$
\int_{\frac{3}{8}}^{1} \left(4\varkappa - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \int_{0}^{\frac{5}{8}} \left(\frac{5}{2} - 4\varkappa\right)\left(\frac{5-2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \frac{1375}{2304} \tag{3.18}
$$

et

$$
\int_{\frac{3}{8}}^{1} \left(4\varkappa - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{3-2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \int_{0}^{\frac{5}{8}} \left(\frac{5}{2} - 4\varkappa\right)\left(\frac{1+2\varkappa}{6}\right) d\varkappa = \frac{425}{2304}. \tag{3.19}
$$

La preuve est ainsi terminée. ■

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.4, si on prend $\eta(b,a) = b-a$, on obtient :*

$$
\left| \frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right) + 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right) - \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\,du \right|
$$
$$
\leq \frac{25(b-a)}{576}\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right).
$$

Théorème 3.5 *Soit* $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $(a,a+\eta(b,a))$ *telle que* $f'\in L[a,a+\eta(b,a)]$ *et* $\eta(b,a)>0$. *Si* $|f'|^{\rho}$ *est préinvexe où* $\rho,\delta>1$ *avec* $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\rho}=1$, *on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\tfrac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|\\
\leq\;& \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\tfrac{1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\tfrac{11|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{12}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^{\rho}+11|f'(b)|^{\rho}}{12}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right.\\
&\left.+\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3^{\delta+1}+5^{\delta+1}}{8}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\tfrac{2|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^{\rho}+2|f'(b)|^{\rho}}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right).
\end{aligned}\tag{3.20}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder, et la préinvexité de $|f'|^{\rho}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\tfrac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|\\
\leq\;& \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^{\rho}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right.\\
&+\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right|^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left(a+\tfrac{3-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^{\rho}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\\
&+\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right|^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left(a+\tfrac{5-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^{\rho}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\\
&\left.+\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left(a+\tfrac{5+\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^{\rho}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\\
\leq\;& \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int\limits_0^1\left(\tfrac{5+\varkappa}{6}|f'(a)|^{\rho}+\tfrac{1-\varkappa}{6}|f'(b)|^{\rho}\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right.\\
&+4\left(\int\limits_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{8}-\varkappa\right)^{\delta}d\varkappa+\int\limits_{\frac{3}{8}}^1\left(\varkappa-\tfrac{3}{8}\right)^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\\
&\times\left(\int\limits_0^1\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}|f'(a)|^{\rho}+\tfrac{3-2\varkappa}{6}|f'(b)|^{\rho}\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}$$

$$+4\left(\int_{0}^{\frac{5}{8}}\left(\frac{5}{8}-\varkappa\right)^{\delta}d\varkappa+\int_{\frac{5}{8}}^{1}\left(\varkappa-\frac{5}{8}\right)^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\times\left(\int_{0}^{1}\left(\frac{1+2\varkappa}{6}\left|f'(a)\right|^{\rho}+\frac{5-2\varkappa}{6}\left|f'(b)\right|^{\rho}\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

$$+\left(\int_{0}^{1}(1-\varkappa)^{\delta}d\varkappa\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_{0}^{1}\left(\frac{1-\varkappa}{6}\left|f'(a)\right|^{\rho}+\frac{5+\varkappa}{6}\left|f'(b)\right|^{\rho}\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\Bigg)$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{36}\left(\frac{1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{11|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{12}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\frac{|f'(a)|^{\rho}+11|f'(b)|^{\rho}}{12}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{3^{\delta+1}+5^{\delta+1}}{8}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{2|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\frac{|f'(a)|^{\rho}+2|f'(b)|^{\rho}}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.5, si on prend $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(u)\,du\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{36}\left(\frac{1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{11|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{12}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\frac{|f'(a)|^{\rho}+11|f'(b)|^{\rho}}{12}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{3^{\delta+1}+5^{\delta+1}}{8}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{2|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\frac{|f'(a)|^{\rho}+2|f'(b)|^{\rho}}{3}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right).$$

Corollaire 3.6 *Sous les hypothèses du Théorème 3.5, on a*

$$\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\frac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|$$

$$\leq\frac{\eta(b,a)}{18}\left(\frac{1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3^{\delta+1}+5^{\delta+1}}{8}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Corollaire 3.7 *Dans le Théorème 3.5, si on prend $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$\left|\frac{1}{8}\left(3f\left(\frac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+3f\left(\frac{a+5b}{6}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(u)\,du\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{18}\left(\frac{1}{\delta+1}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{3^{\delta+1}+5^{\delta+1}}{8}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Théorème 3.6 *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $(a, a+\eta(b,a))$ telle que $f' \in L[a, a+\eta(b,a)]$ et $\eta(b,a) > 0$. Si $|f'|^\rho$ est préinvexe où $\rho \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\tfrac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{8|f'(a)|^\rho+|f'(b)|^\rho}{9}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^\rho+8|f'(b)|^\rho}{9}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right. \\
&\left.+\tfrac{17}{16}\left(\left(\tfrac{863|f'(a)|^\rho+361|f'(b)|^\rho}{1224}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{361|f'(a)|^\rho+863|f'(b)|^\rho}{1224}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right). \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q, et la preinvexité de $|f'|^\rho$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\tfrac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)\,d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)\left|f'\left(a+\tfrac{1-\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^\rho d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right. \\
&+\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right|d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right|\left|f'\left(a+\tfrac{3-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^\rho d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&+\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right|d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right|\left|f'\left(a+\tfrac{5-2\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^\rho d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}} \\
&\left.+\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)\,d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\left(\int\limits_0^1(1-\varkappa)\left|f'\left(a+\tfrac{5+\varkappa}{6}\eta(b,a)\right)\right|^\rho d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\left(|f'(a)|^\rho\int\limits_0^1(1-\varkappa)\left(\tfrac{5+\varkappa}{6}\right)d\varkappa+|f'(b)|^\rho\int\limits_0^1(1-\varkappa)\left(\tfrac{1-\varkappa}{6}\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right. \\
&+\left(\int\limits_0^1\left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right|d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{\rho}} \\
&\times\left(|f'(a)|^\rho\left(\int\limits_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}\right)d\varkappa+\int\limits_{\frac{3}{8}}^1\left(4\varkappa-\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{3+2\varkappa}{6}\right)d\varkappa\right)\right. \\
&\left.\left.+|f'(b)|^\rho\left(\int\limits_0^{\frac{3}{8}}\left(\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{3-2\varkappa}{6}\right)d\varkappa+\int\limits_{\frac{3}{8}}^1\left(4\varkappa-\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{3-2\varkappa}{6}\right)d\varkappa\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\int_0^1\left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right|d\varkappa\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\\
&\times\left(\left|f'(a)\right|^{\rho}\left(\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{1+2\varkappa}{6}\right)d\varkappa+\int_{\frac{5}{8}}^1\left(4\varkappa-\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{1+2\varkappa}{6}\right)d\varkappa\right)\right.\\
&\left.+\left|f'(b)\right|^{\rho}\left(\int_0^{\frac{5}{8}}\left(\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right)\left(\tfrac{5-2\varkappa}{6}\right)d\varkappa+\int_{\frac{5}{8}}^1\left(4\varkappa-\tfrac{5}{2}\right)\left(\tfrac{5-2\varkappa}{6}\right)d\varkappa\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}\\
&\left.+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{\rho}}\left(\left|f'(a)\right|^{\rho}\int_0^1(1-\varkappa)\left(\tfrac{1-\varkappa}{6}\right)d\varkappa+\left|f'(b)\right|^{\rho}\int_0^1(1-\varkappa)\left(\tfrac{5+\varkappa}{6}\right)d\varkappa\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\\
=\;&\tfrac{\eta(b,a)}{36}\left(\tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{8|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{9}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^{\rho}+8|f'(b)|^{\rho}}{9}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right.\\
&\left.+\tfrac{17}{16}\left(\left(\tfrac{863|f'(a)|^{\rho}+361|f'(b)|^{\rho}}{1224}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{361|f'(a)|^{\rho}+863|f'(b)|^{\rho}}{1224}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.14)-(3.19) et

$$
\int_0^1\left|\tfrac{3}{2}-4\varkappa\right|d\varkappa=\int_0^1\left|\tfrac{5}{2}-4\varkappa\right|d\varkappa=\tfrac{17}{16}.
$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 3.8 *Dans le Théorème 3.6, si on prend $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\;&\tfrac{b-a}{36}\left(\tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{8|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{9}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^{\rho}+8|f'(b)|^{\rho}}{9}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right.\\
&\left.+\tfrac{17}{16}\left(\left(\tfrac{1726|f'(a)|^{\rho}+722|f'(b)|^{\rho}}{2448}\right)^{\frac{1}{\rho}}+\left(\tfrac{722|f'(a)|^{\rho}+1726|f'(b)|^{\rho}}{2448}\right)^{\frac{1}{\rho}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.9 *Sous les hypothèses du Théorème 3.6, on a*

$$\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{6a+\eta(b,a)}{6}\right)+2f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+3f\left(\tfrac{6a+5\eta(b,a)}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|$$
$$\leq \tfrac{25\eta(b,a)}{288}\left(\tfrac{|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Corollaire 3.10 *Dans le Corollaire 3.9, si on prend $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f(u)\,du\right|\leq \tfrac{25(b-a)}{288}\left(\tfrac{|f'(a)|^{\rho}+|f'(b)|^{\rho}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

3.1 Applications à des moyennes spéciales

Nous considérerons les moyennes des nombres réels positifs arbitraires a, b

La moyenne arithmétique : $A(a,b)=\frac{a+b}{2}$.

La moyenne p-logarithmique : $L_p(a,b)=\left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a\neq b$ et $p\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$.

Proposition 3.1 *Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $0<a<b$, on a*

$$\left|3A\left(A^{n}\left(2a,\tfrac{1}{3}A(a,b)\right),A^{n}\left(2a,\tfrac{5}{3}A(a,b)\right)\right)+A^{n}\left(2a,A(a,b)\right)\right.$$
$$\left.-4L_{n}^{n}\left(a,a+A(a,b)\right)\right|\leq\tfrac{25A(a,b)}{144}\left(na^{n-1}+nb^{n-1}\right).$$

Preuve. L'assertion découle du Théorème 3.4 avec $\eta(b,a)=A(a,b)$, appliqué à la fonction $f(x)=x^{n}$ où $n\geq 3$. ■

Proposition 3.2 *Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $0<a<b$, $\rho>1$, on a*

$$\left|3A^{\frac{n}{\rho}+1}\left(\left(\tfrac{5a+b}{6}\right),\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)+A^{\frac{n}{\rho}+1}(a,b)-4L_{\frac{n}{\rho}+1}^{\frac{n}{\rho}+1}(a,b)\right|$$
$$\leq\tfrac{25(n+\rho)(b-a)}{72\rho}\left(\tfrac{a^{n}+b^{n}}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.10, appliqué à la fonction $f(x)=x^{\frac{n}{\rho}+1}$.

■

Conclusion

Le but de ce mémoire était d'étudier une inégalité ouverte de type Newton-Cotes à trois points.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques types de convexité classique et généralisée ainsi que quelques identités.

Dans la deuxième partie nous avons étudié quelques inégalités de type Newton-Cotes fermées à trois points dont la dérivée première satisfait un certain type de convexité classique.

Dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats soumis pour éventuelle publication concernant les inégalités de Newton-Cotes ouvertes à trois points plus précisément l'inégalité de Maclaurin dont le cas où la dérivée première est s-convexe ainsi que le cas où elle est préinvexe.

Bibliographie

[1] M. U. Awan and K. I. Noor, Some new Simpson-type integral inequalities. Nonlin. Sci.. Letts., A, 8 (2017), no. 3, 333-336.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23(37) (1978), 13–20.

[3] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[4] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), no. 2, 545–550.

[5] İ. İşcan, New estimates on generalization of some integral inequalities for s-convex functions and their applications. Int. J. Pure Appl. Math. 86 (2013), no. 4, 727-746.

[6] **B. Meftah and N. Allel, Maclaurin's inequalities for differentiable s-convex functions. Submited.**

[7] **B. Meftah and N. Allel, Maclaurin's inequalities for functions whose first derivatives are preinvex. Accepted in Journal of Mathematical Analysis and Modeling.**

[8] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[10] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[11] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[12] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.