République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{elle} DIH Amel

Intitulé

Inégalités du dual de Simpson

Dirigé par : Chiheb Tarik

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Azzouza Noureddine	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Chiheb Tarik	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Aissaoui Fatima	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2022

DÉDICACES

Je remercie Dieu tout puissant de m'avoir aidé pour achever ce modeste travail que je dédie :

À mes chers parents

Ma mère « CHERIFA » et mon père « KAMAL »

Pour l'éducation qu'ils m'ont prodiguée avec tous les moyens et au prix de tous les sacrifices qu'ils ont consentis à mon égard, pour leur patience, leur amour et leurs encouragements.

Que ce travail leur apporte joie et fierté;

À mes chers frères « MOUSSA, ISHAK »

À mes chers deuxièmes parents « NADIA » et « TAHER »

À mon cher mari «ISHAK »

À ma tante « KHADIJA », mon oncle « MOHAMED » et sa femme « AMINA », mes cousins

À mes chers amis de toujours, mes sœurs « HOUDA, HANANE, KAWTER et AMANI»

À mes chers « MOHAMED et MOAAD »

« Dr. Meftah » et mes chers collègues « KHAWLA, SAFA et HADJER »

À tous les étudiants de promotion 2éme année Master en Mathématique.

AMEL

REMERCIEMENT

Avant tout, je tiens remercier Dieu le tout puissant qui a donné l'envie, le courage et la force pour mener à terme ce travail, qui a été réalisé au ce département mathématique de l'université ***« 8 mai 1945 GUELMA ».***

Je tiens à remercier le membre de jury :

Monsieur AZZOUZA Noureddine, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la présidence du jury.

Madame AISSAOUI Fatima, pour avoir bien voulu examiner ce travail.

Je tiens à remercier plus particulièrement mon encadreur, Monsieur CHIHEB Tarek, pour avoir accepté de m'encadrer et pour l'aide qu'il m'a apportée.

Mes sincères remerciements à tous les enseignants du département Mathématiques en particulier Monsieur MEFTAH Badreddine.

Et pour la famille, merci infiniment pour votre présence, vos conseils ainsi que votre aide morale.

Je remercie également tous mes amies et touts ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin tout au long de ce travail.

ملخص

في هذه الأطروحة ، سوف نركز على دراسة المتراجحات التكاملية من نوع سيمسون الثانوية.

في الفصل الأول، نذكر ببعض التعريفات للتحدب الكلاسيكي والمعمم، بالإضافة إلى بعض المعادلات التكاملية المهمة.

في الفصل الثاني ، اقتبسنا بعض النتائج المتعلقة بالمتراجحات التكاملية من نوع s-سيمسون الذي تكون مشتقاته الأولى محدبة ، محدب بالمعنى الثاني.

بينما سيخصص الفصل الأخير المتراجحات التكاملية الجديدة من نوع سيمسون الثانوية. نذكر أننا قدمنا ورقتين للنشر المحتمل ، تم أحدهما ونشره في المجلة الدولية:

"مجلة كونورالب للرياضيات".

الكلمات المفتاحية: متراجحة سيمبسون الثانوية ، تربيعات نيوتن-كوة ، متراجحة s-محدبة ، دوال محدودة ، دوال هولدر ، دوال ليبشيتزيان ، دوال ذات تحدب عام.

Abstract

In this memory, we will focus on the study of integral inequalities of dual Simpson type.

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexity, as well as some important integral identities.

In the second chapter, we quote some results concerning integral inequalities of the Simpson type whose first derivatives are convex, s-convex in the second sense.

While the last chapter will be entirely devoted to the new inequalities of the dual Simpson type, we mention that we have submitted two papers dealing with this type of inequality, one of which is accepted and the other has appeared in the journal publication:

“Konuralp journal of mathematics.”

Keywords: Dual Simpson inequality, Newton-Cotes quadrature, Hölder inequality, s-convex functions, bounded functions, Lipschitzian functions, preinvex functions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type dual Simpson.
Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique et généralisée, ainsi que certaines identités intégrales importantes.
Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson dont les premières dérivées sont convexes et s-convexes au second sens.
Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type dual Simpson, nous mentionnons que nous avons soumis deux papiers traitons ce type d'inégalité dont l'un est accepté et l'autre est paru dans la revues publication:
« Konuralp journal of mathematics ».

Mots clés: Inégalité du dual de Simpson, quadrature de Newton-Cotes, inégalité de Hölder, fonctions s-convexes, fonctions bornées, fonctions Lipschitzian, fonctions préinvexes.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches des mathématiques moderne telles que la théorie des espaces de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc. Cette dernière représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècle par des éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littéraire dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [7, 8, 9].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de cette thèse est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type dual Simpson dont les dérivées d'ordre un jouissent d'un certain type de convexité classique où généralisée et d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre nous rappelons quelques types de convexités classiques et généralisés pour les fonctions à une variable, ainsi que quelques identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le second chapitre nous traiterons certains résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson dont les premières dérivées sont convexes, s-convexes au second sens.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré à des nouvelles inégalités de type dual Simpson dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication dans des revues internationales, dont l'un a été accepté pour publication dans la revue Konuralp journal of mathematics.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques type de convexité ainsi que quelques identités de fonctions, concernant la convexité en peut consulter [10].

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([10]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit convexe si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, nous avons*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([10]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1 - t)\, y) \leq tf\,(x) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([2]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si*

$$f(tx + (1 - t)y) \ \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0, 1]$.

1.0.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation de la notion de convexité classique, cette dernière a été introduite par Hanson [6].

Définition 1.4 ([6]) *Un ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ est dit invexe au point x par rapport à η où $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$, si*

$$x + t\eta(y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.1 *K est dit un ensemble invexe par rapport à η, si K est invexe en chaque points $x \in K$.*

Définition 1.5 ([12]) *Soit K est un ensemble invexe sur $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction, f est dite préinvexe par rapport à η, si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t) f(x) + tf(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et $t \in [0, 1]$.

1.0.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([1]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application absolument continue sur I° (I° est l'intérieur de I) où $a, b \in I$ avec $a < b$. Alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ = \;& (b-a)\int_0^1 p(t)\, f'(tb + (1-t)a)\,dt, \end{aligned}$$

où

$$p(t)=\begin{cases} t-\frac{1}{6}, & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right), \\ t-\frac{5}{6}, & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]. \end{cases}$$

Lemme 1.2 ([11]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application absolument continue sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, ou $a, b \in I^{\circ}$ avec $a < b$. Alors l'égalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ = \; & \frac{b-a}{2}\int_0^1\left[\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right)f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right]dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Inégalité de Hölder et inégalité des moyennes d'ordre q

Théorème 1.1 ([7]) *Soit $p > 0$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Si f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a,b]$ et si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont des fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.2 ([3]) *Soient $x=(x_i)_{i=1,2,\dots,n}$ et $p=(p_i)_{i=1,2,\dots,n}$ deux strictement positives n-uplet et soit $q \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, l'inégalité des moyennes d'ordre q pondérés par p est définie par*

$$M_n^{[q]}=\begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q\neq-\infty,0,+\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k} & \text{pour } q=0, \\ \min(x_1,x_2,\dots,x_n) & \text{pour } q=-\infty, \\ \max(x_1,x_2,\dots,x_n) & \text{pour } q=+\infty. \end{cases}$$

Pour $-\infty \le q < r \le +\infty$, on a

$$M_n^{[q]} \le M_n^{[r]}.$$

Théorème 1.3 ([3]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour* $q \geq 1$ *et si* $|f|$ *et* $|g|^q$ *sont intégrables sur* $[a,b]$, *alors*

$$\int_a^b |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)| \, |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Simpson

Dans ce chapitre nous étudierons certaines inégalités de type Simpson, dont cette dernière peut être déclaré comme suit :

Pour toute fonction quatre fois continûment différentiable sur l'intervalle $[a, b]$, on a

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \leq \frac{(b-a)^4}{2880}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty,$$

où $\left\|f^{(4)}\right\| = \sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

2.0.4 Inégalités intégrales de type Simpson pour les fonctions convexes

Dans le travail qui suit Alomari et al. [1], ont discuté à travers l'identité établie par le Lemme 1.1 l'inégalité de Simpson dont la dérivée première jouit de la s-convexité

Théorème 2.1 ([1]) *Soit $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est application différentiable in I° telle que $f' \in L^1[a, b]$, ou $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe in $[a, b]$ pour tout $s \in (0, 1]$,* *alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & (b-a)\,\tfrac{6^{-s}-9(2)^{-s}+(5)^{s+2}6^{-s}+3s-12}{18(s^2+3s+2)}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right].
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1 et la s-convexité de $|f'|$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & (b-a)\left|\int_0^1 p(t)\,f'(tb+(1-t)a)\,dt\right| \\
\leq\ & (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right||f'(tb+(1-t)a)|\,dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1\left|t-\tfrac{5}{6}\right||f'(tb+(1-t)a)|\,dt \\
\leq\ & (b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right|\left(t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(a)|\right)dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1\left|t-\tfrac{5}{6}\right|\left(t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(a)|\right)dt \\
=\ & (b-a)\int_0^{\frac{1}{6}}\left(\tfrac{1}{6}-t\right)\left(t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(a)|\right)dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left(t-\tfrac{1}{6}\right)\left(t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(a)|\right)dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\tfrac{5}{6}-t\right)\left(t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(a)|\right)dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{5}{6}}^1\left(t-\tfrac{5}{6}\right)\left(t^s|f'(b)|+(1-t)^s|f'(a)|\right)dt \\
=\ & (b-a)\,\tfrac{6^{-s}-9(2)^{-s}+(5)^{s+2}6^{-s}+3s-12}{18(s^2+3s+2)}\left[|f'(a)|+|f'(b)|\right].
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 2.1 *Dans le Théorème 2.1, si on prend $s = 1$, on obtient*

$$\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{5(b-a)}{72}\left[\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right].$$

Théorème 2.2 ([1]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^{p/(p-1)}$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour un certain $s \in (0,1]$ et $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité suivante est vraie*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ &\frac{b-a}{(s+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\left|f'(a)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1 et l'inégalité intégrale de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \qquad (2.1)\\
\leq\ &(b-a)\left|\int_0^1 p(t)\,f'(tb+(1-t)a)\,dt\right| \\
\leq\ &(b-a)\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\frac{1}{6}\right|\left|f'(tb+(1-t)a)\right|dt \\
&+(b-a)\int_{\frac{1}{2}}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|\left|f'(tb+(1-t)a)\right|dt \\
\leq\ &(b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\frac{1}{6}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(tb+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+(b-a)\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|t-\frac{5}{6}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(tb+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ &(b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{6}-t\right)^p dt+\int_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left(t-\frac{1}{6}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left|f'(tb+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+(b-a)\left(\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\frac{5}{6}-t\right)^p dt+\int_{\frac{5}{6}}^1\left(t-\frac{5}{6}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1\left|f'(tb+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(tb+(1-t)a)|^q \, dt \le \frac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1} \tag{2.2}$$

et

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f'(tb+(1-t)a)|^q \, dt \le \frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(b)|^q}{s+1}. \tag{2.3}$$

Substituons (2.2) et (2.3) dans (2.1) on trouve

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \le\ & \frac{b-a}{(s+1)^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{1+2^{p+1}}{6^{p+1}(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right), \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. ■

Corollaire 2.2 *Dans le Théorème 2.2, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \le\ & \frac{b-a}{6}\left(\frac{1+2^{p+1}}{6(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

Théorème 2.3 ([1]) *Soit $f : I \subset [0,\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f' \in L^1[a,b]$, où $a,b \in I$ avec $a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, pour un certain $s \in (0,1]$ et $q \ge 1$, alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\ \le\ & \frac{(b-a)}{[36(s^2+3s+2)]^{\frac{1}{q}}}\left(\frac{5}{72}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\left[\left(3^{-s}\right)\left(2^{1-s}\right)+3s\left(2^{1-s}\right)+3\left(2^{-s}\right)\right]|f'(b)|^q\right.\right. \\ &+\left.\left[5^{s+2}\times 3^{-s}\times 2^{1-s}-6s\left(2^{-s}\right)-21\left(2^{-s}\right)+6s-24\right]|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+\left(\left[\left(3^{-s}\right)\left(2^{1-s}\right)+3s\left(2^{1-s}\right)+3\left(2^{-s}\right)\right]|f'(a)|^q\right. \\ &+\left.\left.\left[5^{s+2}\times 3^{-s}\times 2^{1-s}-6s\left(2^{-s}\right)-21\left(2^{-s}\right)+6s-24\right]|f'(b)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1 et l'inégalité des moyennes d'ordre q, on a

$$\begin{aligned}
& \left|\tfrac{1}{6}\left(f\left(a\right)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f\left(x\right)dx\right| \\
\leq\ & \left(b-a\right)\left|\int_0^1 p\left(t\right)f'\left(tb+\left(1-t\right)a\right)dt\right| \\
\leq\ & \left(b-a\right)\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right|\left|f'\left(tb+\left(1-t\right)a\right)\right|dt \\
& +\left(b-a\right)\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left|t-\tfrac{5}{6}\right|\left|f'\left(tb+\left(1-t\right)a\right)\right|dt \\
\leq\ & \left(b-a\right)\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right|\left|f'\left(tb+\left(1-t\right)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
& +\left(b-a\right)\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left|t-\tfrac{5}{6}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\left|t-\tfrac{5}{6}\right|\left|f'\left(tb+\left(1-t\right)a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe, on a donc :

$$\begin{aligned}
& \int\limits_0^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right|\left|f'\left(tb+\left(1-t\right)a\right)\right|^q dt \\
\leq\ & \int\limits_0^{\frac{1}{6}}\left(\tfrac{1}{6}-t\right)\left(t^s\left|f'\left(b\right)\right|^q+\left(1-t\right)^s\left|f'\left(a\right)\right|^q\right)dt \\
& +\int\limits_{\frac{1}{6}}^{\frac{1}{2}}\left(t-\tfrac{1}{6}\right)\left(t^s\left|f'\left(b\right)\right|^q+\left(1-t\right)^s\left|f'\left(a\right)\right|^q\right)dt \\
=\ & \tfrac{\left(3^{-s}\right)\left(2^{1-s}\right)+3s\left(2^{1-s}\right)+3\left(2^{-s}\right)}{36\left(s^2+3s+2\right)}\left|f'\left(b\right)\right|^q \\
& +\tfrac{5^{s+2}\times 3^{-s}\times 2^{1-s}-6s\left(2^{-s}\right)-21\left(2^{-s}\right)+6s-24}{36\left(s^2+3s+2\right)}\left|f'\left(a\right)\right|^q
\end{aligned}\tag{2.5}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|t-\tfrac{5}{6}\right|\left|f'\left(tb+(1-t)a\right)\right|^{q}dt\\
\leq\;&\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{6}}\left(\tfrac{5}{6}-t\right)\left(t^{s}\left|f'(b)\right|^{q}+(1-t)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}\right)dt\\
&+\int_{\frac{5}{6}}^{1}\left(t-\tfrac{5}{6}\right)\left(t^{s}\left|f'(b)\right|^{q}+(1-t)^{s}\left|f'(a)\right|^{q}\right)dt\\
=\;&\tfrac{\left(3^{-s}\right)\left(2^{1-s}\right)+3s\left(2^{1-s}\right)+3\left(2^{-s}\right)}{36(s^{2}+3s+2)}\left|f'(a)\right|^{q}\\
&+\tfrac{5^{s+2}\times3^{-s}\times2^{1-s}-6s\left(2^{-s}\right)-21\left(2^{-s}\right)+6s-24}{36(s^{2}+3s+2)}\left|f'(b)\right|^{q}.
\end{aligned}\tag{2.6}$$

Aussi, notons que :

$$\int_{0}^{\frac{1}{2}}\left|t-\tfrac{1}{6}\right|dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|t-\tfrac{5}{6}\right|dt=\tfrac{5}{72}.\tag{2.7}$$

La substitution de (2.5)-(2.7) dans (2.4) conduit au résultat recherché, ce qui achève la preuve. ■

Remarque 2.1 *Les calculs du Théorème 2.3 sont erronés.*

Une autre variante de l'inégalité de Simpson a été proposée par Sarikaya et al. [11], cette dernière s'appuie sur le Lemme 1.2.

Théorème 2.4 **(**[11]**)** *Soit $f: I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f'\in L^{1}[a,b]$, où $a,b\in I^{0}$ avec $a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour tout $s\in(0,1]$ et $q>1$, alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(x)\,dx\right|\\
\leq\;&\tfrac{b-a}{2}\left(\tfrac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\tfrac{2\times5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right|^{q}+\tfrac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}\left|f'(a)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\tfrac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}\left|f'(b)\right|^{q}+\tfrac{2\times5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}\left|f'(a)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2 et l'inégalité des moyennes d'ordre q, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\right]dt \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q \leq \left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q \qquad (2.9)$$

et

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q \leq \left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q. \qquad (2.10)$$

Substituons (2.9) et (2.10) dans (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{2}\left\{\left(\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|\left[\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right\} \\
=\ & \frac{b-a}{2}\left(\frac{5}{36}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left\{\left(\frac{2\times5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(b)|^q+\frac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{(2s+1)3^{s+1}+2}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(b)|^q+\frac{2\times5^{s+2}+(s-4)6^{s+1}-(2s+7)3^{s+1}}{3\times6^{s+1}(s+1)(s+2)}|f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 2.3 *Dans le Théorème 2.4, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Théorème 2.5 ([11]) *Soit $f:I\subset[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une application différentiable sur I° telle que $f'\in L^1[a,b]$, où $a,b\in I^\circ$ avec $a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$ pour tout $s\in(0,1]$ et $q,p>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(b)|^q+|f'(a)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left(2^{s+1}-1\right)|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2^s(s+1)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.2 et par l'inégalité intégrale de Hölder, on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{2}\int\limits_0^1\left[\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|+\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|\right]dt\\ \leq\ &\frac{b-a}{2}\left\{\left(\int\limits_0^1\left|\frac{t}{2}-\frac{1}{3}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\ &\left.+\left(\int\limits_0^1\left|\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}b+\frac{1-t}{2}a\right)\right|^q\leq\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(b)|^q \tag{2.11}$$

et

$$\left|f'\left(\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b\right)\right|^q\leq\left(\frac{1-t}{2}\right)^s|f'(a)|^q+\left(\frac{1+t}{2}\right)^s|f'(b)|^q. \tag{2.12}$$

En substituant (2.12) et (2.13) dans (2.11) et en calculant les intégrales du côté droit de l'inégalité résultante, nous obtenons le résultat souhaité. La preuve est ainsi terminée. ■

Corollaire 2.4 *Dans le Théorème 2.5, si on prend $s = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)}{12}\left(\frac{1+2^{p+1}}{3(p+1)}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ \left(\frac{3|f'(b)|^q + |f'(a)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type dual Simpson

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à une autre inégalité de type Newton-Cotes à trois points connus dans la littérature sous le nom de inégalité intégrale de type dual Simpson qui peut être déclarée comme suit :

Pour toute fonction quatre fois continûment différentiable sur l'intervalle $[a,b]$, on a

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\frac{7(b-a)^4}{23040}\left\|f^{(4)}\right\|_\infty,$$

où $\left\|f^{(4)}\right\|=\sup_{x\in(a,b)}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Nous notons que les résultats suivants sont nouveaux et sont soumis pour éventuelle publication.

3.0.5 Inégalités intégrales de type dual Simpson pour les fonctions s-convexes

Dans cette première sous-section nous allons examiner l'inégalité de dual Simpson sous l'hypothèse de la convexité de la dérivée première [4]. Nos résultats sont essentiellement basés sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, et $f' \in L^1[a,b]$, alors l'égalité suivante est vérifiée*

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du \\
= \; &\tfrac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt + \int_0^1 \left(t-\tfrac{5}{3}\right) f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right) f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt + \int_0^1 (t-1) f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right)dt\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 t f'\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt, \\
I_2 &= \int_0^1 \left(t-\tfrac{5}{3}\right) f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4} + t\tfrac{a+b}{2}\right)dt, \\
I_3 &= \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right) f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2} + t\tfrac{a+3b}{4}\right)dt
\end{aligned}
$$

et

$$I_4 = \int_0^1 (t-1) f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4} + tb\right)dt.$$

En intégrant par partie I_1, on obtient

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \tfrac{4}{b-a} t f\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{4}{b-a}\int_0^1 f\left((1-t)a + t\tfrac{3a+b}{4}\right)dt \\
&= \tfrac{4}{b-a} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{3a+b}{4}} f(u)\,du. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

De manière similaire on obtient

$$I_2 = -\tfrac{8}{3(b-a)} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{20}{3(b-a)} f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right) - \tfrac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{3a+b}{4}}^{\frac{a+b}{2}} f(u)\,du, \qquad (3.2)$$

$$I_3=\frac{20}{3(b-a)}f\left(\frac{a+3b}{4}\right)-\frac{8}{3(b-a)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^{\frac{a+3b}{4}}f(u)\,du \tag{3.3}$$

et

$$I_4=\frac{4}{b-a}f\left(\frac{a+3b}{4}\right)-\frac{16}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+3b}{4}}^{b}f(u)\,du. \tag{3.4}$$

En additionnant (3.1)-(3.4), puis en multipliant l'égalité résultante par $\frac{b-a}{16}$, on obtient le résultat souhaité. Ainsi la preuve est terminée. ■

Théorème 3.1 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\le a<b$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens où $s\in(0,1]$ est un nombre fixé, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\le\ &\frac{b-a}{16}\left(\frac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(a)|+\frac{8s+10}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+\frac{4s+14}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right.\\
&\left.+\frac{8s+10}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|+\frac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, la valeur absolue et le fait que $|f'|$ est s-convexe au second sens, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\le\ &\frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)a+t\frac{3a+b}{4}\right)\right|dt+\int_0^1\left(\frac{5}{3}-t\right)\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right.\\
&\left.+\int_0^1\left(t+\frac{2}{3}\right)\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)\right|dt+\int_0^1(1-t)\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4}+tb\right)\right|dt\right)\\
\le\ &\frac{b-a}{16}\left(\int_0^1 t\left((1-t)^s|f'(a)|+t^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|\right)dt\right.\\
&+\int_0^1\left(\frac{5}{3}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|\right)dt\\
&+\int_0^1 (1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+t^s\left|f'(b)\right|\right)dt\Bigg)\\
= \; & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1 t(1-t)^s dt\right)|f'(a)|+\left(\int_0^1 t^{s+1}dt+\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)(1-t)^s dt\right)\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|\right.\\
&+\left(\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)t^s dt+\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)(1-t)^s dt\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\
&\left.+\left(\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)t^s dt+\int_0^1(1-t)^{t+1}dt\right)\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+\left(\int_0^1(1-t)t^s dt\right)|f'(b)|\right)\\
= \; & \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(a)|+\tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+\tfrac{4s+14}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right.\\
&\left.+\tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)}\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(b)|\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé

$$
\int_0^1 t(1-t)^s dt = \int_0^1 t^s(1-t)\,dt=\frac{1}{(s+1)(s+2)}, \tag{3.5}
$$

$$
\int_0^1 t^{s+1}dt = \int_0^1 (1-t)^{s+1}dt=\frac{1}{s+2}, \tag{3.6}
$$

$$
\int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)(1-t)^s dt = \int_0^1 t^s\left(t+\tfrac{2}{3}\right)dt=\frac{5s+7}{3(s+1)(s+2)}, \tag{3.7}
$$

$$
\int_0^1 t^s\left(\tfrac{5}{3}-t\right)dt = \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)(1-t)^s dt=\frac{2s+7}{3(s+1)(s+2)}. \tag{3.8}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $s=1$, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
\leq\; & \tfrac{b-a}{96}\left(|f'(a)|+6\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|+6\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+6\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|+|f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

Théorème 3.2 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) telle que $f'\in L^1[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens où $s\in(0,1]$ est un nombre*

fixé et $q>1$ *avec* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right. \\
&\left.+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et le fait que $|f'|^q$ est s-convexe, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{b-a}{16}\left(\left(\int\limits_0^1 t^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left((1-t)a+t\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\int\limits_0^1\left(\frac{5}{3}-t\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left((1-t)\frac{3a+b}{4}+t\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int\limits_0^1\left(t+\frac{2}{3}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left((1-t)\frac{a+b}{2}+t\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\int\limits_0^1(1-t)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_0^1\left|f'\left((1-t)\frac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&\left.+\left(\int\limits_0^1\left((1-t)^s\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(|f'(a)|^q\int\limits_0^1(1-t)^s dt+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int\limits_0^1 t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}\int_{0}^{1}(1-t)^{s}dt+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\int_{0}^{1}t^{s}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}\int_{0}^{1}(1-t)^{s}dt+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}\int_{0}^{1}t^{s}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+\left(\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}\int_{0}^{1}(1-t)^{s}dt+\left|f'(b)\right|^{q}\int_{0}^{1}t^{s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$=\frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}}{1+s}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème 3.2, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(u)\,du\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{16(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{|f'(a)|^{q}+\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5^{p+1}-2^{p+1}}{3^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\frac{\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Théorème 3.3 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) telle que $f'\in L^{1}[a,b]$ avec $0\leq a<b$. Si $|f'|^{q}$ est s-convexe au second sens pour un certain $s\in(0,1]$ où $q\geq 1$, Alors*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b}f(u)\,du\right|$$

$$\leq\frac{b-a}{16}\left(\frac{3}{7}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\left(\frac{|f'(a)|^{q}+(s+1)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(s+1)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}+|f'(b)|^{q}}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\left(\frac{(5s+7)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^{q}+(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^{q}+(5s+7)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^{q}}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1, la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q et la s-convexité au second sens de $|f'|^q$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+2f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left|f'\left((1-t)a+t\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{3a+b}{4}+t\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+b}{2}+t\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\int_0^1(1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)\left|f'\left((1-t)\tfrac{a+3b}{4}+tb\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 t\left((1-t)^s|f'(a)|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q+t^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1(1-t)\left((1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q+t^s|f'(b)|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(|f'(a)|^q\int_0^1 t(1-t)^s dt+\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int_0^1 t^{s+1}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)(1-t)^s dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)t^s\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)(1-t)^s dt+\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)t^s dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left.+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right|^q\int_0^1(1-t)^{s+1}dt+|f'(b)|^q\int_0^1(1-t)t^s dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{16}\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+(s+1)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{(s+1)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{(5s+7)\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\left.+\left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\frac{(2s+7)\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+(5s+7)\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{3(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

où nous avons utilisé (3.5)-(3.8). La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.3, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\left|\tfrac{1}{8}\left(3f\left(\tfrac{5a+b}{6}\right)+2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+3f\left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(\varpi)\,d\varpi\right|$$
$$\leq \tfrac{b-a}{32}\left(\left(\left(\frac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{2\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q+|f'(b)|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\tfrac{7}{3}\left(\left(\frac{4\left|f'\left(\frac{3a+b}{4}\right)\right|^q+3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{7}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{3\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q+4\left|f'\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right|^q}{7}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\right).$$

3.0.6 Inégalités intégrales de type dual Simpson pour les fonctions préinvexes

Dans cette sous-section nous allons établir l'analogue préinvexe de l'inégalité de dual Simpson qui est une généralisation des fonctions convexes. Ces résultats ont fait l'objet de la publication [5] et sont essentiellement basés sur le lemme suivant :

Lemme 3.2 *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,a+\eta(b,a)]$ avec $\eta(b,a)>0$, et $f'\in L^1[a,a+\eta(b,a)]$, alors l'égalité suivante est satisfaite :*

$$\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du$$
$$=\tfrac{\eta(b,a)}{16}\left(\int_0^1(1-t)f'\left(a+\tfrac{1-t}{4}\eta(b,a)\right)dt+\int_0^1\left(t-\tfrac{5}{3}\right)f'\left(a+\tfrac{1+t}{4}\eta(b,a)\right)dt\right.$$
$$\left.+\int_0^1\left(t+\tfrac{2}{3}\right)f'\left(a+\tfrac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)dt+\int_0^1(t-1)f'\left(a+\tfrac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)dt\right).$$

Preuve. Considérons les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (1-t)\, f'\left(a + \tfrac{1-t}{4}\eta(b,a)\right) dt, \\
I_2 &= \int_0^1 \left(t - \tfrac{5}{3}\right) f'\left(a + \tfrac{1+t}{4}\eta(b,a)\right) dt, \\
I_3 &= \int_0^1 \left(t + \tfrac{2}{3}\right) f'\left(a + \tfrac{2+t}{4}\eta(b,a)\right) dt
\end{aligned}$$

et

$$I_4 = \int_0^1 (t-1)\, f'\left(a + \tfrac{3+t}{4}\eta(b,a)\right) dt.$$

En intégrant par la partie I_1, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\tfrac{4}{\eta(b,a)}(1-t)\, f\left(a + \tfrac{1-t}{4}\eta(b,a)\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a + \tfrac{1-t}{4}\eta(b,a)\right) dt \\
&= \tfrac{4}{\eta(b,a)} f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right) - \tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a + \tfrac{1-t}{4}\eta(b,a)\right) dt \\
&= \tfrac{4}{\eta(b,a)} f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right) - \tfrac{16}{(\eta(b,a))^2}\int_a^{\frac{4a+\eta(b,a)}{4}} f(u)\, du. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

De manière similaire on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{4}{\eta(b,a)}\left(t - \tfrac{5}{3}\right) f\left(a + \tfrac{1+t}{4}\eta(b,a)\right)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a + \tfrac{1+t}{4}\eta(b,a)\right) dt \\
&= -\tfrac{8}{3\eta(b,a)} f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + \tfrac{20}{3\eta(b,a)} f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right) - \tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a + \tfrac{1+t}{4}\eta(b,a)\right) dt \\
&= \tfrac{20}{3\eta(b,a)} f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right) - \tfrac{8}{3\eta(b,a)} f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) - \tfrac{16}{(\eta(b,a))^2}\int_{\frac{4a+\eta(b,a)}{4}}^{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}} f(u)\, du, \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \tfrac{4}{\eta(b,a)}\left(t+\tfrac{2}{3}\right)f\left(a+\tfrac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)\Big|_{t=0}^{t=1}-\tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a+\tfrac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)dt \\
&= \tfrac{20}{3\eta(b,a)}f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)-\tfrac{8}{3\eta(b,a)}f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a+\tfrac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)dt \\
&= \tfrac{20}{3\eta(b,a)}f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)-\tfrac{8}{3\eta(b,a)}f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)-\tfrac{16}{(\eta(b,a))^2}\int_{\frac{2a+\eta(b,a)}{2}}^{\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}} f(u)\,du \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \tfrac{4}{\eta(b,a)}(t-1)f\left(a+\tfrac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)\Big|_{t=0}^{t=1}-\tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a+\tfrac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)dt \\
&= \tfrac{4}{\eta(b,a)}f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)-\tfrac{4}{\eta(b,a)}\int_0^1 f\left(a+\tfrac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)dt \\
&= \tfrac{4}{\eta(b,a)}f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)-\tfrac{16}{(\eta(b,a))^2}\int_{\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}}^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

En additionnant (3.9)-(3.12), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{\eta(b,a)}{16}$, on obtient le résultat désiré. La preuve est terminée. ■

Théorème 3.4 *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,a+\eta(b,a)]$ telle que $f'\in L^1[a,a+\eta(b,a)]$ avec $\eta(b,a)>0$. Si $|f'|$ est préinvexe, alors*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{5\eta(b,a)}{48}\left(|f'(a)|+|f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2, la valeur absolue et le fait que $|f'|$ est préinvexe, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{3}\left(2f\left(\tfrac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\tfrac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\tfrac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\tfrac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{16}\left(\int_0^1 (1-t)\left|f'\left(a+\tfrac{1-t}{4}\eta(b,a)\right)\right|dt+\int_0^1\left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left|f'\left(a+\tfrac{1+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|dt\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left|f'\left(a+\tfrac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)\right| dt + \int_0^1 (1-t)\left|f'\left(a+\tfrac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)\right| dt \Bigg) \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{16}\Bigg(\int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{3+t}{4}\left|f'(a)\right| + \tfrac{1-t}{4}\left|f'(b)\right|\right) dt \\
& + \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left(\tfrac{3-t}{4}\left|f'(a)\right| + \tfrac{1+t}{4}\left|f'(b)\right|\right) dt \\
& + \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2-t}{4}\left|f'(a)\right| + \tfrac{2+t}{4}\left|f'(b)\right|\right) dt \\
& + \int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{1-t}{4}\left|f'(a)\right| + \tfrac{3+t}{4}\left|f'(b)\right|\right) dt \Bigg) \\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{16}\Bigg(\left|f'(a)\right|\Bigg(\int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{3+t}{4}\right) dt + \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left(\tfrac{3-t}{4}\right) dt \\
& + \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2-t}{4}\right) dt + \int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{1-t}{4}\right) dt \Bigg) \\
& + \left|f'(b)\right|\Bigg(\int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{1-t}{4}\right) dt + \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left(\tfrac{1+t}{4}\right) dt \\
& + \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2+t}{4}\right) dt + \int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{3+t}{4}\right) dt \Bigg)\Bigg) \\
=\ & \tfrac{5\eta(b,a)}{48}\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le fait que

$$
\int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{3+t}{4}\right) dt = \tfrac{5}{12}, \tag{3.13}
$$

$$
\int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left(\tfrac{3-t}{4}\right) dt = \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2+t}{4}\right) dt = \tfrac{3}{4}, \tag{3.14}
$$

$$
\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right)\left(\tfrac{2-t}{4}\right) dt = \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right)\left(\tfrac{1+t}{4}\right) dt = \tfrac{5}{12} \tag{3.15}
$$

et

$$
\int_0^1 (1-t)\left(\tfrac{1-t}{4}\right) dt = \tfrac{1}{12}.
$$

La preuve est ainsi achevée. ∎

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.4, si on prend $\eta(b,a)=b-a$, on obtient :*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\leq\frac{5(b-a)}{48}\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'(b)\right|\right).$$

Théorème 3.5 *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $[a,a+\eta(b,a)]$ telle que $f'\in L^1[a,a+\eta(b,a)]$ avec $\eta(b,a)>0$. Si $|f'|^\zeta$ est préinvexe ou $\zeta>1$ avec $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\zeta}=1$, alors*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right|$$
$$\leq\frac{\eta(b,a)}{8(\delta+1)^{\frac{1}{\delta}}}\left(1+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^\zeta+|f'(b)|^\zeta}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}}.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2, la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et le fait que $|f'|^\zeta$ est préinvexe, on obtient

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right|$$
$$\leq\frac{\eta(b,a)}{16}\left(\left(\int_0^1(1-t)^\delta dt\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_0^1\left|f'\left(a+\frac{1-t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^\zeta dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right.$$
$$+\left(\int_0^1\left(\frac{5}{3}-t\right)^\delta dt\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_0^1\left|f'\left(a+\frac{1+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^\zeta dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$
$$+\left(\int_0^1\left(t+\frac{2}{3}\right)^\delta dt\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_0^1\left|f'\left(a+\frac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^\zeta dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$
$$\left.+\left(\int_0^1(1-t)^\delta dt\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_0^1\left|f'\left(a+\frac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^\zeta dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right)$$
$$\leq\frac{\eta(b,a)}{16(\delta+1)^{\frac{1}{\delta}}}\left(\left(\int_0^1\left(\frac{3+t}{4}|f'(a)|^\zeta+\frac{1-t}{4}|f'(b)|^\zeta\right)dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right.$$
$$+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_0^1\left(\frac{3-t}{4}|f'(a)|^\zeta+\frac{1+t}{4}|f'(b)|^\zeta\right)dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$

$$+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\int_0^1\left(\frac{2-t}{4}\left|f'(a)\right|^{\zeta}+\frac{2+t}{4}\left|f'(b)\right|^{\zeta}\right)dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$

$$\left.+\left(\int_0^1\left(\frac{1-t}{4}\left|f'(a)\right|^{\zeta}+\frac{3+t}{4}\left|f'(b)\right|^{\zeta}\right)dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right)$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{16(\delta+1)^{\frac{1}{\delta}}}\left(\left(\left|f'(a)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{3+t}{4}dt+\left|f'(b)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{1-t}{4}dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right.$$

$$+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left|f'(a)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{3-t}{4}dt+\left|f'(b)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{1+t}{4}dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$

$$+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left|f'(a)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{2-t}{4}dt+\left|f'(b)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{2+t}{4}dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$

$$\left.+\left(\left|f'(a)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{1-t}{4}dt+\left|f'(b)\right|^{\zeta}\int_0^1\frac{3+t}{4}dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right)$$

$$=\frac{\eta(b,a)}{16(\delta+1)^{\frac{1}{\delta}}}\left(\left(\frac{7|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}+\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+7|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left(\left(\frac{5|f'(a)|^{\zeta}+3|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}+\left(\frac{3|f'(a)|^{\zeta}+5|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right)\right). \tag{3.16}$$

En utilisant l'inégalité discrète de moyennes d'ordre q, il s'ensuit :

$$\left(\frac{7|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}+\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+7|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}\leq 2^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\left|f'(a)\right|^{\zeta}+\left|f'(b)\right|^{\zeta}\right)^{\frac{1}{\zeta}} \tag{3.17}$$

et

$$\left(\frac{5|f'(a)|^{\zeta}+3|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}+\left(\frac{3|f'(a)|^{\zeta}+5|f'(b)|^{\zeta}}{8}\right)^{\frac{1}{\zeta}}\leq 2^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\left|f'(a)\right|^{\zeta}+\left|f'(b)\right|^{\zeta}\right)^{\frac{1}{\zeta}}. \tag{3.18}$$

Substituons (3.18) et (3.19) dans (3.17), on obtient

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(u)\,du\right|$$

$$\leq\frac{\eta(b,a)}{8(\delta+1)^{\frac{1}{\delta}}}\left(1+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}},$$

qui est le résultat recherché. La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.5, si on prend* $\eta(b,a) = b-a$*, on obtient*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{(b-a)}{8(\delta+1)^{\frac{1}{\delta}}}\left(1+\left(\frac{5^{\delta+1}-2^{\delta+1}}{3^{\delta+1}}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right)\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}}.$$

Théorème 3.6 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $(a, a+\eta(b,a))$ *telle que* $f' \in L^1[a, a+\eta(b,a)]$ *avec* $\eta(b,a) > 0$*. Si* $|f'|^{\zeta}$ *est préinvexe ou* $\zeta \geq 1$*, on a*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{4a+\eta(b,a)}{4}\right) - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + 2f\left(\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{5\eta(b,a)}{24}\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}}.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyennes d'ordre q, et la préinvexité de $|f'|^{\zeta}$, on obtient

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{4a+\eta(b,a)}{4}\right) - f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right) + 2f\left(\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right) - \frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(u)\,du\right|$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{16}\left(\left(\int_0^1 (1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\int_0^1 (1-t)\left|f'\left(a+\frac{1-t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^{\zeta} dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right.$$
$$+\left(\int_0^1 \left(\frac{5}{3}-t\right)dt\right)^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\int_0^1 \left(\frac{5}{3}-t\right)\left|f'\left(a+\frac{1+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^{\zeta} dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$
$$+\left(\int_0^1 \left(t+\frac{2}{3}\right)dt\right)^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\int_0^1 \left(t+\frac{2}{3}\right)\left|f'\left(a+\frac{2+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^{\zeta} dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}$$
$$\left.+\left(\int_0^1 (1-t)\,dt\right)^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\int_0^1 (1-t)\left|f'\left(a+\frac{3+t}{4}\eta(b,a)\right)\right|^{\zeta} dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right)$$
$$\leq \frac{\eta(b,a)}{16}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}}\left(\int_0^1 (1-t)\left(\frac{3+t}{4}|f'(a)|^{\zeta}+\frac{1-t}{4}|f'(b)|^{\zeta}\right)dt\right)^{\frac{1}{\zeta}}\right.$$

$$
\begin{aligned}
& + \left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right) \left(\tfrac{3-t}{4} \left|f'(a)\right|^{\zeta} + \tfrac{1+t}{4} \left|f'(b)\right|^{\zeta} \right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& + \left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right) \left(\tfrac{2-t}{4} \left|f'(a)\right|^{\zeta} + \tfrac{2+t}{4} \left|f'(b)\right|^{\zeta} \right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\int_0^1 (1-t) \left(\tfrac{1-t}{4} \left|f'(a)\right|^{\zeta} + \tfrac{3+t}{4} \left|f'(b)\right|^{\zeta} \right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \Bigg) \\
= \; & \tfrac{\eta(b,a)}{16} \Bigg(\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\left|f'(a)\right|^{\zeta} \int_0^1 (1-t) \left(\tfrac{3+t}{4}\right) dt + \left|f'(b)\right|^{\zeta} \int_0^1 (1-t) \left(\tfrac{1-t}{4}\right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& + \left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\left|f'(a)\right|^{\zeta} \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right) \left(\tfrac{3-t}{4}\right) dt + \left|f'(b)\right|^{\zeta} \int_0^1 \left(\tfrac{5}{3}-t\right) \left(\tfrac{1+t}{4}\right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& + \left(\tfrac{7}{6}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\left|f'(a)\right|^{\zeta} \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right) \left(\tfrac{2-t}{4}\right) dt + \left|f'(b)\right|^{\zeta} \int_0^1 \left(t+\tfrac{2}{3}\right) \left(\tfrac{2+t}{4}\right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\left|f'(a)\right|^{\zeta} \int_0^1 (1-t) \left(\tfrac{1-t}{4}\right) dt + \left|f'(b)\right|^{\zeta} \int_0^1 (1-t) \left(\tfrac{3+t}{4}\right) dt \right)^{\frac{1}{\zeta}} \Bigg) \\
= \; & \tfrac{\eta(b,a)}{32} \Bigg(\left(\tfrac{5|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{6} \right)^{\frac{1}{\zeta}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^{\zeta}+5|f'(b)|^{\zeta}}{6} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\
& + \tfrac{7}{3} \left(\left(\tfrac{9|f'(a)|^{\zeta}+5|f'(b)|^{\zeta}}{14} \right)^{\frac{1}{\zeta}} + \left(\tfrac{5|f'(a)|^{\zeta}+9|f'(b)|^{\zeta}}{14} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \right) \Bigg), \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.13)-(3.16). En utilisant l'inégalité discrète de moyennes d'ordre q, il s'ensuit :

$$
\left(\tfrac{5|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{6} \right)^{\frac{1}{\zeta}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^{\zeta}+5|f'(b)|^{\zeta}}{6} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \leq 2^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\left|f'(a)\right|^{\zeta} + \left|f'(b)\right|^{\zeta} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \qquad (3.20)
$$

et

$$
\left(\tfrac{9|f'(a)|^{\zeta}+5|f'(b)|^{\zeta}}{14} \right)^{\frac{1}{\zeta}} + \left(\tfrac{5|f'(a)|^{\zeta}+9|f'(b)|^{\zeta}}{14} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \leq 2^{1-\frac{1}{\zeta}} \left(\left|f'(a)\right|^{\zeta} + \left|f'(b)\right|^{\zeta} \right)^{\frac{1}{\zeta}}. \qquad (3.21)
$$

Substituons (3.21) et (3.22) dans (3.20), on obtient

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{4a+\eta(b,a)}{4}\right)-f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)+2f\left(\frac{4a+3\eta(b,a)}{4}\right)\right)-\frac{1}{\eta(b,a)}\int\limits_{a}^{a+\eta(b,a)}f\left(u\right)du\right|$$
$$\leq \frac{5\eta(b,a)}{24}\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}},$$

qui est le résultat recherché. La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.6 *Dans le Théorème 3.6, si on prend* $\eta(b,a)=b-a$, *on obtient*

$$\left|\frac{1}{3}\left(2f\left(\frac{3a+b}{4}\right)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right)-\frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b}f\left(u\right)du\right|\leq \frac{5(b-a)}{24}\left(\frac{|f'(a)|^{\zeta}+|f'(b)|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}}.$$

3.1 Applications à des moyennes spéciales et des quadratures d'intégrations

3.1.1 Applications à des quadratures d'intégrations

Soit Υ une partition de points de l'intervalle $[a,b]$ définie comme suit $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Considérons la formule de quadrature

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(u\right)du=\lambda\left(f,\Upsilon\right)+R\left(f,\Upsilon\right),$$

où

$$\lambda\left(f,\Upsilon\right)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x_{i+1}-x_i}{3}\left(2f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+2f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right),$$

et $R\left(f,\Upsilon\right)$ désigne l'erreur d'approximation associée.

Proposition 3.1 *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *et* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* (a,b) *où* $0\leq a<b$ *et* $f'\in L^1[a,b]$. *Si* $|f'|$ *est s-convexe au second sens pour un certain nombre*

fixé $s \in (0,1]$, *on a*

$$\begin{aligned}|R(f,\Upsilon)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{(x_{i+1}-x_i)^2}{16} \Big(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left|f'(x_i)\right| + \tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)} \left|f'(\tfrac{3x_i+x_{i+1}}{4})\right| \\ &\quad + \tfrac{4s+14}{3(s+1)(s+2)} \left|f'\left(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| + \tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)} \left|f'\left(\tfrac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right| + \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left|f'(x_{i+1})\right| \Big).\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant le Théorème 3.1 aux sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ de la partition Υ, on a

$$\begin{aligned}&\left| \tfrac{(x_{i+1}-x_i)}{3} \left(2f\left(\tfrac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right) - f\left(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \tfrac{(x_{i+1}-x_i)}{16} \Big(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left|f'(x_i)\right| + \tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)} \left|f'(\tfrac{3x_i+x_{i+1}}{4})\right| + \tfrac{4s+14}{3(s+1)(s+2)} \left|f'\left(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right| \\ &+ \tfrac{8s+10}{3(s+1)(s+2)} \left|f'\left(\tfrac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right| + \tfrac{1}{(s+1)(s+2)} \left|f'(x_{i+1})\right| \Big). \qquad (3.22)\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de (3.23) par $(x_{i+1} - x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i = 0, 1, ..., n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.2 *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *et* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* (a, b) *où* $0 \leq a < b$ *et* $f' \in L^1[a, b]$. *Si* $|f'|$ *est une fonction convexe, on a*

$$|R(f,\Upsilon)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \tfrac{5(x_{i+1}-x_i)}{48} \left(\left|f'(x_i)\right| + \left|f'(x_{i+1})\right|\right).$$

Preuve. En appliquant le Corollaire 3.4 aux sous-intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ de la partition Υ, on a

$$\begin{aligned}&\left| \tfrac{(x_{i+1}-x_i)}{3} \left(2f\left(\tfrac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right) - f\left(\tfrac{x_i+x_{i+1}}{2}\right) + 2f\left(\tfrac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(u)\,du \right| \\ \leq\ & \tfrac{5(x_{i+1}-x_i)}{48} \left(\left|f'(x_i)\right| + \left|f'(x_{i+1})\right|\right). \qquad (3.23)\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de (3.24) par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i=0,1,...,n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Proposition 3.3 *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a,b) où $0\leq a<b$ et $f'\in L^1[a,b]$. Si $|f'|^{\zeta}$ est une fonction convexe avec $\zeta\geq 1$, on a*

$$\left|R\left(f,\Upsilon\right)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{5(x_{i+1}-x_i)}{24}\left(\frac{|f'(x_i)|^{\zeta}+|f'(x_{i+1})|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}}.$$

Preuve. En appliquant le Corollaire 3.6 aux sous-intervalles $[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,...,n-1)$ de la partition Υ, on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(x_{i+1}-x_i)}{3}\left(2f\left(\frac{3x_i+x_{i+1}}{4}\right)-f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+2f\left(\frac{x_i+3x_{i+1}}{4}\right)\right)-\int_{x_i}^{x_{i+1}}f\left(u\right)du\right| \\ \leq\ &\frac{5(x_{i+1}-x_i)}{24}\left(\frac{|f'(x_i)|^{\zeta}+|f'(x_{i+1})|^{\zeta}}{2}\right)^{\frac{1}{\zeta}}. \qquad (3.24)\end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de (3.25) par $(x_{i+1}-x_i)$, puis en additionnant les inégalités obtenues pour tout $i=0,1,...,n-1$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, nous obtenons le résultat souhaité. ■

3.1.2 Applications à des moyennes spéciales

Nous considérerons les moyennes des nombres réels arbitraires a,b

La moyenne arithmétique : $A\left(a,b\right)=\frac{a+b}{2}$.

La moyenne P-logarithmique : $L_p\left(a,b\right)=\left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a,b>0, a\neq b$ et $p\in\mathbb{R}\backslash\{-1,0\}$.

Proposition 3.4 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$, on a*

$$\begin{aligned} & \left|3A\left(A^n\left(2a, \tfrac{1}{3}A(a,b)\right), A^n\left(2a, \tfrac{5}{3}A(a,b)\right)\right) + A^n(2a, A(a,b)) \right. \\ & \left. - 4L_n^n(a, a + A(a,b))\right| \\ \leq \; & \tfrac{25A(a,b)}{144}\left(na^{n-1} + nb^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Preuve. L'assertion découle du Théorème 3.4, appliqué à la fonction $f(x) = x^n$ en prenant $\eta(b, a) = A(a, b)$ avec $n \geq 3$. ■

Proposition 3.5 *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$ et $\rho > 1$ où $n \geq 2\rho$, on a*

$$\begin{aligned} & \left|3A^{\frac{n}{\rho}+1}\left(\left(\tfrac{5a+b}{6}\right), \left(\tfrac{a+5b}{6}\right)\right) + A^{\frac{n}{\rho}+1}(a,b) - 4L_{\frac{n}{\rho}+1}^{\frac{n}{\rho}+1}(a,b)\right| \\ \leq \; & \tfrac{25(n+\rho)(b-a)}{72\rho}\left(\tfrac{a^n+b^n}{2}\right)^{\frac{1}{\rho}}. \end{aligned}$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.5, appliqué à la fonction $f(x) = x^{\frac{n}{\rho}+1}$.

■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudier les inégalités ouvertes de type Newton-Cotes à trois points. Plus précisément seul de dual Simpson.

Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à rappeler quelques types de convexité classique et généralisée ainsi que quelques identités.

Dans la deuxième partie nous avons étudié quelques inégalités de type Newton-Cotes fermées à trois points dont la dérivée première satisfait un certain type de convexité classique.

Dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats soumis pour éventuelle publication concernant les inégalités de Newton-Cotes ouvertes à trois points plus précisément l'inégalité de dual Simpson dont le cas où la dérivée première est s-convexe ainsi que le cas où elle est préinvexe.

Bibliographie

[1] M. Alomari, M. Darus and S. S. Dragomir, New inequalities of Simpson's type for s-convex functions with applications. Research report collection, 12 (2009), no. 4. Article 9.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23(37) (1978), 13–20.

[3] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[4] T. Chiheb, B. Meftah and A. Dih, Dual Simpson type inequalities for differentiable s-convex functions. Submited.

[5] T. Chiheb, B. Meftah and A. Dih, Dual Simpson type inequalities for functions whose absolute value of the first derivatives are preinvex. Konuralp J. Math. 10 (2022), no. 1, 73-78.

[6] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), no. 2, 545–550.

[7] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[8] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[9] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[10] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[11] M. Z. Sarikaya, E. Set and M. E. Ozdemir, On new inequalities of Simpson's type for s-convex functions. Comput. Math. Appl. 60 (2010), no. 8, 2191–2199.

[12] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.