

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## **Polycopié de cours**

Elaboré à l'Université 8 Mai 1945 de Guelma  
Département de : **Génie Civil & Hydraulique**  
Pour les étudiants de master 2  
**Option : Structures**

---

---

# **PLASTICITE ET ENDOMMAGEMENT**

---

---

**Par: Dr. BOURAS Faouzi**

---

**Avril 2021**

---

<b>Table des matières</b> .....	1
<b>Chapitre I : Introduction au calcul anélastique des structures</b> .....	2
I.1 Introduction .....	2
I-2 Notion de lois de comportement, Nécessité du calcul plastique... ..	2
I-3 L'essai de traction simple .....	3
I-4 Notion de seuil de plasticité .....	5
I-5 Modèles rhéologiques .....	6
I-6 Lois de comportement (relations contraintes déformations) .....	11
1.7 Choix des lois de comportement.....	13
<b>Chapitre 2. Calcul plastique des structures</b> .....	14
II.1 Traction plastique.....	14
II.2 Flexion Plastique .....	28
• Étude des sections homogènes à axes de symétrie .....	29
• Notions de rotule plastique et de Moment-courbure.....	32
• Étude des sections en béton armé .....	37
II.3 Détermination des courbes de capacité (Force-Déplacement) des structures .....	44
<b>Chapitre 3. Analyse limite appliquée au calcul des structures</b> .....	47
III. 1 Principe de l'analyse limite .....	47
III. 2 Les théorèmes de l'analyse limite.....	48
• Théorème cinématique .....	50
• Théorème statique .....	50
III. 3 Application aux calculs de la charge de ruine de structures .....	51
III. 4 Analyse limite et réglementation (ELU, dimensionnement sismique).....	55
<b>Chapitre 4 Endommagement</b> .....	58
IV.1 Introduction à la mécanique de l'endommagement .....	58
IV.2 Endommagement des structures en béton et béton armé.....	60
IV.3. Quelques modèles d'endommagement.....	63
IV.4 Endommagement structurel (Notion d'indice de dommage).....	66
<b>Références bibliographiques</b> .....	73

## Chapitre I : Introduction au calcul anélastique des structures

### I -1 Introduction

Le calcul élastique (courant) des structures accepte l'hypothèse du comportement linéaire géométrique et physique. Cette hypothèse décrit assez bien le comportement des structures courantes sous des charges d'exploitation normales où le principe de la superposition des effets est admis. La théorie de l'élasticité linéaire est utile pour modéliser des matériaux qui subissent de petites déformations et qui reviennent à leur configuration d'origine lors du retrait de la charge. Les exigences de compétitivité rendant très aigus les problèmes d'économie de matière, il est bien souvent nécessaire d'optimiser le choix des matériaux pour le dimensionnement des structures. Aussi pour une application donnée, il importe de caractériser et de modéliser le comportement du matériau utilisé dans ses conditions d'emploi. Ces exigences conduisent à devoir effectuer des analyses plus fines et à utiliser des modèles de comportement plus complexes, lesquels intègrent généralement des effets non linéaires.

La théorie de la plasticité traite des déformations irréversibles indépendantes du temps (plasticité classique), elle est basée sur des mécanismes physiques intervenant dans les matériaux mettant en jeu des mouvements de dislocations dans un réseau cristallin sans influence de phénomènes visqueux ni présence de décohésion; endommageant la matière (cas des métaux et alliages). Une des caractéristiques de la plasticité est qu'elle n'apparaît qu'une fois un seuil de charge atteint. Associée à cet effet de seuil, matérialisé par le domaine d'élasticité, on observe alors expérimentalement l'irréversibilité d'une partie de la déformation générée, notamment en faisant une décharge. Aussi, le comportement de l'élément de matière dépend du trajet de chargement subi, et donc des effets d'histoire.

Ce type de modèle de comportement utilisé en calcul des structures conduit à des analyses non-linéaires qui sont bien sûr plus complexes et plus coûteuses que les calculs menés en élasticité linéaire, cependant elles permettent de mieux s'approcher du comportement réel du système considéré et donc d'effectuer un dimensionnement plus strict des structures, notamment en vue de l'adapter aux sollicitations qu'elle subira (choix du matériau, optimisation de la forme des éléments structuraux, etc.) ou d'améliorer les prévisions de durée de vie de la structure.

L'objet de ce cours est d'étudier la « plasticité et l'endommagement dans les structures », et donc de faire une présentation du comportement anélastique des solides et d'aller jusqu'à sa prise en compte dans un calcul de structure.

### I-2-Notion de lois de comportement, Nécessité du calcul plastique :

Ce premier chapitre nous permet de distinguer les phénomènes mécaniques où le temps et les vitesses de déformation ne jouent qu'un rôle secondaire (plasticité classique) de ceux où le temps et/ou les vitesses de déformation jouent un rôle important (fluage, fatigue, plasticité dynamique). Après une brève description des phénomènes observés, nous rappelons le vocabulaire relatif à différents essais mécaniques. Pour finir nous présentons quelques modèles rhéologiques parmi les plus simples permettant de représenter le comportement mécanique du matériau.

Pour bien saisir la nécessité du calcul plastique plaçons-nous dans le cas où notre structure est soumise à des sollicitations sévères. A titre d'exemple des actions de grandes intensités sont provoquées par le séisme. Dans ce cas précis les charges équivalentes sismiques sont calibrées de telle manière que:

- la structure calculée pour ces charges résiste élastiquement ou avec dégâts mineurs aux séismes courants de faible intensité qui se produisent avec une fréquence de quelques années
- on accepte des dégâts importants qui correspondent à un comportement post-élastique, pour des séismes de grande intensité.

L'énergie introduite par le séisme est absorbée par des phénomènes post-élastiques. Il est clair qu'une analyse élastique ne peut décrire le comportement de la structure soumise à l'action sismique, car elle ne donne aucune réponse ou information concernant la charge de rupture.

Aussi il est d'usage courant que le comportement du sol en génie civil est analysé en utilisant de théorie plasticité initié par Mohr Coulomb etc....

Enfin ce cours s'intéresse au calcul plastique pour de petites déformations ( 1<sup>er</sup> ordre).

### Qu'est ce que la plasticité ?

La plasticité des matériaux est caractérisée par l'apparition des déformations élastiques et des déformations irréversibles, qui se manifestent lorsque la contrainte atteint un certain seuil. Donc un matériau a un comportement plastique s'il est le siège de déformations permanentes ou résiduelles sans dommages (fissures).

L'essai classique de traction sur une éprouvette d'un matériau, jusqu'à rupture, ayant un comportement élastoplastique avec écrouissage (Figure I-1) permet de mettre en évidence la non-linéarité et le phénomène d'irréversibilité caractérisant le comportement plastique. L'effet du temps est supposé négligeable. La déformation totale est la somme des déformations élastique et plastique.

### **I-3 L'essai de traction simple :**

Pour illustrer le comportement d'un solide et définir les différentes phases de ce comportement du repos jusqu'à la ruine, on utilise un essai simple et efficace sur l'acier doux qui est l'essai de traction. L'essai de traction consiste à tirer sur une barre, et permet d'extraire la courbe contrainte déformation unidimensionnelle du matériau illustrée sur la figure I-1.

Ainsi donc l'essai de traction met habituellement en évidence trois phases principales dans l'évolution du comportement du matériau :

*1ère phase* : Elle est définie par  $\sigma < \sigma_e$ . La relation entre  $\sigma$  et  $\varepsilon$  est linéaire. Si le chargement n'a pas dépassé la limite de contrainte  $\sigma_e$ , la décharge repassera par le même chemin : il y a réversibilité ; c'est la définition de l'élasticité. La relation de ce comportement s'écrit alors :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (I.1)$$

où  $E$  est le module d'Young, identifié comme la pente de la droite.

*2ème phase* : Le matériau gagne le domaine plastique (palier de la courbe). Pour observer l'irréversibilité liée au comportement plastique, il est nécessaire d'effectuer une décharge de l'éprouvette. La décharge effectuée ne se fait pas suivant la courbe de charge mais suivant une droite de pente  $E$  : c'est de nouveau un comportement élastique et réversible parallèle au premier trajet.

On identifie donc une partition additive de la déformation uni-axiale en parties élastique et plastique :

$$\varepsilon_{totale} = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (I.2)$$

où  $\varepsilon^e$  est la déformation élastique, réversible (récupérable à la décharge), liée à la contrainte au travers de la loi d'élasticité ( $\sigma = E \varepsilon^e$ ) et  $\varepsilon^p$  est la déformation plastique, irréversible ou résiduelle ou permanente.

*3ème phase* : Si on continue à charger l'éprouvette, ceci conduira à la ruine de celle-ci par rupture.

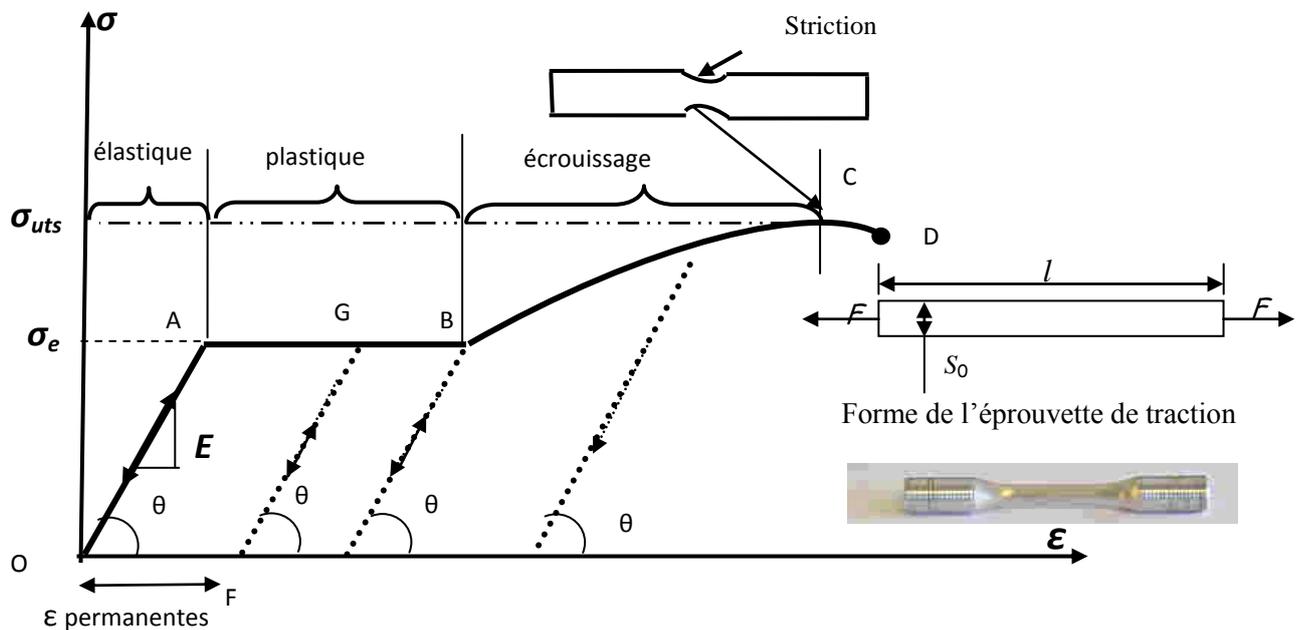


Figure I.1 : Loi  $\sigma$ - $\epsilon$  pour l'acier doux

Reprenons l'exemple de traction de l'acier doux. C'est un essai qu'on effectue au laboratoire sur des éprouvettes normalisée (voir figure ci-dessus) de dimensions initiales  $l_0$  et de section circulaire initiale  $S_0$ . L'essai est exécuté sous charge de traction  $F$  à vitesse monotone (maintenue lente et sans changement). L'allongement  $\Delta l$  est mesuré au fur et à mesure du déroulement de l'essai. Il en découle ainsi un graphe  $F = f(\Delta l)$ . Graphe que nous pouvons exprimer en  $\sigma = f(\epsilon)$

$$\text{Où } \sigma = \frac{F}{S_0} \quad \text{et} \quad \epsilon = \frac{l}{l_0} \quad (\text{I-3})$$

Examinons maintenant en détail les différentes phases jusqu'à la ruine :

**Chemin OA :** c'est un domaine rectiligne où il y a proportionnalité entre  $\Delta l$  et  $F$ . C'est un comportement élastique linéaire, régit par la loi de Hooke, pour lequel aucune déformation résiduelle ne se maintient après décharge. La pente de la droite OA est le module de Young noté  $E$ .

**Palier AB :** le palier est quasi horizontal, décrivant une extension continue sans pour autant augmenter les charges. Ainsi nous observons une augmentation des déformations sous contraintes constantes. Ce palier définit une caractéristique très importante des matériaux qui est la *ductilité*. Plus le palier est important plus le matériau est ductile. A l'inverse un matériau est dit *fragile* s'il a un comportement qui ne possède pas de palier. Si on décharge entre A et B (en G par exemple) le chemin de déchargement suit une droite GF qui est sensiblement parallèle à OA ; il n'y a pas de dégradation du module élastique (module de Young). A contrainte nulle il y a, maintenant, une déformation résiduelle c'est une déformation plastique : le matériau a plastifié. Ce stade de déformation est dit *plastique parfait*.

**Zone BC :** après le point B on augmente la charge  $F$  (rechargement), on remarque une croissance des allongements et en d'autres termes les déformations augmentent avec l'augmentation des contraintes, mais de manière non linéaire. Si on fait dans cette zone un essai cyclique au sens charge et décharge, on remarquera que la limite élastique augmente jusqu'au point extremum C où la contrainte limite

élastique maximale est notée  $\sigma_{\text{uts}}$  (de l'anglais ultimate tensile strength ou stress). Ce phénomène s'appelle *l'écroutissement*.

**Zone CD** : au point C nous constatons une réduction rapide du diamètre au milieu de l'éprouvette c'est le lieu d'une déformation plastique localisée ; c'est la *striction*. Au delà de C la déformation augmente mais la force mesurée décroît à cause de la striction le matériau qui ne tient plus et rompt au point D.

#### I-4 Notion de seuil de plasticité :

Si on fait une expérience de traction sur de l'acier (matériau écrouissable), on constate que, tant que les efforts de traction ne dépassent pas une certaine limite, la relation contrainte-déformation reste linéaire. Cependant au-delà de ce seuil, on constate que la linéarité et la mémoire de la configuration initiale sont perdues : le matériau a une loi de comportement différente.

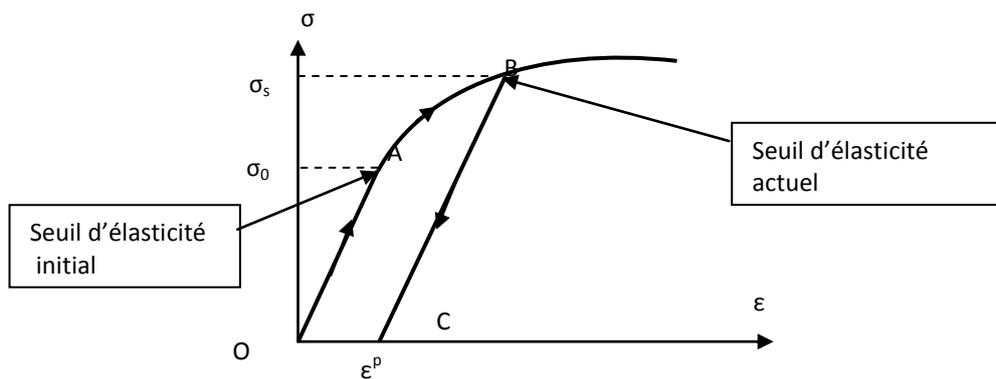


Figure I.2 : Courbe  $\sigma$ -  $\epsilon$ , essai de traction sur de l'acier

La figure (I.2) montre l'allure du comportement d'un acier dans un essai de traction sur une éprouvette, dans un plan déformation-contrainte. On y constate clairement deux comportements:

Tant qu'on reste en dessous du point de limite élastique, le comportement reste élastique, c'est à dire que la courbe de décharge est confondue avec la courbe de charge. Quand le chargement redevient nul, l'éprouvette retrouve donc sa forme initiale.(déjà vu zone OA). C'est le seuil d'élasticité initiale.

Par contre, si le chargement dépasse la limite élastique, et si on décharge ensuite l'éprouvette, on constate qu'on revient à un autre état : le matériau a perdu la mémoire de son état initial et se comporte comme si l'état initial a changé. C'est le nouveau seuil d'élasticité initiale ou seuil d'élasticité actuel.

Le phénomène observé dans la figure (I.2), où la limite actuelle d'élasticité  $\sigma_B$  pour une déformation résiduelle  $\epsilon^p$  correspond au cas d'un matériau dit écrouissable ( durcissement). On remarque que le seuil élastique augmente sans qu'il y ait une variation du module élastique  $E$  ( $\sigma_B > \sigma_A$ ).

Ce phénomène, quoique le plus répandu, n'est pas général pour le comportement plastique. Ainsi la figure (I.3) représente le diagramme relevé dans le cas de l'expérience de traction simple effectuée sur une éprouvette d'autre type d'acier : on constate que celui-ci présente un palier pour des déformations (palier plastique illimité) et l'on dit que le matériau correspondant est élastique parfaitement plastique. Le seuil élastique ne change pas : il n'y a pas d'écrouissage. Le seuil actuel est le même que le seuil initial.

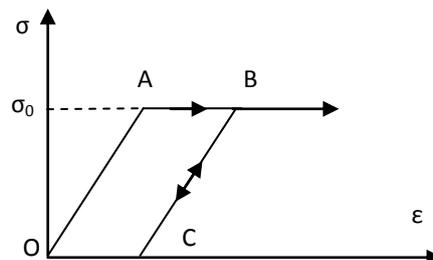


Figure I.3 : Matériau élastique parfaitement plastique

### **Remarque :**

Il y a des paramètres qui peuvent influencer sensiblement le comportement dans tous les états vus précédemment. Citons à titre d'exemple :

- la vitesse de déformation (cas du chargement lent ou brusque) pour le cas des matériaux visqueux,
- la température,
- l'historique du chargement,
- le processus d'élaboration (pour les aciers par exemple).

## **I-5 Modèles rhéologiques**

La construction des modèles du comportement non linéaire des matériaux comporte deux volets : L'étude des propriétés rhéologiques et la définition de la forme des équations pour un chargement tridimensionnel.

La *rhéologie*, étude des écoulements, permet de relier les contraintes, les déformations, et leurs dérivées, et caractérise la nature des comportements, par le biais d'équations mathématiques ; c'est la loi de comportement. Certains comportements fondamentaux ont été identifiés. Chacun va se caractériser ici par une *modèle élémentaire*.

Dans un premier temps, rappelons le vocabulaire relatif aux phénomènes observés et aux principales techniques d'essai.

### **I-5-1 Mécanismes physiques de déformation**

#### **Phénomènes observés**

Les différents phénomènes observés peuvent être classifiés comme suit :

**Déformations élastiques** — Elles correspondent à des variations des espaces interatomiques et à des mouvements réversibles des dislocations. Ces déformations sont essentiellement instantanément réversibles et la configuration initiale est retrouvée après décharge. (Dislocation : défaut dans la structure du réseau cristallin. Le nombre des dislocations augmente lorsque l'on charge le matériau.)

**Déformations visqueuses** — Elles correspondent à la poursuite de la déformation alors que la charge est constante, il n'y a plus d'équilibre. Le temps et les vitesses de déformation jouent un rôle important dans les lois de comportement d'un matériau visqueux. Lors de ce phénomène favorisé par l'activation thermique, on parle d'écoulement de fluage.

**Déformations permanentes** — Elles correspondent aux *mouvements irréversibles des dislocations*. Ces déplacements se font par glissement dans les plans cristallographiques. En pratique ces déplacements ne modifient pas la structure cristalline et le volume reste inchangé, on parle d'*incompressibilité plastique*. (Plan cristallographique : plan de plus grande densité d'atomes).

**Écrouissage** — Ce phénomène aussi appelé *consolidation* correspond à une augmentation du nombre de point de blocage du mouvement des dislocations. Il vient contrecarrer l'augmentation du nombre de dislocations, et modifie le seuil au-delà duquel les déformations ne sont plus réversibles (nouvelle limite d'élasticité).

**Restauration** — Ce phénomène aussi appelé recouvrance correspond à une recristallisation par regroupement des dislocations de signe opposé. Il se produit dans le temps et est favorisé par l'activation thermique.

### I-5-2 Techniques d'essais

La méthode phénoménologique globale est l'étude des relations de cause à effet qui existent entre les variables physiquement accessibles. Elle n'est pas la seule méthode utilisable pour caractériser le comportement du matériau. Pour mémoire, on peut citer l'approche microscopique qui consiste à modéliser les mécanismes à partir d'une étude des liaisons atomiques. On effectue alors une intégration et une moyennisation des variables microscopiques pour avoir le comportement macroscopique.

Les variables physiquement accessibles sont :

- \* les déformations et leurs vitesses. C'est en fait souvent des déplacements que l'on mesure et il convient de traiter l'information pour aboutir à des déformations,

- \* les contraintes. On peut aussi constater que souvent l'information directe est une valeur d'effort.

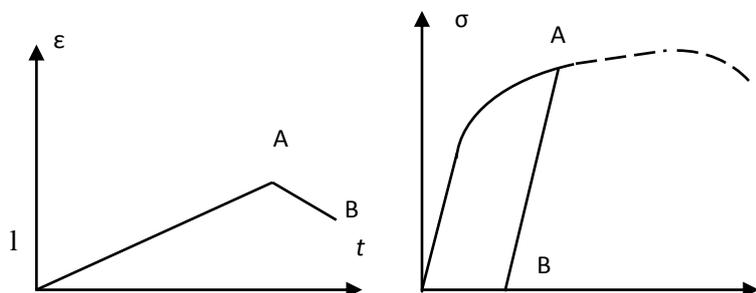
- \* la température. Ce paramètre n'est pas forcément distribué de façon homogène,

- \* le temps. Cette variable peut aussi prendre des formes diverses et variées (nombre de cycles ...).

Les essais classiques de caractérisation se font essentiellement en traction ou en traction-compression simples à température constante. L'éprouvette est soumise à une sollicitation axiale. La forme de l'éprouvette est calculée de telle sorte que l'on obtienne un état de contrainte ou de déformation uniformes dans le volume utile. Il existe plusieurs façons de piloter l'essai.

L'objectif des essais est de fournir à l'ingénieur, les caractéristiques mécaniques du matériau nécessaires aux calculs qu'il compte mener. Lors de ces essais, on observe les déformations que subit une éprouvette sous l'action d'un système donné de contraintes. Les différents essais d'érouissage à température constante peuvent être classifiés comme suit :

*Érouissage* — Essai pour lequel la déformation  $\epsilon$  est imposée à vitesse constante ;

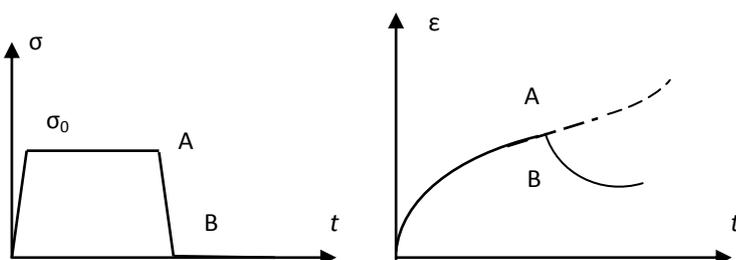


Dans l'essai d'érouissage en traction ou compression simples, la vitesse de déformation est constante.

Figure I.4 : Erouissage

C'est l'essai le plus couramment utilisé. La mesure est donnée par le diagramme des contraintes.

*Fluage + recouvrance* — Essai pour lequel la contrainte  $\sigma$  est imposée grâce à une fonction échelon suivi d'attente à contrainte nulle. La courbe de réponse caractérise la *déformation retardée* :



Dans l'essai de fluage en traction ou compression simples, on étudie le comportement de l'éprouvette lorsque la contrainte appliquée est maintenue constante. (fonction échelon suivi d'attente à contrainte nulle). L'évolution de la déformation permet de caractériser le durcissement et la viscosité du matériau. On mesure la déformation.

Figure I.5 : Fluage +recouvrance

Cet essai est souvent réalisé à une température parfaitement contrôlée ( $\pm 1^\circ$ ). Pour une contrainte donnée, on enregistre la vitesse de déformation et le temps à rupture.

*Relaxation* — Essai pour lequel la déformation  $\varepsilon$  est imposée selon une fonction échelon. La courbe de réponse caractérise la viscosité.

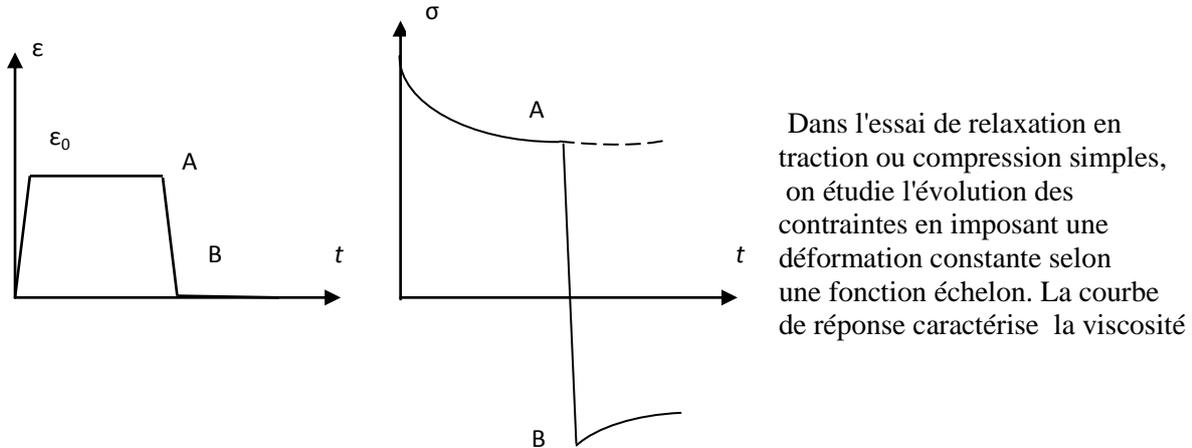


Figure I.6 : Relaxation

### 1-5-3 Modèles analogiques

Ces modèles permettent d'avoir une image concrète simplifiée des équations traduisant les lois de comportement générales tensorielles. Les trois éléments mécaniques les plus utilisés sont :

#### A) Modèles linéaires :

1. Le ressort, qui symbolise l'élasticité linéaire parfaite, pour laquelle la déformation est entièrement réversible lors d'une décharge, et où il existe une relation biunivoque entre les paramètres de charge et de déformation (figure I.7 -a). Le comportement est purement *élastique* régit par la loi  $\sigma = E \varepsilon$ .

2. L'amortisseur, qui schématise la *viscosité*, linéaire (figure I.7 -b). La viscosité est dite pure s'il existe une relation biunivoque entre la charge et la vitesse de chargement. Si cette relation est linéaire, le modèle correspond à la loi de Newton. Ici la vitesse de chargement influe sur le comportement du matériau selon qu'elle soit lente ou rapide. Ce modèle est représenté par un amortisseur de viscosité  $\eta$  et de loi  $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$

3. Le patin, qui modélise l'apparition de déformations permanentes (*plasticité*) lorsque la charge est suffisante (figure I.7 -c). Si le seuil d'apparition de la déformation permanente n'évolue pas avec le chargement, le comportement est dit plastique parfait. Si, de plus, la déformation avant écoulement est négligée, le modèle est rigide-parfaitement plastique. Pour déplacer le patin il faut exercer une contrainte supérieure à  $\sigma_s$  et si on s'arrête nous avons des déformations résiduelles.

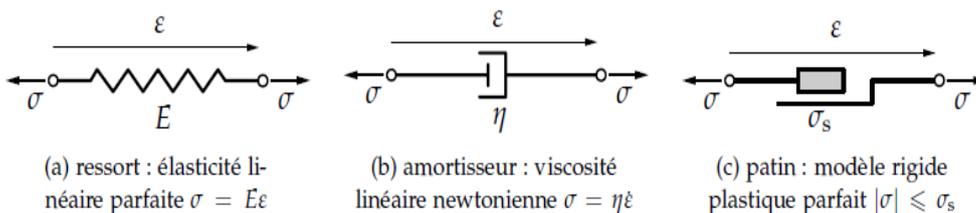


Figure I.7 : Eléments d'assemblage

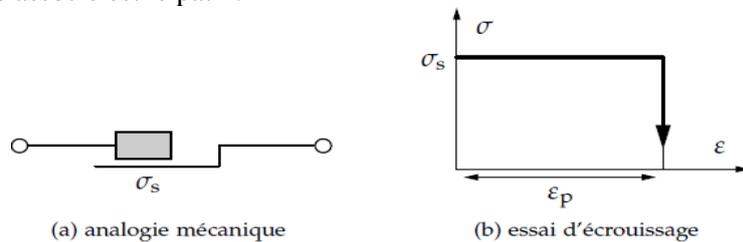
Les comportements les plus complexes se bâtissent ensuite à partir de celles-ci en formant des assemblages des modèles basiques. La conception d'un modèle complet nécessite enfin le choix d'une généralisation qui permet de passer de l'étude sous chargement uniaxial à celle des chargements multiaxiaux.

**B) Modèles non linéaires**

La non-linéarité peut venir du comportement du ressort ou de l'amortisseur et l'introduction d'un patin, par exemple. Toute combinaison comportant un élément non linéaire aura un comportement non linéaire. Nous nous intéressons ici à la non linéarité caractérisant la plasticité (patin). Sur les figures I.8, I.9, I.10, I.11 sont représentées les allures de la courbe de réponse à l'essai d'érouissage pour les modèles rencontrés par la suite.

**Solide rigide parfaitement plastique**

En deçà du seuil de plasticité, la déformation est nulle. Dès que l'on a atteint le seuil, appelé contrainte d'écoulement, la valeur de la déformation est arbitraire, quelle que soit la vitesse de déformation. Le modèle analogique associé est le patin.



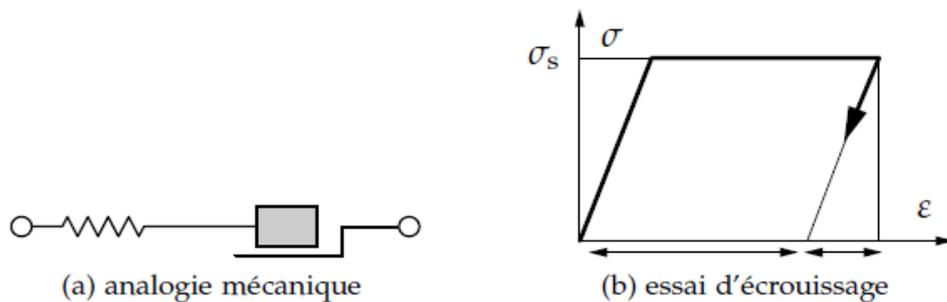
$$\begin{cases} |\sigma| < \sigma_s & \varepsilon = 0 \\ |\sigma| = \sigma_s & \varepsilon = ? \end{cases}$$

Figure I.8 : Modèle rigide plastique parfait (Rpp)

On trouve les applications de ce modèle en mécanique des sols et en mise en forme des métaux.

**Solide élastique linéaire parfaitement plastique**

En deçà du seuil de plasticité, le comportement est élastique linéaire. Au delà, on retrouve le comportement précédent. On associe le modèle rhéologique de Saint-Venant à ce comportement.



$$\begin{cases} |\sigma| < \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ |\sigma| = \sigma_s & \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \text{ (arbitraire)} \end{cases}$$

Figure I.9 : Modèle élasto-plastique parfait (Epp)

Ce type de comportement permet de traiter des problèmes d'analyse limite (ruine d'une structure par rotule plastique ...) ou pour certain type d'acier à faible teneur en carbone.

Solide rigide plastique avec écrouissage

On ne voit apparaître une déformation que si on atteint le seuil de contrainte  $\sigma_s$  ; celles –ci sont des déformations permanentes. Si on incrémente  $\sigma$  au delà de  $\sigma_s$  , on aura un écrouissage linéaire à cause du ressort.

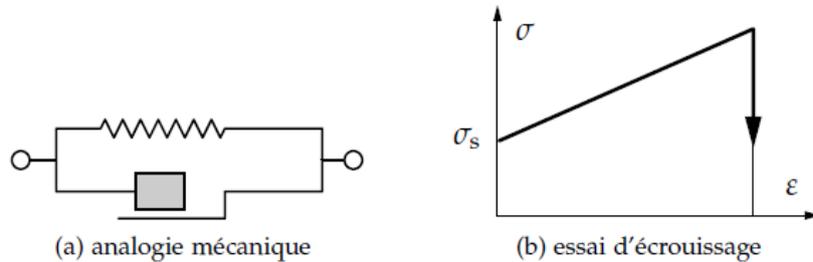
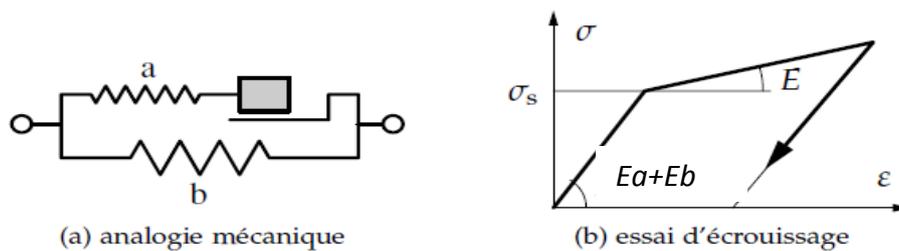


Figure I.10 : Modèle rigide plastique avec écrouissage (RpE)

Modèle élasto- plastique avec écrouissage (EpE)

Si on rajoute au model précédent un ressort en série avec le patin. Les déformations avant le seuil  $\sigma_s$  sont élastiquement réversibles. Les déformations permanentes sont observées au delà d'un seuil de la contrainte seuil  $\sigma_s$  ; l'écrouissage est linéaire à cause du ressort.



$$\left\{ \begin{array}{l} |\sigma| < \sigma_s \quad \varepsilon = \varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \\ |\sigma| \geq \sigma_s \quad \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + f(\sigma) \end{array} \right.$$

Figure I.11 : Modèle élasto-plastique avec écrouissage (EpE)

**Remarque :**

Pour le modèle élastique parfaitement plastique, la contrainte ne peut dépasser la valeur  $\sigma_s$  et, lorsqu'elle atteint cette valeur il y a possibilité d'allongement illimité.

Les tableaux suivants résument les deux grandes familles de modèles rhéologiques cités jusqu'à présent :

Tableau I-1 : modèles " linéaires "

Ressort :		$\sigma = E\varepsilon$
Amortisseur :		$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$
Modèle de Maxwell :		$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma$
Modèle de Kelvin-Voigt :		$\sigma = E\varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}$

Tableau I-2 : modèles non linéaires

Analogie mécanique	Modèles de comportement	Essai d'écroutissage
	Rigide Plastique Parfait RPP	
	Élasto-Plastique Parfait EPP	
	Rigide Plastique avec Écroutissage RPE	
	Élasto-Plastique avec Écroutissage EPE	

### I-6 Lois de comportement (relations contraintes déformations)

#### 1) Relation $\sigma$ - $\epsilon$ élastique parfaite

La relation qui lie les déformations aux contraintes est  $\sigma = f(\epsilon)$  comme indiqué sur la figure I.12. La réversibilité est instantanée, l'allure caractéristique des courbes de réponses aux trois types d'essais évoqués précédemment est donnée sur les graphes a, b et c.

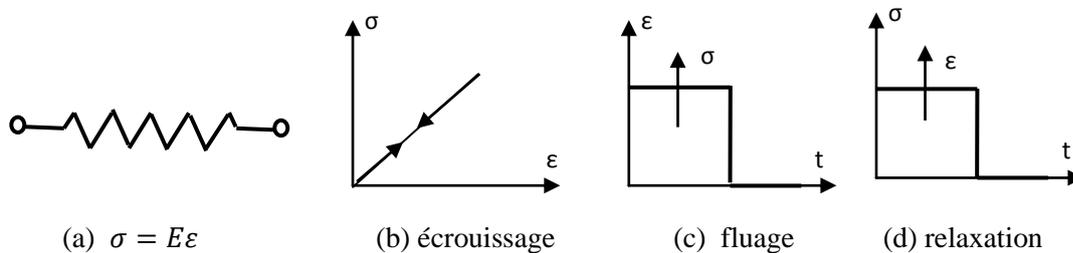


Figure I.12 : Elasticité parfaite

Ce modèle convient bien pour les métaux, les roches et les bétons lorsque les sollicitations sont faibles (ne pas dépasser la limite d'élasticité!)

#### 2) Viscosité parfaite

Dans ce cas, les contraintes dépendent seulement de la variation temporelle des déformations telles que  $\sigma = f(\dot{\epsilon})$ . Les différentes relations contraintes-déformations sont illustrées sur la Figure I.12 : L'essai de fluage impose  $\sigma = \sigma_0$ , ce qui entraîne :

$$\epsilon = \sigma_0/\eta t \quad (I-4)$$

et  $\sigma = 0$  entraîne  $\epsilon = \epsilon_1$ , soit un fluage illimité à  $t_\infty$

L'essai de relaxation est théoriquement impossible, on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système, car à une vitesse infinie correspond une contrainte infinie. Ce que nous modéliserons par une *fonction de Dirac* (.....).

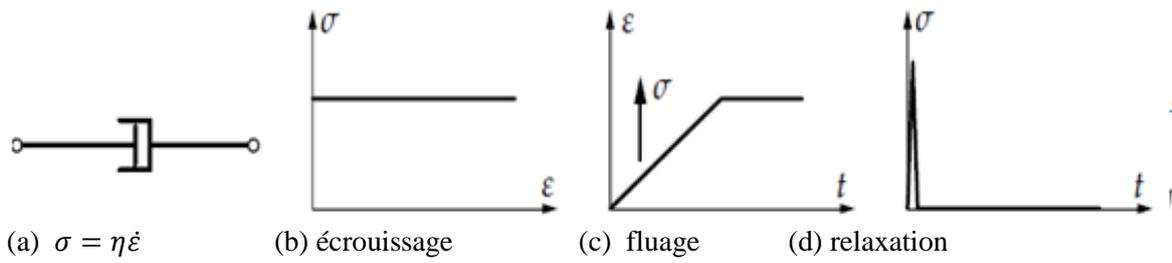


Figure I.12 : Viscosité parfaite

### 3) Viscoélasticité

Dans ce cas, les contraintes dépendent à la fois des déformations et de leur variation temporelle tel que  $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$ .

Différents modèles peuvent être proposés. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle. Les allures des courbes de réponse sont données sur la figure I.13 :

#### a) Modèle de Maxwell

Le modèle de Maxwell est décrit sur la figure I.13. Pour l'essai de fluage  $\sigma = \sigma_0$  entraîne :

$$\epsilon = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} \quad (I-5)$$

où  $\frac{\sigma_0}{E}$  représente une déformation instantanée. Une contrainte  $\sigma = 0$  entraîne  $\dot{\epsilon} = cste = \dot{\epsilon}_1$  soit un fluage illimité à  $t_\infty$ . L'essai de relaxation  $\epsilon = \epsilon_0$  conduit à :

$$\sigma = E \epsilon_0 e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad (I-6)$$

autrement dit, une relaxation complète à  $t_\infty$

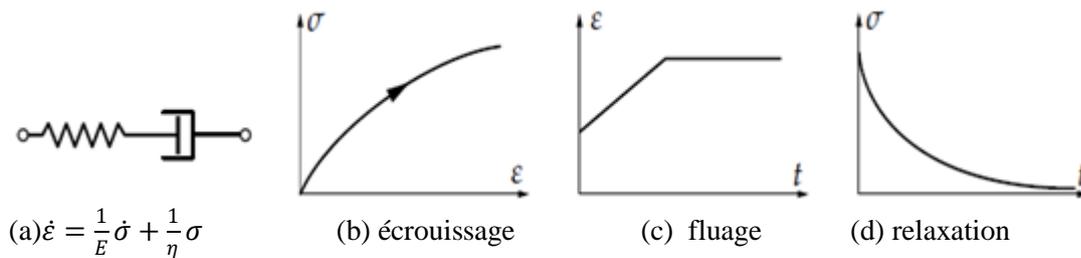


Figure I.13 : Modèle de Maxwell

#### b) Modèle de Kelvin-Voigt

Ce modèle est décrit sur la figure I.14. Pour l'essai de fluage  $\sigma = \sigma_0$  entraîne  $\epsilon = \sigma_0/E t$  et  $\sigma = 0$  entraîne  $\epsilon = cste = \epsilon_1$ , soit un fluage limité dans le temps. L'essai de relaxation est théoriquement impossible car on ne peut pas imposer instantanément une déformation au système puisqu'à une vitesse infinie correspond une contrainte infinie. D'autres modèles plus complexes peuvent être construits sur le même principe.

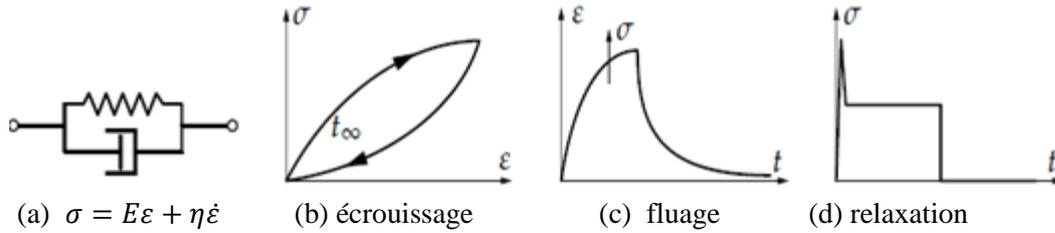


Figure I.13 : Modèle de Kelvin-voigt

Le comportement est donné par les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = E\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = \eta \frac{d\varepsilon_2}{dt} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \end{array} \right. \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-Et/\eta}) \quad (I-7)$$

Les applications sont les polymères, le caoutchouc et le bois si la sollicitation n'est pas trop élevée.

### 1.7 Choix des lois de comportement

Comportements viscoélastique :

- pour les polymères thermoplastiques au voisinage de la température de fusion,
- pour les verres au voisinage de la température de transition,
- pour les bétons frais.

Comportements rigides-parfaitement plastiques :

- pour l'étude des sols,
- pour l'analyse limite,
- pour la mise en forme des métaux.

Comportements plastiques :

- pour les métaux à des températures inférieures au quart de la température de fusion,
- pour les sols et roches.

Comportements viscoplastiques

- pour les métaux à moyenne et haute température,
- pour le bois, les sols (dont le sel),
- pour les céramiques à très haute température

Il faut noter que chacun de ces types de modèles est approché, et que le choix de l'une ou l'autre modélisation du comportement va dépendre de l'application visée. Ainsi un acier à température ambiante peut être considéré comme élastique linéaire pour le calcul des flèches d'une structure mécanique, viscoélastique pour un problème d'amortissement de vibrations, rigide-parfaitement plastique pour un calcul de charge limite, élasto-viscoplastique pour l'étude de contraintes résiduelles. Un polymère peut être considéré comme un solide pour un problème de choc, et comme un fluide pour l'étude de sa stabilité sur de longues durées.

## Chapitre II : Calcul plastique des structures

### II 1 Traction plastique des barres

Les principales notions d'élasto-plasticité sont introduites à partir de l'analyse de la réponse d'une éprouvette soumise à un essai de traction-compression. La modélisation de cet essai permet de présenter différentes schématisations couramment utilisées pour traiter des problèmes d'évolution élasto-plastique. Ces modèles sont ensuite soumis aux calculs analytiques des structures.

Pour cela reprenons l'essai de traction (déjà vu au §.I). Il s'agit de prendre une éprouvette normalisée, de longueur et section initiales :  $l_0$  et  $S_0$  respectivement. On lui applique une force de traction  $F$ . Considérons les graphes  $(\sigma, \epsilon)$  obtenus pour trois essais de traction avec décharge. Selon le niveau de sollicitation lors du chargement, nous obtenons les allures de la figure II-1.

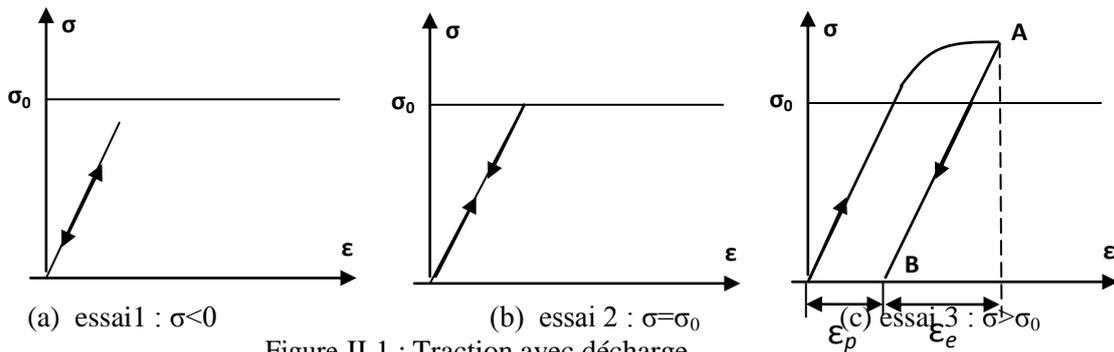


Figure II.1 : Traction avec décharge

1.  $\sigma < \sigma_0$  : le système se situe dans le domaine élastique et le comportement du matériau est réversible. Il est supposé par la suite que la loi de comportement dans le domaine élastique est linéaire, soit  $\sigma = E\epsilon_e$  où  $E$  est le module d'Young du matériau ;
2.  $\sigma = \sigma_0$  : cet essai est impossible à réaliser physiquement. La limite d'élasticité  $\sigma_0$ , seuil à partir duquel il existe des déformations irréversibles, est définie de façon conventionnelle et correspond à une fraction de déformation permanente égale à  $\epsilon_p = 2\text{‰}$  ;
3.  $\sigma > \sigma_0$  : la décharge à partir du point A (chargement maximum) s'effectue parallèlement à la charge élastique, on parle de décharge élastique. Au point B (charge nulle) ne subsiste que la déformation plastique ou déformation permanente  $\epsilon_p$ .

A partir de B, effectuons maintenant une série de charges-décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure II.2. Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage. En première approximation, nous pouvons considérer que :

- lors des chargements consécutifs, la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone ;
- l'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

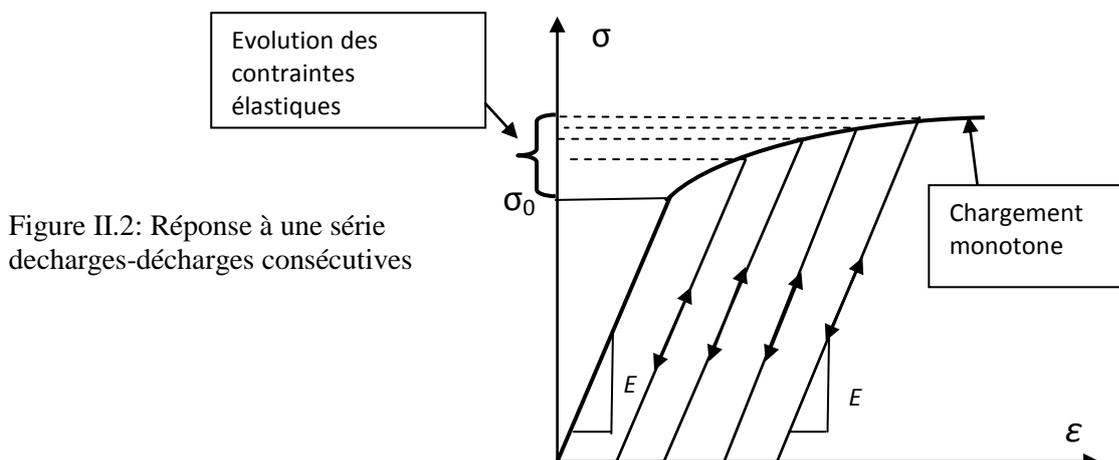


Figure II.2: Réponse à une série de charges-décharges consécutives

Par conséquent, connaissant la déformation plastique, le seuil de plasticité actuel peut être défini à partir de la courbe d'écrouissage obtenue pour un chargement monotone. Mais ce critère n'est qu'une approximation car l'évolution du domaine élastique n'est pas, du tout, simple à évaluer. Prenons l'exemple d'un chargement cyclique pour montrer que la connaissance de l'état actuel ( $\sigma$ ,  $\epsilon_p$ ) ne suffit pas *a priori* pour définir le domaine d'élasticité actuel. Sur la figure II.3, après décharge nous obtenons le point  $O'$ , la déformation plastique est définie par le segment  $OO'$ . Or dans cet état, la limite d'élasticité est différente au premier et au deuxième passage. Cet exemple montre que les lois décrivant l'évolution du domaine d'élasticité ont un caractère essentiellement incrémental. Un calcul plastique nécessite un traitement par incrément ou pas (incrémental) pour transformer le problème non linéaire en un problème linéaire.

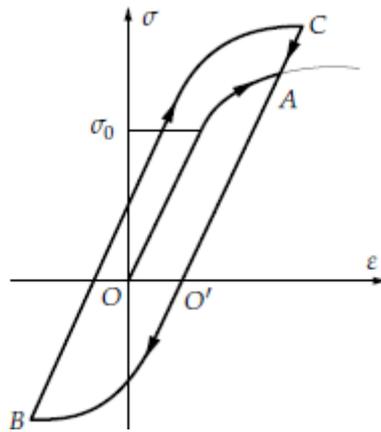


Figure II.3 : Historique d'un cycle de chargement OA-AB-BC

De plus, il faut distinguer deux cas :

*Charge plastique* — Il y a variation des paramètres d'écrouissage et de la déformation plastique.

*Charge ou décharge élastique* — Il n'y a pas de variation des paramètres d'écrouissage ni de la déformation plastique.

#### Modélisation du comportement en traction-compression

Pour modéliser la courbe d'écrouissage de l'essai de traction-compression obtenue pour un chargement monotone, le plus simple est d'utiliser un modèle construit à partir de segments de droite. La figure II.4 représente un modèle multi-linéaire.

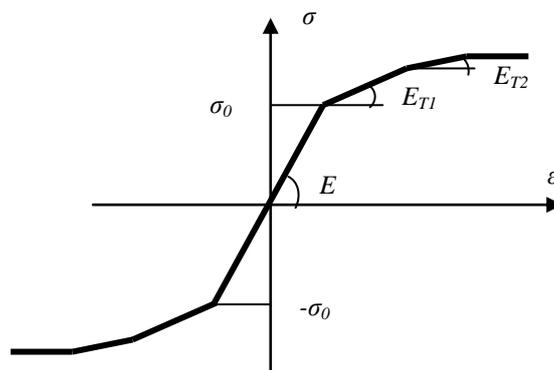


Figure II.4 : Modèle d'écrouissage multi-linéaire

Dans la suite du cours, nous limiterons la présentation à des modèles bi-linéaires ayant la même limite d'élasticité initiale en traction et en compression.

### Modèles bi-linéaires avec écrouissage

Le modèle rigide plastique peut être utilisé lorsque les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques : c'est, par exemple, le cas pour les problèmes de mise en forme.

Lorsqu'il y a écrouissage, il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine d'élasticité. Les deux modèles les plus simples sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. Ils sont basés sur l'utilisation de la courbe d'écrouissage du chargement monotone, illustrée sur la figure II.4.

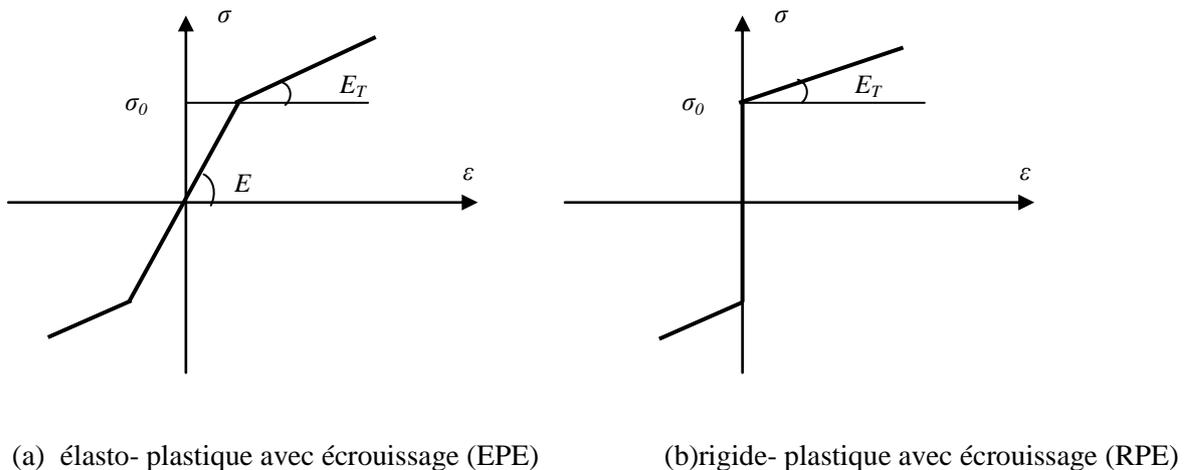


Figure II.4 : Modèles d'écrouissage monotone

**Écrouissage isotrope** : ce modèle suppose une dilatation homothétique du domaine d'élasticité par rapport au domaine initial supposé connu. Le coefficient de dilatation dans le cas de l'écrouissage linéaire est défini par le module tangent  $E_T$ .

Pour un essai cyclique, l'hypothèse d'écrouissage isotrope donne une courbe similaire à celle représentée sur la figure II.5. La limite d'élasticité en compression augmente de façon identique à celle de traction. On note que dans ce modèle l'énergie de déformation élastique pouvant être absorbée est de plus en plus importante et toujours identique en traction et compression. Il y a durcissement dans les deux sens de chargement ( traction ou compression).

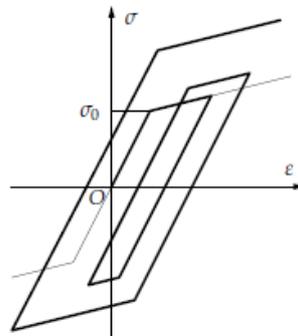


Figure II.5 Hypothèse d'écrouissage isotrope

**Écrouissage cinématique** : ce modèle suppose une translation sans déformation du domaine d'élasticité initial supposé connu. La translation est définie à partir de la courbe d'écrouissage monotone.

Le modèle cinématique respecte l'effet Bauschinger couramment observé pour les matériaux métalliques, à savoir un durcissement dans un sens (sens de l'écoulement plastique) et un adoucissement d'égale amplitude dans le sens contraire (décharge élastique) ; c'est l'écrouissage négatif. La courbe correspondant à un essai cyclique avec écrouissage cinématique est indiquée sur la figure II.6. L'amplitude du domaine d'élasticité reste constante mais l'énergie élastique absorbée et pouvant être restituée dans un sens est toujours différente de celle dans l'autre sens. En pratique, lors d'un essai cyclique, aucune de ces allures ne peut être observée. Il est possible de combiner ces deux modèles d'écrouissage pour essayer de se rapprocher au mieux de la réponse au chargement cyclique donné.

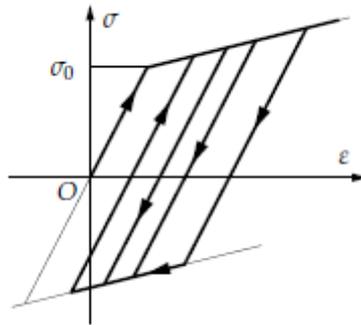
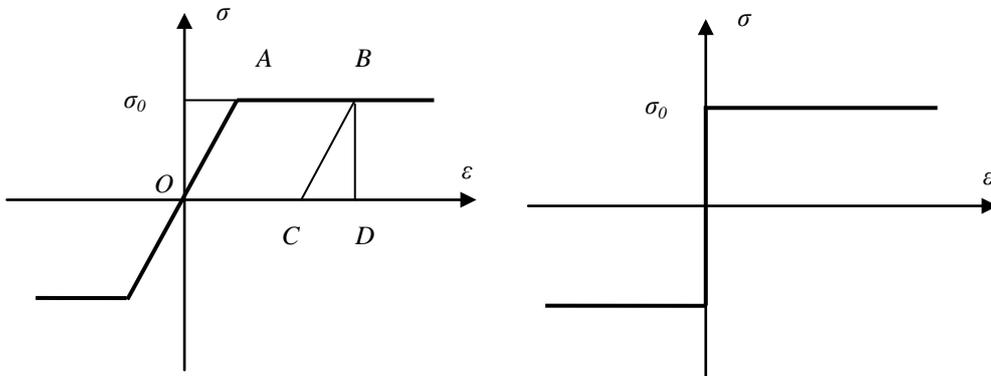


Figure II.6 Hypothèse d'écrouissage cinématique

**Modèles parfaits (modèles sans écrouissage)** :

Ces modèles négligent l'écrouissage du matériau. Le modèle élasto-plastique parfait est surtout utilisé du point de vue académique pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés.



(a) Modèle élasto- plastique parfait (EPP)

(b) Modèle rigide- plastique parfait (RPP)

Figure II.7 : Modèles de courbe d'écrouissage monotone

Pour ce modèle, donnons une interprétation énergétique de la courbe d'écrouissage :

- OABD : énergie totale, ou travail des efforts intérieurs pour atteindre B ;
- OABC : énergie de dissipation plastique ;
- BCD : énergie de déformation élastique, elle est restituée à la décharge.

Le modèle rigide plastique parfait (RPP) est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites. Pour ces deux modèles, au-delà d'une valeur limite du chargement il y aura écoulement libre du matériau et perte d'équilibre (ruine).

### Critère de plasticité

Le critère de plasticité a pour but principal de déterminer le seuil de plasticité  $\sigma_0$  et d'analyser son évolution en fonction de l'écroutissage  $(\sigma_0, k)$ , ( $k$  étant un paramètre d'écroutissage).

Comme nous l'avons vu précédemment, le critère de plasticité est lié à la fonction de charge  $f([\sigma], k)$  telle que :

– si  $f([\sigma], k) < 0$ , l'état actuel  $(\sigma, k)$  est intérieur au domaine d'élasticité

– si  $f([\sigma], k) = 0$ , l'état actuel se situe sur la frontière du domaine.

L'état  $f([\sigma], k) > 0$  n'existe pas physiquement.

Pour le cas de l'essai de traction nous avons :

$$f([\sigma], k) = f(\sigma, k) = |\sigma| - \sigma_s(E) \leq 0 \quad (\text{II.1})$$

$\sigma_s(E)$ : contrainte seuil de plasticité,

Notre but maintenant est de définir comment évolue le seuil de plasticité.

Représentons la courbe d'écroutissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire. Ce modèle est caractérisé par  $\sigma_0$ , la limite d'élasticité initiale,  $E$ , le module d'élasticité et  $E_T$ , le module tangent (écroutissage). Soit un incrément de charge  $d\sigma$  pris à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité. Nous avons :

$$d\sigma = E_T d\varepsilon \quad (\text{II.2})$$

or

$$d\varepsilon = d\varepsilon_p + \frac{1}{E} d\sigma \Rightarrow d\sigma \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = E_T d\varepsilon_p$$

d'où

$$d\sigma = k d\varepsilon_p$$

$$\text{avec } k = \left(\frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}}\right) : \text{module d'écroutissage} \quad (\text{II.3})$$

Donc finalement :

$$\sigma'_s = \sigma_s + k d\varepsilon_p \quad (\text{II.4})$$

où  $\sigma'_s$  : seuil actuel et  $\sigma_s$  ; seuil précédent

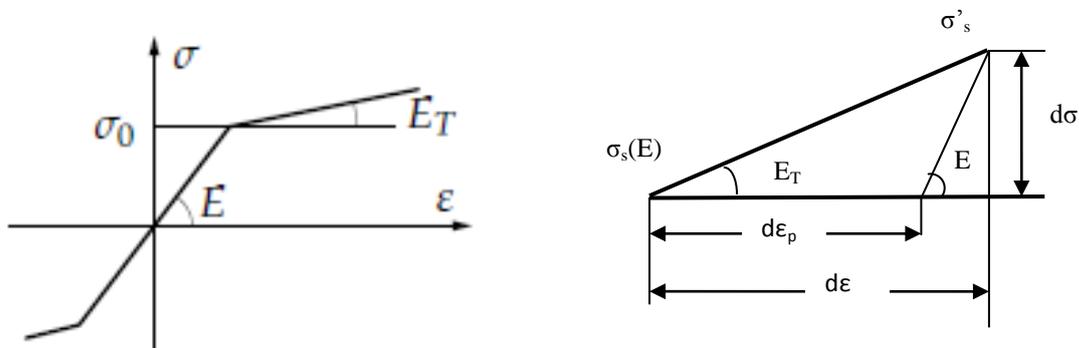


Figure II.8 : Incrément purement élastique

Précisons maintenant comment s'effectuent les déformations pour un incrément de charge  $d\sigma$  pris à partir d'un état actuel quelconque  $(\sigma, k)$ .

- incrément purement élastique  $f(\sigma + d\sigma, k) \leq 0$  : cette condition recouvre les deux possibilités représentées sur la figure II.8 en traction :
  - l'état actuel est à l'intérieur du domaine d'élasticité et la charge ou la décharge est élastique ;
  - l'état actuel est sur la frontière du domaine d'élasticité et il y a décharge élastique, soit  $d\varepsilon = d\varepsilon = (1/E)d\sigma$  et  $\sigma_s(E)$  inchangé.

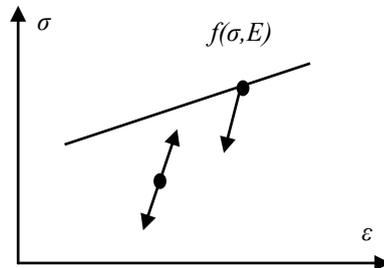


Figure II.9 : Incrément purement élastique

- incrément élasto-plastique  $f(\sigma + d\sigma, k) > 0$  : cette condition est illustrée sur la figure II.10 :

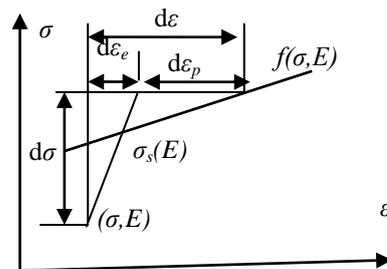


Figure II.10 : Incrément élasto-plastique

$$d\sigma = d\varepsilon_p + d\varepsilon_e; \quad d\varepsilon_e = (1/E) d\sigma; \quad d\varepsilon_p = (1/k) (\sigma(E) + d\sigma - \sigma_s(E)) \quad (\text{II.5})$$

Le nouvel état de contrainte  $\sigma' = \sigma_s(E) + d\sigma$  est situé sur la frontière du domaine d'élasticité. C'est la valeur du critère pour l'incrément de charge suivant.

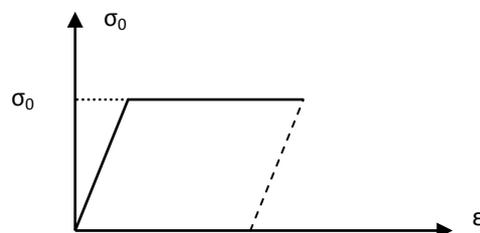
- $k = 0$  : cas des matériaux supposé parfaitement plastique alors la déformation plastique est infinie, il y a écoulement libre du matériau.

### Traction-compression plastique

**Application 1** : section homogène (un seul matériau) en traction :

Appliquons ce qui précède au calcul des structures composées d'une barre en acier de section  $A$  ne travaillant qu'en traction. L'approche de la loi de comportement la plus simple est idéalisée par une courbe bilinéaires sans écrouissage (présenté plus haut comme un modèle élastique plastique parfait). Les matériaux réels ne suivent pas cette loi, mais s'en approchent mieux que pour la loi de Hooke seule. C'est un modèle simple, mais plus réaliste (vis-à-vis de la sécurité et la ruine). Il nous permet un calcul direct de la charge de ruine, dite *charge limite*. On parle d'analyse limite des structures. Le calcul plastique ou l'analyse limite se base sur l'exploitation du palier de ductilité du matériau afin d'optimiser nos structures. Avant de commencer le calcul, nous émettons l'hypothèse suivante : en traction-compression simple, la déformation dans une section est homogène et ce même si la section n'est pas homogène.

Il est clair que :



Effort normal élastique (selon Hooke)

$$N_e = A\sigma_0$$

Effort normal plastique (charge limite)

$$N_{pl} = A\sigma_0$$

**Cas 1 :** section hétérogène ;

Parfois notre section est hétérogène et peut-être constituer de plusieurs matériaux. Pour ce faire nous étudierons 3 cas différents allant en difficultés croissantes. Pour aborder cette partie il nous faut d'abord définir 2 termes :

Effort normal élastique -  $N_e$  : Il s'agit de l'effort normal nécessaire pour qu'une fibre de la section atteigne sa limite élastique.

Effort normal plastique -  $N_{pl}$  : Il s'agit de l'effort normal qui entrainera une plastification de toutes les fibres de la section.

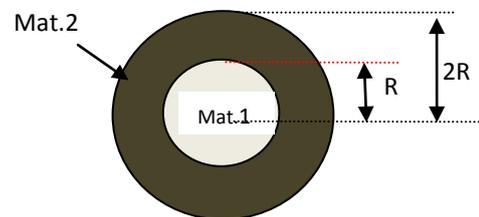
**Cas 2 :** Limites élastiques différentes - Modules élastiques identiques :

Considérons une section composée de 2 matériaux ayant une limite élastique différente mais un module élastique longitudinal identique. Nous allons traiter un exemple commenté pour comprendre le fonctionnement d'une telle section.

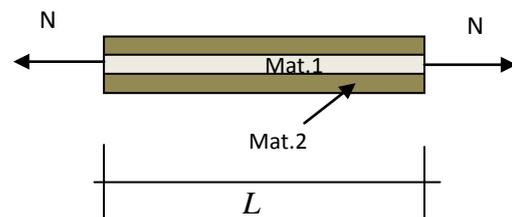
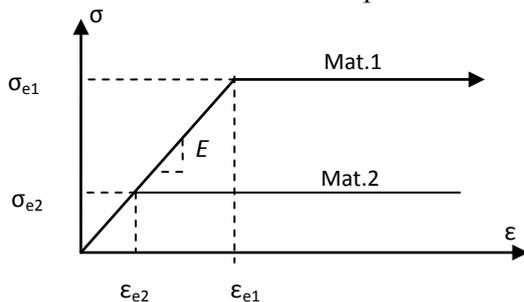
$$\sigma_{e1} = 4 \sigma_{e2},$$

$$S_2 = \pi \cdot (2R)^2 - \pi \cdot (R)^2 = 3\pi R^2 \text{ et } S_1 = \pi \cdot (R)^2$$

$$E_1 = E_2 = E$$



L'essai de traction donne le comportement suivant



*Effort normal élastique*

L'effort normal que subit une telle section est :

$$N = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_2 \quad (\text{II.6})$$

On augmente l'effort  $N$  jusqu'à la limite élastique du matériau 2. Du fait de l'hypothèse ci-dessus les déformations sont homogènes (identiques). Il est simple de deviner que le matériau qui va se plastifier en premier sera le matériau qui a la limite élastique la plus faible. On dit donc que le matériau 2 se plastifie en premier. La contrainte alors dans le matériau deux sera sa limite élastique  $\sigma_{e2}$ , d'où :

$$N_e = S_1\sigma_1 + S_2\sigma_{e2} \quad (\text{II.7})$$

Du fait de l'hypothèse citée ci-dessus, les déformations sont homogènes:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Leftrightarrow \sigma_1 E_1 = \sigma_2 E_2 \Leftrightarrow \sigma_1 = \sigma_2 \quad (E_1 = E_2 = E)$$

Il vient :

$$N_e = \sigma_{e2}(S_1 + S_2) \quad (\text{II.8})$$

### Effort normal plastique

Maintenant augmentons l'effort normal  $N$  au-delà de  $N_e$  jusqu'à atteindre la limite élastique du matériau 1. A ce moment toutes les fibres de la section ont plastifié.

Effort normal plastique (charge limite) est :

$$N_{pl} = S_1 \sigma_{e1} + S_2 \sigma_{e2} \quad \left( = \int_S \sigma dS \right) \quad (\text{II.9})$$

Comme  $\sigma_{e1} = 4 \sigma_{e2}$ , nous trouvons :

$$N_{pl} = 4S_1 \sigma_{e2} + S_2 \sigma_{e2} = \sigma_{e2} (4S_1 + S_2) \quad (\text{II.10})$$

$$\underline{A.N} : \quad N_e = \sigma_{e2} (4\pi R^2) \quad \text{et} \quad N_{pl} = \sigma_{e2} (7\pi R^2) \quad (\text{II.11})$$

On évalue le gain plastique à :  $\frac{N_{pl}}{N_e} = 1.75$

Rem 1 : L'effort maximum que l'on peut appliquer en tenant compte du palier plastique est, dans ce cas, plus important que lors d'un calcul en élasticité (+75%). Le calcul plastique permet donc d'utiliser cette réserve de résistance.

Rem 2 : Comment se comporte mécaniquement cette section ?

Phase 1 : Au fur et à mesure que la force augmente, il y'a une augmentation des contraintes dans la section, mais toutes les fibres sont encore élastiques et participent à la résistance élastique. ( $\sigma < \sigma_{e2}$  et  $\varepsilon < \varepsilon_{e2}$ )

Phase 2 : La force appliquée engendre des contraintes égales à la limite élastique du matériau 2 qui se plastifie, le matériau 1 reste dans le domaine élastique. ( $\sigma = \sigma_{e2}$  et  $\varepsilon = \varepsilon_{e2}$ ,  $N_e$ )

Phase 3 : La force appliquée continue de croître. Le matériau 2 étant plastifié, subit des déformations (palier ductile horizontal) mais n'apporte plus de résistance à la structure, car ne possède plus de raideur. Il y a une perte de rigidité de la section. Cependant le matériau 1 n'ayant pas atteint sa limite élastique voit sa contrainte augmenter. C'est l'élasto-plasticité ( $N_e < N < N_{pl}$ ).

Phase 4 : Les matériaux 1 et 2 sont plastifiés, il n'est plus possible d'augmenter le chargement ; c'est l'état plastique ( $N_{pl}$ ).

Le graphe suivant illustre l'évolution des efforts en fonction des allongements

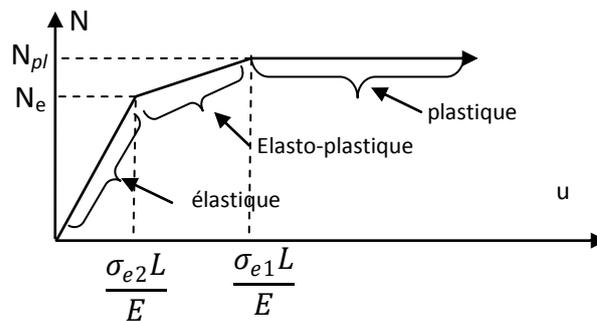


Figure II.10 : Evolution des efforts en fonction des allongements

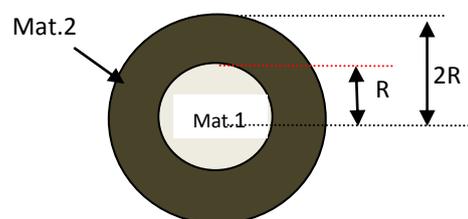
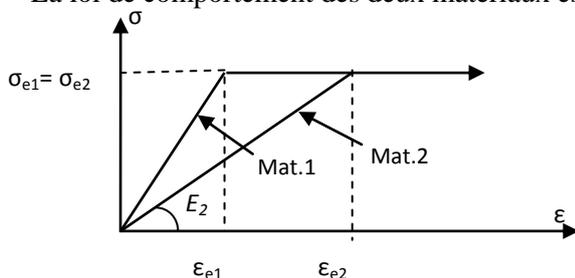
### Cas 3 : Limites élastiques identiques - Modules élastiques différents

Les nouvelles données sont :

$$\sigma_{e1} = \sigma_{e2} = \sigma_e$$

$$E_1 = 10E_2$$

La loi de comportement des deux matériaux est schématisée par :



### Effort normal élastique

Tout comme précédemment on recherche la valeur de l'effort normal qui engendra le fait qu'une fibre atteigne sa limite d'élasticité. Dans un cas tel que celui-ci la réponse est triviale, il s'agira du matériau 1, qui est plus rigide, qui par conséquent, subit plus de contrainte pour une même déformation. Nous sommes en élasticité et pour un effort  $F$  causant des déformations inférieures à  $\varepsilon_{e1}$ , nous avons :

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  (hypothèse des déformations identiques)

d'où :  $\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{\sigma_2}{E_2}$  le matériau 1 est choisi comme matériau de référence ou déterminant.

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{E_1} \sigma_1 = \frac{1}{10} \sigma_1 \quad (\text{II.12})$$

Le matériau 1 plastifie en premier et ce d'après l'allure du graphe des lois de comportement. Lorsque l'incrément de force provoque des déformations égales à  $\varepsilon_{e1}$  alors ;

$$\sigma_1 = \sigma_{e1} = \sigma_e$$

Au moment où le matériau 1 atteint sa limite élastique la contrainte dans le matériau 2 est :

$$\sigma_2 = \frac{1}{10} \sigma_1 = \frac{1}{10} \sigma_{e1} \quad (\text{II.13})$$

$$N_e = \sigma_e S_1 + \sigma_2 S_2 = \sigma_e S_1 + \frac{1}{10} \sigma_{e1} S_2 = \frac{13}{10} \pi R^2 \sigma_e \quad (\text{II.14})$$

Rem : Lorsque le matériau 1 rentre en plastification, le matériau 2 est à seulement 10% de sa résistance.

### Effort normal plastique

Comme auparavant on augmente progressivement la charge jusqu'à plastification complète de toute la section c.a.d le matériau 2 atteint sa limite élastique aussi.

$$N_{pl} = \sigma_{e1} S_1 + \sigma_{e2} S_2 = \sigma_e (S_1 + S_2) = 4\pi R^2 \sigma_e \quad (\text{II.15})$$

Le gain plastique est de :  $\frac{N_{pl}}{N_e} = \frac{40}{13}$

Le graphe illustrant l'évolution des efforts en fonction des allongements ressemble au cas précédent.

Rem : le cas Limites élastiques différentes - Modules élastiques différents est laissé au soin du lecteur

### Application 2 : treillis soumis à un chargement jusqu'à la ruine, système à 3 barres

Appliquons ce qui précède au calcul des structures composées de barres ne travaillant qu'en traction-compression. La structure étudiée est représentée sur la figure II.11. A l'état initial (au repos), il n'y a pas d'effort dans les barres. Ces dernières sont réalisées par un même matériau et ont une section  $A$  identique. La charge est supposée appliquée infiniment lentement afin que le problème soit quasi-statique. Nous effectuerons un cycle complet charge-décharge. Les barres ont un module élastique  $E$  et un comportement élasto-plastique parfait. La limite élastique est notée  $\sigma_0$ .

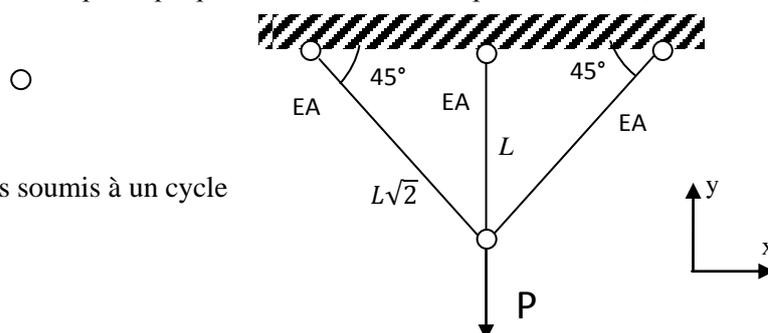


Figure II.11 : Treillis soumis à un cycle charge-décharge

## Solution analytique

### Phase élastique

#### Analyse du problème

Nous avons trois inconnues  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ , représentant les efforts dans les barres, pour deux équations d'équilibre dans le plan ( $F_x$  et  $F_y$  c.a.d 2 équations). Par conséquent, le système est hyperstatique de degré un. Les équations d'équilibre ont la forme suivante (voir figure II.12

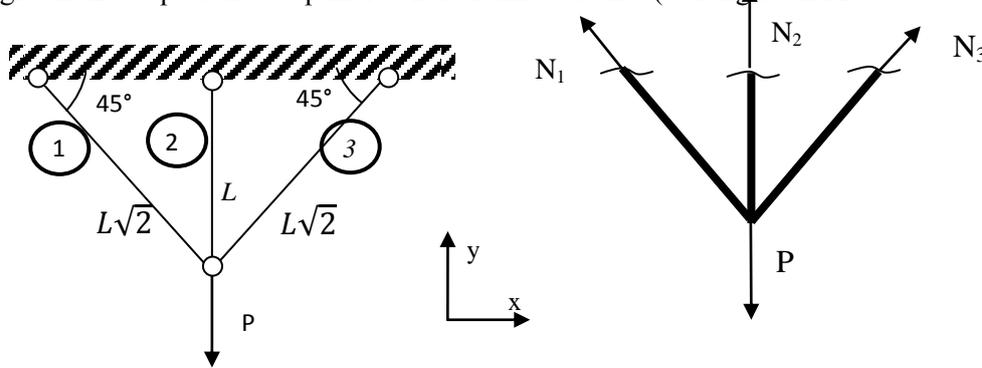


Figure II.12 : Equilibre des forces

$$-N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_3 \frac{\sqrt{2}}{2} + N_2 - P = 0$$

Soit

$$N_3 = N_1 \text{ et } N_2 = P - \sqrt{2} N_1 \quad (\text{II.16})$$

En examinant les équations de compatibilité et les équations d'équilibre on trouve :

$$N_3 = N_1 = \frac{P}{2+\sqrt{2}} \quad (\text{II.17})$$

Et

$$N_2 = \frac{2P}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow N_2 = 2N_1 = 2N_3 \quad (\text{II.18})$$

Ces résultats peuvent aussi s'établir en considérant l'énergie de déformation :

$$w = \frac{1}{2EA} (l\sqrt{2}N_1^2 + lN_2^2 + l\sqrt{2}N_3^2) \quad (\text{II.19})$$

Comme  $N_2$  et  $N_3$  peuvent s'écrire en fonction de  $N_1$ , alors on établit pour l'énergie ( $N_1$  pris comme inconnue hyperstatique):

$$w = \frac{l}{2EA} (2\sqrt{2}N_1^2 + (P - \sqrt{2}N_1)^2) \quad (\text{II.20})$$

Appliquons le théorème de Ménabréa :

$$\frac{\partial w}{\partial N_1} = 0 \Rightarrow (2\sqrt{2} + 2)N_1 = P\sqrt{2} \Rightarrow N_1 = \frac{P}{2+\sqrt{2}}$$

$$d'où: N_2 = \frac{P\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \text{ et } N_1 = N_3 = \frac{P}{2+\sqrt{2}} \quad (\text{II.21})$$

Jusqu'à présent on travaille dans la phase élastique, ceci implique que les efforts développés dans les barres (éq. II.21) doivent rester dans le domaine élastique .

La fonction de charge  $f(\sigma)$  qui décrit notre critère de plasticité s'écrit pour la traction simple  $f(N)$  de la manière suivante:

$$f(N) = |N_i| - A\sigma_0 \leq 0 \quad (\text{II.23})$$

Pour simplifier la représentation du domaine d'élasticité nous tenons compte de la condition de symétrie  $N_3 = N_1$ . Le domaine d'élasticité peut alors se représenter dans le plan  $(N_1, N_2)$  par un carré. Pour un matériau isotrope homogène la limite élastique est  $\pm \sigma_0$ , si nous voulons la noter en termes d'effort la limite est  $\pm A\sigma_0 = \pm N_0$ . On déduit la longueur du côté du carré délimitant le domaine élastique :  $2 N_0 = 2 A\sigma_0$  (voir figure ci-dessous) :

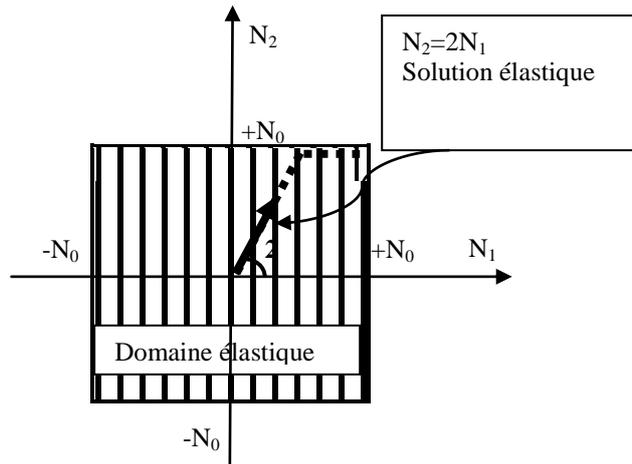


Figure II.13 : Domaine élastique

#### Phase de déformation plastique limitée

Ayant déjà trouvé  $N_2=2N_1=2N_3$ , il est somme toute logique la barre numéro 2 (barre médiane) qui plastifie en premier, la charge correspondante est:  $N_2=A\sigma_0$ .

$$\text{Comme : } N_2 = A\sigma_0 = \frac{P\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \text{ alors on tire } P = A\sigma_0 \frac{(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \quad (\text{II.24})$$

Charge qu'on nommera  $P_e$  telle que :

$$P_e = P = A\sigma_0 \frac{(2+\sqrt{2})}{2} : \text{charge de début de plastification de la barre 2} \quad (\text{II.25})$$

Les déplacements et déformations correspondants sont bien sûr :

$$\delta_e = \frac{\sigma_0 L}{E} \quad , \quad \delta_1 = \delta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sigma_0 L}{E} \Rightarrow \varepsilon_e = \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 = 2\varepsilon_3 \text{ avec } \varepsilon_i = \frac{\Delta L_i}{L_i} = \frac{\delta_i}{L_i} \quad (\text{II.26})$$

Où :  $\delta_1, \delta_3, \varepsilon_1, \varepsilon_3$ : sont respectivement les déplacements et les déformations dans les barres 1 et 3 au moment où  $N_1$  atteint  $A\sigma_0$ .

A ce moment pour les barres 1 et 2, il s'y développe un effort égal à  $N_1=N_3=N_2/2 = (A\sigma_0)/2$ . Les barres 1 et 2 sont dans le domaine élastique.

Le système est en état de *déformation plastique limitée* tant que les barres obliques ne plastifient pas à leur tour.

#### Phase élasto-plastique

Continuons le chargement pour des valeurs du chargement  $P$  supérieures au chargement limite  $P_e$ .

Pour un accroissement de charge  $dP$  positif, nous supposons que la barre 2 reste en plasticité (elle ne subit pas de décharge). Le matériau étant élasto-plastique parfait, il y a donc, écoulement et l'effort dans cette barre est constant et vaut  $A\sigma_0$ . Nous avons donc deux inconnues  $N_1, N_3$  pour deux équations d'équilibre :

$$N_3 = N_1 \text{ et } N_2 = A\sigma_0 = P - \sqrt{2} N_1 \quad (\text{II. 27})$$

ce qui entraîne :

$$N_3 = N_1 = \frac{P - A\sigma_0}{\sqrt{2}} \quad (\text{II. 28})$$

**Validité de la solution :** cette solution est correcte si les fonctions critère  $|N_i| - \sigma_0 A < 0$  ainsi que la condition de charge de  $p_2 > 0$  sont satisfaites. Le critère est équivalent à :

$$N_{3,1} = \frac{P - A\sigma_0}{\sqrt{2}} - A\sigma_0 \leq 0 \quad (\text{II. 29})$$

**On tire  $P \leq A\sigma_0(1 + \sqrt{2})$  qu'on notera  $P$  limite plastique «  $P_{lp}$  »**

Rem :  $P_{lp} = A\sigma_0(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} P_e$

La condition de charge nécessite le calcul de  $\varepsilon_{p2}$ , or on ne peut pas calculer directement l'accroissement de déformation de la barre 2 à partir de la loi de comportement car le matériau est élasto-plastique parfait (ligne horizontale sur la courbe bi-linéaire). Il faut utiliser la relation de compatibilité des déformations  $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$  et la loi de comportement des barres 1 et 3 qui restent élastiques durant cette phase :

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 = 2 \frac{N_1}{EA} = \frac{\sqrt{2}}{EA} (P - A\sigma_0) \quad (\text{II. 30})$$

Pour calculer  $\varepsilon_{p2}$  il suffit de faire :

$$\varepsilon_{p2} = \varepsilon_2 - \varepsilon_{e2} = \frac{\sqrt{2}}{EA} (P - A\sigma_0) - \frac{\sigma_0}{E} = \frac{1}{EA} (P\sqrt{2} - (1 + \sqrt{2})A\sigma_0) \quad (\text{II. 31})$$

Lorsque  $P$  atteint  $P_l$  défini plus haut les barres 1 et 3 plastifient à leur tour et la structure est complètement plastifiée. Le matériau étant élasto-plastique parfait, il y a ruine de la structure. Tout accroissement de charge  $dP > 0$  conduit à un écoulement plastique infini. A la frontière ( $P = P_{lp}$ ) on peut toujours considérer les barres 1 et 3 dans le domaine élastique et le calcul de leurs déplacements donne :

$$\delta_e = \frac{\sigma_0 L}{E}, \quad \delta_{lp} \cos(45^\circ) = \frac{LN_1 / \cos(45^\circ)}{EA} \Rightarrow \delta_{lp} = 2 \frac{\sigma_0}{E} L = 2\delta_e \quad (\text{II. 32})$$

Représentation graphique :

Au lieu de présenter un graphe de  $P$  en fonction du déplacement  $\delta$  on simplifiera en représentant pour l'axe des abscisses  $\delta / \delta_e$  et en ordonnées  $P / P_l$

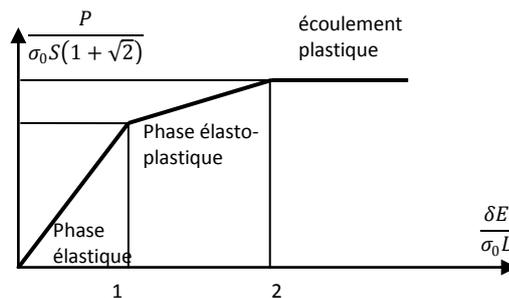


Figure II.14 : Diagramme de la flèche

Les diagrammes d'efforts correspondants sont indiqués sur la figure II.15.

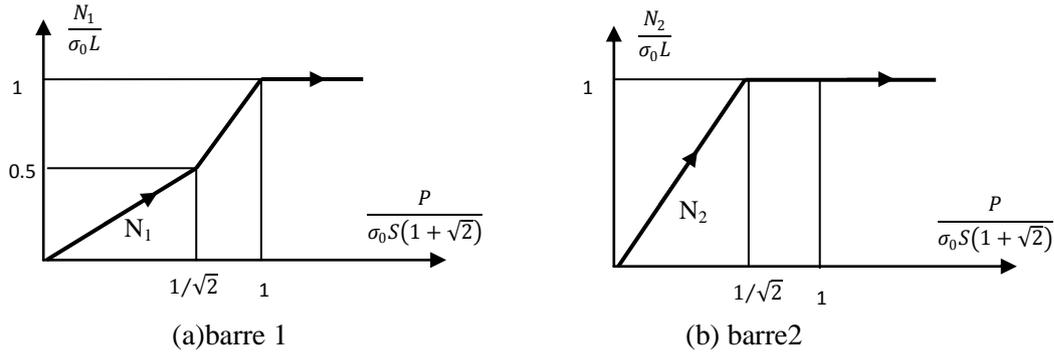


Figure II.15 : Diagramme d'efforts

### Décharge élastique

Partons de l'état obtenu pour  $P = P_{lp}$  (juste avant la ruine) et appliquons un incrément de charge  $dP < 0$ .

*Analyse et résolution du problème* : nous supposons que les barres 1 et 3 restent élastiques et la barre 2 qui était plastifiée subit une décharge élastique (inversion du sens des charges c.a.d une compression). Le problème est donc régi par les mêmes équations que celles établies en phase élastique. Réutilisons les résultats obtenus sous forme incrémentale :

$$dN_1 = dN_3 = \frac{dP}{2+\sqrt{2}}, \quad dN_2 = \frac{2dP}{2+\sqrt{2}} \text{ et } d\delta = \frac{L}{EA} \frac{2dP}{2+\sqrt{2}} \quad (\text{II. 33})$$

*Validité de la solution* : cette solution est valable tant que les barres restent dans le domaine élastique, il faut donc vérifier, pour toutes les barres :

$$\forall i, |N_i| - \sigma_0 A \leq 0 \text{ avec } N_i = N_i|_{P=P_l} + dN_i \quad (\text{II. 34})$$

C'est donc la barre 2 qui plastifiera la première en compression pour un accroissement  $-2\sigma_0 A$  de l'effort normal  $N_2$  (car elle passera progressivement de l'état  $\sigma_0 A$  à l'état  $N=0$  et enfin l'état  $-\sigma_0$ , à cause de l'isotropie du matériau). Soit  $dN_2 = -2\sigma_0 A$ , par conséquent :

$$dP = -\frac{2+\sqrt{2}}{2} 2\sigma_0 A = -(2 + \sqrt{2}) \sigma_0 A \quad (\text{II.35})$$

On exprime ainsi la charge de plastification en compression :

$$P_{lc} = P_{lp} + dP = -\sigma_0 A \quad (\text{II.36})$$

Nous pouvons, à partir de cette solution, calculer l'état de la structure lorsqu'elle est déchargée, soit un décrétement :

$$dP = -P_{lp} = -A\sigma_0(1 + \sqrt{2}) \quad (\text{II.37})$$

Les contraintes dans les barres ne sont pas nulles (contraintes résiduelles):

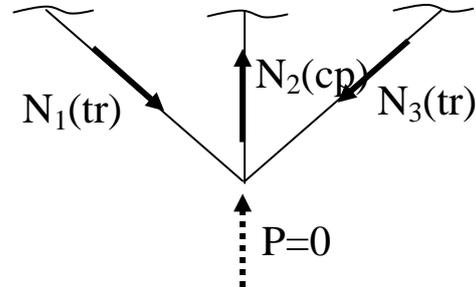
$$N_1 = N_3 = A\sigma_0 - dN_1 = A\sigma_0 - \frac{dP}{2+\sqrt{2}} = A\sigma_0 - \frac{A\sigma_0(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} A\sigma_0 \quad (\text{II.38})$$

$$N_2 = A\sigma_0 - dN_2 = A\sigma_0 - \frac{2dP}{2+\sqrt{2}} = (1 - \sqrt{2})A\sigma_0 \quad (\text{II. 39})$$

La quantité  $\frac{1}{2+\sqrt{2}}A\sigma_0$  étant positive on en déduit que les barres 1 et 3 sont en *traction* lorsqu'on décharge la structure de  $P_{lp} = (1 + \sqrt{2})A\sigma_0$  (état correspondant à une décharge complète  $P=0$ ). De même pour la barre 2, elle est en *compression* car la valeur  $N_2$  est négative. Les contraintes résiduelles proviennent des déformations plastiques qui ne vérifient pas les conditions de compatibilité puisqu'en effet  $\varepsilon_{p2} \neq 0$  et  $\varepsilon_{p1} = \varepsilon_{p3} = 0$  entraînent  $\varepsilon_{p2} \neq 2\varepsilon_{p1}$ .

A l'équilibre (pour  $P=0$ ) :

$$\begin{aligned} \sum F_y &= 0 \\ N_2 + 0 &= -N_1\sqrt{2} \\ N_2 &= -N_1\sqrt{2} \\ \text{On a : } \frac{N_2}{N_1} &= -\sqrt{2} \text{ compression} \\ \text{Au départ on avait } \frac{N_2}{N_1} &= 2 \text{ traction} \end{aligned}$$



**Définition :** Les auto-contraintes sont les contraintes résiduelles obtenues après décharge complète d'une structure ayant plastifié. Elles ont pour origine les déformations plastiques qui ne satisfont pas les équations de compatibilité. Ces contraintes forment un système mécanique équilibré.

Représentation graphique :

Traçons les diagrammes d'évolution de la flèche et des efforts obtenus après décharge de la structure. Le calcul de la flèche résiduelle se résume à

$$\delta_{rés} = \delta|_{P=P_{lp}} + d\delta = \delta_l + d\delta \quad (\text{II. 40})$$

$$\delta_{rés} = 2 \frac{\sigma_0}{E} L + \frac{2LdP}{(2+\sqrt{2})EA} = \frac{2}{E} \sigma_0 L - \frac{\sqrt{2}}{E} \sigma_0 L = \sigma_0 L (2 - \sqrt{2}) \quad (\text{II. 41})$$

On rappelle que  $dP = -P_{lp} = -A\sigma_0(1 + \sqrt{2})$  (décharge totale)

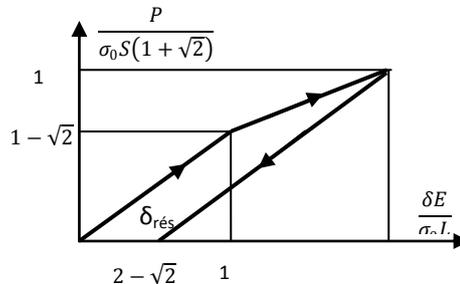
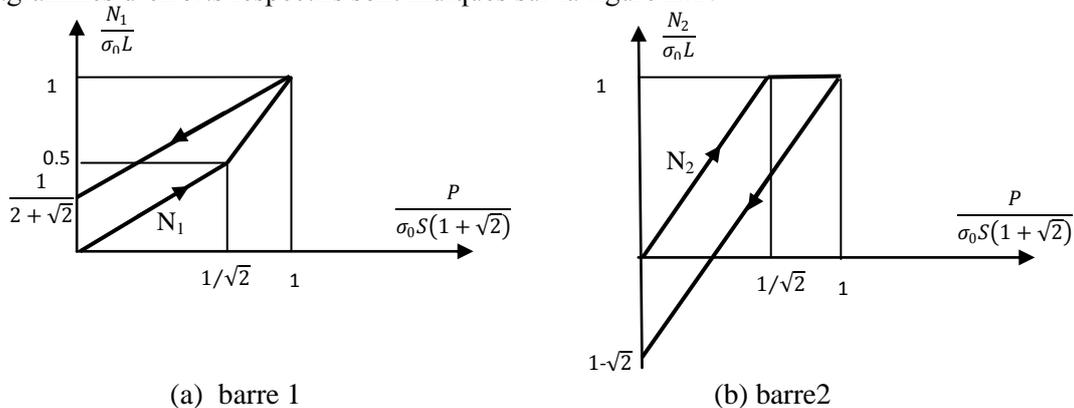


Figure II.16 : Diagramme de la flèche et flèche résiduelle

Les diagrammes d'efforts respectifs sont indiqués sur la figure II.17



(a) barre 1

(b) barre 2

Figure II.17 : Diagramme d'efforts

## II-2 Flexion Plastique plane des poutres :

### Rappel

Considérons une poutre prismatique en flexion dans le plan  $(xoy)$ , dans le cadre des hypothèses de Bernoulli et des petits déplacements nous avons :

### Hypothèses de travail:

\* Flexion dans un plan moyen

\* Flexion pure (*Moment de flexion seul*)

\* Cinématiquement :

Les sections restent planes après déformations (loi de Bernoulli)

\* Petites déformations.

$$\varepsilon_{xx} = -y v_{,x}^2 = \varepsilon \quad (\text{loi cinématique})$$

$$M_f = EI v_{,x}^2 \quad \text{où} \quad v_{,x}^2 = y'' = 1/r : \text{la courbure notée aussi } c = v_{,x}^2 = y''$$

$$\text{car} \quad \varepsilon = -y \cdot c \quad (\text{II. 42})$$

En élasticité linéaire :

$$M_e = W \cdot \sigma_e \quad (\text{II. 43})$$

$C'$  est le moment atteint à la limite élastique ( lorsque  $\sigma$  atteint  $\sigma_e = \sigma_0$ )

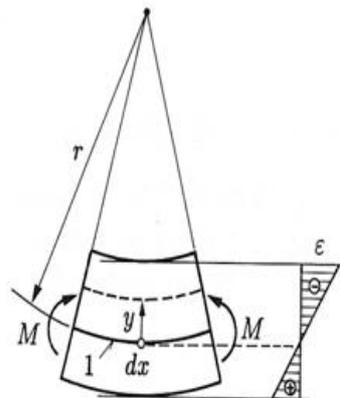


Figure II.18 : Cinématique en flexion pure (1 : plan ou fibre neutre)

### II .2-1 : Étude des sections homogènes à axes de symétrie :

Dans ce qui suit nous cherchons à déterminer le moment et modules plastiques pour une section plane soumise à une flexion pure jusqu'à la rupture et dont le diagramme de distribution des déformations est symétrique par rapport à l'axe neutre. Le comportement du matériau est pris bilinéaire ; élasto-plastique parfait. Pour se faire, étudions le diagramme de distribution des contraintes suivant d'une poutre fléchie :

Considérons une poutre dont la hauteur de sa section régulière est notée  $h$  de limite élastique  $\sigma_0$  et soumettons la à un essai de flexion pure croissant progressivement. La distribution des contraintes (symétrique par rapport à l'axe neutre, flexion pure ; bi-triangle) est montré ci-dessous :

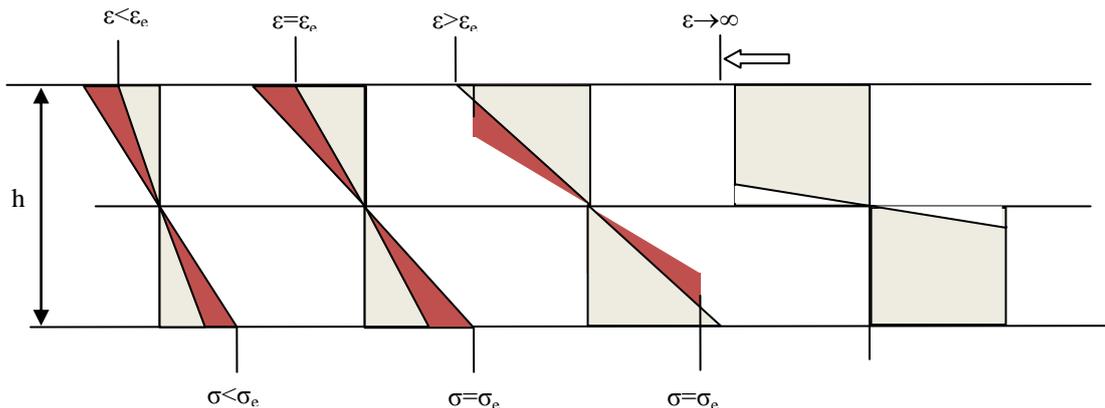


Figure II.19 : Evolution des contraintes et déformations pour une poutre soumise à une flexion pure croissante jusqu'à rupture (indiquer d sur le graphe)

On constate lors du déroulement de l'essai les phases suivantes :

Etape 1 :

Contraintes et déformations hypoélastiques :

Les déformations et les contraintes sont dans le domaine élastique et n'ont pas atteint la limite élastique :

$$M = \sigma \cdot w < M_e = \sigma_e \cdot w \quad \Rightarrow \quad \sigma < \sigma_e = \sigma_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon < \varepsilon_e$$

Etape 2 :

Déformation et contraintes des fibres extrêmes au niveau de la limite élastique

$$M = M_e = \sigma_e \cdot w \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_e = \sigma_0 \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_e$$

Etape 3 :

Contraintes et déformation plastiques des fibres sur une profondeur h-d.

Du fait que le comportement est elasto-plastique parfait, alors les contraintes sur les fibres plastifiées sont constantes et les déformations continuent d'augmenter au delà de  $\varepsilon_e$ .

$$M = M_{p(h-d)} > M_e \quad \sigma = \sigma_e \text{ (cste)} \quad \text{et} \quad \varepsilon > \varepsilon_e$$

Etape 4 :

Plastification totale de toute la section (sur toute la hauteur) :

Ici on atteint une plastification sur toute la hauteur de la section (en bas de l'A.N par traction et en haut de celui-ci par compression). Les contraintes sont les contraintes élastiques et les déformations sont infinies.

$$M = M_p = z \cdot \sigma \quad (\text{z module de flexion plastique}) \quad \sigma = \sigma_e \quad \text{et} \quad \varepsilon \text{ illimitée}$$

En résumé nous obtenons:

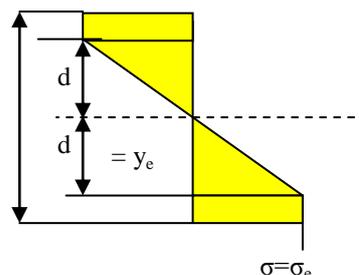
$$M_e = W \sigma_e$$

et

$$M_p = Z \cdot \sigma_e$$

Calcul de z :

$$M_p = \int_A \sigma y dA$$



$$(II. 44)$$

Comme  $\begin{cases} \sigma = -\sigma_e \text{ pour } y > 0 & (cp) \\ \sigma = \sigma_e \text{ pour } y < 0 & (tr) \end{cases}$

$$\text{Alors } N = \int_A \sigma dA = 0 \quad (\text{II. 45})$$

En prenant en valeur absolue les y on a :

$$Mp = \sigma_e \int_A |y| dA = \sigma_e \underbrace{\left( 2 \int_{\frac{A}{2}} |y| dA \right)}_Z = Z \cdot \sigma_e \quad (\text{II. 46})$$

Z est donc le double du moment statique de la moitié de la section ( $Z=2 \cdot S_{\text{demi-section}}$ )

### Application

Quel est le gain de résistance dû à la plastification pour une section rectangulaire (b,h) ?

Réponse :

- ▣ Section rectangulaire de dimensions b et h qui a:
- ▣  $W = bh^2/6$  ;  $S_{\text{demi}} = b(h/2)(h/4) = bh^2/8$
- ▣  $Z = 2 * S_{\text{demi}} = bh^2/4$

Alors,

- ▣ Moment élastique maximal  $M_e = (bh^2/6) \sigma_e$
- ▣ Moment plastique  $M_{pl} = (bh^2/4) \sigma_e$
- ▣ Le gain de résistance dû à la plastification vaut:  
 $M_{pl} / M_e = 6/4 = 1,5$  (c à d 50%)

## II 2-2 Notions de rotule plastique et de Moment-courbure :

a) Loi moment-courbure:

Lors de la flexion élasto-plastique expliquée ci-avant, on peut, à tout moment, établir une relation entre le moment appliqué M et la rotation de la section  $\chi$ , c'est la loi moment-rotation « élasto-plastique » (M,  $\chi$ ). Elle est traduite en un diagramme adimensionnel montrant l'évolution du rapport  $M/M_{pl}$  en fonction de  $\chi/\chi_e$ . Cette loi dépend de la forme de la section.

Le moment résistant élastique (maximal) est :

$$M_e = \sigma_e W \quad (\text{c'est le moment à } h/2)$$

Pour lequel correspond une courbure égale à :

$$\chi_e = M_e / EI = 2\varepsilon_y / h \quad \text{à partir de (II.42)}$$

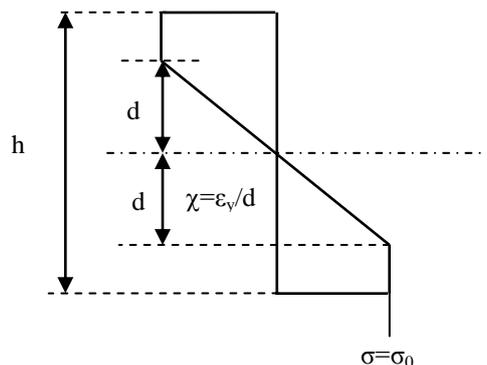
Etat élasto-plastique

$$M = \int \sigma y dA$$

$$\chi_e = 2\varepsilon_y / h$$

$$\chi = \varepsilon_y / d$$

$$\Rightarrow \chi_e / \chi = 2d/h \quad (\text{II. 47})$$

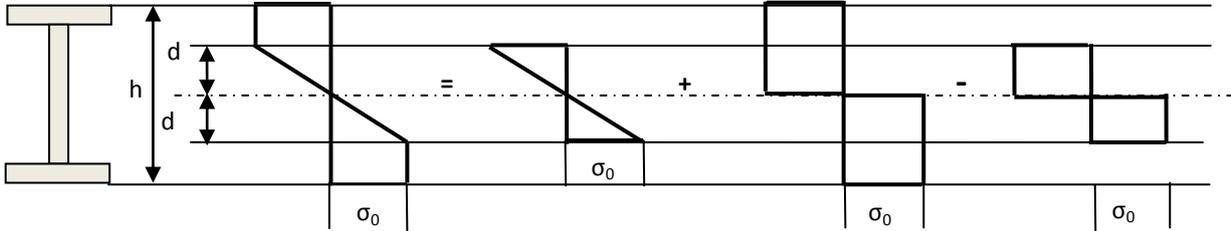


Afin d'exprimer la relation moment-courbure observons une section (profilé par exemple) dans un état élasto-plastique. Pour se faire, l'état de contrainte élasto-plastique de la section est décomposé en :

Une partie de la section qui est restée élastique sur une hauteur  $d$  à partir de l'axe neutre et de manière symétrique, à laquelle on ajoute :

Une section totalement plastique sur toute sa hauteur  $h$ . Puis pour être exact on retranche l'excédent :

Une section plastifiée de hauteur  $2d$  distribuée symétriquement par rapport à l'axe neutre.



Il est clair que d'après la figure ci-dessus on trouve :

$$M = M_{e,d} + M_p - M_{p,d} \quad (\text{II. 48})$$

Avec  $M$  : moment elasto-plastique

$M_{e,d}$  : moment élastique sur la hauteur  $2d$

$M_p$  : moment plastique de la section

$M_{p,d}$  : moment plastique sur la hauteur  $2d$

$$M = \sigma_0 W_d + \sigma_0 Z - \sigma_0 Z_d$$

$$M_e = \sigma_e W = \sigma_0 W$$

Divisons l'expression de  $M$  sur celle de  $M_e$  :

$$\frac{M}{M_e} = \frac{\sigma_0 Z}{\sigma_0 W} \left[ 1 + \frac{W_d}{Z} - \frac{Z_d}{Z} \right] = \frac{M_p}{M_e} \left[ 1 - \frac{Z_d - W_d}{Z} \right] \quad (\text{II. 49})$$

En se basant sur le résultat acquis en *eq.(II.47)*, on exprimera  $W_d$  et  $Z_d$  qui sont fonctions de la hauteur relative  $2d/h$  donc fonctions de  $\chi_e/\chi$  et écrire ainsi :

$$\frac{M}{M_e} = \frac{M_p}{M_e} \left[ 1 - f\left(\frac{\chi_e}{\chi}\right) \right]$$

Si  $M$  tend vers  $M_p$ ,  $\chi$  tend vers l'infini et  $f(\chi_e/\chi)$  tend vers 0 donc  $M/M_e$  est asymptotique à  $M_p/M_e$

On définit le facteur de forme  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{M_p}{M_e} = Z/W \quad (\text{II. 50})$$

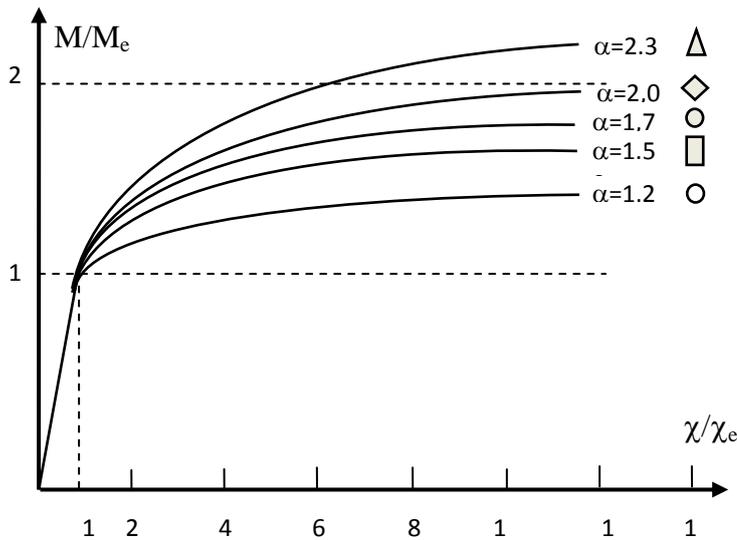


Figure II. 20 : Loi moment-courbure

La figure (II.20) montre aussi un gain dû à la plastification de la section droite. C'est le premier bénéfice de la plasticité. On constate un fort gain lorsque la section se concentre au voisinage de l'axe neutre : Cette variation s'explique par le fait que la contrainte dans les fibres extrêmes de la section ne pouvant dépasser  $\sigma_0$ , le bénéfice dû à la plastification provient principalement des moments intérieurs supplémentaires dus aux contraintes  $\sigma_0$  des fibres proches de l'axe neutre plastique.

#### b) Notion de rotule plastique

L'apparition de la rotule plastique est conditionnée et caractérisée par une phénoménologie respectée dans les points suivants :

- ▣ Théorie de flexion pure généralisée au cas de flexion simple ( $M+V$ ) et de flexion composée ( $M+N$ ) car  $N$  et  $V$  influencent peu le moment plastique ( $N$  et  $V$  ne sont pas importants).
- ▣ Application de la théorie plastique aux ossatures en acier doux.
- ▣ Une section est caractérisée par un moment plastique:  $M_p = \sigma_0 Z$
- ▣ Ce moment engendre une courbure en principe infinie.
- ▣ La longueur de la zone élasto-plastique reste toujours assez limitée.
- ▣ La courbure de la partie élastique reste faible mais celle de la partie élasto-plastique croît rapidement dans la zone partiellement plastifiée et ce d'autant qu'on se rapproche de la section totalement plastifiée.
- ▣ Tout se passe donc comme si des tronçons rigides étaient articulés les uns par rapport aux autres au droit des sections pleinement plastifiées.

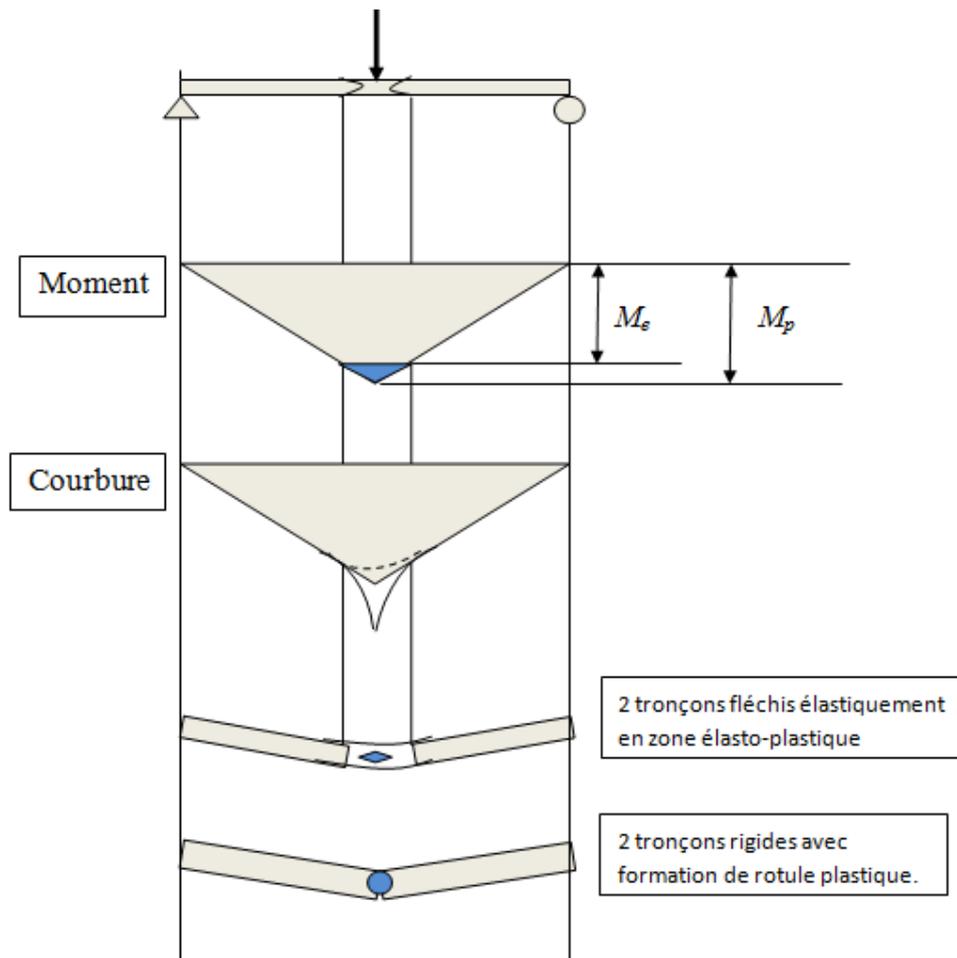


Figure II.21 : Formation d'une rotule plastique

On parle de rotule car on remarque bien qu'à la fin, il y a une sorte de rotation des demi-barres au niveau du point milieu.

C'est quoi l'idée de rotule plastique ?

On résume l'idée de l'apparition d'une rotule plastique en :

- ▣ Rotule plastique = articulation «à frottement» concentrée en une section, celle où  $M_p$  est atteint.
- ▣ Articulation «à frottement», veut dire :
  - Reste rigide tant que  $M < M_p$
  - Ne peut tourner que si  $M_p$  est atteint
- ▣ En-dehors de la rotule, les éléments sont élastiques et leur courbure est négligée devant la courbure naissante dans la rotule plastique.

Calcul des charges limites : Poutre bi-encastree chargée uniformément

Prenons maintenant le cas d'une poutre doublement encastree au niveau de ses appuis et appliquons une charge uniforme croissante jusqu'à apparition de ... ou des plastifications (formation des rotules plastiques). Les résultats de la R.D.M donnent comme moment d'encastrement  $M_A = M_B = M_e = -\frac{Pl^2}{12}$  et le moment au milieu de la poutre  $M_C = \frac{Pl^2}{24}$  (voir figure II.21).

On voit bien que le moment max en valeur absolue est celui des appuis. C'est là où se formeront les premières rotules plastiques. Pour que les premières fibres plastifient il faut que le moment atteigne le moment max qui est égal à  $|M_{max}| = M_e$ .

$$D'où on tire \quad P_e = \frac{12M_e}{L^2} \quad (\text{II. 51})$$

D'après le concept de rotule plastique et après la première plastification le comportement est admis élastique jusqu'à ce qu'on ait :

$$M_A = M_B = M_p \quad , \quad M_p : \text{moment plastique}$$

Alors la charge limite qui permet l'apparition des premières rotules plastiques en A et en B (figure II.21) est :

$$P_1 = \frac{12M_p}{L^2} \quad (\text{II. 52})$$

On désigne la valeur courbe enveloppe des moments de toute la poutre comme :

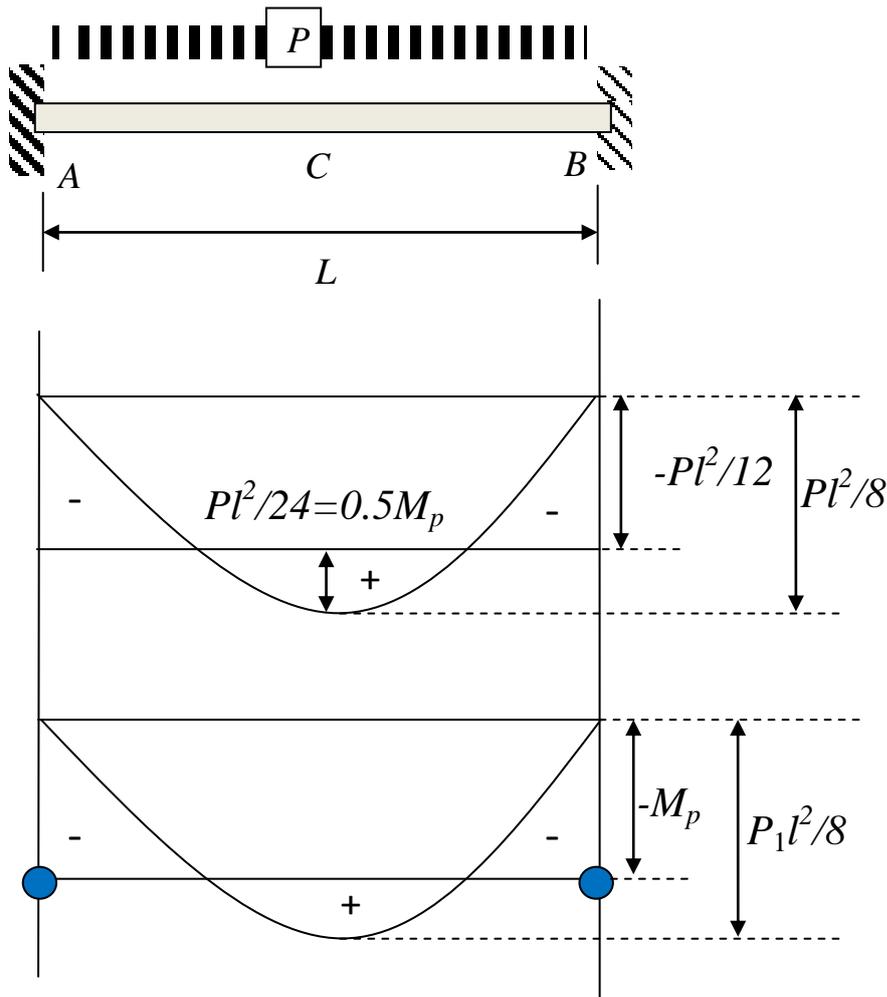
$$M_{env} = |M_{A \text{ ou } B}| + M_C = \frac{Pl^2}{8} \text{ équivaut à celui d'une poutre isostatique.}$$

La flèche est donnée par :

$$\delta = \frac{Pl^4}{348EI} \quad (\text{II. 53})$$

La flèche variera linéairement pour atteindre sous  $P_1$  :

$$\delta_1 = \frac{M_p L^2}{32EI} \quad (\text{II. 54})$$



Première fibre plastifiée

lorsque  $|M_{\max}| = M_e$

donc pour  $p_e = \frac{12M_e}{L^2}$

Après 1ère plastification, conformément au concept de rotule plastique,

comportement admis

élastique jusqu'à ce que

$$M_A = M_B = -M_p$$

donc pour  $p_1 = \frac{12M_p}{L^2}$

Flèche varie

proportionnellement à p

$$\delta = \frac{pL^4}{384EI}$$

et atteint sous  $p_1$

$$\delta_1 = \frac{M_p L^2}{32EI}$$

Figure II.21 apparition des deux premières rotules

Si nous continuons l'expérience dans le domaine élasto-plastique, nous constatons que les rotules plastiques en A et en B tournent sous l'effet d'un moment constant  $M_p$ .

Le moment à mi-portée croît jusqu'à atteindre à son tour  $M_p$  (figure II.22).

A ce moment il y a donc apparition d'une nouvelle rotule plastique au milieu et c'est un état de plastification total appelé 'mécanisme'. Le moment enveloppe de la poutre isostatique associée atteint aussi sa limite  $M = \frac{P_1 L^2}{8}$ .

Calcul de la charge limite : Le moment au point C a atteint à son tour  $M_p$  :

$$\frac{P_1 L^2}{8} - M_p = M_p \quad (\text{II. 55})$$

Et donc :

$$P_1 = \frac{16M_p}{L^2} \quad (\text{II. 56})$$

Avec :

$$\delta_l = \frac{M_p L^2}{12EI} \quad (\text{II. 57})$$

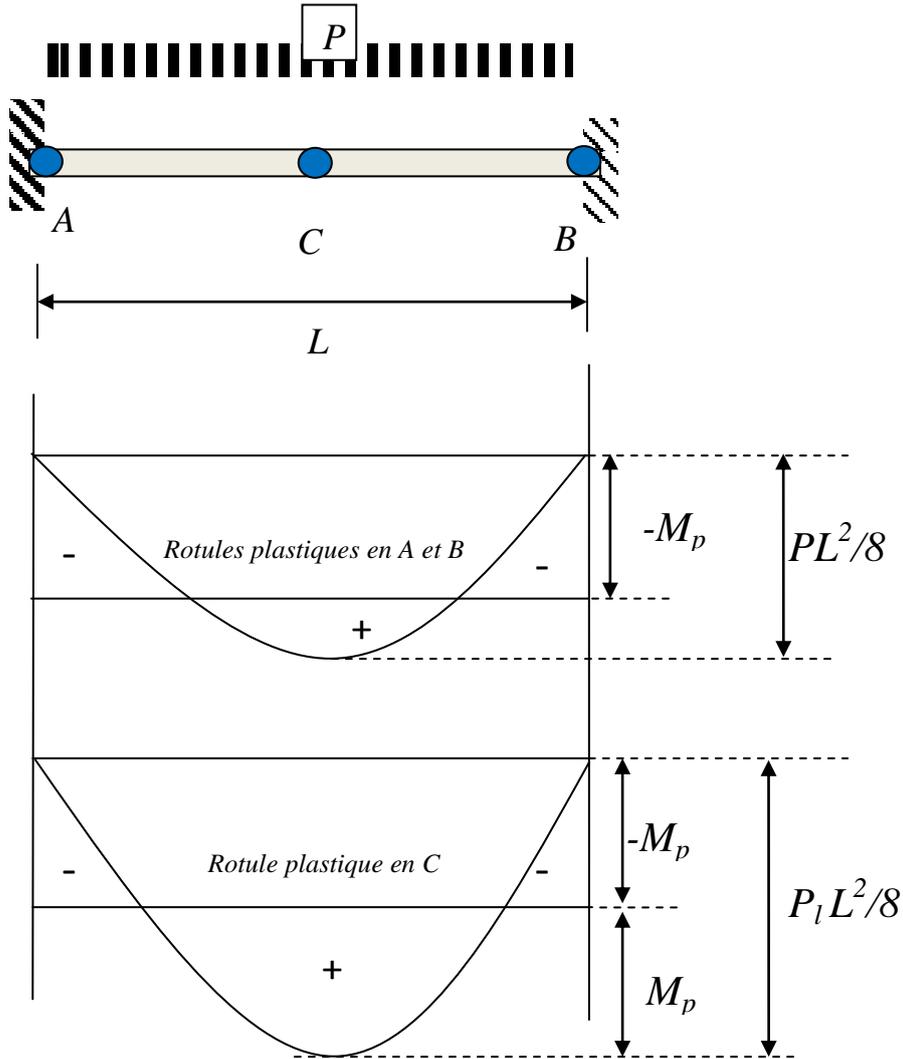


Figure II.22 : Apparition de la troisième rotule au milieu de la poutre

La figure ci –dessous schématise le principe de mécanisme citée plus haut ainsi que l'évolution de la flèche en fonction de la charge uniforme P.

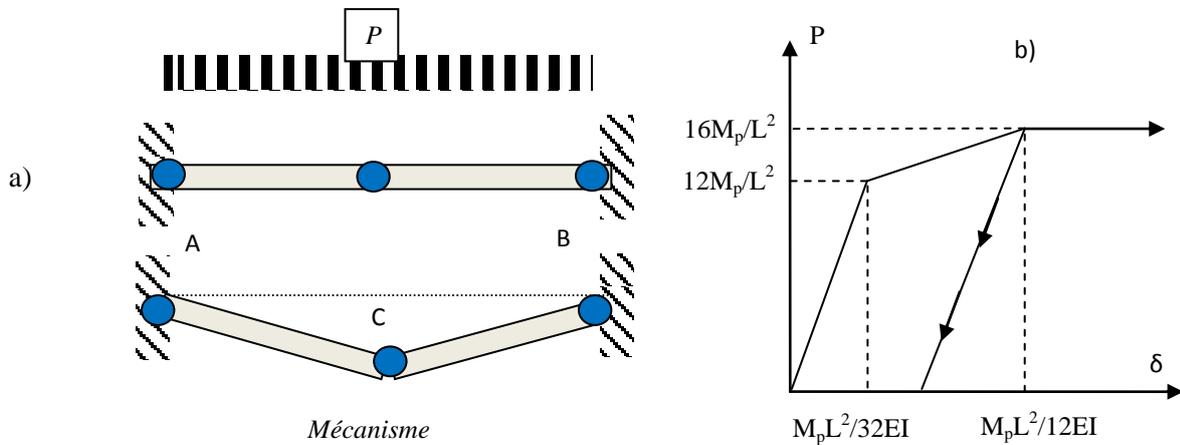


figure II.23 : Poutre bi-encastée soumise à une charge uniforme:  
a) mécanisme b) évolution de la flèche en fonction de la charge P

Remarque :

- La plastification des sections d'extrémités produit une nouvelle évolution du diagramme des moments fléchissant dans la poutre; les parties les moins sollicitées viennent à l'aide des plus chargées : c'est la redistribution plastique (R.P) entre sections.
- La R.P. est caractéristique des structures hyperstatiques (S.H)
- L'étude faite précédemment montre que les (S.H) fléchies possèdent une réserve de résistance: ici le gain de résistance de poutre par plastification est  $P_{lim}/P_e = P_v/P_e = 16M_p/12M_e = \underline{1.33 \alpha}$
- Le rapport 16/12 mesure le gain dû à la redistribution entre sections (adaptation entre sections) et le rapport  $\alpha = M_p/M_e$  celui dû à la plastification des sections (adaptation dans la section)

Pour bien saisir ce qu'on a gagné en résistance en plasticité (le bénéfice total) nous avons par exemple:

Pour le cas examiné, si on prend un IPE (dont le le bénéfice est (  $\alpha \approx 1,14$ ) x (16/12) = 1,52 soit 52% de plus que ce que permet un dimensionnement strictement élastique.

### II.2-3 Étude des sections en béton armé

Relation contrainte-déformation

1/Le béton: Le comportement du béton structural est représenté par un diagramme parabole-rectangle de contraintes-déformations, jusqu'à une déformation,  $\epsilon_0$ , à partir de laquelle les déformations augmentent tandis que les contraintes restent constantes.

Le facteur de 0.85 tient compte de la différence entre la résistance de flexion et la résistance d'écrasement d'un cylindre du béton et  $\gamma_c = 1.5$  est le coefficient de sécurité habituel pour le béton. La déformation maximale de 0,0035 est typique pour toutes les résistances caractéristiques du béton.

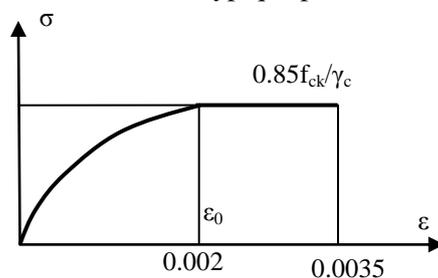


Figure II.24 : Diagramme parabolé rectangle de contraintes- déformations du béton(compression)

2/Les armatures

- Dans la phase élastique, le rapport entre la contrainte et la déformation est :

$$\text{Contrainte} = \text{module d'élasticité} \times \text{déformation}$$

$$\sigma = E_s \times \epsilon_s \quad (\text{II. 58})$$

Après la phase élastique, la déformation d'écoulement de calcul est :

$$\epsilon_y = \left( \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \right) / E_s \quad (\text{II. 59})$$

A.N: La limite élastique pour  $f_{yk} = 235 \text{ N/mm}^2$

$$f_{yk} / \gamma_s \approx 204,4 \text{ N/mm}^2$$

$$\epsilon_y = 235 / (1.15 \times 200 \times 10^3) = 0.00102 = 1020.10^{-6} \mu\text{strain} = 1.02 \text{ ‰}$$

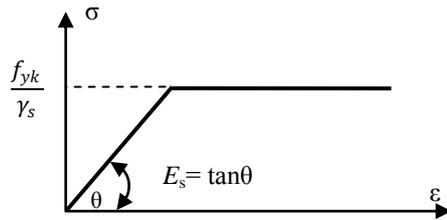


Figure II.25 : Diagramme contraintes-déformations relatives de l'acier (traction)

*Détermination de l'axe neutre pour une section non usuelle en flexion simple, en élasticité*

La figure ci-dessous montre une section quelconque soumise à un moment de flexion et les suppositions suivantes, simplifiées, sont faites:

- Les sections planes avant déformation demeurent planes après déformation. En d'autres termes: la distribution des déformations relatives est linéaire.
- Les contraintes dans les armatures et dans le béton sont proportionnelles aux déformations relatives.
- Le béton est fissuré jusqu'à l'axe neutre et il n'y a pas de contrainte de traction dans le béton au dessous de l'axe neutre.

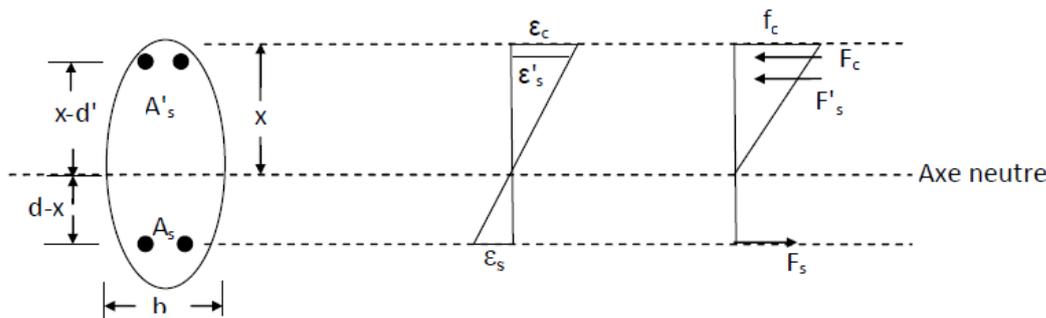


Figure II.26 : Distribution des contraintes et déformations d'une section non usuelle en élasticité

A l'équilibre nous avons :

$$1/2 A_c f_c + A'_s f'_s = A_s f_s \quad (II. 60)$$

L'équation (II.60) réécrite pour la section homogénéisée :

$$1/2 A_c x + \alpha A'_s (x-d') = \alpha A_s (d-x) \quad (II. 61)$$

«  $n = E_s / E_c$  »: Le coefficient d'équivalence acier / béton

$A_c$  : expression de la section du béton comprimé en fonction de x

x : La valeur de la position de l'A.N. est la solution de (II.61)

Pour une section rectangulaire la solution de l'équation (II.61) est donnée sous la forme graphique suivante ( $\alpha$  à l'état élastique est noté  $\alpha_e$ ) :

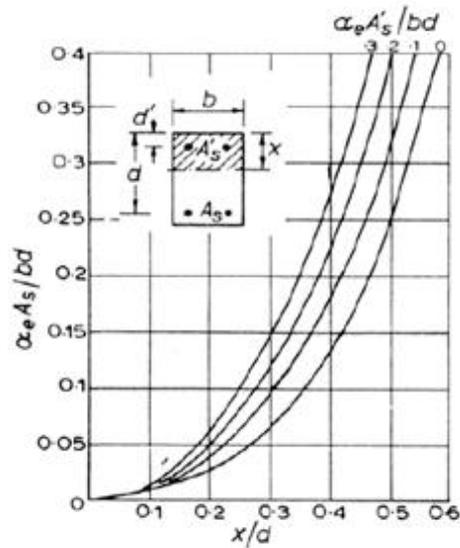


Figure II.27 : Représentation graphique de la position de l'axe neutre pour une section rectangulaire en flexion simple en élasticité

*Détermination du moment élastique flexion simple*

Une fois  $x$  déterminé, l'équilibre des moments par rapport aux armatures tendues est donné ci dessous :

$$M_e = F_c \left( d - \frac{1}{3}x \right) + F'_s (d - d') \quad (\text{II. 62})$$

$F_c$ : La force de compression dans le béton à la limite élastique est égale à :

$$F_c = \frac{1}{2} A_c f_c \quad \text{avec} \quad f_c = 1.25 \frac{f_{ck}}{3} \quad (\text{II. 63})$$

$f_{ck}$ : résistance caractéristique du béton

$F'_s$  La force de compression dans les armatures comprimées est égale à:

$$F'_s = A'_s f'_s \quad \text{avec} \quad f'_s = \epsilon'_s E_s, \quad \epsilon'_s = \epsilon_c \frac{x-d'}{x} \quad \text{et} \quad \epsilon_c = \frac{f_c}{E_c} \quad (\text{II. 64})$$

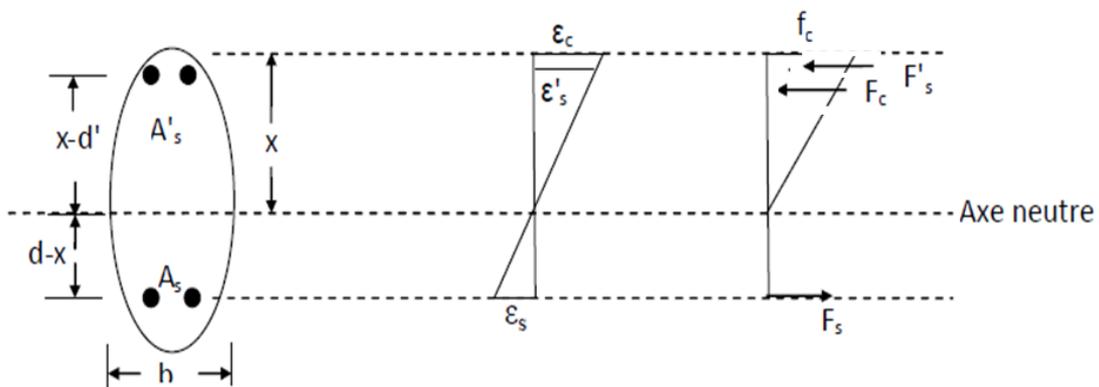


Figure II.28 : Equilibre d'une section de béton armé

### *Détermination du moment plastique en flexion simple*

Etudions une poutre en béton armé bi-axialement symétrique reposant sur deux appuis simples et soumise à une charge concentrée,  $P$ , jusqu'à la charge ultime (de ruine), le schéma de la poutre est représenté sur la figure II.29. On constate que le comportement de la poutre passe par les différentes étapes suivantes :

1ère étape

Les petites valeurs de,  $P$ , n'entraînent pas des fissurations dans le béton tendu, dans cette étape toutes les sections de la poutre se comportent élastiquement. La rigidité en flexion est donnée par la relation :

$$K = E_c I \quad (\text{II. 65})$$

$E_c$  : Module d'élasticité du béton.

$I$  : Moment d'inertie de la section totale rendue homogène.

Les déformations répondent sensiblement aux lois de la résistance des matériaux, étant donné que la rigidité est constante sur la longueur de la poutre, la courbure de la déformée est directement proportionnelle au moment fléchissant, figure II.29 b.

$$\chi_e = M / E_c I \quad (\text{II. 66})$$

2ème étape :

Dans la seconde étape, les valeurs de,  $P$ , entraînent la fissuration du béton tendu dans les sections sollicitées, mais on peut encore considérer que la poutre se comporte élastiquement jusqu'à une certaine charge ( $P_e$ ).

3ème étape :

Si la charge continue à augmenter, l'armature s'allonge et le béton continue à se raccourcir. Les fibres comprimées de la section la plus sollicitée se plastifient et leur raccourcissement continu à augmenter jusqu'à une valeur limite égale à  $\varepsilon_{cu}$  au niveau de cette section critique.

Lorsque sa contrainte de rupture est atteinte, le béton équilibre encore la composante de compression du couple de flexion et comme l'armature tendue n'a pas atteint un allongement de rupture et peut équilibrer la composante de traction, le moment extérieur de flexion est équilibré dans cette section où la rotation est très importante, on dit qu'il y a eu formation d'une rotule plastique.

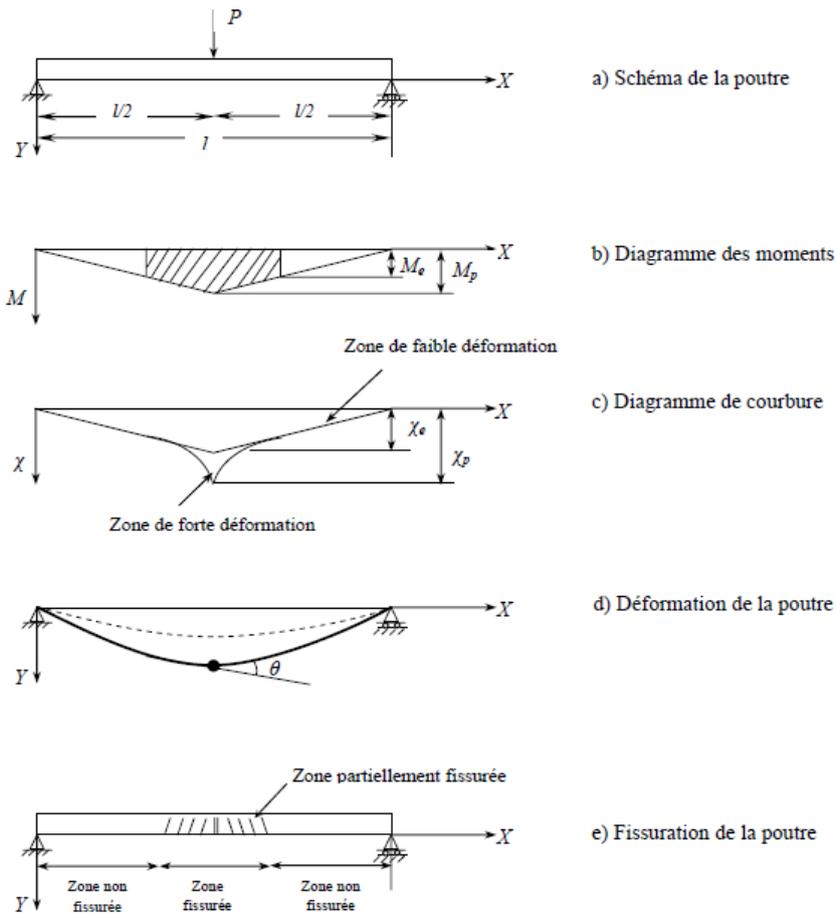


Figure II.29 : Poutre en béton armé soumise à une charge concentré,  $P$  croissante jusqu'à la charge ultime (de ruine).

Une structure en béton armé soumise à une charge statique peut se rompre de différentes façons :

- 1) Une ou plusieurs sections se rompent soit par déformation excessive, par rupture de l'armature ou par écrasement de béton ;
- 2) L'un des éléments constitutifs se rompt par cisaillement ou par épuisement de l'adhérence entre l'armature et le béton ;
- 3) Une partie de la structure ou l'un de ses éléments constitutifs se dégrade par le phénomène d'instabilité élastique (flambement).

Le comportement des poutres en béton armé est fonction du taux d'armatures longitudinales, de ce fait deux cas peuvent se présenter :

i) Section à faible pourcentage d'acier (sous-armée)

Dans les poutres qui présentent un pourcentage d'armatures assez faible, l'acier tendu quitte le domaine élastique au moment où la fibre extrême du béton comprimé atteint son raccourcissement limite,  $\epsilon_{cur}$ . La rupture dans ce cas est lente et les armatures présentent une large déformation plastique, figure II.30 a, elle survient par rupture de l'acier tendu (rupture par traction primaire), la courbe moment-courbure présente un plateau plastique.

Rem: C'est un dimensionnement souhaité.

ii) Section à fort pourcentage d'acier (sur-armée)

Dans ce cas le taux d'armatures est élevé, l'acier se comporte élastiquement au moment où la fibre la plus comprimée du béton atteint sa valeur limite,  $\epsilon_{cu}$  (fig. II.30b). La rupture survient par éclatement du béton, on dit alors que la rupture est brusque et n'avertit pas et sa réponse est similaire à une rupture par cisaillement (rupture par compression primaire). La courbe moment-courbure n'a pas de plateau plastique.

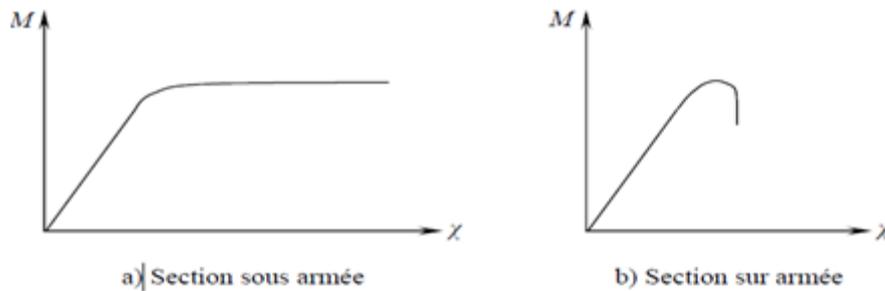


Figure II.30 : Modes de rupture d'une poutre en béton armé

La conception plastique permet une meilleure utilisation de la matière lorsqu'une faible déformation permanente d'une partie de la poutre est acceptable. Ce mode de conception est possible en raison de l'aptitude de certains matériaux, tels que l'acier de construction, à subir des déformations plastiques relativement importantes après le dépassement du seuil de plasticité.

Hypothèses de calcul de la théorie générale ou concept du pivot

La théorie est basée sur cinq hypothèses fondamentales :

- a) La théorie de flexion pour le béton armé suppose que le béton se fissure dans les régions des contraintes de traction et que, après fissuration, toutes les contraintes de traction sont reprises par les armatures.
- b) L'état limite à la ruine est obtenu quand la déformation relative dans le béton  $\epsilon_{cc}$  à la fibre la plus comprimée atteint une valeur spécifique  $\epsilon_{cu}$  (les principaux codes la prennent égale à  $3500 \cdot 10^{-6}$ ) c'est le pivot B.

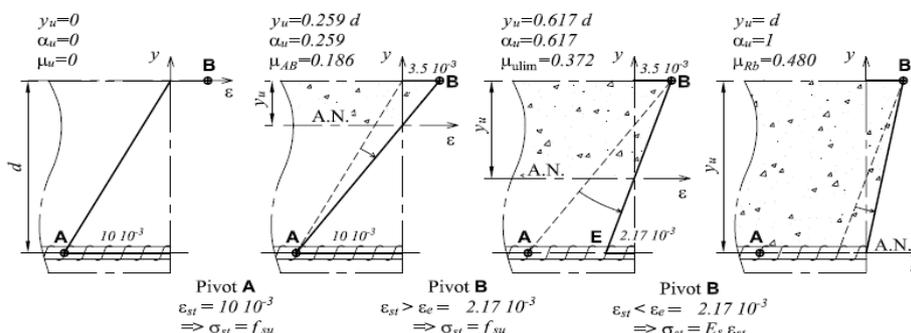


Figure II.31 : Règle des trois pivots

c) A la rupture la distribution des contraintes de compression dans le béton est définie par un bloc parabolique rectangulaire qui représente la distribution à la rupture quand les déformations compressives sont dans la marge plastique et elle est associée à la conception pour l'état limite ultime.

d) Le bloc rectangulaire équivalent de contrainte est une alternative simplifiée à la distribution parabolé-rectangle.

e) Car il y a une compatibilité des déformations entre l'armature et le béton adjacent, les déformations d'acier dans la traction,  $\varepsilon_s$ , et dans la compression,  $\varepsilon'_s$ , peuvent être déterminé à partir du diagramme de déformations.

### Détermination de l'axe neutre pour une section non usuelle en flexion simple, en Plasticité

Soit une section non usuelle en béton doublement armé sollicitée à la flexion simple

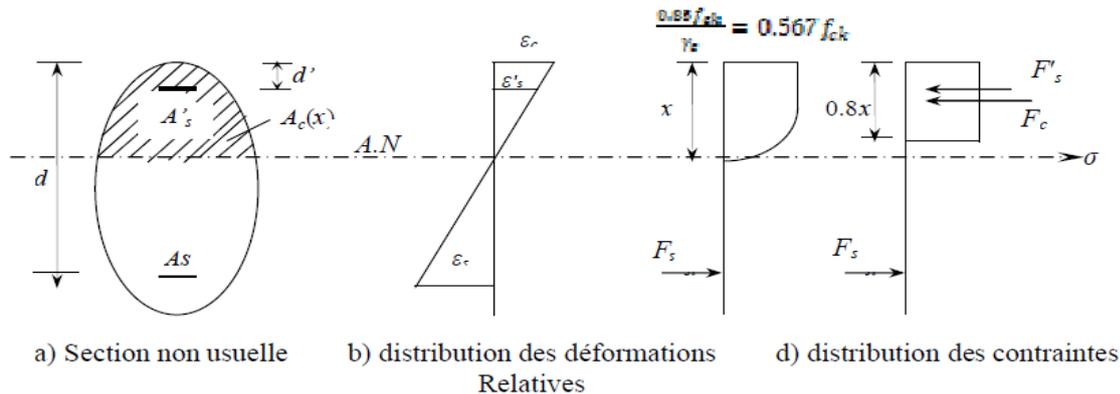


Figure II.32 : distribution des contraintes et déformations d'une section non usuelle en plasticité

A partir de l'équilibre interne :

$$F'_s + F_c = F_s \quad (\text{II. 67})$$

De sorte que :

$$F_c = 0.567f_{ck} A_c(x) \quad (\text{II. 68})$$

$$F'_s = f'_s A'_s \quad (\text{II. 69})$$

$$F_s = f_s A_s \quad (\text{II. 70})$$

Où  $f_s$  et  $f'_s$  sont les contraintes dans les armatures tendues et comprimées

Substituons, les expressions  $F_c$ ,  $F_s$  et  $F'_s$  dans l'équation d'équilibre (II.67) qui devient alors :

$$0.567f_{ck} A_c(x) + f'_s A'_s = f_s A_s \quad (\text{II. 71})$$

L'équation (II.71) est une équation qui présente trois inconnues interdépendantes  $A_c(x)$ ,  $f'_s$ ,  $f_s$ , qui ne peut être résolue que par la méthode d'essais successifs.

Les étapes à suivre dans cette méthode sont :

1) Fixer la valeur de  $x$  : premièrement égale à  $x = d/2$  ;

2) Calculer  $\varepsilon_s$  et  $\varepsilon'_s$  par :

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{cu} \frac{x-d'}{x} \quad (\text{II. 72})$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{cu} \frac{d-x}{x} \quad (\text{II. 73})$$

Où  $d$  est la hauteur utile,  $d'$  : est l'enrobage des armatures comprimées. À l'état limite ultime la déformation maximale du béton comprimé est prise :  $\varepsilon_{cu} = 0.0035$  (Pivot B)

3)Après avoir déterminé les déformations, on peut évaluer les contraintes dans les armatures,  $f's$  et  $fs$  à partir des courbes contraintes-déformations appropriées.

4) Remplaçant  $x$ ,  $f's$  et  $fs$  dans l'équation d'équilibre (II.71), si l'égalité est vraie,  $x$  est une solution, Si ce n'est pas le cas, le problème exigerait la solution en essayant des valeurs successives de  $x$  jusqu'à ce que :

$$F_c + F's = F_s$$

#### Détermination du moment plastique pour une section non usuelle en flexion simple

Une fois la profondeur de l'axe neutre est connue, l'équilibre est atteint, le moment ultime de la section sera donné par :

a) Par rapport à la section des armatures tendues

$$M_{u/A_s} = F'_s(d - d') + F_c(d - 0.4x) = M_p \quad (\text{II. 74})$$

b) Par rapport au centre de gravité de la section de la partie comprimée du béton

$$M_{u/cgbc} = F'_s(0.4x - d') + F_s(d - 0.4x) = M_p \quad (\text{II. 75})$$

Aux E.L.U le comportement d'éléments structuraux en flexion, devront être ductile et la rupture devrait se produire avec l'écoulement progressif des armatures tendues et pas par une rupture catastrophique brusque de compression du béton.

Ces limites seront normalement adoptées pour le calcul à l'état limite ultime, mais de plus grands degrés de redistribution de moment exigeront une plus petite limite à ( $x$ ) de s'assurer que les rotules plastiques peuvent se former, fournissant de rotation proportionnelle aux sections critiques.

Ces valeurs limites de la profondeur de l'axe neutre ( $x_{eq} = 0.50d$ ) sont telles que, une fois atteint, il est nécessaire de changer la conception d'une section simplement armée en section doublement armée. La valeur limite correspondante du moment désigné sous le nom du moment équilibré de section,  $M_{eq}$ .

### II.3 : Détermination de courbes de capacité (Force-Déplacement) des structures par analyse incrémentale :

#### Introduction

Les approches simplifiées pour l'évaluation sismique des structures qui considèrent le comportement inélastique, utilisent généralement les résultats d'une analyse statique de rupture pour définir la performance inélastique globale de la structure.

La détermination de la vulnérabilité sismique des structures par la méthode statique linéaire cause généralement un éloignement de la réalité physique dans un sens défavorable. Pour approcher le plus du comportement réel, il faut prendre en compte le comportement des structures au-delà du domaine élastique linéaire, en étudiant leurs comportement dans le domaine plastique.

Les méthodes d'analyse classiques, citées dans la plupart des codes parasismiques utilisés dans la conception sismique pour les structures ne représentent pas les mécanismes de rupture d'une manière adéquate. Ces mécanismes seraient fréquemment la cause de l'effondrement des structures.

Ceci a conduit à définir des procédures d'analyse, capable de fournir une prédiction précise de tels mécanismes d'effondrement non élastique, et ce en évitant l'effort du calcul excessif. Parmi elles, les procédures statiques non linéaires qui apparaissent comme outil attractif, parce qu'elles sont faciles à utiliser et fournissent une représentation simple et efficace de la réponse structurelle par la courbe de

capacité, à partir de laquelle on peut déterminer un nombre de paramètres de la réponse attendue. L'analyse statique non linéaire la plus célèbre est l'analyse ou méthode pushover.

### *Analyse push-over*

L'analyse en poussée progressive (*pushover* en anglais) est fondamentalement une analyse statique non linéaire. Elle consiste en l'application des charges horizontales distribuées sur la hauteur de la structure. Ce système de chargement croît de façon monotone de zéro jusqu'à l'état ultime correspondant à l'initiation de l'effondrement de la structure. Il s'agit donc d'une étude pas à pas qui tient compte des lois de comportement non linéaire des éléments de structure (poutres, poteaux, voiles ou dalles) et de leurs matériaux respectifs. En résumé L'analyse pushover consiste en une série d'analyses élastiques, superposées pour approximer une courbe de capacité ou courbe effort tranchant à la base – déplacement au sommet.

On applique à la structure étudiée une force gravitaire et latérale pour extraire une loi de comportement du type bi ou tri-linéaire. Ensuite on incrémente la charge latérale de manière itérative jusqu'à atteindre une première plastification d'un élément structurel (rotule plastique). La non linéarité est en effet introduite dans la structure au moyen de ces rotules plastiques. Du fait de la dégradation de la raideur, l'état actuel est le nouvel état d'équilibre et on continue le processus jusqu'à obtenir un déplacement limite au sommet de la structure (instabilité).

Le but essentiel de l'analyse Pushover est de décrire le comportement réel de la structure et d'évaluer les différents paramètres en terme de sollicitations et déplacements dans les éléments de la structure à savoir :

- l'estimation des déformations inélastiques dans les éléments destinés à dissiper l'énergie communiquée à la structure par le mouvement du sol,
- l'identification des zones critiques dans lesquelles les déformations sont supposées être grandes,
- la détermination des sollicitations réelles sur les éléments fragiles tels que la zone nodale.

Les résultats d'une analyse push-over sont retranscrits en traçant une courbe avec les déplacements en abscisse et les efforts (effort tranchant à la base de la structure) en ordonnée. La courbe force-déplacement est semblable à une courbe de loi de comportement.

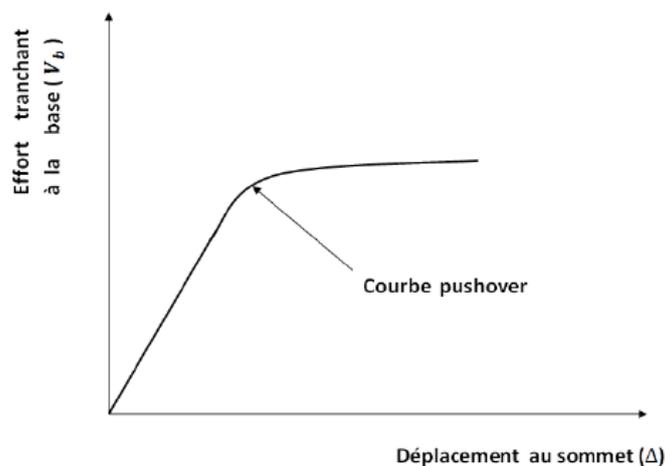


Figure II.33 : Courbe de Push-Over

### *Hypothèse de l'analyse pushover :*

L'hypothèse principale à formuler pour l'analyse statique non linéaire de pushover est que la réponse d'une structure à plusieurs degrés de liberté MDOF (multi-degree of freedom) peut être assimilée à la

réponse d'un système à un seul degré de liberté équivalent (SDOF:single degree of freedom) (fig. II.34), ce qui implique que la réponse est fondamentalement contrôlée par un seul mode de vibration et la forme de ce mode demeure constante durant le séisme, les expériences ont montré que le premier mode de vibration est le mode fondamental qui domine le mouvement de la structure.

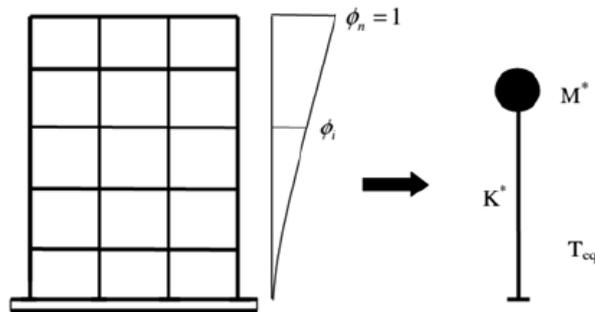


Figure II.34 : Réduction d'un système à plusieurs degrés de liberté à un système à un degré de liberté équivalent

*Étapes de l'analyse pushover :*

- *Etape 1* : la structure est supposée soumise aux charges gravitaires constantes, selon la réglementation algérienne (RPA). Ces charges incluent les charges permanentes et une portion des charges d'exploitations qui sont données par :  $G + \beta Q$ .
- *Etape 2* : elle subit un autre chargement latéral triangulaire déterminé en calculant les charges latérales équivalentes qui représentent les forces d'inerties dues à la composante horizontale des sollicitations sismiques.
- *Etape 3* : On détermine un déplacement cible. Ce déplacement est choisi arbitrairement, à condition qu'il soit représentatif de la déformation de la structure.
- *Etape 4* : En augmentant les forces latérales appliquées durant l'analyse, il y a apparition graduelle des rotules plastiques, l'évolution des mécanismes plastiques et l'endommagement progressif de la structure est fonction de l'intensité du chargement latéral et des déplacements résultants.

**Ajouter un exemple d'application simple : R+2 par exemple**

### Chapitre 3 : Analyse limite appliquée au calcul des structures :

#### III-1 : Principe de l'analyse limite :

Considérons une ossature hyperstatique de degré  $h$  soumise à un système de forces qui grandissent toutes proportionnellement l'une à l'autre. Au fur et à mesure que les forces augmentent, des rotules plastiques apparaissent successivement.

Les rotules plastiques se forment en des sections où  $M$  atteint un maximum local :

- Point d'application de force concentrée ;
- Extrémités des barres ;
- En pleine barre, «quelque part» sous charge répartie.

L'apparition d'une rotule dans une section revient à réduire d'une unité le degré d'hyperstaticité de la structure. Au moment de la formation de la  $h^{\text{ème}}$  rotule l'ossature est rendue isostatique.

La formation de la  $(h+1)^{\text{ème}}$  rotule rend l'ossature hypostatique (mécanisme) (ou mécanisme articulé à degré de liberté). On appelle charge limite celle qui correspond à un mécanisme de ruine comportant  $(h+1)$  rotules plastiques (limit or collapse load)

Comme les forces sont proportionnelles cela signifie qu'il y'a entre elles un multiplicateur ( $\lambda$ ) commun qui décrit l'accroissement de la mise en charge. La charge limite est alors définie par la valeur limite de ce multiplicateur  $\lambda_{\text{lim}}$ .

La ruine peut être partielle ou plus que complète selon que la ruine est atteinte pour un nombre de rotules inférieur ou supérieur au degré d'hyperstaticité ( voir figure III.1 et 2).

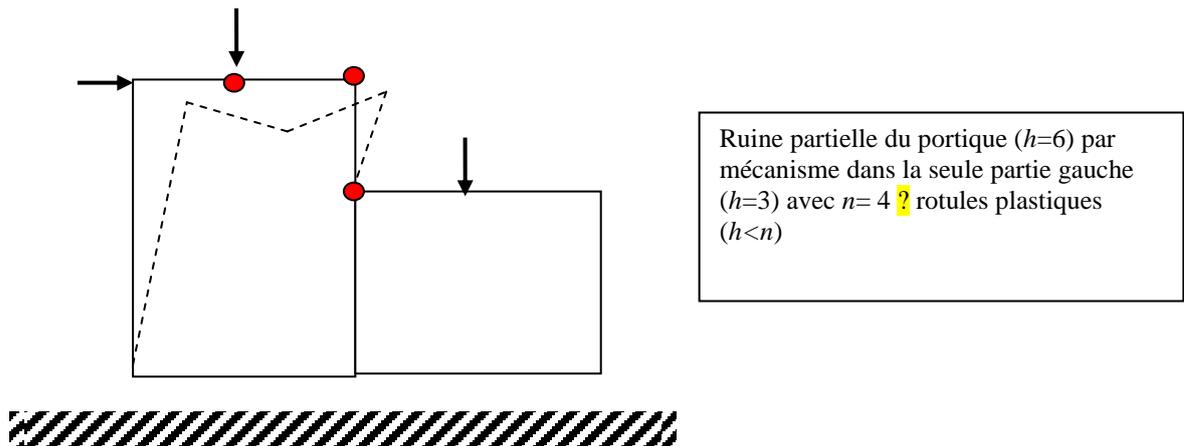


Figure III.1 : Ruine partielle du portique.

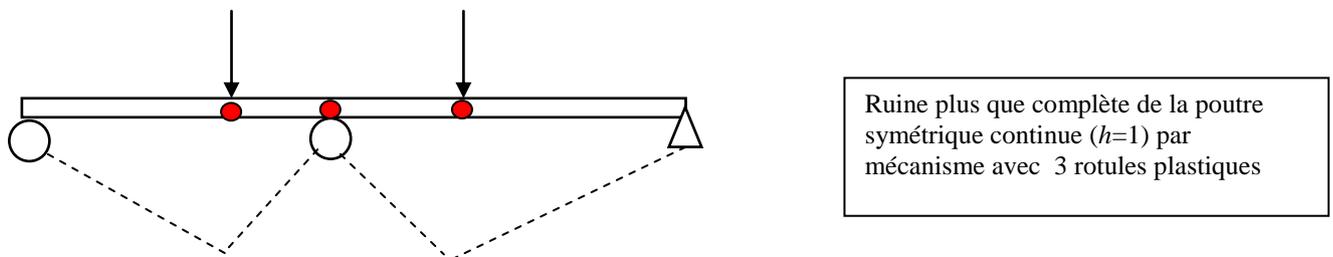


Figure III.2 : Ruine plus que complète de la poutre.

### Domaine de validité de la théorie de l'analyse limite (plastique)

- Toute barre est caractérisée par le moment plastique de sa section transversale

$$M_p = \sigma_0 Z = \sigma_e \cdot Z$$

- Acier a une ductilité suffisante pour permettre :
  - i) formation d'une rotule plastique,
  - ii) rotation de cette rotule jusqu'à obtention du mécanisme de ruine plastique .
- Valeur de  $M_p$  non affectée par  $N$  et/ou  $V$  (les valeurs de  $N$  et  $V$  pas trop élevées).
- Aucune instabilité prématurée (membrure, ossature).
- Charges croissantes toutes proportionnellement.
- Déplacements suffisamment faibles pour ne pas modifier le mode d'action des forces sollicitantes.
- Assemblages de la structure capables de transmettre  $M_p$  de la barre.

### III-2 : Les théorèmes de l'analyse limite :

#### *But des théorèmes*

Pour saisir l'utilité des théorèmes de l'analyse limite des structures, appuyons nous sur l'exemple suivant :

Considérons le portique ci –dessous. Il est 3 fois hyperstatique. Comme  $h=3$  nous avons besoin de la formation de quatre rotules plastiques pour avoir un mécanisme de ruine. Voilà mais le problème c'est que les rotules sont susceptibles d'apparaître en huit sections numérotées sur la figure. ceci implique qu'on aura une quantité énorme de combinaisons de choix d'emplacement de quatre rotules de rotules.(soixante-dix exactement). Pour palier à ce problème, on a recours à des méthodes générales de recherche de la charge limite. Ces méthodes se font par le biais de deux théorèmes fondamentaux (théorème statique et théorème cinématique) en plus d'un 3eme théorème qui est une combinaison des deux premiers.

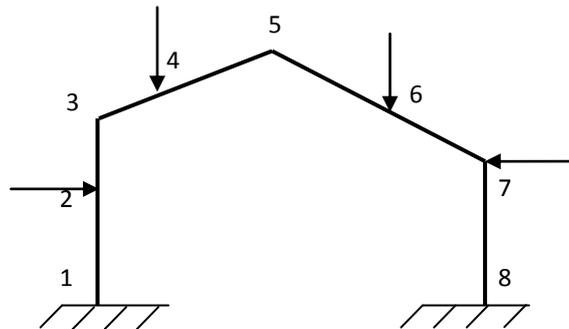


Figure III-3 : Portique bi-encasté (3 fois hyperstatique)

#### *Théorème des travaux virtuels :*

Dans une ossature déformable en équilibre, à laquelle on donne un état virtuel de déformation, le travail virtuel  $T_e$  développé par les forces extérieures pendant cette déformation est égal au travail  $T_i$  absorbé par les efforts intérieurs.

$$T_e = \int \sum P_i \delta_i + \int p \delta dx \quad (\text{III-1})$$

$$T_i = \int (N \Delta ds + V \Delta dy + M \Delta d\theta) \quad (\text{III-2})$$

L'état virtuel de déformation pris est celui qui est associé au mécanisme de ruine plastique de la structure. Ces quantités (charges, efforts tranchants, moments) sont reliées par les conditions d'équilibre ainsi que les déplacements, rotations et les variations géométriques ( $\Delta ds$  et  $\Delta dy$ ) sont

reliées par les conditions cinématiques du mécanisme. Ayant à l'esprit la troisième condition de validité de la théorie de l'analyse limite et l'hypothèse que les morceaux restant élastique sont rigides, on aura :

$$\int \sum P_i \delta_i + \int p \delta dx = \sum M_i \theta_i \quad (\text{III-3})$$

Ceci veut dire que seul le travail de déformation intérieure est celui qui est développé dans les rotules plastiques. On a donc, dans le travail virtuel interne seul travaille le moment de flexion plastique  $M_{pl}$  sur la rotation plastique  $\theta$  où il y a des rotules plastiques.

$$\sum M_{pl} \theta = \sum F \cdot u \quad (\text{III-4})$$

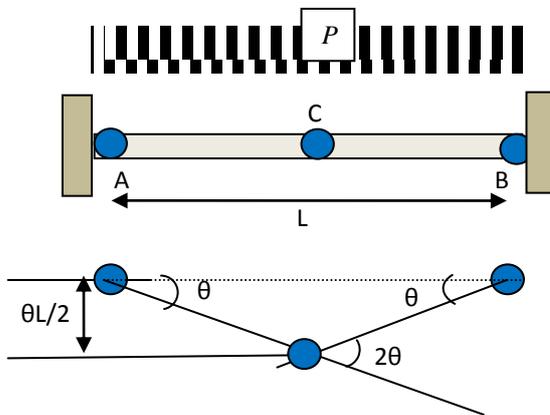


Somme sur toutes les rotules

Ensemble des charges appliquées

Application :

Reprenons l'exemple du chapitre précédent :



Pour une charge limite  $P = P_l$  nous avons :

$$M_A = M_B = M_C = M_{pl}$$

En partant de l'équation (III-4) nous obtenons

$$\sum M_{pl} \theta = M_A \theta + M_B \theta + M_C 2\theta = 4M_{pl}$$

$$\sum F \cdot u = 2 \cdot P \left( \frac{L}{2} \cdot \frac{\theta L}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{P \theta L^2}{4}$$

$$\text{D'où : } P_l = \frac{16M_{pl}}{L^2}$$

Etat limite de ruine réel :

Nous reprenons d'abord quelques notions :

- Multiplicateur de ruine  $\lambda_l$  des charges de référence : en analyse limite on cherche le *multiplicateur limite* ( $\lambda_l$ ) pour le quel la structure s'effondre sous mise en charge constante par formation de mécanisme de ruine.
- Diagramme des moments statiquement admissible (en équilibre avec les forces extérieures appliquées) et plastiquement admissible (en aucune section de l'ossature le moment de flexion n'y dépasse le moment plastique de cette section).
- Mécanisme de ruine, décrit par les rotations  $\theta_j$  dans les rotules plastiques, cinématiquement admissible (respectant les liaisons avec le monde extérieur), tel que le travail  $T_i$  des forces intérieures est positif (Loi constitutive :  $M_{pl}$  et  $\theta > 0$  tous deux ou  $M_{pl}$  et  $\theta < 0$  tous deux)
- La loi constitutive associe les  $M_j$  aux rotations  $\theta_j$  par les lois d'écoulement ; la rotation plastique  $\theta_j$  dans les rotules obéit à :

$$\begin{aligned} \blacklozenge \theta_j &= 0 & \text{si } -M_{plj} < M_j < M_{plj} \\ \blacklozenge \theta_j &> 0 & \text{si } M_j = M_{plj} \\ \blacklozenge \theta_j &< 0 & \text{si } M_j = -M_{plj} \end{aligned} \quad (\text{III-5})$$

Donc la loi constitutive (III-4) contient deux conditions bien précises, l'une a un caractère statique, l'autre cinématique.

- Condition statique:

Tout diagramme de moments  $M(x)$  doit être tel que :

$$-M_{pl} \leq M(x) \leq M_{pl} \quad (\text{III-6})$$

C'est la condition statique de plasticité.

- Condition cinématique:

Le travail interne dans une rotule doit être positif et donc :

$$\blacklozenge \theta_j > 0 \text{ si } M_j = M_{pj}$$

$$\blacklozenge \theta_j < 0 \text{ si } M_j = -M_{pj} \quad \theta \text{ et } M \text{ de même signe (le travail : } M_{pj} \cdot \theta > 0)$$

C'est la condition cinématique de plasticité; elle exprime le fait que dans une rotule plastique, moment et rotation tournent dans le même sens.

- Statique licite

Lorsque les *efforts intérieurs* ( $M$ ) et les actions sont en équilibre et vérifient la condition statique de plasticité, alors la statique est dite *licite*.

En général il suffit de satisfaire ces conditions au niveau du diagramme des moments fléchissant. On dit que le diagramme des moments  $M$  licite peut être statiquement admissible ou bien être plastiquement admissible. A chaque diagramme licite, on peut associer un multiplicateur statique  $\lambda_-$  des charges prises comme référence

- Cinématique licite:

Un mécanisme de ruine  $\theta_{j+}$  est licite s'il est cinématiquement admissible (continu), et compatible avec les appuis.

A chaque mécanisme licite, on peut associer un multiplicateur cinématique  $\lambda_+$  des charges prises comme référence.

### *Théorème cinématique*

On est dans la problématique où :

- le mécanisme de ruine n'est pas connu.
- Dans une ossature hyperstatique de degré  $h$ , il faut  $(h+1)$  rotules plastiques pour former un mécanisme.
- On a multiples manières de situer les rotules potentielles de manière à former un mécanisme licite.
- A un tel mécanisme, on peut associer un multiplicateur cinématique  $\lambda_+$ . Parmi ces mécanismes licites, un seul est le mécanisme réel de ruine, auquel correspond  $\lambda_l$ .

*Théorème* : tout multiplicateur cinématique est supérieur ou égal au multiplicateur limite :  $\lambda_l \leq \lambda_+$

### *Théorème statique*

On est dans la problématique où :

- Le diagramme réel n'est pas connu.
- Dans une ossature hyperstatique de degré  $h$ , il est possible de construire un grand nombre de diagrammes licites.
- A un tel diagramme, on peut associer un multiplicateur statique  $\lambda$ . Parmi ces diagrammes licites, un seul est le diagramme réel à la ruine, auquel correspond  $\lambda_l$ .

*Théorème* : tout multiplicateur statique est inférieur ou égal au multiplicateur limite :  $\lambda \leq \lambda_i$

*Théorème d'unicité*

Si, pour une ossature donnée, soumise à un chargement donné, on peut trouver une distribution licite des moments telle que le moment plastique soit atteint en un nombre suffisant de sections pour produire un mécanisme cinématiquement admissible avec des rotules plastiques en ces sections et si, en outre, dans chacune de ces sections, le moment a un signe correspondant au sens de rotation de la rotule dans ce mécanisme, alors le multiplicateur considéré est le mécanisme de ruine.

Examiner soigneusement la correspondance entre diagramme des moments et le mécanisme va servir à contrôler si un mécanisme *cinématiquement* admissible est le mécanisme de ruine.

### III.3 Application aux calculs de la charge de ruine de structures

L'analyse plastique des structures nécessite la détermination du multiplicateur limite plastique. Deux méthodes sont possibles :

- Méthode cinématique : application du théorème cinématique, donc approche « par le haut ».

- Méthode statique : application du théorème statique, donc approche « par le bas ».

En appliquant le théorème d'unicité, qui stipule que la correspondance entre diagramme et moment servira à contrôler si un mécanisme *cinématiquement* admissible est le mécanisme de ruine. On traitera l'application au calcul de la charge de ruine uniquement suivant la méthode cinématique.

*Méthode cinématique*

*Recherche de tous les mécanismes possibles*

Commencer par déterminer le nombre de rotules plastiques nécessaires pour former un mécanisme.

$$n = h + 1 \quad (\text{III-7})$$

Avec  $h$  : le degré d'hyperstaticité de la structure étudiée.

Ensuite déterminer le nombre de sections potentiellement critiques  $S$  (sections où des rotules plastiques sont susceptibles d'apparaître).

Calculer le nombre de mécanismes possible par le biais de la combinaison :

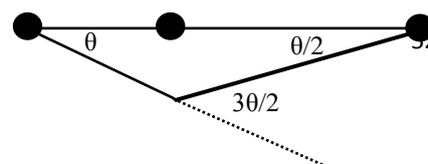
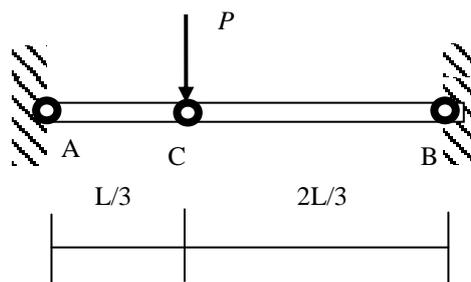
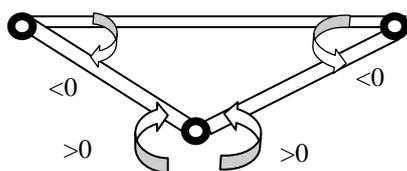
$$C_s^{h+1} = \frac{S!}{(h+1)![S-(h+1)]!} \quad (\text{III-8})$$

Après cela on identifie les divers mécanismes possibles et ce dont le but de déterminer successivement les valeurs des multiplicateurs limites cinématiques  $\lambda_{i,i}$ .

Enfin, on choisit le mécanisme de ruine réel comme le mécanisme vérifiant la caractéristique  $\min(\lambda_{i,i})$ .

Poutre bi-encastée chargée au tiers de la portée :

Convention de signe des rotations :



Comme on l'a vu auparavant les sections susceptibles d'avoir une rotule plastique sont au niveau des moment d'encastrement (en A et en B) et au droit de l'application de la charge (en C).

Donc le nombre de rotule requis est de trois

$$h = n - 1 = 2$$

Le nombre de section potentiellement critiques  $S=3$

Nombre de mécanisme :

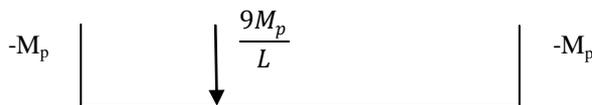
$$C_s^{h+1} = 1$$

$$\lambda_+ \theta P L/3 = M_p (\theta + \theta/2 + 3\theta/2) \quad (\text{III-9})$$

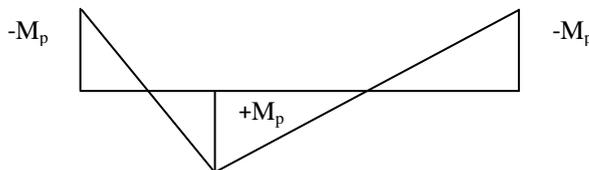
$$\text{D'où : } \lambda_+ = 9 M_p / PL \quad (\text{III-10})$$

Pour savoir si  $\lambda_+ = 9 M_p / PL$  est un multiplicateur limite correspondant au mécanisme réel de ruine, on doit examiner soigneusement la correspondance entre diagramme des moments et le mécanisme pour contrôler si un mécanisme cinématiquement admissible est le mécanisme de ruine.

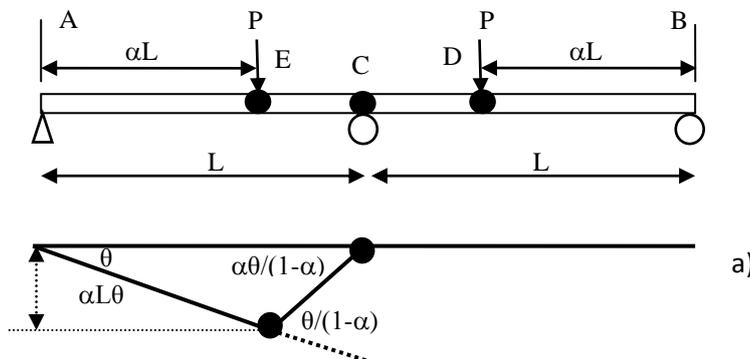
Pour cela examinons le diagramme des moments et le mécanisme : nous avons deux plastifications en A et B ;  $M_A = M_B = -M_p$  et en C nous avons une charge limite  $P_{lim}^+ = \lambda_+ P = \frac{9M_p}{L}$



Par des considérations statiques élémentaires on trouve  $M_C = M_p$  et donc on vérifie que  $\lambda_+ = \lambda_l$



Poutre continue à 2 travées égales et chargée symétriquement par forces concentrées



Le degré d'hyperstaticité est égal à :  $h=1$

Le nombre de rotules plastiques  $n=h+1=2$

Le nombre de section potentiellement critiques  $S=3$  (puisque en A et B nous avons des moments nuls, il reste les deux sections E, D et C est un moment maxi sur appui nécessite une rotule plastique)

Examinons d'abord le premier mécanisme avec des rotules en E et C (figure a) ?

$$\lambda_+ P \alpha L \theta = M_p [(\alpha \theta / (1 - \alpha) + \theta / (1 - \alpha))] \quad (\text{III-11})$$

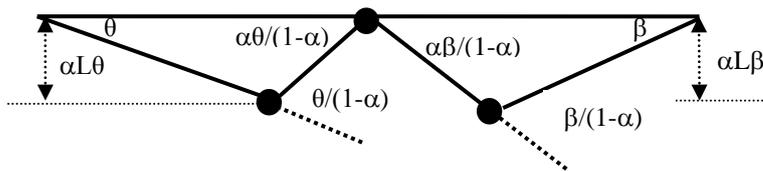
$$\lambda_+ = (M_p / PL) * (1 + \alpha) / [\alpha (1 - \alpha)] \quad (\text{III-12})$$

Deuxième mécanisme : rotules plastiques en D et C :

Par symétrie et sans faire de calculs on met :

$$\lambda_+ = (M_p / PL) * (1 + \alpha) / [\alpha (1 - \alpha)]$$

Troisième mécanisme rotules plastiques en E et D (figure ci-dessous) :

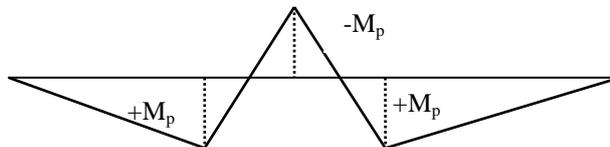


$$\lambda_+ P \alpha L (\theta + \beta) = M_p [(\alpha \theta / (1 - \alpha) + \theta / (1 - \alpha))] + M_p [(\alpha \beta / (1 - \alpha) + \beta / (1 - \alpha))] \quad (\text{III-13})$$

En faisant le développement de l'équation ( III-12) on retrouve le même résultat qu'auparavant soit :

$$\lambda_+ = (M_p / PL) * (1 + \alpha) / [\alpha (1 - \alpha)]$$

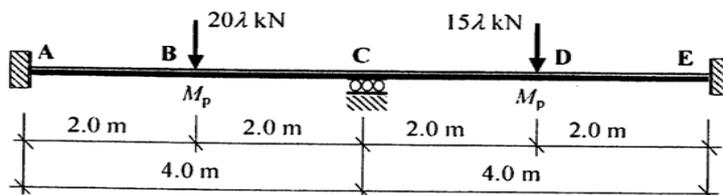
En examinant le diagramme des moments et les trois mécanismes, le calcul statique donne à chaque fois :



Donc  $\lambda_+$  calculé est le multiplicateur limite ( $\lambda_+ = \lambda_l$ ).

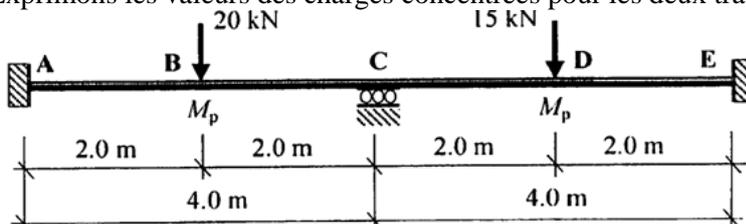
Poutre continue soumise à des charges concentrées non symétriques

Soit la poutre continue suivante où la valeur de la charge de référence est donnée. Déterminer la valeur requise du moment plastique  $M_p$  pour avoir un multiplicateur des charges minimum  $\lambda = 1,7$



Solution :

Exprimons les valeurs des charges concentrées pour les deux travées ABC et CD sans multiplicateur  $\lambda$



Ainsi en appliquant un multiplicateur  $\lambda=1.7$  nous trouvons :

Charge sur la travée ABC =  $20 \times 1.7 = 34 \text{ kN}$

( III-14)

Charge sur la travée CDE =  $15 \times 1.7 = 25.5 \text{ kN}$

( III-15)

*Méthode cinématique :*

Isolons la travée ABC



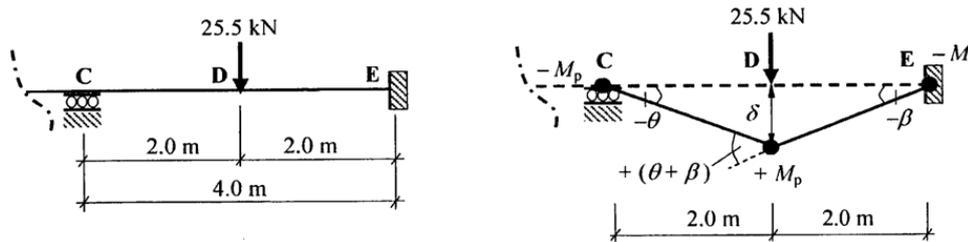
Comme nous avons une symétrie de chargement (P au milieu), alors  $\delta=2\beta=2\theta$  ( $\beta=0$ ).

Egalisons le travail intérieur et extérieur :

$$4M_p\theta = 680 \Rightarrow M_p = 17 \text{ kN.m}$$

( III-16)

Travée CDE :



$$\delta = 2\beta = 2\theta \quad \therefore \beta = \theta$$

De même pour le travail :

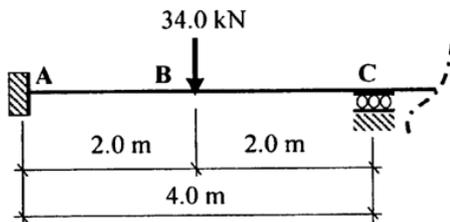
$$4M_p\theta = 510 \Rightarrow M_p = 12.75 \text{ kN.m}$$

( III-17)

La valeur critique du moment est donc :  $M_p = 17 \text{ kN.m}$

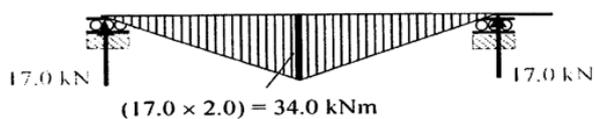
*Méthode statique :* méthode basée sur l'analyse des diagrammes.

Travée ABC :

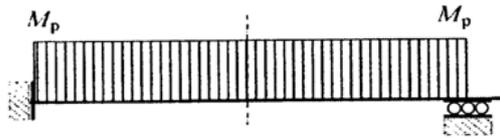


Les diagrammes des moments se composent en :

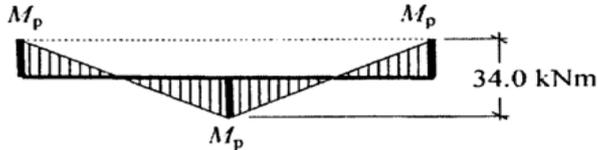
Un moment d'une poutre sur appuis simples où  $M_p = 34 \text{ kN.m}$  :



Et un moment d'une poutre avec appui encastré ;  $M_p$  constant :



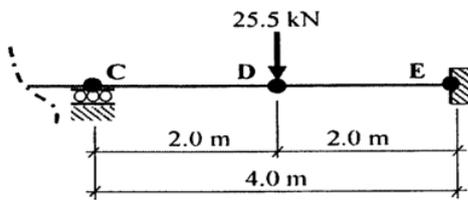
La combinaison des deux diagrammes des moments donne :



On tire  $M_p$  :

$$M_p + M_p = 34 \text{ kN.m} \Rightarrow M_p = 17 \text{ kN.m} \quad (\text{III-18})$$

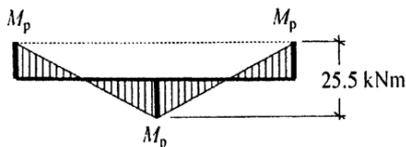
Travée CDE :



Pour laquelle les deux diagrammes sont :



Et leur combinaison :



De la même manière on tire  $M_p$  :

$$M_p + M_p = 22 \text{ kN.m} \Rightarrow M_p = 11,75 \text{ kN.m} \quad (\text{III-19})$$

Et comme on a vu avant la valeur critique du moment est :  $M_p = 17 \text{ kN.m}$

### III.4 : Analyse limite et réglementation

Les conditions requises pour une solution valide dans la mécanique des milieux déformables sont trois conditions de base : les équations d'équilibre des contraintes, la loi de comportement et les équations de compatibilité reliant les déplacements et les déformations.

Généralement beaucoup d'états de contraintes satisfont les conditions aux limites de contraintes, les équations d'équilibre et le critère de rupture. L'utilisation de la loi de comportement sert à trouver la solution unique vérifiant les conditions requises. L'analyse limite est la méthode permettant de définir une valeur de la charge de rupture sans utilisation de l'analyse élastique-plastique incrémentale. L'analyse limite considère une loi de comportement idéalisée. Cette idéalisation, nommée normalité (ou règle d'écoulement), établit les théorèmes limites sur lesquels est basée l'analyse limite.

La modélisation physique constitue l'approche privilégiée de l'analyse de risques dans le génie civil traditionnel. Elle s'intéresse aux mécanismes et aux lois de comportement des matériaux et des structures. La modélisation physique permet d'apprécier la sécurité d'un ouvrage vis-à-vis d'un phénomène préjudiciable ou de prévoir l'évolution d'un comportement. On propose ainsi un classement des modèles physiques en deux catégories : les modèles d'états-limites (intervenant dans les méthodes aux états-limites) et les modèles d'étude du comportement.

### *Les modèles d'états-limites*

Les modèles d'états-limites s'attachent à représenter soit les pertes de fonctionnalité d'un ouvrage (les états-limites de service), soit les modes de ruine ou les pertes d'équilibre statique (les états-limites ultimes). Au moyen d'équations régissant les conditions d'états-limites, on évalue le niveau de sécurité d'une structure vis-à-vis de chaque phénomène préjudiciable dans les conditions réelles d'exploitation.

En revanche, dans les règlements du génie civil traditionnel (fascicules, Eurocodes), les états-limites sont justifiés à partir de méthodes semi-probabilistes. Sur la base d'une méthodologie probabiliste, ces méthodes introduisent une part de déterminisme prise en compte par des coefficients partiels et une part statistique prise en compte par la définition statistique des valeurs représentatives des paramètres auxquels s'appliquent les coefficients partiels

Les états limites sont des états d'une construction qui ne doivent pas être atteints sous peine de ne plus permettre à la structure de satisfaire les exigences structurelles ou fonctionnelles définies lors de son projet. La justification d'une structure consiste à s'assurer que de tels états ne peuvent pas être atteints ou dépassés avec une probabilité dont le niveau dépend de nombreux facteurs.

### *États Limites Ultimes (ELU)*

Les États Limites Ultimes (ELU) concernent la sécurité des personnes et/ou la sécurité de la structure et des biens. Ils incluent éventuellement les états précédant un effondrement ou une rupture de la structure. Ils correspondent au maximum de la capacité portante de l'ouvrage ou d'un de ses éléments par :

- perte d'équilibre statique;
- rupture ou déformation plastique excessive;
- instabilité de forme (flambement).

### *Dimensionnement sismique*

La plupart des règlements modernes en ingénierie sismique a fait apparaître le besoin de définir l'état d'une structure lors de sa réponse à une excitation sismique par un niveau de performance dont la signification est proche des états limites ultime ou de service.

Une conception parasismique nécessite de vérifier que la construction possède les propriétés de résistance et de dissipation d'énergie. La résistance et la capacité de dissipation d'énergie à conférer à la structure dépendent de la façon dont on aborde son comportement non linéaire. En pratique, le compromis entre résistance et capacité de dissipation d'énergie est caractérisé par les valeurs du coefficient de comportement  $Q$  qui est donné par des valeurs selon le type de contreventement et la classe de ductilité associée ( le RPA99/v2003 considère d'une manière implicite une seule classe de ductilité qui correspond à la troisième classe DCH «Haute Classe de Ductilité » de l'Eurocode8.).

On doit vérifier que la structure dans son ensemble reste stable sous l'action sismique de calcul, vis-à-vis du renversement et du glissement.

On doit vérifier que les éléments de fondation ainsi que le sol de fondation peuvent résister à l'effet des actions résultant de la réponse de la superstructure, sans provoquer de déformation permanente notable. Lors de la détermination des réactions, il faut prendre en compte la résistance effective de l'élément de structure qui transmet les actions.

Dans toute analyse, il faut prendre en compte l'influence éventuelle des effets du second ordre sur les valeurs de l'effet des actions.

Il doit être vérifié que, sous l'effet de l'action sismique de calcul, le comportement des éléments non structuraux ne présente pas de risque pour les personnes et n'a pas d'effet défavorable sur la réponse des éléments structuraux.

Pour l'état limite de service c'est un état de limitations des déformations (ou état limite de limitation des dommages ELD).

## Chapitre IV : Endommagement

### IV 1 : Introduction à la mécanique de l'endommagement :

En général, lorsque l'on déforme un matériau depuis un état initial jusqu'à un état pré-déformé, sa capacité de déformation ou ductilité résiduelle jusqu'à rupture décroît. En cours de déformation, le matériau subit donc un endommagement progressif, qui aboutit à sa rupture. On peut considérer l'endommagement comme l'ensemble des phénomènes liés aux cavités qui se forment dans le matériau en cours de déformation.

La mécanique de l'endommagement ne fait intervenir les microfissures qu'au travers d'un concept d'homogénéisation. En même temps, elle décrit leur évolution de façon macroscopique, tout en restant dans le cadre de la mécanique des milieux continus.

A partir des travaux de Kachanov en 1958, qui a introduit une variable d'endommagement pour décrire la détérioration des matériaux par son effet sur les caractéristiques élastiques, sous sollicitation unidimensionnelle, cette notion par la suite été généralisée sur la base de la thermodynamique des processus irréversible (Lemaître et Chaboche).

Dans Lemaître et Chaboche, l'endommagement est représenté comme la conséquence d'une diminution de la section utile d'un *volume élémentaire représentatif* (VER) du matériau suffisamment grand pour qu'il puisse être considéré comme homogène et suffisamment petit pour qu'il puisse être considéré comme un point matériel.

La théorie de l'endommagement décrit donc l'évolution des phénomènes entre l'état vierge et l'amorçage de la fissure macroscopique. Cette évolution qu'il n'est pas facile de distinguer du phénomène de déformation l'accompagnant souvent est due à plusieurs mécanismes :

- l'endommagement plastique ductile, qui accompagne les grandes déformations plastiques des métaux aux températures ambiantes et peu élevées ;
- l'endommagement viscoplastique fragile (ou de fluage), fonction du temps qui, pour les métaux aux températures moyennes et élevées, correspond aux décohésions intergranulaires accompagnant les déformations viscoplastiques ;
- l'endommagement de fatigue (ou microplasticité) dû à la répétition des contraintes et que l'on repère en fonction du nombre de cycles ;
- l'endommagement macrofragile qui peut être provoqué par des sollicitations monotones sans déformations irréversibles appréciables, c'est le cas du béton par exemple.

En résumé, la théorie de l'endommagement doit être appliquée soit seule lorsque la réponse est principalement fragile, soit en conjonction avec d'autres théories telles que la plasticité si la réponse n'est ni parfaitement fragile ni ductile, ou la mécanique de la rupture si une grande fissure bien développée interagit avec un grand nombre de microfissures entourant son extrémité.

L'endommagement se traduit donc dans le matériau par la formation (phase d'amorçage) et le développement (phases de croissance et de coalescence) de cavités. Or, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, un solide est supposé ne posséder ni trou, ni interface, ce qui permet par exemple de définir des variables continues pour représenter les efforts internes de cohésion dans le matériau. Il est cependant possible d'introduire une notion d'endommagement dans le cadre des milieux continus. Pour cela, on fait l'hypothèse que l'élément de volume considéré est suffisamment grand devant les dimensions des hétérogénéités (cavités) dues à l'endommagement. La figure IV.1 illustre la définition des efforts internes dans un matériau endommagé. La section  $dS$  (de normale unitaire  $\vec{n}$ ) utilisée pour définir le vecteur contrainte  $\vec{t}$  contient des traces de microfissures et de cavités constituant l'endommagement du matériau.

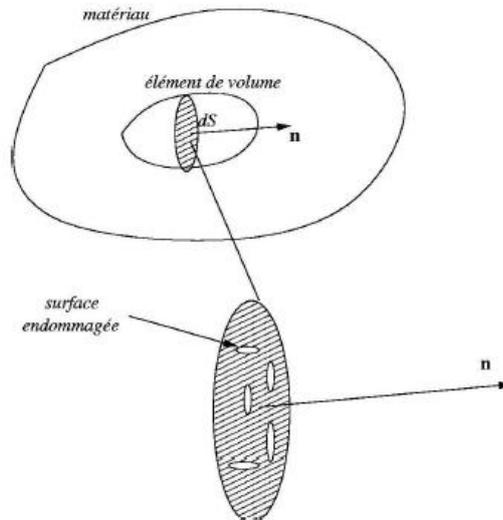


Figure IV.1 : Notion d'endommagement dans un milieu continu

La mesure mécanique de l'endommagement local dans une direction de normale  $\vec{n}$  est donnée par le rapport entre la surface efficace  $S_D$  (surface fictive supportant les efforts) et la section initiale  $S$  repérée par sa normale  $\vec{n}$ .

$$\frac{S_D}{S} = D_{\vec{n}} \quad (\text{IV. 1})$$

Tel que :  $S_D = S - \tilde{S}$  est l'aire totale de l'ensemble des défauts présents dans la surface  $S$

$\tilde{S}$  L'aire résistante effective, tenant compte des concentrations des contraintes au voisinage des discontinuités géométriques.

En conséquence, la variable d'endommagement ( $D$ ) ainsi définie correspond à :

- $D_n = 0$  correspond à l'état non endommagé ou vierge.
- $D_n = 1$  correspond à l'élément de volume rompu en deux parties selon le plan normal  $\vec{n}$ .
- $0 \leq D_n \leq 1$  caractérise l'état d'endommagement.

Un endommagement isotrope est constitué de fissures et de cavités dont l'orientation est distribuée uniformément dans toutes les directions. Dans ce cas la valeur de la variable  $D_n$  ne dépend pas de l'orientation  $\vec{n}$  et le scalaire  $D$  caractérise complètement l'état de dommage

$$D_n = D \quad \forall \vec{n} \quad (\text{IV. 2})$$

L'introduction d'une variable d'endommagement représentant les effets des micro-défauts comme une diminution de la surface résistant aux efforts, conduit directement à la notion de la contrainte 'effective' ; c'est la contrainte rapportée à la section qui résiste effectivement aux efforts.

Dans le cadre de l'isotropie, la variable endommagement est un scalaire  $D$  qui agit d'une manière identique sur toutes les composantes du tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  pour définir le tenseur des contraintes effectives  $\tilde{\sigma}_{ij}$  ou inversement.

$$\sigma_{ij} = (1 - D)\tilde{\sigma}_{ij} \quad (\text{IV. 3})$$

Pour le cas unidimensionnel, la contrainte effective se réduit à :

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (\text{IV. 4})$$

## IV-2. Endommagement des structures en béton et béton armé :

Le béton est un matériau très commun mais aussi très complexe (matériau quasi-fragile, avec un comportement quasi-élastique puis viscoélastique s'endommageant, dont les propriétés évoluent aussi avec le temps ...).

Les différents usages des bétons sont la source de différentes formulations du béton et d'une grande diversité de compositions, or les propriétés du béton dépendent des propriétés de ses composants (résistance de la pâte, nature et forme des granulats, éventuels ajouts...).

Ainsi le béton présente un comportement non linéaire très complexe dû à son caractère hétérogène et quasi-fragile. Selon la nature et l'intensité de la sollicitation, cette hétérogénéité favorise le développement de divers modes d'endommagement, de rupture et de propagation de fissures.

### IV-2 -1. Comportement phénoménologique du béton

Le matériau béton est intrinsèquement hétérogène, sa solidification passe par des processus chimiques et thermiques compliqués et possède par conséquent des propriétés difficiles à appréhender et à prendre en considération dans la modélisation de son comportement. Il est donc nécessaire de s'intéresser aux caractéristiques prédominantes du béton de manière générale afin de représenter au mieux la réponse macroscopique de ce matériau à la microstructure complexe.

#### IV-2 -1-1. Sollicitations en compression uni-axiale

La résistance du béton à la compression est le facteur primordial qui donne une image globale sur la qualité du béton. Elle est la propriété fondamentale et l'élément clé souvent employé lors de la conception des structures en béton.

Ainsi, le béton est défini par sa résistance à la compression. Cette résistance se mesure généralement par des essais de compression simple, uni-axiale, sur des éprouvettes cylindriques normalisées dites « 16-32 ».

Le comportement du béton en compression, se traduit principalement par une relation contrainte-déformation non linéaire, celle-ci présente une certaine pseudo-ductilité reliée à la microfissuration du matériau. En effet, lorsque le béton est soumis à des contraintes supérieures à 30% de sa résistance en compression, la microfissuration s'initie et tend à se propager parallèlement au chargement lors de son augmentation. La relation contrainte-déformation tend alors à se courber graduellement, traduisant une perte de rigidité, jusqu'à une augmentation plus rapide des déformations au-delà d'une contrainte de 70 à 80% de la résistance en compression qui mène à la rupture par fissuration parallèle à l'axe de chargement. La figure IV.2 illustre la relation contrainte-déformation ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) du béton en compression.

Une certaine résistance subsiste après la rupture et se traduit par une branche descendante dont l'allure dépend des conditions et procédures de l'essai, jusqu'à la déformation ultime du matériau, généralement admise à 0.0035. Cette valeur n'est en réalité pas constante, elle tend à diminuer avec l'augmentation de la résistance ultime.

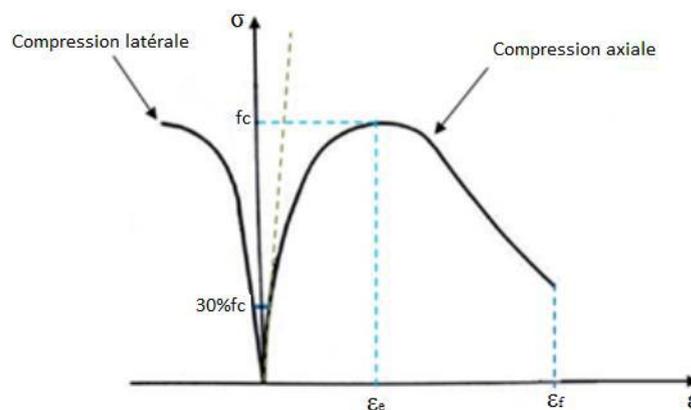
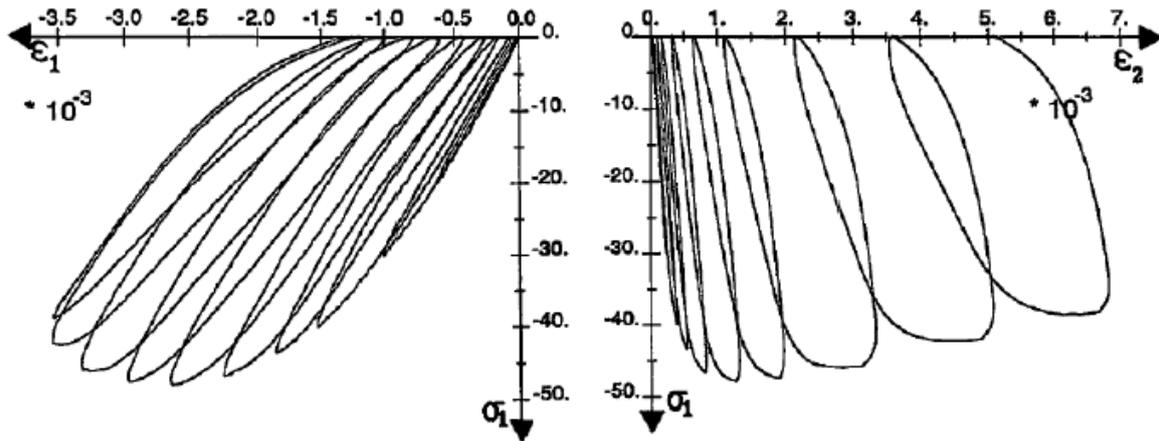


Fig. IV.2 : Comportement du béton en compression simple

L'essai cyclique en compression (Figure IV.3) montre également que les microfissures, source de l'endommagement, provoquent une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau. Les différences de diminution de rigidité longitudinale et transversale mettent en évidence l'anisotropie induite par la fissuration orientée sur des plans parallèles au chargement. De plus, nous distinguons clairement l'apparition de boucles d'hystérésis lors des cycles charge-décharge. L'amplitude de ces boucles évolue avec l'endommagement du matériau. Cette dissipation d'énergie s'explique par la présence d'une certaine viscosité et d'une plasticité induite par le frottement et le glissement des lèvres des microfissures lorsque celles-ci s'ouvrent et se referment.



(a) Mesure longitudinale

(b) Mesure transversale

Figure IV.3 : Comportement cyclique du béton en compression simple

#### IV- -1-2. Sollicitations en traction uni-axiale

Bien que le béton soit principalement conçu pour résister à la compression, la connaissance de ses propriétés en traction est importante pour une description complète de son comportement matériel. Vu la difficulté de la réalisation de l'essai, on fait souvent appel à des essais indirects pour déterminer ce comportement. La figure IV.4, présente la courbe contrainte-déformation pour le béton en traction simple (essai de traction directe). Dans cette figure, on peut distinguer deux phases importantes du comportement du béton :

- Dans une première phase, le comportement est quasiment élastique linéaire avec une légère perte de raideur juste avant d'atteindre le pic.
- Une deuxième phase (phase adoucissante), après le pic, caractérisée par une chute presque brutale de la contrainte, avant de se stabiliser, les déformations peuvent continuer à croître. Apparition de l'irréversibilité (déformation permanente).

La progression de microfissures conduit à la formation de fissures à l'échelle macroscopique. Ce mécanisme se traduit par un endommagement directionnel du matériau qui devient orthotrope. Les cycles charge-décharge permettent de constater une chute importante de module (raideur) en fin d'essai (de  $E$  à  $E/2$ ).

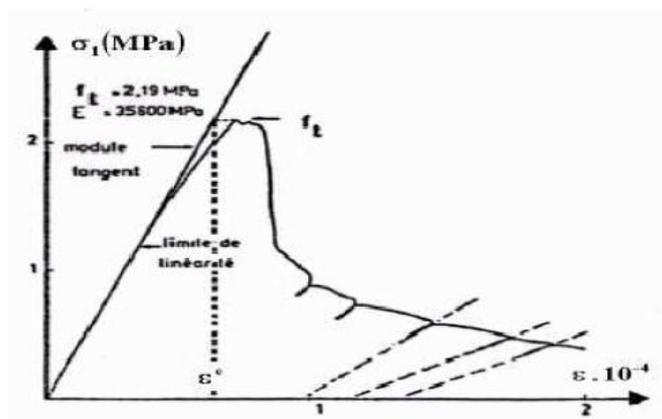


figure IV.4 : Comportement du béton en traction simple

L'essai de traction cyclique présenté à la figure IV.5, permet de confirmer le rôle prépondérant du développement de la micro-fissuration qui provoque une dégradation des caractéristiques élastiques du matériau, et que ces boucles d'hystérésis sont très faibles. Ceci paraît logique si l'on admet qu'elles sont principalement dues à des phénomènes de frottement entre lèvres de micro-fissures.

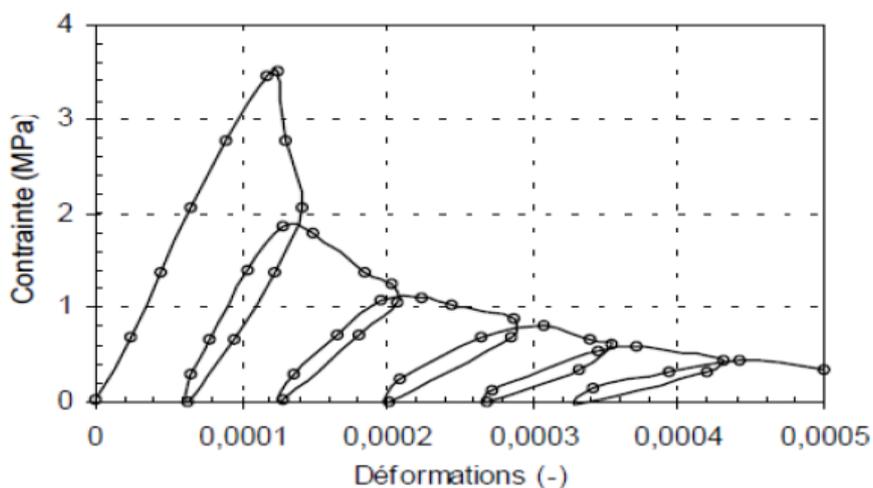


Figure IV.5 : Comportement cyclique du béton en traction simple

#### IV-2 -1-3. Chargement cyclique de traction-compression :

Les essais cycliques de traction-compression (voir par exemple l'essai P.I.E.D -

**P**our **I**dentifier l'**E**ndommagement **D**iffus, (Mazars, et al., 1990), (Ramtani, 1990)) permettent de mettre en évidence le caractère unilatéral du comportement du béton.

Il consiste en une restauration de la raideur lors du passage d'un chargement en traction, où cette raideur est initialement endommagée du fait de la fissuration, à un chargement en compression (figure IV.6). Le béton retrouve sa raideur initiale grâce à la refermeture des fissures. Il s'explique par l'ouverture de microfissures perpendiculaires au chargement en traction (figure IV-7(a)) qui se referment et se retrouvent comprimées, laissant apparaître ensuite, si le chargement s'intensifie, d'autres fissures parallèles cette fois au chargement de compression (figure IV.7(b)). Cette refermeture de microfissures permet de restituer partiellement la raideur initiale du béton en compression.

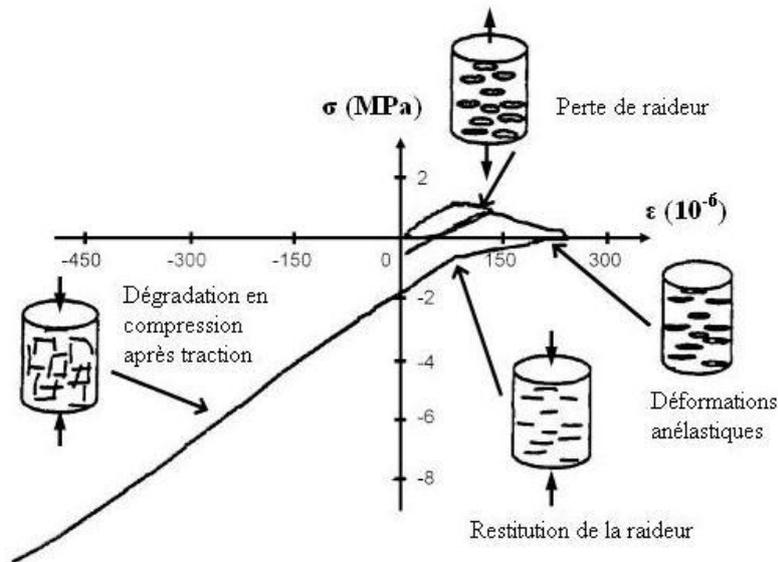


Figure IV.6 : Essai P.I.E.D : Comportement du béton sous chargement cyclique de traction compression.

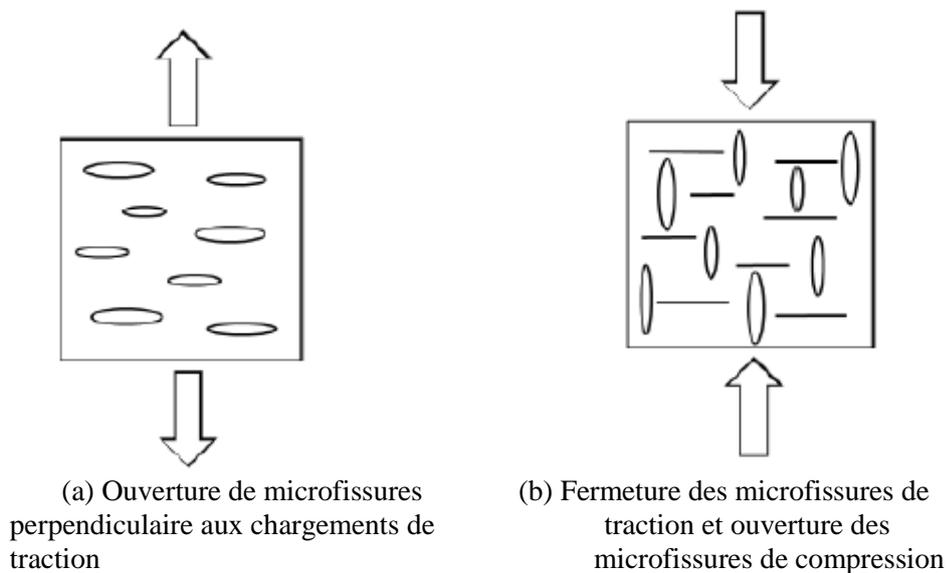


Figure IV.7: Scénario de microfissuration lors d'un chargement alterné traction suivie de compression

### IV 3 Quelques modèles d'endommagement :

#### IV 3-1 Modèles isotropes :

##### IV 3-1-1 Modèle de Mazars :

Le modèle de MAZARS (1984) est un modèle simple, réputé robuste, basé sur la mécanique de l'endommagement, qui permet de décrire la diminution de la rigidité du matériau sous l'effet de la création de micro-fissures dans le béton. Il s'appuie sur une seule variable interne scalaire  $D$ , décrivant l'endommagement de façon isotrope, mais distinguant malgré tout l'endommagement de traction et l'endommagement de compression.

Le comportement est essentiellement élastique endommageable sans déformation plastique.

L'évolution de l'endommagement est pilotée par la déformation équivalente  $\varepsilon$  qui traduit l'état d'extension local provoqué par la sollicitation, elle s'écrit comme suit :

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (\text{IV. 5})$$

Où :  $\varepsilon_i$  : la déformation principale dans la direction  $i$ .  
et :

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i \quad \text{si } \varepsilon_i \geq 0$$

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0 \quad \text{si } \varepsilon_i < 0$$

La surface seuil d'endommagement s'écrit :

$$(\varepsilon, K) = \tilde{\varepsilon} - (D) = 0 \quad (\text{IV. 6})$$

Où  $K(0) = \varepsilon_{D0}$  correspond au seuil d'endommagement du matériau vierge

Pour le comportement dissymétrique du béton, Mazars propose deux modes d'endommagement  $D_t$  de traction et  $D_c$  de compression. La combinaison linéaire de ces deux endommagements donne l'endommagement global isotrope :

$$D = \alpha_t^\beta D_t + (1 - \alpha_t^\beta) D_c \quad (\text{IV. 7})$$

$\alpha_t$  traduit la part respective de chacun des endommagements de traction et de compression ( $\alpha_t$  valant 0 dans le cas d'une compression pure et 1 dans le cas d'une traction pure)

$\beta$  est un paramètre pour ajuster le comportement du modèle en cisaillement (habituellement pris égal à 1.06 (La Borderie)).

L'évolution de  $D_t$  et  $D_c$  est de la forme :

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_t)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp [B_t(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D0})]} \quad (\text{IV. 8})$$

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{D0}(1-A_c)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp [B_c(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{D0})]} \quad (\text{IV. 9})$$

L'évolution de deux paramètres  $D_t$  et  $D_c$  est montrée dans la figure IV.8

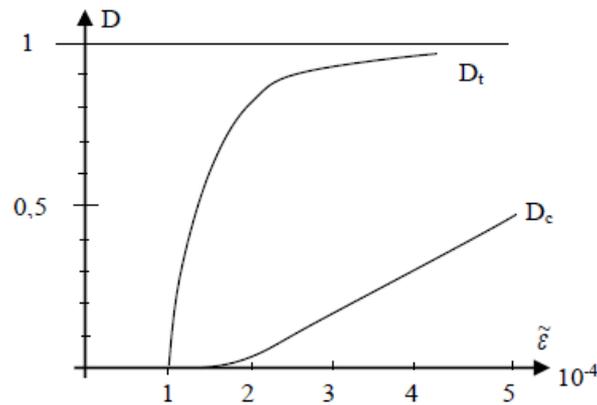


Figure IV.8 : Evolution des variables d'endommagement en traction et en compression (Mazars, 1984)

Les coefficients  $A_t$ ,  $A_c$ ,  $B_t$ ,  $B_c$  sont identifiés à partir des essais en compression et en traction sur des éprouvettes cylindriques (Mazars, 1984),  $\varepsilon_{D0}$  est le seuil d'endommagement initial qui est identifié à l'aide de la contrainte limite en traction et du module d'élasticité ( $\varepsilon_{D0} = ft / E$ ). Il est habituellement pris égal à  $1.10^{-4}$

#### IV 3-1-2 Modèle La Borderie ( Modèle unilatéral) :

Le modèle unilatéral (La Borderie, 1991) est un modèle isotrope à deux variables scalaires (l'une en traction  $D_1$  et l'autre en compression  $D_2$ ), capable de décrire l'évolution des caractéristiques mécaniques du matériau, les déformations irréversibles (déformations permanentes) et l'effet unilatéral lorsque le signe des contraintes change.

Considérant la partition du tenseur des déformations en une partie élastique et une partie anélastique, ce dernier est calculé comme suit :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{an} \quad (IV. 10)$$

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu}{E_0}(\sigma - (tr\sigma)I) \quad (IV. 11)$$

$$\varepsilon^{an} = \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} \frac{\partial f(\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} I \quad (IV. 12)$$

$E_0$  est le module de Young initial et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

$\sigma^+$  indique la partie positive d'un tenseur exprimé dans sa base propre.

$\sigma^-$  indique la partie négative d'un tenseur exprimé dans sa base propre.

$D_1, D_2$  sont respectivement les variables d'endommagement de traction et de compression (évaluant entre 0 (matériau sain) à 1 (matériau rompu). Elles sont liées à l'énergie élastique locale).

$\beta_1$  et  $\beta_2$  sont des paramètres du matériau, liés aux déformations anélastiques, pour un béton classique  $\beta_1 = 1\text{MPa}$ ,  $\beta_2 = -40\text{MPa}$  ( La Borderie, 2003).

$f(\sigma)$ : fonction de refermeture des fissures et  $\sigma_f$  la contrainte de refermeture de fissures, pour un béton classique  $\sigma_f = 3\text{MPa}$  (La Borderie, 2003).

$$t(\sigma) \in [0, +\infty[ \rightarrow \partial f(\sigma) / \partial \sigma = 1 \quad (IV. 13)$$

$$t(\sigma) \in [-\sigma_f, 0[ \rightarrow \partial f(\sigma) / \partial \sigma = (1 + tr(\sigma) / \sigma_f) \quad (IV. 14)$$

$$t(\sigma) \in ]-\infty, -\sigma_f[ \rightarrow f(\sigma) = 0.1 \quad (IV. 15)$$

#### IV 3-2 Modèles anisotropes :

D'un point de vue microscopique, les fissures et les vides se développent dans des directions dépendantes du chargement imposé dans le béton. Généralement, une direction privilégiée est celle perpendiculaire à la direction de la plus forte contrainte de traction. Ces directions privilégiées conduisent à une anisotropie macroscopique du matériau qui est fonction de l'histoire du matériau. Elle est induite par l'endommagement. La figure IV.9 montre les orientations privilégiées des fissures sur un essai de traction-compression du béton. En traction, les fissures se forment perpendiculairement à la direction de chargement, en compression, leurs directions deviennent parallèles.

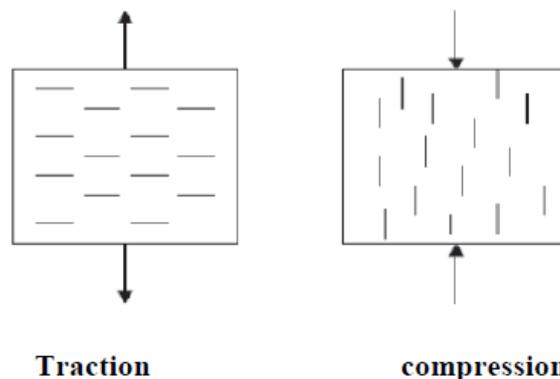


Figure IV.9 : Mise en évidence de l'anisotropie du matériau (essai de traction et de compression)

#### IV 3-2.1 Modèle de Dragon et Halm (1998) :

Dragon et Halm proposent une modélisation anisotrope de l'endommagement dans laquelle l'endommagement est le seul phénomène dissipatif considéré ; il consiste en la création et la propagation de méso-surfaces de décohésion au sein d'un volume représentatif.

Le modèle utilise une variable interne tensorielle d'ordre 2 d'endommagement ( $d$ ) décrivant l'orientation et l'étendue des méso-fissures.

$$d = \sum_i d^i S n^i \otimes n^i \quad (\text{IV. 16})$$

Où  $n_i$  : représente la normale unitaire au système ( $i$ ) de méso-fissures parallèles.

$d^i(S)$  : est une fonction scalaire adimensionnelle traduisant la densité de méso-fissures du système ( $i$ ).

#### IV 3-2.2 Modèle de Ramtani (1990)

Dans ce modèle, Ramtani utilise deux tenseurs de deuxième ordre pour décrire l'endommagement en traction et en compression et avec un scalaire pour l'endommagement volumique. Les déformations sont reliées par :

$$\varepsilon_e = \varepsilon - \varepsilon_{an} \quad (\text{IV. 17})$$

$$\varepsilon_{an} = \frac{1}{2} \{ \beta d (1 - d)^{-1} \cdot d + \beta^* d^* (1 - d^*)^{-1} \cdot d^* + \gamma \} \quad (\text{IV. 18})$$

avec :

$d$  : Le tenseur d'endommagement relatif au mode d'ouverture de fissure.

$d^*$  : Le tenseur d'endommagement relatif au mode de refermeture de fissure.

$\gamma$  : Le tenseur des microcavités.

$\beta$  et  $\beta^*$  sont des paramètres du matériau, liés aux déformations anélastiques, relatifs au mode d'ouverture et de refermeture de fissure.

#### IV 4 : Endommagement structurel (Notion d'indice de dommage, relation endommagement local-global)

Les indicateurs de dommage ont pour objet de quantifier l'état de dégradation d'une section, d'un élément ou d'une structure en béton armé, relativement à sa résistance ultime. Avec la prise en compte du dommage dans le modèle de comportement du matériau, la mécanique de l'endommagement constitue une approche locale, bien adaptée au calcul par éléments finis. L'approche locale permet d'obtenir des cartes d'endommagement des structures, élément très utile dans le cas d'une réhabilitation. L'approche globale comme l'approche locale assure le contrôle d'une structure sur une échelle allant de 0 (structure saine) à 100 % (ruine). Que le critère retenu soit la ductilité, la rigidité, l'énergie ou le nombre de cycles, les indicateurs de dommage évaluent tous un endommagement global, à l'échelle d'une structure. L'évaluation de ce type d'indicateur est généralement basé sur l'analyse de la réponse des structures aux sollicitations monotones et/ou cycliques, qui se présente sous forme de diagrammes moment-courbure ou force-déplacement. C'est donc un outil simple et efficace pour le décideur contraint à choisir entre réhabiliter ou détruire un ouvrage, à condition d'avoir défini au préalable un dommage maximum admissible, frontière entre réparation et remplacement voire destruction.

Nous focaliserons notre cours sur les dommages causés aux structures suites aux agressions sismiques que subissent les structures en génie civil. Afin de prédire les zones de dommage d'une structure pour un éventuel renforcement ou réhabilitation, il paraît important d'évaluer un indice de dommage pour déterminer le degré d'endommagement de ladite structure vis-à-vis d'un séisme de forte intensité.

## IV.5 Notion d'indice de dommage

La question du renforcement sismique des structures est une question fondamentale à laquelle les ingénieurs sont de plus en plus confrontés, d'une part, parce que certains ouvrages comme les anciens ponts ont été conçus avant l'apparition de codes parasismiques acceptables au regard de la connaissance actuelle en génie parasismique, et d'autre part, parce que les ouvrages vieillissent et se dégradent naturellement dans le temps. Certains travaux, reliant le risque sismique encouru par une installation et les conséquences des dommages potentiels qu'elle subirait, permettent de prioriser les actions de renforcement. Ces travaux se basent sur des études de risques appliqués à la prise de décision, i.e. les choix sont déterminés à partir de l'évaluation de la probabilité d'un résultat relié aux dommages.

Cette probabilité de dommage est l'une des clés du pouvoir décisionnel et requiert la définition d'indicateurs de dommages. De nombreux indicateurs de dommages ont été proposés. Pour des structures en béton, les indicateurs capables de traduire le degré d'endommagement d'une structure peuvent être classés en deux catégories : les indicateurs locaux s'intéressant aux dommages d'éléments isolés dans une structure et les indicateurs globaux représentant l'état général de la structure.

### IV.5 1 Indices de dommage (indicateurs) locaux :

Les dommages subis par une structure au cours d'un séisme peuvent être imputables à des déformations excessives, plus généralement au dépassement d'un seuil ou à des déformations progressives sous des sollicitations alternées, plus généralement à l'accumulation de dommages. Certains indicateurs font uniquement appel à la notion de dépassement de seuil, d'autres sont des indicateurs de dommages cumulés.

#### IV.5 1.1 Indicateurs de dommages non cumulés :

Les deux indicateurs de dommages de ce type les plus couramment utilisés sont la ductilité et le «drift» entre-étages.

La ductilité peut être une ductilité en déplacement, rotation ou même courbure. La ductilité en déplacement est généralement évaluée de la manière suivante :

$$\mu_{\delta} = \frac{\delta_m}{\delta_y} = 1 + \frac{\delta_m - \delta_y}{\delta_y} \quad (\text{IV. 19})$$

où  $\delta_m$  représente le déplacement maximal observé et  $\delta_y$  le déplacement correspondant à la limite élastique.

De même la ductilité en rotation s'exprime en remplaçant les déplacements  $\delta_m$  et  $\delta_y$  par les rotations  $\theta_m$  et  $\theta_y$  correspondantes. Le calcul de la rotation  $\theta_y$  est le seul problème dont on peut s'affranchir aisément en s'intéressant à la ductilité en courbure qui ne concerne évidemment que la section la plus endommagée :

$$\mu_{\varphi} = \frac{\varphi_m}{\varphi_y} = 1 + \frac{\varphi_m - \varphi_y}{\varphi_y} \quad (\text{IV. 20})$$

Malgré les limites de cet indicateur, inapproprié pour décrire les dommages subis par une structure sous excitation cyclique, la ductilité continue à être utilisée comme paramètre pour le dimensionnement parasismique.

À défaut de bien prédire les dommages par ces indicateurs, certains auteurs ont proposé des indicateurs du même type que la ductilité mais traduisant l'état dégradé de la structure en prenant en compte la dégradation de la raideur des éléments au cours du séisme. Banon *et al* (1981) définissent le ratio d'endommagement par flexion (« Flexural Damage Ratio ») par l'expression suivante :

$$FDR = k_0 / k_m \quad (IV. 21)$$

où  $k_0$  représente la raideur initiale d'un élément et  $k_m$  la raideur minimale atteinte au cours de la réponse.

#### IV.5 1.2 Indicateurs de dommages cumulés basés sur les déplacements

Les indicateurs de dommages cumulés se présentent généralement sous forme d'une fonction cumulative sommant les déformations plastiques ou l'énergie hystérétique absorbée au cours du chargement.

L'un des premiers indicateurs de dommages cumulés basés sur les déplacements étend le concept de ductilité au cas d'une réponse dynamique. Sa formulation rappelle celle de l'équation (IV. 13) :

$$NCR = \frac{\sum |\theta_m - \theta_y|}{\theta_y} \quad (IV. 22)$$

Où  $\theta_m$  est la rotation atteinte au cycle  $m$  avec la rotation plastique  $\theta_y$ .

Cet indicateur proposé par Banon *et al* (1981) représente la rotation cumulée normalisée (Normalised Cumulative Rotation) d'un élément de structure.

D'autres auteurs (Stephens et Yao (1987)) ont proposé un indicateur basé sur la ductilité en déplacement en sommant chaque incrément dans le domaine plastique :

$$D = \sum \left( \frac{\Delta\delta^+}{\Delta\delta_f} \right)^{1-br} \quad (IV. 23)$$

où  $\Delta\delta^+$  et  $\Delta\delta^-$  représentent les amplitudes des déplacements correspondants aux incréments dans le domaine plastique (figure IV.10),  $r = \Delta\delta^+ / \Delta\delta^-$ ,  $\Delta\delta_f$  représente le déplacement plastique conduisant à la ruine en un cycle pris égale à 10% de la hauteur l'étage,  $b$  une constante calée à 0.77.

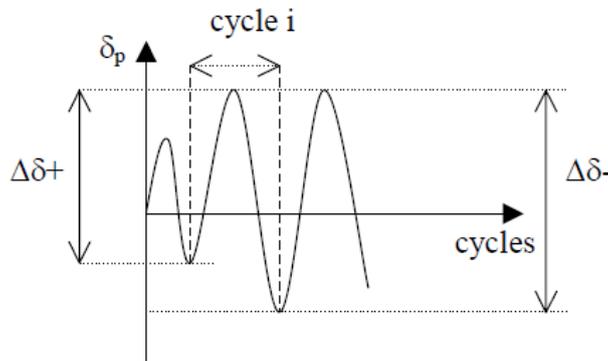


Figure IV.10 : Représentation schématique pour le calcul de l'indicateur

Certains auteurs (référence) ont proposé des indicateurs basés sur une formulation classique de la fatigue. En observant des poteaux en béton armé endommagés, ils définissent un indicateur de dommage à partir du nombre de cycle  $n_f$  conduisant à la ruine pour une ductilité donnée.

Une relation permet de relier ces deux paramètres :  $n_f \mu^s = c$  où  $c$  et  $s$  sont des constantes. L'indicateur de dommage correspondant est alors donné en combinant les effets des cycles d'amplitudes différentes par la relation suivante :

$$D = \sum_i \frac{n_i}{n_{f,i}} = \sum_i \frac{n_i \mu_i}{c} \quad (IV. 24)$$

### IV.5 1.3 Indicateurs de dommages cumulés basés sur l'énergie :

L'un des premiers indicateurs de dommages est basé sur l'énergie mécanique absorbée par un élément au cours d'un séisme. L'énergie cumulée est donnée par :

$$D_e = \sum_i \frac{E_i \delta_i}{F_y \delta_y} \quad (\text{IV. 25})$$

Seuls les cycles pour lesquels  $F_i/F_y > 0.75$  sont pris en compte dans l'évaluation de cet indicateur, la capacité résistante d'un élément étant considérée négligeable quand la force ultime a chuté en dessous de 75% de la force élastique initiale.

Une formulation plus complexe d'un indicateur de dommage cumulé basé sur l'énergie a été proposée. Ses auteurs (référence) définissent d'abord un premier demi-cycle, PHC, dont l'amplitude doit dépasser celle des demi-cycles suivants notés FHC. La figure IV.11 représente ces demi-cycles. Même principe et l'indicateur de dommage proposé prend la forme suivante :

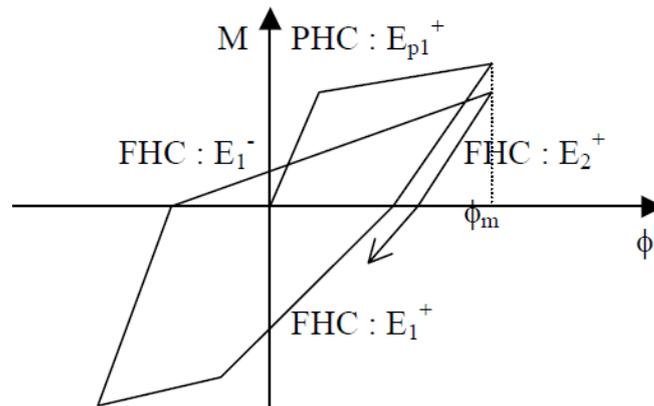


Figure IV.11: Schéma de principe pour le calcul de l'indicateur

Pour les courbures positives, le dommage cumulé est défini par :

$$D^+ = \frac{\sum E_{p,i}^+ + \sum E_i^+}{E_f^+ + \sum E_i^+} \quad (\text{IV.26})$$

où  $E_{p,i}$  est l'énergie correspondant au premier demi-cycle  $i$ ,  $E_i$  est l'énergie correspondant aux demi-cycles suivants, et  $E_f$  l'énergie absorbée au cours d'un chargement monotone conduisant à la rupture. Pour les courbures négatives, le paramètre  $D^-$  est calculé sur le même principe et l'indicateur de dommage proposé prend la forme suivante :

$$D = D^+ + D^- - D^+ D^- \quad (\text{IV.27})$$

### IV.5 1.4 Indicateurs cumulés combinés :

L'indicateur de dommage cumulé basé à la fois sur la notion de déplacement et d'énergie le plus utilisé est certainement celui de Park et Ang (1985) défini comme une combinaison linéaire de la déformation normée et de l'énergie absorbée :

$$D = \frac{\delta_m}{\delta_u} + \beta_e \frac{\int dE}{F_y \delta_u} \quad (\text{IV.28})$$

Le premier terme relève d'une approche pseudo-statique, la notion de cumul n'est contenue que dans le terme énergétique.

Où  $\delta_m$  est la déformation maximale sous séisme,  $\delta_u$  est la déformation ultime sous chargement monotone,  $dE$  l'incrément d'énergie de type hystérétique absorbée,  $F_y$  est la résistance minimale calculée dans le domaine inélastique et  $\beta_e$  est le paramètre qui pondère l'effet de cumul des dommages sur le dommage structurel total et peut être calculé, dans le cas du béton armé, par :

$$\beta_e = (-0.447 + 0.073 l/d + 0.24 \cdot n_0 + 0.314 \cdot P_t) \cdot 0.7\rho\omega \quad (\text{IV.29})$$

Où :  $l/d$  est le rapport entre la longueur de la poutre et la distance entre la fibre supérieure de la poutre et les armatures longitudinales de flexion (shear span ratio),  $n_0$  est la contrainte axiale normale,  $P_t$  est le ratio des aciers longitudinaux et  $\rho\omega$  est le ratio de confinement.

Les mêmes auteurs (...) ont proposé une échelle qualitative des dommages liée à cet indicateur :

D<0.1 Pas de dommage - fissuration légère localisée  
 0.1<D<0.25 Dommages mineurs  
 0.25<D<0.4 Dommages modérés – fissuration sévère  
 0.4<D<0.8 Dommages sévères – endommagement des aciers (plastification)  
 0.8<D Ruine

Cet indicateur peut être décliné en moment courbure sous la forme :

$$D = \frac{\varphi_m - \varphi_u}{\varphi_u - \varphi_y} + \beta_e \frac{\int dE}{M_y \varphi_u} \quad (\text{IV.30})$$

l'indicateur sous cette forme fournit la classification des dommages suivante :

D<0.11 Pas de dommages  
 0.11<D<0.4 Réparable  
 0.4<D<0.77 Non réparable – ruine imminente  
 0.77<D Ruine

#### IV.5 2 Indices de dommage (indicateurs) globaux :

L'évaluation de l'indice local permet de localiser le dommage dans un élément de l'ouvrage.

Cependant, il est indispensable de déterminer un indice global afin de prendre les décisions importantes concernant la protection civile et les capacités de résistance résiduelles d'un ouvrage endommagé, en vue d'une réhabilitation ou d'une destruction.

##### IV.5 2.1 Moyenne pondérée d'indicateurs locaux

Un indice de dommage global peut être obtenu par la combinaison des indices locaux. Les indicateurs globaux sont généralement dérivés des indicateurs locaux en les pondérant et ou les sommant. Une approche classique consiste à prendre la moyenne d'indicateurs locaux en les pondérant par l'énergie absorbée. L'indicateur de dommage correspondant pour un étage s'écrit donc :

$$D_{\text{étage}} = \frac{\sum D_i E_i}{\sum E_i} \quad (\text{IV.31})$$

où  $D_i$  et  $E_i$  représentent respectivement l'indicateur de dommage local et l'énergie absorbée pour une zone  $i$ . L'endommagement d'un bâtiment peut s'évaluer sur le même principe.

L'étage le plus endommagé sera évidemment affecté du plus grand coefficient pondérateur. Dans la plupart des cas, l'endommagement global d'un bâtiment est bien conditionné par l'étage le plus endommagé de sorte que la formulation précédente traduit convenablement cet endommagement général

#### IV.5 2.2 Indicateurs basés sur les propriétés modales :

L'endommagement d'une structure au cours d'un séisme modifie évidemment ses propriétés modales. Il apparaît alors naturel de s'intéresser à la dégradation de ses propriétés notamment la valeur des fréquences propres pour mesurer le dommage. Si considérer l'évolution des fréquences propres permet de remonter à l'état global d'endommagement d'une structure, la localisation de ces dommages ne peut être cernée qu'en s'intéressant aux déformées modales.

Une structure endommagée voit d'une part sa fréquence propre fondamentale diminuer et d'autre part son amortissement augmenter. La sensibilité de l'amortissement à bien d'autres paramètres que l'endommagement a naturellement orienté les indicateurs vers la dégradation de la fréquence. Un indicateur pouvant s'exprimer soit à partir de la variation de la fréquence fondamentale de la structure soit à partir de son déplacement en tête est donné par:

$$D_{global} = \frac{\delta_m - \delta_u}{\delta_f - \delta_y} = \frac{14.2\delta_y(\sum \frac{f_{ini}}{f_{fin}} - 1)}{\delta_f - \delta_y} \quad (IV.32)$$

où  $f_{ini}$  et  $f_{fin}$  sont les fréquences fondamentales de la structure avant et après endommagement.

Il reste qu'au cours d'un séisme, la fréquence fondamentale ne varie pas de manière monotone. La mesure de  $f_{fin}$  si elle est pratiquée in-situ à partir d'une excitation bas niveau sous estime généralement la chute de fréquence maximale observée au cours du mouvement sismique. L'évolution de la fréquence fondamentale suit plutôt la courbe représentée sur la figure IV.12 ci-dessous :

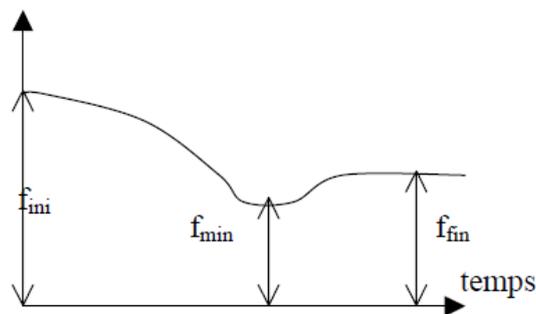


Figure IV.12: Représentation de l'évolution de la fréquence propre d'une structure au cours du temps

### **Références bibliographiques :**

- Milan Jirasek & Zdenek P. Bazant « Inelastic Analysis of Structures » Wiley. 2002.
- Patrick de Buhan « Élasticité et calcul à la rupture » Presses des ponts. 2007
- Jean Lemaître & Jean-Louis Chaboche « Mécanique des matériaux solides », 3ème édition Dunod. 2009.
- Hervé Oudin « Introduction à la plasticité»Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, France 2009, pp.49. cel-00483603
- Mazars, J., Berthaud, Y., Ramtani, S. (1990). “The unilateral behaviour of damage concrete”. Engin. Fracture Mechanics, Vol. 35, No 4/5, pp. 629 – 635
- Mazars, J. (1984), “Application de la mécanique de l’endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure”, Thèse de doctorat d’état, Université Paris 6.
- La Borderie C., Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable : modélisation et application à l’analyse de structures en béton, Thèse de doctorat, Université Paris 6, Ecole Normale Supérieure de Cachan, mai, 1991.
- Dragon A., Halm D., An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials , *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol. 17, 1998, p. 439–460.
- S. Ramtani. "Contribution à la modélisation de comportement multiaxial du béton endommagé avec description de l’effet unilatéral. Thèse de doctorat, université Paris 6,1990
- Hooshang Banon , John M.Biggs and H.Max Irvine. (1981).Seismic Damage in Reinforced Concrete Frames. Journal of Structural Division,ASCE, 107(9).pp 1713-1729.