الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة 8 ماي 1945 – قالمة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم العلوم التجارية

مطبوعة بيداغوجية في مقياس:

الإحصـــاء 1

(الإحصاء الوصفي)

موجهة لطلبة السنة أولى، علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير

إعداد:

د/ العابد محمد

السنة الجامعية: 2022/2021

بسم الله الرحــمان الرحيــم

{لَّقَدْ أَحْصَاهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا}

(الآية **94**– سورة مريم)

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات

العنوان	الصفحة
فهرس المحتويات	III–I
المقدمة	أ–ب
الفصل الأول: مفاهيم عامة في الإحصاء الوصفي	**7–1**
1– مفهوم وأقسام علم الإحصاء	2
2– مفهوم الإحصاء الوصفي.	2
3– تعريف المصطلحات الإحصائية الأساسية.	3–2
4– تصنيف الصفات الإحصائية.	4–3
تمـــارين محلولة	**7–5**
الفصل الثاني: عرض البيانات الإحصائية	**34–8**
I– العرض الجدولي:	19–9
I–1/ العرض الجدولي في حالة صفة واحدة (الجداول البسيطة)	
I–2/ العرض الجدولي في حالة صفتين (الجداول المركبة)	
I–3/ حساب مختلف التكرارات	
I–4– أصناف الجداول التكرارية	
II– العرض البياني:	28–19
II –1– العرض البياني في حالة صفة كيفية (بيانات نوعية)	
II –2– العرض البياني في حالة صفة كمية (بيانات كمية)	
تمـــارين محلولة	**34–29**
الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية	**64–35**
1– الوسط الحسابي $\bar{X}$	39–36
2– الوسيط Me	50–39
3– المنوال Mo	53–50
4– الوسط الهندسي G	53
5– الوسط التوافقي H	54
6– الوسط التربيعي MQ	54
7– علاقات رياضية تربط بين مقاييس النزعة المركزية:	55

تمـــارين محلولة	64-56
الفصل الرابع: مقاييس التشتت.	86-65
I- مقاييس التشتت المطلق: 1- المدى العام. 2- الانحراف المتوسط $e_{\bar{x}}$. 3- الانحراف الوسيط e_{Me}. 4- الانحراف الربيعي e_Q. 5- الانحراف المعياري للعينة S_x والتباين V_x. 6- الانحراف المعياري للمجتمع σ_x. II- مقاييس التشتت النسبي.	68-66 70-68
تمـــارين محلولة	86-71
الفصل الخامس: العزوم ومقاييس الشكل	102-87
I- العـــزوم: I-1- العـــزوم اللامركزية I-2- العـــزوم المركزية I-3- العلاقة بين العـــزوم المركزية والعزوم اللامركزية II- الالتواء: II-1- معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة): II-2- معامل بيرسون للالتواء II-3- معامل يول للالتواء III- التفرطح	89-88 91-90 91
تمـــارين محلولة	102-92
امتحانات مقترحة	109-103
الخاتمة	111-110
المراجع	113-112

المقدمـــة

المقدمة

بعد بسم الله الرحمان الرحيم، والصلاة والسلام على سيدنا محمد خاتم الأنبياء والمرسلين، وعلى آلِه وصحبه، ومن تبع هداه إلى يوم الدين، أما بعد:

تأتي هذه المطبوعة ضمن مقياس الاحصاء الوصفي، وهي ثمرة تدريس هذا المقياس للعديد من السنوات في كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير بجامعة 8 ماي 1945 قالمة، ومقياس الاحصاء الوصفي يتم دراسته ضمن أغلب التخصصات في الجامعة، وهذا للارتباط الوثيق وحاجة العلوم الأخرى إلى علم الاحصاء، لكن تبقى هذه المطبوعة موجهة بالأساس إلى طلبة السنة الألى (جذع مشترك) العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير.

وفي إعداد هذه المطبوعة تم مراعاة الكثير من النقاط، وخاصة الحرص أن يكون محتوى هذه المطبوعة قريب من مستوى الطلبة وما تم تدريسه، وعدم الدخول في التشعبات والنقاط الغامضة، حتى لا يتم التشويش عن قارئ هذه المطبوعة من الطلبة، وقد تضمنت هذه المطبوعة الكثير من الأمثلة والتمارين المحلولة، وهذا لأن طبيعة هذا المقياس تقتضي ذلك؛ حتى يتم فهمه بسهولة أكثر، كما تم إدراج في آخر المطبوعة بعض الامتحانات التي اجتازها الطلبة، والطالب إذا قرأ وفهم المطبوعة جيدا، فلا يجد صعوبة مطلقا في حل هذه الامتحانات، وقد تم اعداد المطبوعة وفق البرنامج الوزاري المقرر، حيث تضمنت المحاور الآتية:

- ✓ الفصل الأول: مفاهيم عامة في الإحصاء الوصفي؛
- ✓ الفصل الثاني: عرض البيانات الإحصائية؛
- ✓ الفصل الثالث: مقاييس النزعة المركزية؛
- ✓ الفصل الرابع: مقاييس التشتت؛
- ✓ الفصل الخامس: العزوم ومقاييس الشكل.

وفي الأخير تمنياتي بالنجاح والتوفيق لجميع طلبتنا الأعزاء.

د/العابد محمد

قالمة في: 2021/11/16م – الموافق لـ 10 ربيع الثاني 1443 هـ

الفصل الأول:

مفاهيم عامة في الإحصاء الوصفي

1- مفهوم وأقسام علم الإحصاء

2- مفهوم الإحصاء الوصفي

3- تعريف المصطلحات الإحصائية الأساسية

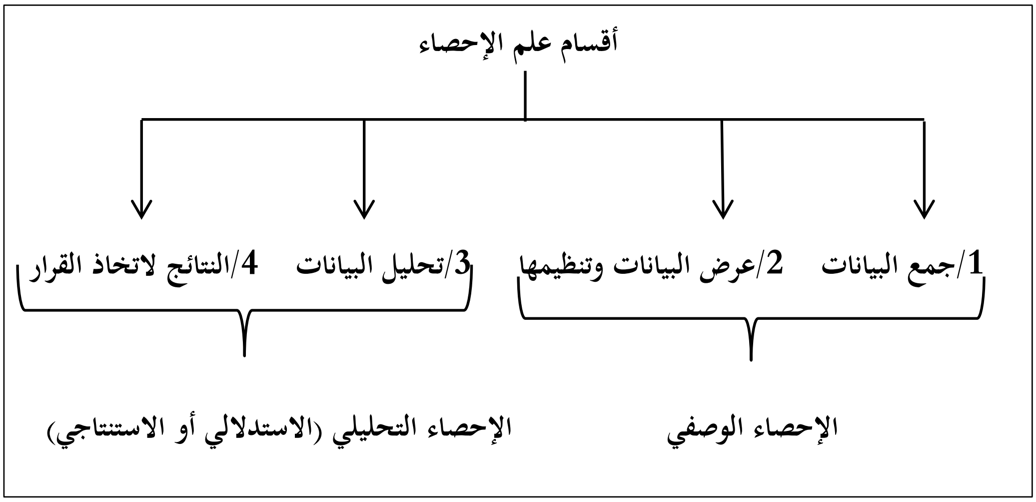
4- تصنيف الصفات الإحصائية.

✓ تمـــارين محلــولـــة.

من خلال هذا الفصل سنحاول توضيح وإعطاء نظرة عامة عن مختلف المفاهيم والمصطلحات الأساسية والأولية للإحصاء، وخاصة الاحصاء الوصفي، مثل: المجتمع الإحصائي، العينة، الصفة، تصنيف الصفات الإحصائية...الخ.

1- مفهوم وأقسام علم الإحصاء: هو مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تبحث في جمع البيانات، عرضها، تحليلها واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير واتخاذ القرار، وعلى ضوء هذا التعريف يمكن تصنيف علم الإحصاء إلى قسمين، كالآتي:

الشكل (1): أقسام علم الإحصاء



2- مفهوم الإحصاء الوصفي: هو طرق تنظيم المعلومات، تلخيصها وعرضها، والغرض من التنظيم، التلخيص والعرض هو المساعدة على فهم المعلومات، والطرق الوصفية تحتوي على توزيعات تكرارية (تنظيم)، وطرق حساب مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت، ومختلف القياسات الأخرى (تلخيص)، والرسوم البيانية (عرض).

3- تعريف المصطلحات الإحصائية الأساسية.

✓ **المجتمع الإحصائي**: هو مجموعة المشاهدات والقياسات الخاصة بمجموعة من الوحدات الإحصائية، والتي تخص ظاهرة من الظواهر القابلة للقياس، أو هو تلك المفردات تحت الدراسة أو البحث، ويهدف تعريف المجتمع الإحصائي إلى تعيين الحدود الصريحة لعملية جمع البيانات، ولعملية الاستقراء أو الاستنتاجات التي يمكن الحصول عليها من الدراسة.

ويمكن أن تكون عناصر المجتمع أفراد، عائلات، موظفين، طلاب، مؤسسات،...الخ، ويجب أن تكون مُعرَّفة ومحددة بحدود الزمن بحيث يستطيع الباحث معرفة إنتماء أي عنصر من عدم إنتمائه لهذا المجتمع، وهذه المفردات التي يتكون منها المجتمع تسمى الوحدات الإحصائية، ولذلك فإن المجتمع الإحصائي يتمثل حجمه بعدد الوحدات الداخلة فيه، وعادة ما يرمز لحجم المجتمع بـ (N).

- ✓ **العينة**: هي جزء من المجتمع الإحصائي، ولكن ليس أي جزء؛ بل الجزء الذي يمثل المجتمع أحسن تمثيل، ويختلف حجم العينة حسب أهمية ونوعية الدراسة، وكذا حسب الإمكانيات المادية والبشرية المتاحة للباحث للقيام بدراسته، وتدعى طرق استخراج العينة بعملية المعاينة.
- ✓ **البيانات**: بشكل عام فالبيانات هي مجموعة من الحروف، الكلمات، الأرقام، الرموز أو الصور (الخام) المتعلقة بموضوع معين، مثال على ذلك: بيانات الموظفين (المستوى التعليمي، نوع الوظيفة، العمر،...الخ) بدون ترتيب، وينتج عن هذه البيانات بعد المعالجة ما يطلق عليه مصطلح معلومات.
- ✓ **الوحدة الإحصائية**: هي الوحدة الأساسية لتكوين المجتمع الإحصائي، فإذا قلنا مجتمع البلديات المتواجدة في ولاية قالمة، فإن كل بلدية تعتبر وحدة إحصائية.
- ✓ **الصفة الإحصائية**: وهي الخاصية التي يريد الباحث أن يعرفها عن الوحدات الإحصائية في العينة أو المجتمع المدروس، فمثلا إذا كان الباحث يريد معرفة أطوال الطلبة في جامعة قالمة، فإن الصفة المدروسة هي الطول، وقد يريد الباحث معرفة أكثر من صفة اتجاه نفس المجتمع.

4- تصنيف الصفات الإحصائية: يمكن تصنيف الصفات الإحصائية حسب معيار مدى امكانية التعبير عليها رقميا؛ أي مدى إمكانية قياسها، إلى نوعين كالآتي:

4-1- الصفة الإحصائية الكمية: حيث يمكن قياسها؛ أي يمكن التعبير عليها رقميا، مثل: الوزن، الطول، عدد الأطفال في العائلة،...الخ، وتنقسم الصفة الكمية على حسب طبيعة التغير الذي تأخذه الصفة، إلى نوعين، كالآتي:

أ/ صفة ذات متغيرة متقطعة (منفصلة): حيث يمكن قياس الصفة والتعبير عليها بأعداد طبيعية فقط، ومعلوم أن الأعداد الطبيعية تكون منفصلة، أي أن بين كل عددين طبيعيين متتالين لا يوجد عدد طبيعي، مثل بين العددين 3 و4، فإنه لا يوجد عدد طبيعي آخر؛ أي أن هناك تقطع وانفصال في تغير الصفة، لذلك تسمى بصفة ذات متغيرة متقطعة، مثل عدد الأطفال في العائلة.

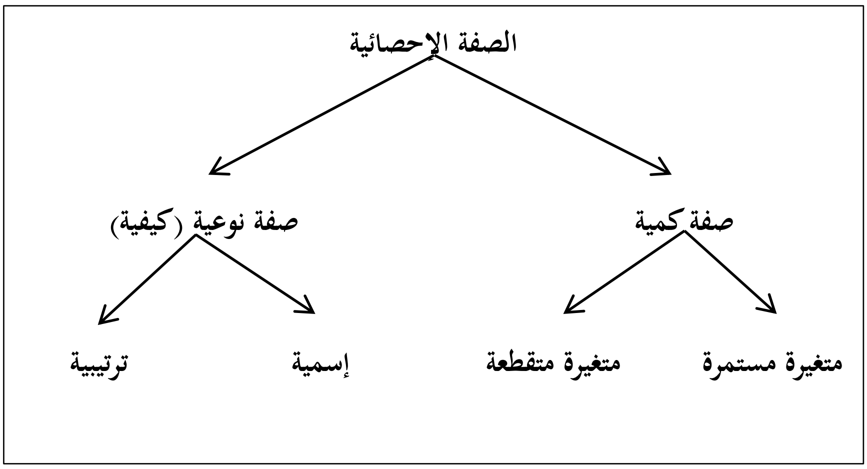
ب/ صفة ذات متغيرة مستمرة (متصلة): حيث يمكن قياس الصفة والتعبير عليها بأعداد حقيقية؛ مثل: الوزن، الطول، الحجم،...الخ، وبالتالي يكون هناك بين كل قياس معين (عدد معين) وآخر للصفة لا نهاية من القياسات الأخرى (الأعداد الأخرى)، فمثلا بين العدد 1,2 والعدد 1,3 نجد لا نهاية من الأعداد مثل: 1,21، 1,23، 1,254،...الخ؛ أي أن هناك استمرارية واتصال في تغير الصفة، لذلك تسمى بصفة ذات متغيرة مستمرة، ونشير إلى أنه في بعض التمارين قد يتم تمثيل حالات الصفة فقط في أعداد طبيعية، لكن يتم تصنيفها على أنها ذات متغيرة مستمرة، لأنها يمكن (غير مستحيل) أن تأخذ أعداد حقيقة حتى وإن لم يتم إعطائها في التمرين، أما إذا كان مستحيل أن تأخذ أعداد حقيقية، فهنا يتم تصنيفها بأنها صفة ذات متغيرة منفصلة.

4-2- الصفة الإحصائية الكيفية (النوعية): لا يمكن قياسها والتعبير عليها رقميا، مثل: اللون، المستوى التعليمي،...الخ، ويمكن تقسيمها على حسب امكانية ترتيبها من عدمه إلى نوعين، كالآتي:

أ/ الصفة الإحصائية الترتيبية: إذا وجد معيار معين لترتيب الحالات التي يمكن أن تأخذها الصفة الكيفية، سواء من الاتجاه الأقوى إلى الأضعف، أو من الأكبر إلى الأصغر، أو...الخ، فإننا نصنفها بأنها ترتيبية، مثل جودة طباعة الكتب، فإننا يمكن ترتيبها من الأعلى الجودة إلى الأقل جودة مثلا.

ب/ الصفة الإحصائية الإسمية: إذا لم نجد أي معيار معين لترتيب مختلف الحالات التي يمكن أن تأخذها الصفة الكيفية، فإننا نصنفها بأنها اسمية، مثل جنسية السياح في منطقة معينة (جزائري، مغربي، اسباني،...الخ).

الشكل (2): أنواع الصفة الإحصائية



تمارين محلولة

تمرين (1-1):

من خلال العبارات (البيانات) الآتية، حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة، طبيعة الصفة، طبيعة المتغيرة الإحصائية إن وجدت؟

1- توزيع 30 شخص حسب أوزانهم.
2- توزيع العائلات حسب عدد الأطفال.
3- تصنيف مجموعة من الطلبة حسب أعمارهم
4- تصنيف مجموعة من الكتب حسب بلد النشر
5- احصاء أطوال 40 رياضي.
6- توزيع مجموعة من المستشفيات حسب عدد العمال
7- توزيع العمال حسب المنصب الوظيفي.
8- ترتيب 20 قطعة أرض حسب المساحة.
9- ترتيب 70 صندوق حسب الحجم
10- تصنيف الكتب حسب جودة الطباعة.

الحل:

رقم العبارة (البيان)	المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	الصفة	طبيعة الصفة	طبيعة المتغيرة الاحصائية
1	30 شخص	شخص	الوزن	كمية	متصلة (مستمرة)
2	العائلات	عائلة	عدد الأطفال	كمية	منفصلة (متقطعة)
3	مجموعة من الطلبة	طالب	العمر	كمية	متصلة
4	مجموعة من الكتب	كتاب	بلد النشر	نوعية (كيفية)	//
5	40 رياضي	رياضي	الطول	كمية	متصلة
6	مجموعة من المستشفيات	مستشفى	عدد العمال	كمية	منفصلة
7	العمال	عامل	المنصب الوظيفي	نوعية	//
8	20 قطعة أرض	قطعة أرض	المساحة	كمية	متصلة
9	70 صندوق	صندوق	الحجم	كمية	متصلة
10	الكتب	كتاب	جودة الطباعة	نوعية	//

تمرين (1-2):

من خلال العبارات الآتية، حدد المجتمع الإحصائي، الوحدة الإحصائية، الصفة، طبيعة الصفة، طبيعة المتغيرة الإحصائية إن وجدت؟

1- توزيع طلبة كلية العلوم الاقتصادية حسب تخصصاتهم ومستوياتهم الدراسية؛

2- تصنيف مجموعة من العائلات حسب عدد الأطفال ومستوى الدخل.

3- توزيع 50 رياضي حسب أوزانهم وسرعاتهم.

4- احصاء مجموعة من الأطفال حسب أوزانهم وأطوالهم وأعمارهم.

5- توزيع 100 عامل حسب المنصب الوظيفي والمستوى التعليمي.

الحل:

هذا التمرين يوضح المجتمعات الاحصائية التي يريد من خلالها الباحث دراسة أكثر من صفة.

رقم العبارة (البيان)	المجتمع الإحصائي	الوحدة الإحصائية	الصفة	طبيعة الصفة	طبيعة المتغيرة الاحصائية
1	طلبة كلية العلوم الاقتصادية	طالب	التخصص	نوعية	//
			المستوى الدراسي	نوعية	//
2	مجموعة من العائلات	عائلة	عدد الأطفال	كمية	منفصلة
			مستوى الدخل	كمية	متصلة
3	50 رياضي	رياضي	الوزن	كمية	متصلة
			السرعة	كمية	متصلة
4	مجموعة من الأطفال	طفل	الوزن	كمية	متصلة
			الطول	كمية	متصلة
			العمر	كمية	متصلة
5	100 عامل	عامل	المنصب الوظيفي	نوعية	//
			المستوى التعليمي	نوعية	//

تمرين (1-3):

من خلال البيانات الآتية، حدد الصفة الإحصائية، وهل هي ذات طبيعة نوعية (اسمية أو ترتيبية)، أو كمية (متصلة أو منفصلة)؟

1- أطوال الأسماك في حوض مائي
2- رضا الزبائن عن منتَج معين
3- أرقام المبيعات لمجموعة من المؤسسات
4- المستوى التعليمي للعاملين
5- جنسية مجموعة من السياح في بلد ما
6- طبيعة المهنة لمجموعة من العاملين
7- مستوى الدخل لمجموعة من الأشخاص
8- سرعة مجموعة من الرياضين في سباق ما
9- كميات الأمطار المتساقطة في مناطق معينة
10- عدد المساجد في مجموعة من البلديات
11- مردودية الانتاج لمجموعة من المزارع

الحل:

رقم البيان	الصفة	كمية		نوعية	
		متصلة	منفصلة	ترتيبية	اسمية
1	الطول	×			
2	الرضا			×	
3	رقم المبيعات	×			
4	المستوى التعليمي			×	
5	الجنسية				×
6	المهنة				×
7	مستوى الدخل	×			
8	السرعة	×			
9	كمية الأمطار	×			
10	عدد المساجد		×		
11	مردودية الانتاج	×			

الفصل الثاني:
عرض البيانات الإحصائية

I- العرض الجدولي:

I-1/ العرض الجدولي في حالة صفة واحدة (الجداول البسيطة).

I-2/ العرض الجدولي في حالة صفتين (الجداول المركبة).

I-3/ حساب مختلف التكرارات.

I-4- أصناف الجداول التكرارية.

II- العرض البياني:

II- 1- العرض البياني في حالة صفة كيفية (بيانات نوعية).

II- 2- العرض البياني في حالة صفة كمية (بيانات كمية).

✓ تمـــارين محلـولــة.

نقصد بعرض البيانات الاحصائية، هو تمثيلها، تقديمها وتنظيمها في جداول وأشكال بيانية، لإعطاء نظرة مختصرة عنها، وتسهيل قراءتها، وهذه تعتبر كخطوة أولية في طريق استخدام وتطبيق مختلف الأساليب الاحصائية عليها، وهذا بغية تلخيصها، تحليلها، استخراج مختلف النتائج، واتخاذ القرارات المناسبة.

I- العرض الجدولي: وهو صورة تنقل البيانات الاحصائية دون الانقاص منها، من حالتها الأولى إلى حالة جديدة، تتسم بالترتيب والوضوح، والجدول الأساسي (المبدئي، الأولي)، يسمى جدول التوزيع التكراري، حيث يتضمن سطرين (أو عمودين)؛ سطر يمثل مختلف الحالات المختلفة التي تأخذها الصفة، والسطر الآخر يمثل عدد مرات تكرار كل حالة من حالات الصفة (التكرار المطلق F_i)؛ أي لكل حالة من حالات الصفة نقوم بحساب وإحصاء عدد الوحدات الاحصائية الموافقة والممثلة لها، ثم من خلال جدول التوزيع التكراري يمكن حساب أنواع أخرى من التكرارات، وهي: التكرار النسبي، التكرار النسبي المئوي، التكرار المتجمع الصاعد، التكرار المتجمع الصاعد النسبي المئوي، التكرار المتجمع النازل، التكرار المتجمع النازل النسبي المئوي، ويمكن توضيح مختلف طرق تمثيل جدول التوزيع التكراري، وكيفية حساب مختلف أنواع التكرارات، كالآتي:

I-1/ العرض الجدولي في حالة صفة واحدة (الجداول البسيطة):

أ- جدول التوزيع التكراري في حالة صفة كيفية (ترتيبية أو اسمية): يتضمن سطرين (أو عمودين)، يحتوي الأول على الصفة التي تكون في شكل كلمات تعبر عن الحالات المختلفة للصفة، والثاني يحتوي على التكرار المطلق F_i.

مثال (2-1): قام باحث معين بإجراء استطلاع لآراء عينة من الزبائن (100 شخص)، حول مدى رضاهم اتجاه سلعة معينة، فكانت النتائج كالآتي:

مستوى رضا الزبون (الصفة)	غير راضي أبدا	غير راضي	راضي نوعا ما	راضي	راضي جدا	$\sum$
F_i (التكرار المطلق)	05	15	10	55	15	100

ب- جدول التوزيع التكراري في حالة صفة كمية ذات متغيرة منفصلة: يتضمن سطرين (أو عمودين)، يحتوي الأول على مختلف حالات الصفة في شكل أعداد طبيعية، والثاني يحتوي على التكرار المطلقF_i.

مثال (2-2): قام باحث معين بإجراء دراسة اتجاه عينة مكونة من 80 أسرة، لمعرفة عدد الأطفال فيها، وكانت النتائج كالآتي:

عدد الأطفال (الصفة) x_i	00	01	02	03	04	05	06	$\sum$
F_i (التكرار المطلق)	10	05	12	18	20	13	02	80

ت- جدول التوزيع التكراري في حالة صفة كمية ذات متغيرة مستمرة: يتضمن سطرين (أو عمودين)، يحتوي الأول على الصفة التي تكون في شكل فئات (مجالات)، والثاني يحتوي على التكرار المطلق F_i.

مثال (2-3):تم قياس أوزان عينة من الأشخاص مكونة من 40 شخص (الوحدة كغ)، والنتائج ممثلة في الجدول الآتي:

الفئات	[40-55[	[55-60[	[60-65[	[65-70[	[70-75[	[75-80[
F_i (التكرار المطلق)	4	5	7	6	10	8

في حالة ما لم يكن هناك عدد معين للفئات نرغب في تشكيل الجدول على أساسه، فإنه يتم أولا تحديد طول الفئات وعددها، حتى نتمكن من تكوين الجدول، وهناك بعض القوانين الخاصة بذلك، ومن بين أشهرها هو قانون (**H.Sturges**)، وذلك وفق الخطوات الآتية:

1- لتحديد طول الفئة (ET) يجب أولا أن نحدد المدى العام، والذي يساوي أكبر قيمة في السلسلة ناقص أقل قيمة ($ET = X_{max} - X_{min}$).

2- ثم نحسب عدد الفئات وفق القانون الآتي: $1 + 3{,}332Log(N) =$ عدد الفئات

- ✓ Log هو اللوغاريتم العشري؛
- ✓ N هو عدد القيم في السلسلة؛
- ✓ إذا تم إيجاد عدد الفئات غير طبيعي، فإنه يتم تقريبه إلى العدد الطبيعي الأقرب إليه (بطريقة عادية)؛

3- حساب طول الفئة بالعلاقة: $\Delta = \frac{ET}{\text{عدد الفئات}}$ ، بعد تحديد عدد الفئات (كعدد طبيعي)، فإنه إذا وجدنا طول الفئات عدد غير طبيعي، فإنه ينبغي تقريبه إلى العدد الطبيعي الأكبر منه مباشرة، فمثلا لو وجدنا الطول 5,30، فإنه يتم تقريبه إلى العدد 6، وذلك لتفادي عدم الوقوع في حالات أن تكون بعض القيم الأخيرة للسلسلة خارج الفئات؛ أو بتعبير آخر حتى نضمن تحقق أن يكون: **عدد الفئات × طول الفئة ≥ المدى**، ويكون الشكل العام لجدول التوزيع التكراري كالآتي:

الفئات	**F_i (التكرار المطلق)**
$[L_1-L_2[$	F_1
$[L_2-L_3[$	F_2
$[L_3-L_4[$	F_3

$[L_4-L_5[$	F_4
$[L_5-L_6[$	F_5
$[L_6-L_7[$	F_6
Σ	**N**

✓ يفضل أن يكون عدد الفئات محصورا بين 5 و15.

✓ مركز الفئة c_i = (الحد الأدنى + الحد الأعلى)/2

✓ لو أردنا تشكيل جدول توزيع تكراري بطول للفئات ثابت ومعلوم، فإنه يبقى علينا إيجاد عدد الفئات فقط، وذلك كالآتي: $\frac{ET}{\Delta} =$ **عدد الفئات**، وإذا وجد عدد الفئات عدد غير طبيعي، فإنه يتم تقريبه (بطريقة غير عادية) إلى العدد الطبيعي الأكبر منه مباشرة دائما، فمثلا لو وجدنا الطول 4,20، فإنه يتم تقريبه إلى العدد 5.

مثال (2-4):لتكن لدينا أوزان 30 شخص، كالآتي:

40	35	50	40,5	55	56	61	65,2	69	71	40	55	74	77,8	79
35,6	62	52	72	38,1	33	44	48	52	56	63	68,5	60	70	50

1- كوّن جدول التوزيع التكراري باستخدام طريقة (**H.Sturges**)؟

2 - كوّن جدول التوزيع التكراري، إذا أردنا أن يكون عدد الفئات 5؟

3 - كوّن جدول التوزيع التكراري، إذا أردنا أن يكون طول جميع الفئات ثابت، ويساوي 7؟

الحل:

1- تكوين جدول التوزيع التكراري باستخدام طريقة (**H.Sturges**)؟

- ايجاد عدد الفئات: $\text{عدد الفئات} = 1 + 3{,}332Log(N)$

$$= 1 + 3{,}332Log(30) \approx 5{,}92 \approx 6$$

- ايجاد طول الفئات:

$$\Delta = \frac{ET}{\text{عدد الفئات}} = \frac{X_{max}-X_{min}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{79-33}{6} = \frac{46}{6} \approx 7{,}67 \approx 8$$

إذا حسب هذا القانون، فإن الجدول الذي سيتم تشكيله يتكون من 6 فئات، وطول كل فئة هو 8، وقبل تشكيل جدول التوزيع التكراري، حبذا أن يتم ترتيب القيم تصاعديا، حتى يسهل حساب التكرار المطلق (F_i) لكل فئة، وذلك كالآتي:

33	35	35,6	38,1	40	40	40,5	44	48	50	50	52	52	55	55
56	56	60	61	62	63	65,2	68,5	69	70	71	72	74	77,8	79

ومنه يكون جدول التوزيع التكراري كالآتي:

الفئات	(التكرار المطلق)F_i
$[33-41[$	7
$[41-49[$	2
$[49-57[$	8
$[57-65[$	4
$[65-73[$	6
$[73-81[$	3
Σ	**30**

2 – تكوين جدول التوزيع التكراري، إذا أردنا أن يكون عدد الفئات 5؟

$$\Delta = \frac{ET}{\text{عدد الفئات}} \Rightarrow \Delta = \frac{46}{5} = 9{,}2 \approx 10$$

ومنه يكون جدول التوزيع التكراري كالآتي:

الفئات	(التكرار المطلق)F_i
$[33-43[$	7
$[43-53[$	6
$[53-63[$	7
$[63-73[$	7
$[73-83[$	3
Σ	**30**

3 – تكوين جدول التوزيع التكراري، إذا أردنا أن يكون طول جميع الفئات ثابت، ويساوي 7:

$$\Delta = \frac{ET}{\text{عدد الفئات}} \Rightarrow \text{عدد الفئات} = \frac{ET}{\Delta} \Rightarrow \text{عدد الفئات} = \frac{46}{7} \approx 6{,}57 \approx 7$$

ومنه يكون جدول التوزيع التكراري كالآتي:

الفئات	F_i(التكرار المطلق)
$[33-40[$	4
$[40-47[$	4
$[47-54[$	5
$[54-61[$	5
$[61-68[$	4
$[68-75[$	6
$[75-82[$	2
Σ	**30**

2-I/ العرض الجدولي في حالة صفتين (الجداول المركبة): وهي الجداول التي تتوزع فيها البيانات حسب صفتين في نفس الوقت، وقد تكون الصفتين كميتين، أو نوعيتين، أو واحدة كمية والأخرى نوعية.

مثال (2-5): الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من طلبة جامعة 8 ماي 1945 قالمة، حسب مستوياتهم الدراسية، والكليات التي ينتموا إليها، وذلك كالآتي:

الكلية / المستوى الدراسي	الاقتصاد	العلوم الانسانية	علوم الطبيعة	علوم الدقيقة	المجموع
السنة أولى	15	12	10	8	45
السنة الثانية	7	9	5	4	25
السنة الثالثة	8	14	5	3	30
المجموع	30	35	20	15	100

3-I/ حساب مختلف التكرارات: من خلال التكرار المطلق لأي ظاهرة يمكن حساب مختلف التكرارات، والتي لها دلالات معينة.

3-1- التكرار النسبي (Fr): وذلك لتوضيح الأهمية النسبية لكل قيمة من قيم الظاهرة المدروسة، ويتم حسابه كالآتي: $Fr = \frac{F_i}{\sum F_i}$، حيث: $\sum Fr = 1$

3-2- التكرار النسبي المئوي ($Fr\%$): وذلك لتوضيح الأهمية النسبية المئوية، ويتم حسابه كالآتي:

$Fr\% = \frac{F_i}{\sum F_i} \times 100 = Fr \times 100$ ، حيث: $\sum Fr\% = 100$

3-3- التكرار المتجمع الصاعد (Fcc)، والتكرار المتجمع النازل (Fcd): تحسب التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة لمختلفة المتغيرات، ما عدا تلك الكيفية المقاسة بالمقياس الإسمي (صفة نوعية اسمية).

ويستخدم (Fcc) لمعرفة عدد العناصر التي تقل عن مستوى معين (أقل من)، أما (Fcd) فيستخدم لمعرفة عدد العناصر التي تزيد عن قيمة معينة (أكبر من)، ويتم حساب مختلف قيم (Fcc) و(Fcd) كالآتي:

$$Fcc = \begin{cases} 0 \\ F_1 \\ F_1 + F_2 \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ \sum F_i = N \end{cases} \qquad Fcd = \begin{cases} \sum F_i = N \\ \sum F_i - F_1 \\ \sum F_i - F_1 - F_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ 0 \end{cases}$$

3-4- التكرار المتجمع الصاعد النسبي ($Frcc$)، والتكرار المتجمع النازل النسبي ($Frcd$):

ويستخدم ($Frcc$) لمعرفة عدد العناصر التي تقل عن نسبة معينة (نسبة من الواحد مثل: 0,6)، أما ($Frcd$) فيستخدم لمعرفة عدد العناصر التي تزيد عن نسبة معينة (نسبة من الواحد)، ويتم حساب مختلف قيم ($Frcc$) و($Frcd$) كالآتي:

$$Frcc = \begin{cases} 0 \\ Fr_1 \\ F_{r1} + F_{r2} \\ F_{r1} + F_{r2} + F_{r3} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ 1 \end{cases} \qquad Frcd = \begin{cases} 1 \\ 1 - Fr_1 \\ 1 - F_{r1} - F_{r2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ 0 \end{cases}$$

3-5- التكرار المتجمع الصاعد النسبي المئوي ($Frcc\%$)، والتكرار المتجمع النازل النسبي المئوي ($Frcd\%$):

ويستخدم ($Frcc\%$) لمعرفة عدد العناصر التي تقل عن نسبة مئوية معينة، أما ($Frcd\%$) فيستخدم لمعرفة عدد العناصر التي تزيد عن نسبة مئوية معينة، ويتم حساب مختلف قيم ($Frcc\%$) و($Frcd\%$) كالآتي:

$$Frcc\% = \begin{cases} 0 \\ Fr_1\% \\ F_{r1}\% + F_{r2}\% \\ F_{r1}\% + F_{r2}\% + F_{r3}\% \\ \cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ 100 \end{cases} \qquad Frcd\% = \begin{cases} 100 \\ 100 - Fr_1\% \\ 100 - F_{r1}\% - F_{r2}\% \\ \cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ 0 \end{cases}$$

مثال (2-6): لتكن لدينا أطوال 90 شخص (وحدة الطول سنتيمتر) ممثلة في جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[130-140[	[140-150[	[150-160[	[160-170[	[170-180[	[180-190[
F_i (التكرار المطلق)	5	9	14	17	25	20

- أحسب مختلف التكرارات؟

الحل: يمكن تلخيص مختلف التكرارات، كما في الجدول الآتي:

الفئات	Fi	ci	Fr	$Fr\%$	Fcc	$Frcc$	$Frcc\%$	Fcd	$Frcd$	$Frcd\%$
[130-140[	5	135	0,0555	05,55	5	0,0555	05,55	90	1	100
[140-150[	9	145	0,1000	10,00	14	0,1555	15,55	85	0,9444	94,44
[150-160[	14	155	0,1555	15,55	28	0,3111	31,11	76	0,8444	84,44
[160-170[	17	165	0,1889	18,89	45	0,4999	49,99	62	0,6888	68,88
[170-180[	25	175	0,2778	27,78	70	0,7777	77,77	45	0,5	50,00
[180-190[	20	185	0,2222	22,22	90	1	100	20	0,2222	22,22
المجموع	90	//	1	100	//	//	//	//	//	//

ويمكن مثلا قراءة **السطر الثالث** الموافق للفئة الثانية [140-150[، كالآتي:

هناك 9 أشخاص أطوالهم ضمن الفئة [140-150[، وهم يمثلون ما نسبته 10% من مجموع الأشخاص، وأن عدد الأشخاص التي أطوالهم **أكبر أو يساوي** 140سم هو 85 شخص (Fcd=85) وبنسبة 94,44%، وعدد الأشخاص التي أطوالهم **أقل تماما** من 150سم هو 14 شخص (Fcc=14) وبنسبة 15,55%.

وأما **السطر الثاني** الموافق للفئة الأولى [130-140[، فيتم قراءته كالآتي:

هناك 5 أشخاص أطوالهم ضمن الفئة [130-140[، وهم يمثلون ما نسبته 05,55% من مجموع الأشخاص، وأن عدد الأشخاص التي أطوالهم أكبر أو يساوي 130سم هو 90 شخص (Fcd=90)؛ أي جميع الأشخاص (بنسبة 100%)، وعدد الأشخاص التي أطوالهم أقل تماما من 140سم هو 5 أشخاص (Fcc=5) وبنسبة 05,55%.

وأما **السطر قبل الأخير** الموافق للفئة الأخيرة [180-190[، فيتم قراءته كالآتي:

هناك 20 شخص أطوالهم ضمن الفئة [180-190[، وهم يمثلون ما نسبته 22,22% من مجموع الأشخاص، وأن عدد الأشخاص التي أطوالهم أكبر أو يساوي 180سم هو 20 شخص (Fcd=20)

ونسبتهم 22,22%، وعدد الأشخاص التي أطوالهم أقل تماما من 190سم هو 90 شخص (Fcc=90)؛ أي جميع الأشخاص ونسبتهم 100%.

ونشير إلى أنه بالنسبة للأطوال الأقل تماما من 130سم غير ممثلة في الجدول، وهذا لأن عدد الأشخاص التي أطوالهم أقل تماما من 130سم هو 0 ونسبتهم 0%، وكذلك الأطوال الأكبر أو يساوي 190سم غير ممثلة في الجدول، لأن عدد الأشخاص التي أطوالهم أكبر أو يساوي 190سم هو 0 ونسبتهم 0%.

وتوجد **طريقة أخرى** لتمثيل الجدول بحيث يتم إظهار أعداد الأشخاص (0) ونسبتهم (0%)، وهذا سواء الأقل تماما من 130سم، أو الأكبر أو يساوي 190سم، وذلك من خلال إضافة سطر قبل الفئة الأولى، وسطر بعد الفئة الأخيرة، وكذلك اضافة أسطر بين الفئات، وهذه الأسطر المضافة يوضع فيها فقط قيم مختلف التكرارات المتجمعة الصاعدة والنازلة، والطريقتين الاثنين صحيحتين، لكن كل شخص عندما يتعود على طريقة معينة تبدوا له الأسهل، ويمكن تمثيل الجدول السابق بالطريقة الثانية كالآتي:

الفئات	Fi	ci	Fr	$Fr\%$	Fcc	$Frcc$	$Frcc\%$	Fcd	$Frcd$	$Frcd\%$
					0	0	0	90	1	100
[130-140[	5	135	0,0555	05,55						
					5	0,0555	05,55	85	0,9444	94,44
[140-150[	9	145	0,1000	10,00						
					14	0,1555	15,55	76	0,8444	84,44
[150-160[	14	155	0,1555	15,55						
					28	0,3111	31,11	62	0,6888	68,88
[160-170[	17	165	0,1889	18,89						
					45	0,4999	49,99	45	0,5	50,00
[170-180[	25	175	0,2778	27,78						
					70	0,7777	77,77	20	0,2222	22,22
[180-190[	20	185	0,2222	22,22						
					90	1	100	0	0	0
المجموع	90	//	1	100	//	//	//	//	//	//

ويمكن قراءة والتعبير عن مختلف القيم ضمن الأسطر بين الفئات، كالآتي:

السطر السادس بين الفئة الثانية [140-150[والفئة الثالثة]150-160]، يتم قراءته بأن هناك 14(Fcc=14) شخص أطوالهم أقل تماما من 150سم، ونسبتهم (15,55%)، وهناك 76 (Fcd=76) شخص أطوالهم أكبر أو يساوي 150سم، ونسبتهم (84,44%).

السطر الثاني قبل الفئة الأولى [130-140[، يتم قراءته بأن هناك 0 (Fcc=0) شخص أطوالهم أقل تماما من 130سم، ونسبتهم (00%)، وهناك 90 (Fcd=90) شخص أطوالهم أكبر أو يساوي 130سم، ونسبتهم (100%).

السطر (قبل الأخير) بعد الفئة الأخيرة [180-190[، يتم قراءته بأن هناك 90 (Fcc=90) شخص أطوالهم أقل تماما من 190 سم، ونسبتهم (100%)، وهناك 0 (Fcd=0) شخص أطوالهم أكبر أو يساوي 190سم، ونسبتهم (00%).

ملاحظة: نشير إلى أنه عندما نكون بصدد قراءة قيم ضمن الأعمدة الممثلة للتكرارات المتجمعة **الصاعدة** (Fcc, $Frcc$, $Frcc\%$)، فإننا دائما نستخدم عبارة **أقل تماما*** **(عكس عبارة صاعد)** من قيمة الحد الأعلى للفئة المناسبة، أما عند قراءة القيم ضمن الأعمدة الممثلة للتكرارات المتجمعة **النازلة** (Fcd, $Frcd$, $Frcd\%$)، فإننا نستخدم عبارة **أكبر أو يساوي**** **(عكس عبارة نازل)** من قيمة الحد الأدنى للفئة المناسبة.

I-4- أصناف الجداول التكرارية:

4-1- الجداول المقفلة والمفتوحة: يمكن أن تكون الجداول التكرارية مغلقة أو مفتوحة، من طرف أو من طرفين، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

أقل من 5
10-5
15-10
20-15

مفتوح من طرفه الأدنى

10-5
15-10
20-15
أكبر من 20

مفتوح من طرفه الأعلى

أقل من 5
10-5
15-10
20-15
أكبر من 20

مفتوح من الطرفين

10-5
15-10
20-15

مقفل

* نستعمل عبارة أقل تماما وليس عبارة أقل أو يساوي لأن مجالات الفئات مغلقة من الأسفل ومفتوحة من الأعلى.
** نستعمل عبارة أكبر أو يساوي، وليس عبارة أكبر تماما، لأن مجالات الفئات مغلقة من الأسفل ومفتوحة من الأعلى.

4-2- الجداول المنتظمة وغير المنتظمة: الجدول المنتظم هو الذي تكون فيه أطوال الفئات متساوية، أما الجدول غير المنتظم فتكون فيه أطوال الفئات غير متساوية.

قد تكون الفئات غير متساوية الطول، وخاصة عند التشتت الكبير للبيانات، حيث يتم توسيع الفئات التي تحوي بيانات متطرفة أو متباعدة، ويتم تقليص حجم الفئات إذا كان هناك تركُّز كبير للتكرارات في فئات معينة، وهذا على سبيل المثال فقط، لأن تقدير ذلك يبقى للباحث وخبرته، وكذا طبيعة الدراسة، والمقصود منها، والمقاييس المطبقة عليها.

عندما تكون الفئات غير متساوية، فإنه يتم حساب التكرار الجديد المصحح (التكرار المعدل F_i^*)، وهذا فقط من أجل رسم المدرج التكراري (أو المضلع والمنحنى التكراري)، أو حساب المنوال (**كما سنرى لاحقا**)، أما عند حساب مقاييس أخرى أو رسم أنواع أخرى من الرسوم البيانية، فإنه يُعتمد على التكرار المطلق الأصلي (F_i)، ويتم حساب التكرار المصحح كالآتي:

$$F_i^* = \frac{F_i}{(\Delta)\ \text{طول الفئة}} \times (\text{طول الفئة الشائع})\ \text{الثابت}$$

ملاحظات:

- ✓ يتم اختيار الثابت على أنه طول الفئة الشائع، وهذا فقط من أجل الحفاظ على أن تكون بعض قيم التكرارات الأصلية (المقابلة للفئات ذات الطول الشائع) هي نفسها بعد تصحيحها؛
- ✓ في حالة لا يوجد طول وحيد للفئة هو الشائع، كأن يوجد طولين مثلا، هما الأكثر شيوعا؛ أي لها نفس وأكبر تكرار مطلق، فهنا نختار أي منها في القانون، فذلك يعتبر صحيح؛
- ✓ في حالة اختيار أي قيمة أخرى للثابت، فإن ذلك يعتبر صحيح، لأنه تبقى نفس علاقة التناسب بين التكرارات المصححة، فقط يتم تضخيم هذه القيم جميعها، أو تصغيرها، وبالتالي ينتج نفس الرسم للمدرج (المضلع التكراري أو المنحنى)، فقط الفرق في مستوى ارتفاع أو انخفاض المدرج (المضلع أو المنحنى)، أما فيما يخص المنوال فنحصل على نفس القيمة (كما سنرى لاحقا).

مثال (2-7): ليكن لدينا جدول توزيع تكراري غير منتظم ونقوم بتصحيح التكرار.

الفئات	التكرار المطلق الأصلي F_i	طول الفئة	التكرار المطلق المصحح F_i^* (طول الفئة الشائع= 10)
20-10	50	10	50
40-20	40	20	20
50-40	60	10	60

نشير إلى أنه يمكن أن تكون بعض قيم التكرار المصحح أعداد حقيقية وغير طبيعية (بالفاصلة)، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

الفئات	التكرار المطلق الأصلي F_i	طول الفئة	التكرار الأصلي/طول الفئة	التكرار المطلق المصحح F_i^* (طول الفئة الشائع= 10)
20-10	55	10	5,5	55
40-20	45	20	2,25	22,5
50-40	60	10	6	60

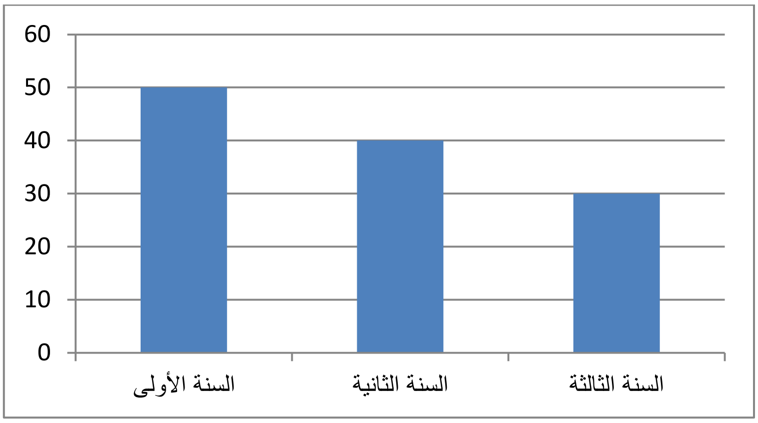
II- العرض البياني: وهي طريقة للتعبير عن البيانات الاحصائية في شكل رسومات بيانية، وفي كثير من الحالات فإن العرض البياني قد يعطي بعض الدلالات ويصف ويلخص البيانات بطريقة أوضح من العرض الجدولي، وسيتم تناول مختلف الرسومات البيانية من خلال التصنيف الآتي:

II- 1- العرض البياني في حالة صفة كيفية (بيانات نوعية): من بين الرسومات البيانية المتوافقة مع هذه الحالة هي الرسم بالأعمدة (المستطيلات)، وقد تكون بسيطة، أو مجزأة، أو متلاصقة، وكذلك الشكل الدائري، ويمكن توضح ذلك من خلال المثال الآتي:

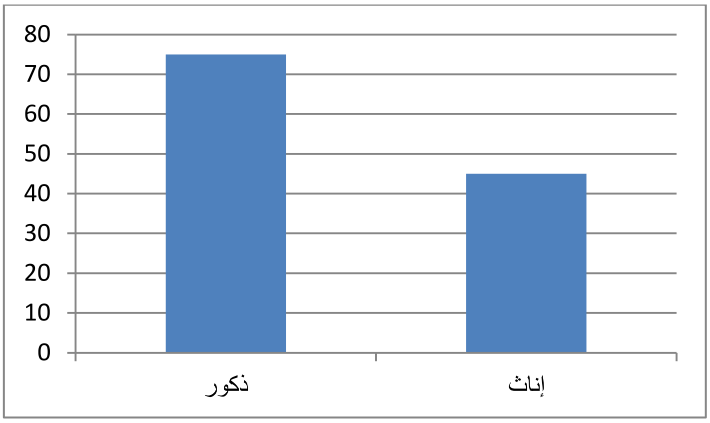
مثال (2-8): يوضح الجدول الآتي توزيع مجموعة من الطلبة حسب مستويات دراستهم وجنسهم.

المستوى الدراسي / الجنس	السنة الأولى	السنة الثانية	السنة الثالثة	المجموع
ذكور	30	25	20	75
إناث	20	15	10	45
المجموع	50	40	30	120

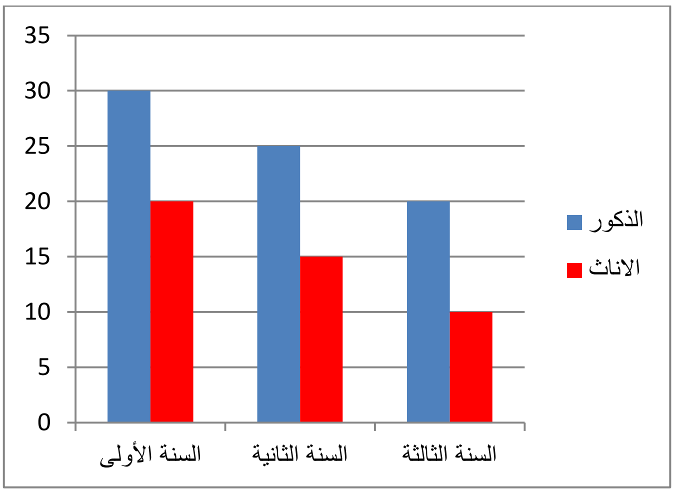
– **عرض الطلبة حسب مستوياتهم الدراسية بالأعمدة البسيطة:** حيث محور الفواصل يتضمن المستويات الدراسية، ومحور التراتيب يتضمن التكرار المطلق (F_i).

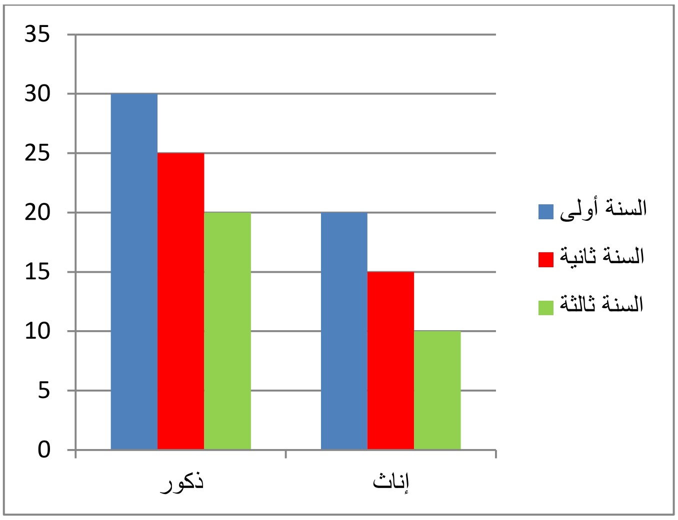


– **عرض الطلبة حسب جنسهم بالأعمدة البسيطة:** حيث محور الفواصل يتضمن جنس الطلبة، ومحور التراتيب يتضمن التكرار المطلق (F_i).

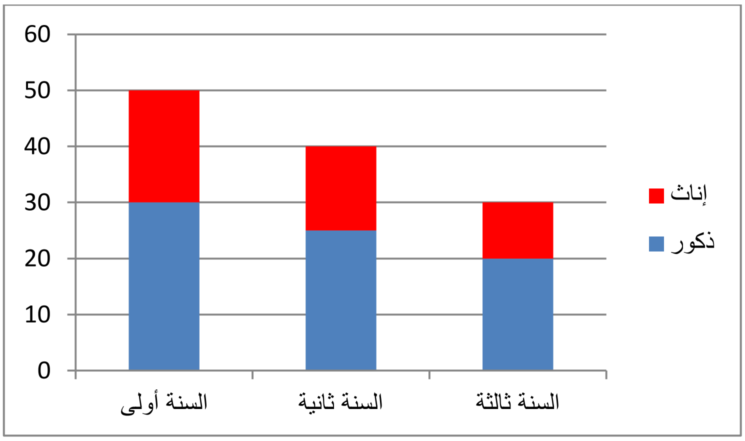


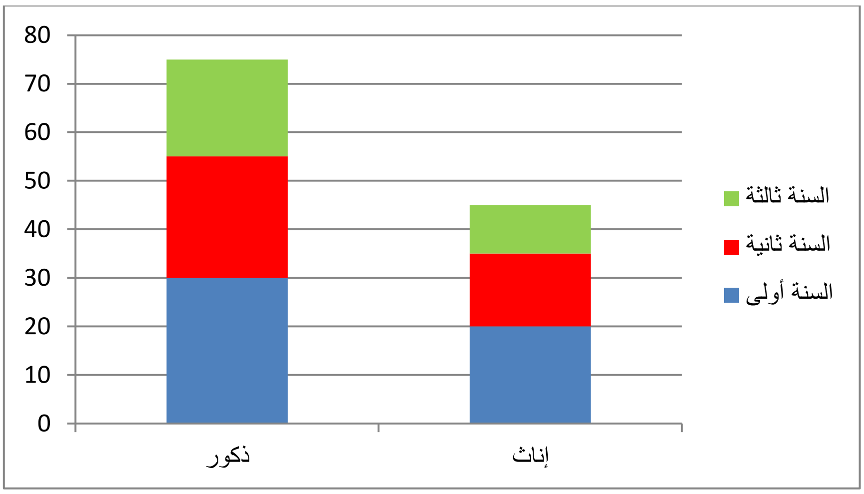
– **عرض الطلبة حسب مستوياتهم الدراسية وجنسهم، بالأعمدة المتلاصقة:**



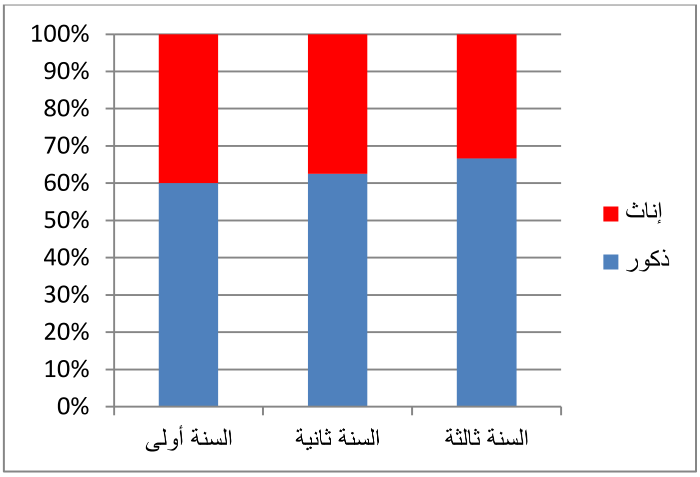


– عرض الطلبة حسب مستوياتهم الدراسية وجنسهم بالأعمدة المجزأة العادية:

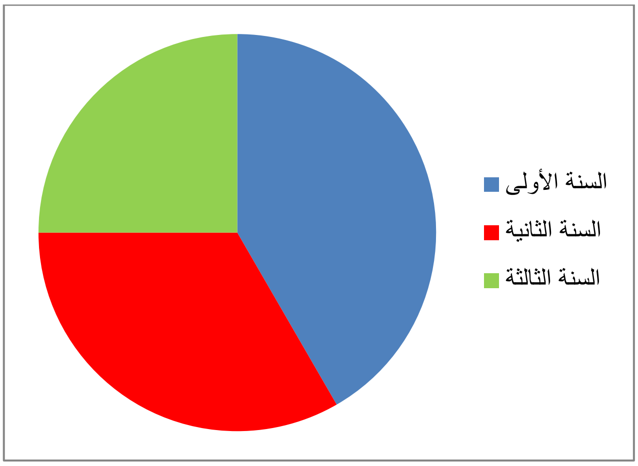




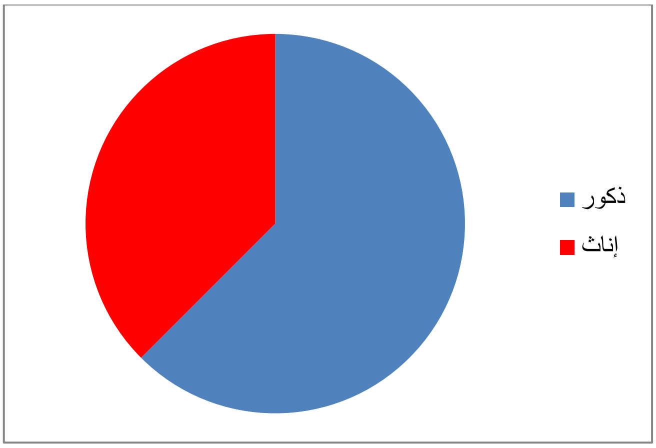
- عرض الطلبة حسب مستوياتهم الدراسية وجنسهم بالأعمدة المجزأة بالنسب المئوية:



- عرض الطلبة حسب مستوياتهم الدراسية بالشكل الدائري:



- عرض الطلبة حسب جنسهم بالشكل الدائري:



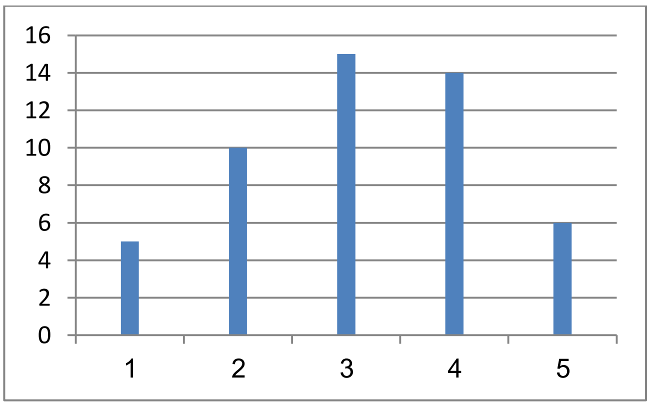
II- 2- العرض البياني في حالة صفة كمية (بيانات كمية):

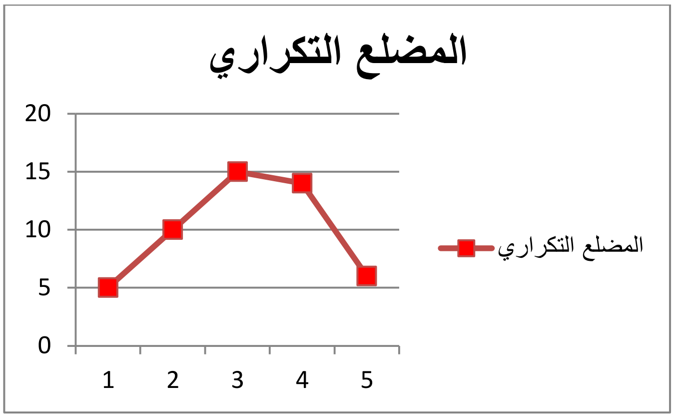
2-1- العرض البياني في حالة صفة كمية منفصلة: الرسومات البيانية في هذه الحالة، تتمثل في الأعمدة البيانية، والمضلع التكراري، والمنحنى الدرجي الصاعد (المنحنى التكاملي)، والمنحنى الدرجي النازل (المنحنى التفاضلي)، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

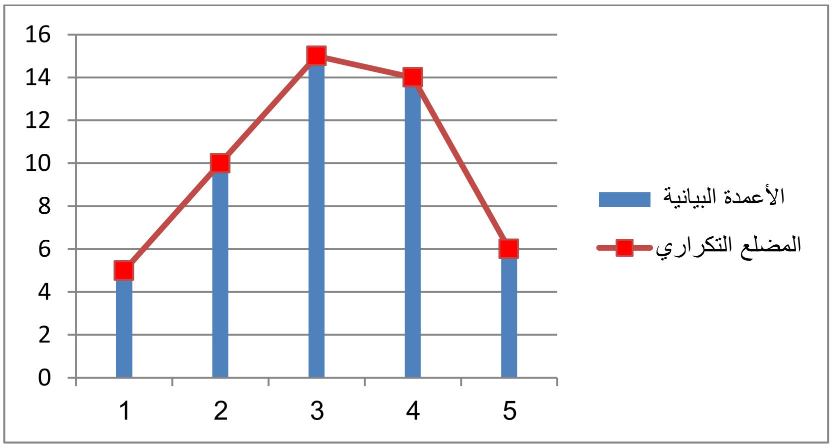
مثال (2-9): ليكن لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال كالآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	14	06

- التمثيل بالأعمدة البيانية والمضلع التكرار: حيث نضع في محور التراتيب (المحور العمودي) عدد الأسر (F_i)، وفي محور الفواصل عدد الأطفال (الصفة)، ويمكن تمثيل كل رسم في منحنى منفصل عن الآخر، أو نمثلهما في منحنى واحد.



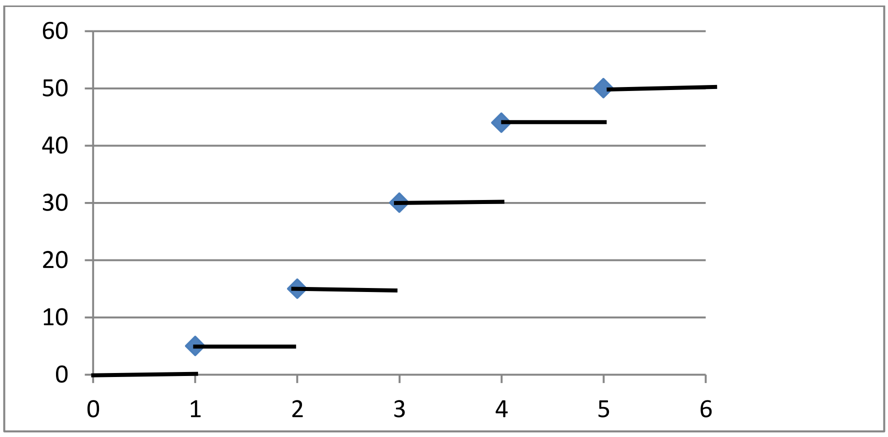




– المنحنى التكاملي: في حالة الصفة الكمية المنفصلة يسمى **المنحنى الدرجي الصاعد**، وهو يمثل قيم التكرار المتجمع الصاعد (Fcc)، حيث نضع قيم (Fcc) في محور التراتيب، وفي محور الفواصل نضع عدد الأطفال (الصفة x_i)، وقيم التكرار المتجمع الصاعد ممثلة كما في الجدول الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)		01		02		03		04		05		Σ
عدد الأسر (F_i)		05		10		15		14		06		50
Fcc	00		05		15		30		44		50	//

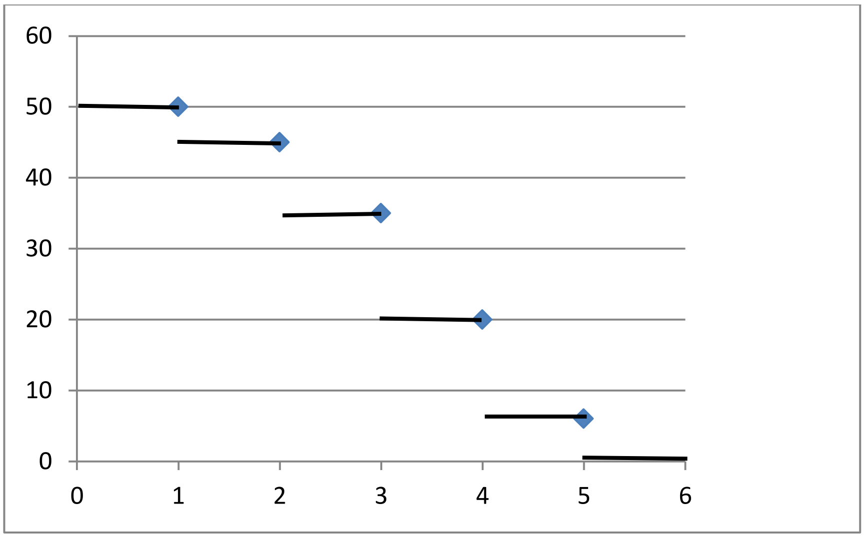
من خلال قيم Fcc، يمكن تمثيل المنحنى التكاملي كالآتي:



- المنحنى التفاضلي: في حالة الصفة الكمية المنفصلة يسمى **المنحنى الدرجي النازل**، وهو يمثل قيم التكرار المتجمع النازل (Fcd)، حيث نضع قيم (Fcd) في محور التراتيب، وفي محور الفواصل نضع عدد الأطفال (الصفة x_i)، وقيم التكرار المتجمع النازل ممثلة كما في الجدول الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)		01		02		03		04		05		Σ
عدد الأسر (F_i)		05		10		15		14		06		50
Fcd	50		45		35		20		06		00	//

من خلال قيم Fcd، يمكن تمثيل المنحى التكاملي كالآتي:



2-2- العرض البياني في حالة صفة كمية متصلة: الرسومات الممثلة لهذه الحالة تتمثل في المدرج التكراري، والمضلع التكراري، المنحنى التكاملي، والمنحنى التفاضلي، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال (2-10)*: لتكن لديان أوزان مجموعة من الأشخاص موزعة كالآتي:

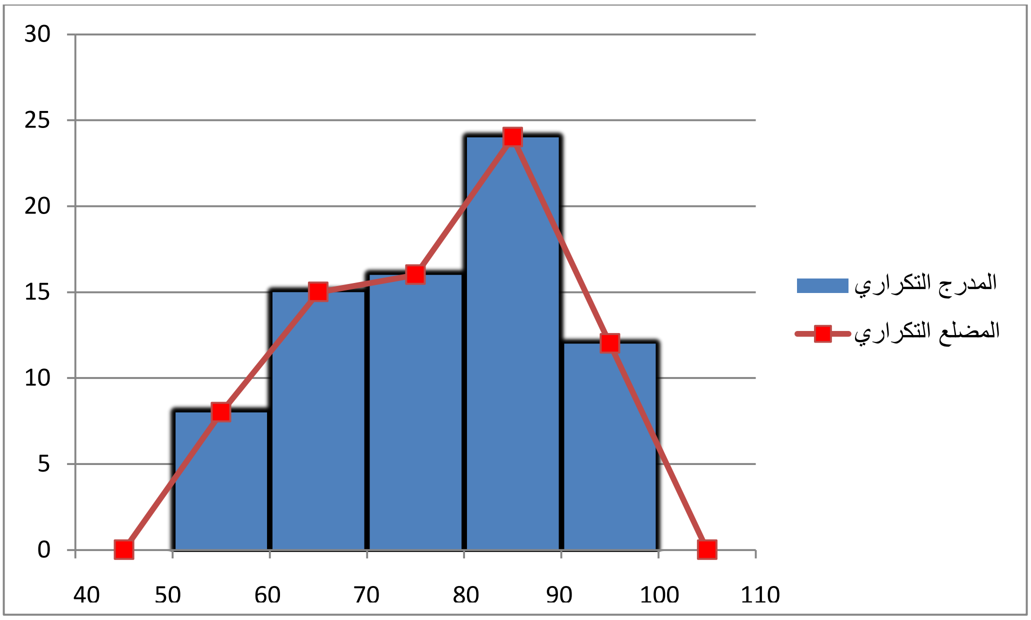
الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار F_i)	8	15	16	24	12

- المضلع والمدرج التكراري: وذلك لتمثيل مختلف قيم التكرار المطلق (عدد الأشخاص)، ويمكن تمثلين الرسمين البيانيين (المضلع والمدرج التكراري) في منحنى أو في منحنيين منفصلين، ويمكن تمييز بين حالتين:

الحالة الأولى: إذا كانت أطوال الفئات متساوية، حيث نقوم بإضافة فئة قبل الفئة الأولى وطولها مثل باقي الفئات، وتكرارها صفر، وكذلك نضيف فئة بعد الفئة الأخيرة وطولها مثل باقي الفئات، وتكرارها صفر، ثم نقوم برسم المدرج التكراري، أما المضلع التكراري فيتم الحصول عليه برسم خط منكسر يصل بين مختلف

* سيتم استخدام معطيات هذا التمرين باستمرار في الفصول القادمة في حالة المتغير الاحصائي المتصل.

النقاط الممثلة لمنتصف قمم المستطيلات (الممثلة للمدرج التكراري)، حيث نقوم بغلق الخط المنكسر مع محور الفواصل، وذلك من خلال مركز الفئة المضافة قبل الفئة الأولى، ومركز الفئة المضافة بعد الفئة الأخيرة، وتكون المساحة المحصورة بين المدرج التكراري ومحور الفواصل، مساوية للمساحة المحصورة بين المضلع التكراري ومحور الفواصل، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



كما يمكن تمثيل المضلع التكراري دون المدرج التكراري، وذلك من خلال رسم خط منكسر يصل بين النقاط التي فواصلها هي مراكز الفئات (بما فيها الفئتين المضافتين)، وتراتيبها هي قيم التكرار المطلق.

الحالة الثانية: في حالة أطوال الفئات غير متساوية، فإنه يتم رسم المدرج والمضلع التكراري مثل السابق (سواء في نفس المنحنى أو منفصلين)، لكن فقط يتم الإعتماد على التكرار المطلق المصحح، وقد تم توضيح ذلك سابقا في ص 14، 15، وهذا لأن قاعدة المقارنة غير ثابتة؛ أي يتم ايجاد عدد الوحدات الإحصائية الموزعة على وحدة قياس معينة.

ونشير أنه عند رسم المضلع التكراري في حالة الفئات غير متساوية، سواء في منحنى مستقل أو مع المدرج التكراري، فإنه ينبغي إضافة فئة قبل الفئة الأولى **ومساوية** وتكرارها صفر، وكذلك يتم إضافة فئة بعد الفئة الأخيرة **ومساوية لها** وتكرارها صفر، وهذا حتى يتم الحفاظ على أن تكون المساحة المحصورة بين المدرج التكراري ومحور الفواصل، مساوية للمساحة المحصورة بين المضلع التكراري ومحور الفواصل.

مثال (2-11): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

[90-110[	[80-90[	[70-80[	[60-70[	[55-60[	الفئات
12	24	16	15	8	التكرار F_i

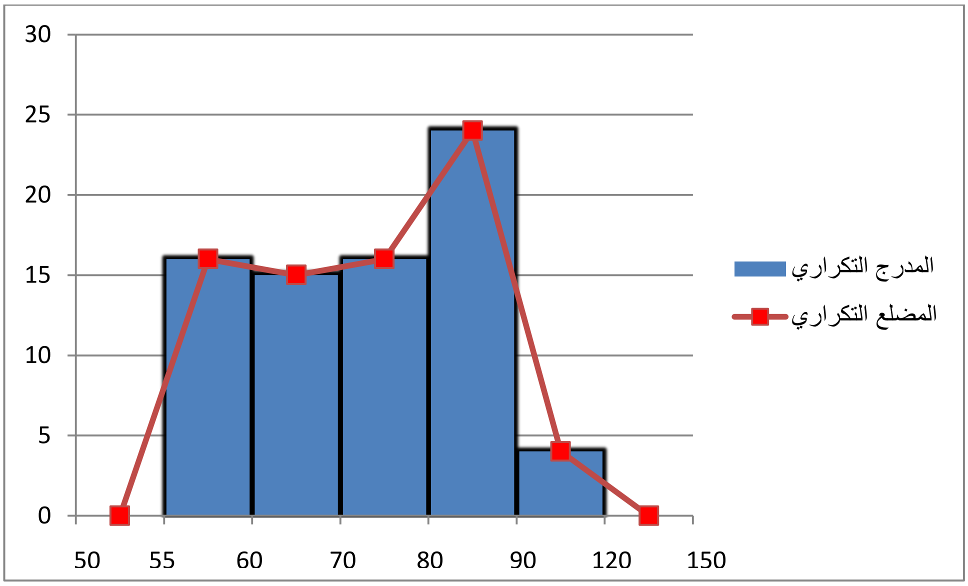
المطلوب: رسم كل من المدرج التكراري والمضلع التكراري؟

الحل:

نقوم أولا بتصحيح التكرارات الأصلية وذلك باستخدام العلاقة الآتية:

$$F_i^* = \frac{F_i}{\text{طول الفئة } (\Delta)} \times \text{الثابت (طول الفئة الشائعة)}$$

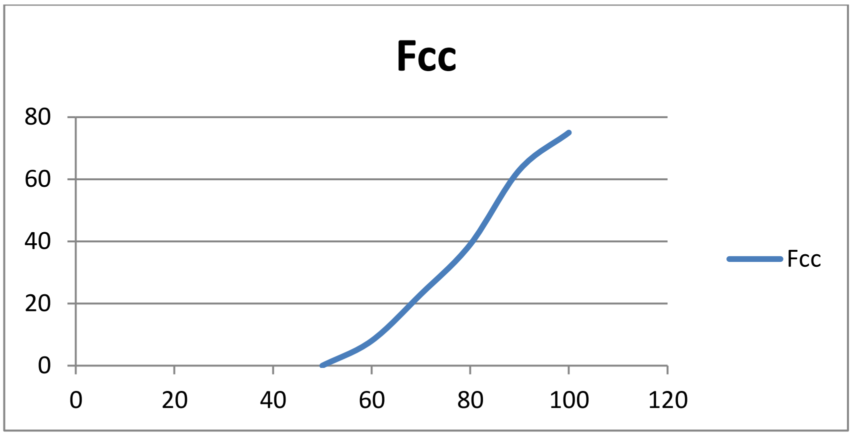
[90-120[	[80-90[	[70-80[	[60-70[	[55-60[	الفئات
30	10	10	10	5	طول الفئة
12	24	16	15	8	F_i
4	24	16	15	16	F_i^* (طول الفئة الشائعة=10)



- **المنحنى التكاملي**: حيث يمثل قيم التكرار المتجمع الصاعد (Fcc)، حيث ينبغي أولا تشكيل جدول التكرار المتجمع الصاعد، وكما تم ذكره سابقا فإن هناك طريقتين لتكوين هذا الجدول، ويمكن تمثيله كالآتي:

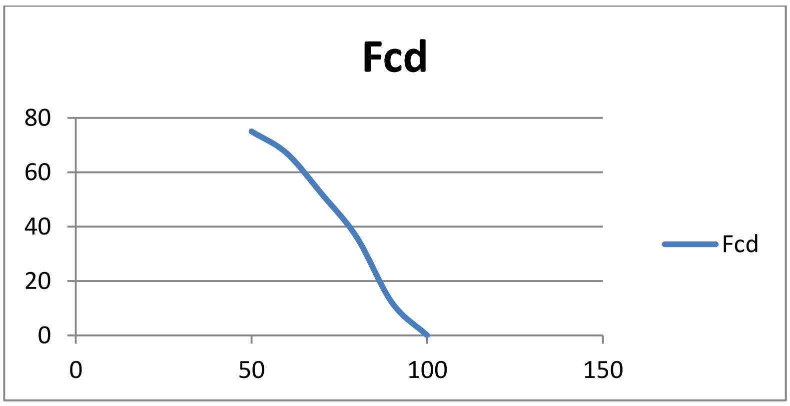
الفئات (الأوزان)		[50-60[		[60-70[		[70-80[		[80-90[		[90-100[		Σ
عدد الأشخاص (التكرار F_i)		8		15		16		24		12		75
Fcc	0		8		23		39		63		75	//

من خلال جدول التكرار المتجمع الصاعد، يمكن رسم المنحنى التكاملي كالآتي:



– **المنحنى التفاضلي**: حيث يمثل قيم التكرار المتجمع النازل (Fcd)، ومن خلال قيم التكرار المتجمع النازل الممثلة في الجدول الآتي، يمكن تمثيل هذا المنحنى.

الفئات (الأوزان)		[50-60[		[60-70[		[70-80[		[80-90[		[90-100[		Σ
عدد الأشخاص (التكرار F_i)		8		15		16		24		12		75
Fcd	75		67		52		36		12		0	//



تمــارين محلولة

تمرين (2-1):

قمنا بإحصاء 36 عائلة قصد معرفة عدد الأطفال في كل منها، فكانت النتائج ممثلة في كالآتي:

03	05	00	01	01	02	03	00	00
01	03	00	01	02	01	02	03	01
03	03	01	04	04	03	03	04	05
03	03	03	02	03	05	05	03	04

1/ كون جدول التوزيع التكراري مبينا فيه التكرار المطلق، التكرار النسبي والتكرار النسبي المئوي؟

2/ مثل قيم التكرار المطلق بالأعمدة البيانة والمضلع التكراري معا؟

3/ أوجد قيم Fcc، وقيم Fcd، ومثلهما بيانيا؟

الحل:

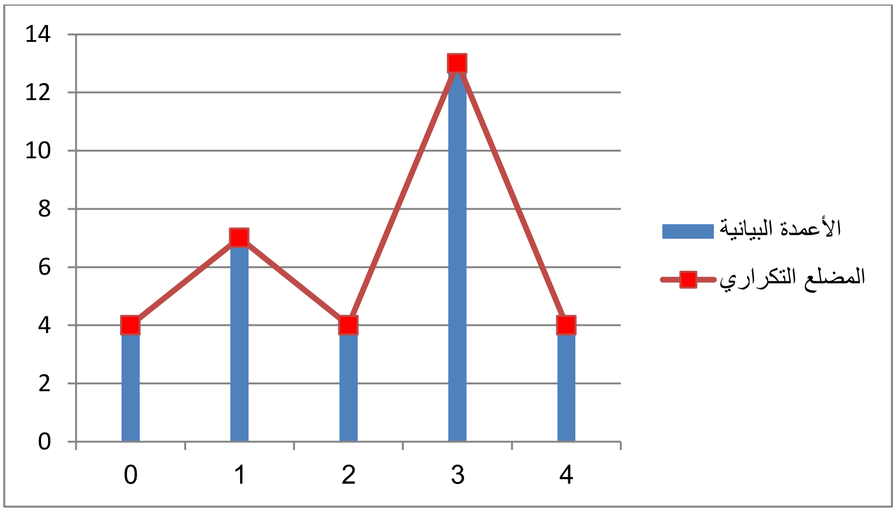
1/ لتسهيل تكوين جدول التوزيع التكراري، نقوم بترتيب قيم الصفة الاحصائية (منفصلة) تصاعديا كالآتي:

00	00	00	00	01	01	01	01	01
01	01	02	02	02	02	03	03	03
03	03	03	03	03	03	03	03	03
03	04	04	04	04	05	05	05	05

ثم نقوم بتكوين جدول التوزيع التكراري كالآتي:

عدد الأطفال (الصفة x_i)	00	01	02	03	04	05	المجموع
F_i(التكرار المطلق)	04	07	04	13	04	04	36
F_r (التكرار النسبي)	0,1111	0,1944	0,1111	0,3611	0,1111	0,1111	1
$F_r\%$ (التكرار النسبي المئوي)	11,11	19,44	11,11	36,11	11,11	11,11	100

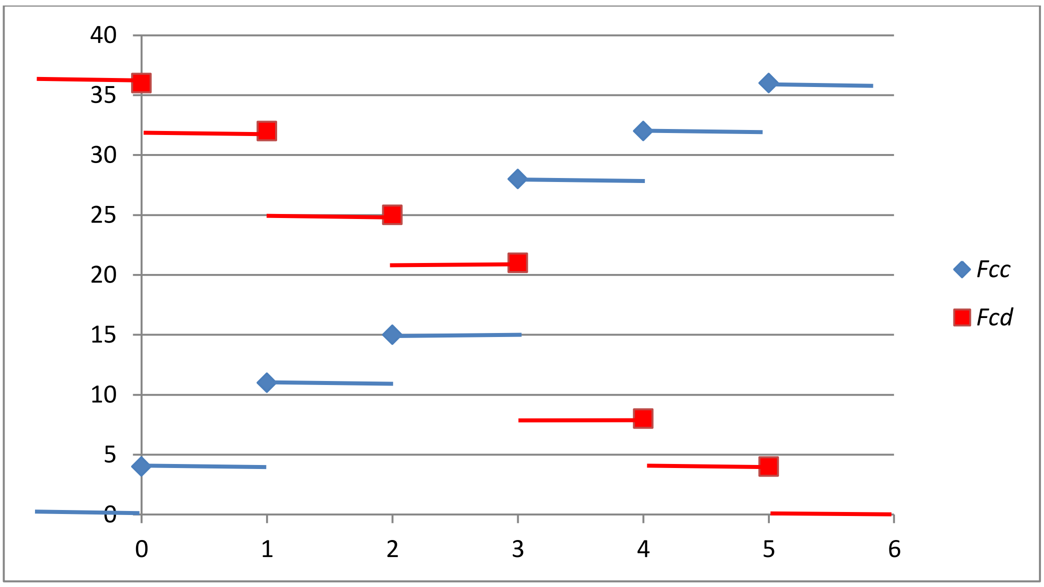
2/ تمثيل قيم التكرار المطلق بالأعمدة البيانة والمضلع التكراري:



3/ ايجاد قيم Fcc، وقيم Fcd:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)		00		01		02		03		04		05		Σ
عدد الأسر (F_i)		04		07		04		13		04		04		36
Fcc	00		04		11		15		28		32		36	//
Fcd	36		32		25		21		08		04		00	//

– المنحنى التكاملي والتفاضلي:



تمرين (2-2):

قمنا بقياس أطوال 35 طالب فكانت النتائج كالآتي:

150	162	130	163	137	141	148	152	157
133,5	136,2	140	140	131	135	140	136	137
134	143	149	135	146	137,5	139	138	144
151,8	153	156	157	160	162	164	157	

المطلوب:

1/ كون جدول التوزيع التكراري (حسب قانون H.Sturges) مبينا فيه التكرار المطلق، التكرار النسبي والتكرار النسبي المئوي؟

2/ مثل قيم التكرار المطلق بالأعمدة البيانة والمضلع التكراري معا؟

3/ أوجد قيم Fcc، وقيم Fcd، ومثلهما بيانيا؟

الحل:

1/ تكوين جدول التوزيع التكراري: نقوم أولا بترتيب البيانات تصاعديا، كالآتي:

130	131	133,5	134	135	135	136	136,2	137
137	137,5	138	139	140	140	140	141	143
144	146	148	149	150	151,8	152	153	156
157	157	157	160	162	162	163	164	

نقوم بتحديد طول الفئات وعددها وفق قانون (**H.Sturges**)، وذلك الآتي:

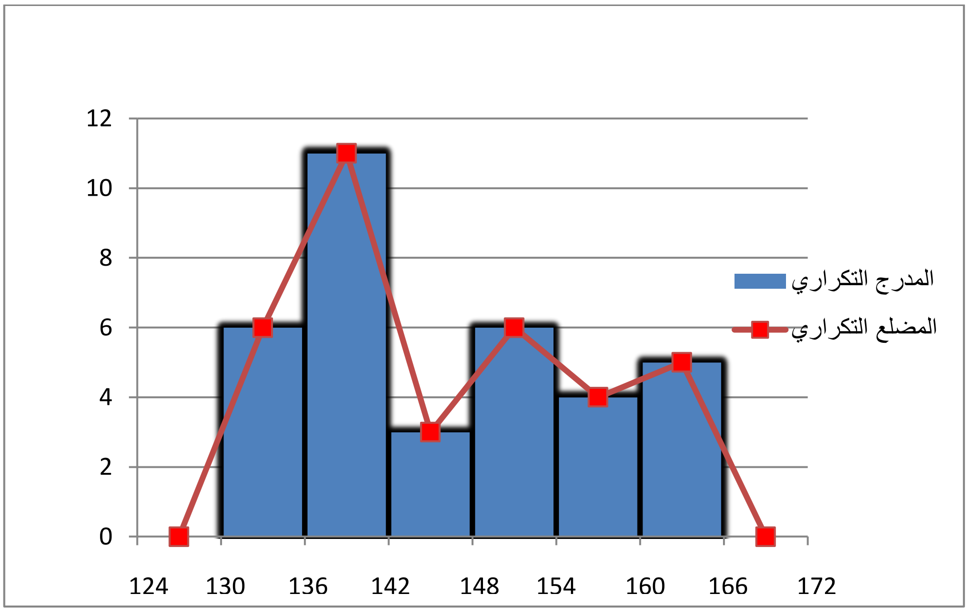
- المدى العام للسلسلة هو: $ET = X_{max} - X_{min} = 164 - 130 = 34$

- ثم نقوم بحساب عدد الفئات وفق القانون الآتي: $\text{عدد الفئات} = 1 + 3{,}332(\text{LogN}) = 1 + 3{,}332(Log35) \approx 6{,}14 \approx 06$

- وبالتالي يكون طول الفئة هو: $\Delta = \frac{ET}{\text{عدد الفئات}} = \frac{34}{06} \approx 05{,}67 \approx 06$ / ويكون شكل الجدول التكراري كالآتي:

الفئات	[130–136[	[136–142[	[142–148[	[148–154[	[154–160[	[160–166[	المجموع
F_i (التكرار المطلق)	06	11	03	06	04	05	35
F_r (التكرار النسبي)	0,1714	0,3143	0,08571	0,1714	0,1143	0,1428	01
$F_r\%$ (التكرار النسبي المئوي)	17,14	31,43	08,57	17,14	11,43	14,28	100

2/ تمثيل قيم التكرار المطلق بالأعمدة البيانة والمضلع التكراري:



3/ ايجاد قيم Fcc ،Fcd:

الفئات		[130–136[		[136–142[		[142–148[		[148–154[		[154–160[		[160–166[		المجموع
F_i(التكرار المطلق)		06		11		03		06		04		05		35
Fcc	00		06		17		20		26		30		35	
Fcd	35		29		18		15		09		05		00	

تمرين (2–3):

قمنا بتوزيع 60 شخص حسب أعمارهم، والنتائج مسجلة في جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[18–25[	[25–32[	[32–39[	[39–46[	[46–53[	[53–60[	المجموع
F_i (التكرار المطلق)	05	08	10	17	13	07	60

1/ ما هو عدد ونسبة الأشخاص التي أعمارهم أقل من 32 سنة؟

2/ ما هي نسبة الأشخاص التي أعمارهم 39 سنة فأكبر؟

3/ ما هي نسبة الأشخاص التي أعمارهم أقل من 53 سنة وأكبر أو يساوي 32سنة؟

4/ ما هي نسبة الأشخاص التي أعمارهم أقل من 28 سنة؟

5/ ما هي نسبة الأشخاص التي أعمارهم أكبر من 43 سنة؟

الحل:

1/ من الجدول مباشرة، نلاحظ أن عدد الأشخاص التي أعمارهم أقل من 32 سنة، هو مجموع التكرارات للفئتين الأولى والثانية؛ أي 13 شخص، وبالتالي نسبتهم من اجمالي الأشخاص (60 شخص) هي:

$$\frac{13 \times 100}{60} \approx 21{,}67\%$$

2/ من الجدول مباشرة، نلاحظ أن عدد الأشخاص التي أعمارهم 39 سنة فأكبر، هو مجموع التكرارات للفئات الثلاثة الأخيرة؛ أي 37 شخص، وبالتالي نسبتهم من اجمالي الأشخاص (60 شخص) هي:

$$\frac{37 \times 100}{60} \approx 61{,}67\%$$

3/ من الجدول مباشرة، نلاحظ أن عدد الأشخاص التي أعمارهم أقل من 53 سنة وأكبر أو يساوي 32سنة، هو مجموع التكرارات للفئة الثالثة، الرابعة والخامسة؛ أي 40 شخص، وبالتالي نسبتهم من اجمالي الأشخاص (60 شخص) هي:

$$\frac{40 \times 100}{60} \approx 66{,}67\%$$

4/ نقوم أولا بإيجاد عدد الأشخاص التي أعمارهم أقل من 28 سنة، لكن نلاحظ أن الرقم 28 لا يوجد ضمن حدود الفئات، إذن العدد هو تكرارات الفئة الأولى، ونضيف اليه جزء من تكرارات الفئة الثانية، هذا الجزء مجهول، فنقوم بإيجاده بتطبيق القاعدة الثلاثية على الفئة الثانية كالآتي:

$$\begin{cases} [25-32[\longrightarrow 08 \\ 25-28 \longrightarrow x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 07 \longrightarrow 08 \\ 03 \longrightarrow x \end{cases}$$

إذن نجد: $x = \frac{03 \times 08}{07} \approx 03{,}43 \approx 03$

وبالتالي عدد الأشخاص هو: 08 = 05 + 03، ونسبتهم هي: $\frac{08\times100}{60} \approx 13,33\%$

5/ نقوم أولا بإيجاد عدد الأشخاص التي أعمارهم أكبر من 43 سنة، والعدد هو مجموع تكرارات الفئتين الأخيرتين، ونضيف اليهما جزء من تكرارات الفئة الرابعة، هذا الجزء مجهول، فنقوم بإيجاده بتطبيق القاعدة الثلاثية على الفئة الرابعة كالآتي:

$$\begin{cases} [39-46[\longrightarrow 17 \\ 43-46 \longrightarrow x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 07 \longrightarrow 17 \\ 03 \longrightarrow x \end{cases}$$

إذن نجد: $x = \frac{03\times17}{07} \approx 07,28 \approx 07$

وبالتالي عدد الأشخاص هو: 27 = 07 + 13 + 07، ونسبتهم هي: $\frac{27\times100}{60} = 45\%$

الفصل الثالث:

مقاييس النزعة المركزية

1- الوسط الحسابي $\bar{X}$.

2- الوسيط Me.

3- المنوال Mo.

4- الوسط الهندسي G.

5- الوسط التوافقي H.

6- الوسط التربيعي MQ.

7- علاقات رياضية تربط بين مقاييس النزعة المركزية.

- ✓ تمــارين محلـولــة.

يقصد بمقاييس النزعة المركزية، هي التعبير عن مجموع القيم (تلخيصها) من خلال قيمة (أو أكثر أحيانا) معينة، أي وكأن جميع القيم لها توجه ونزعة للتمركز حول قيمة معينة تعبر عنها، فمثلا القيمة التي هي متوسط جميع القيم تسمى المتوسط الحسابي، القيم التي تقسم القيم إلى قسمين متساويين تسمى الوسيط،...الخ.

1– الوسط الحسابي $\bar{X}$: ويسمى أيضا المتوسط الحسابي، هو القيمة التي تعتبر كمتوسط لجميع القيم.

1–1– البيانات غير المبوبة: في هذه الحالة تكون البيانات غير منظمة (غير مبوبة) في جدول تكراري، ويسمى الوسط الحسابي بالوسط الحسابي البسيط، ويحسب كالآتي:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$$

مثال (3–1): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 20 عائلة، وكانت النتائج كالآتي:

01	04	05	03	04	03	01	00	02	00
03	05	01	01	03	01	03	03	04	02

المطلوب: أحسب الوسط الحسابي؟

الحل: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n} = \frac{49}{20} = 2{,}45$

1–2– البيانات المبوبة: في هذه الحالة تكون البيانات منظمة (مبوبة) في جدول تكراري، ويسمى الوسط الحسابي بالوسط الحسابي المرجح، ويحسب كالآتي:

أ– الطريقة المباشرة (طريقة القانون العام):

– في حالة المتغير الإحصائي المتصل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \sum_{i=1}^{n}(Fr_i.c_i)$$

– في حالة المتغير الاحصائي المنفصل:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \sum_{i=1}^{n}(Fr_i.x_i)$$

ب– الطريقة غير المباشرة: وتتضمن طريقتين كالآتي:

– طريقة الوسط الفرضي (طريقة الانحرافات):

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i}$$

حيث: $\boldsymbol{w_i = c_i - \alpha}$ (أو $w_i = x_i - \alpha$ في حالة المتغير المنفصل)

α: هو الوسط الفرضي، اذا تم اختيار أي قيمة له فإن النتيجة تكون صحيحة، لكن في الغالب يتم اختياره على أنه مركز الفئة (أو قيمة x_i في حالة المتغير المنفصل) المقابل لأكبر تكرار، وهذا من أجل توحيد طريقة الحل فقط.

– طريقة الانحرافات المختصرة:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i . \grave{w}_i)}{\sum F_i} . K$$

حيث: $\grave{w}_i = \frac{w_i}{K}$

K: مهما كانت قيمته فالنتيجة ستكون نفسها، لكن في حالة المتغير المتصل، ومن أجل توحيد طريقة الحل، فيمكن مثلا اعتباره بأنه طول الفئة في حالة تساوي طول الفئات، أو طول الفئة لأكبر في حالة عدم تساوي طول الفئات.

مثال (3–2) (حالة متغير متصل): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50–60[	[60–70[	[70–80[	[80–90[	[90–100[
عدد الأشخاص (التكرار F_i)	8	15	16	24	12

– المطلوب: حساب الوسط الحسابي ($\bar{X}$) بالطرق الثلاث: الطريقة المباشرة، طريقة الوسط الفرضي وطريقة الانحرافات المختصرة؟

الحل:

الفئات	[50–60[	[60–70[	[70–80[	[80–90[	[90–100[	Σ
c_i	55	65	75	85	95	//
F_i	8	15	16	24	12	75
$F_i . c_i$	440	975	1200	2040	1140	5795
w_i	-30	-20	-10	00	10	//
$F_i . w_i$	-240	-300	-160	00	120	-580
$\grave{w}_i$	-3	-2	-1	00	1	//
$F_i . \grave{w}_i$	-24	-30	-16	00	12	-58

- **حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة:** $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{5795}{75} \approx 77,27$

- **حساب الوسط الحسابي بالطريقة الوسط الفرضي:** نلاحظ أن أكبر تكرار هو 24، ويقابله مركز الفئة c=85، إذن نختار الوسط الفرضي $\propto = 85$، إذن يكون:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i} = 85 + \frac{(-580)}{75} = 85 - 07,733 \approx 77,27$$

- **حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة:** بما أن أطوال الفئات متساوية، إذن K=10،

ومنه يكون: $\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=}^{n}(F_i.\grave{w}_i)}{\sum F_i}.K = 85 + \frac{(-58)}{75}.10 \approx 77,27$

مثال (3-3) (حالة متغير منفصل): ليكن لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال، مبينة كما في جدول التوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	14	06

- **المطلوب:** حساب الوسط الحسابي $(\bar{X})$ بالطرق الثلاث: الطريقة المباشرة، طريقة الوسط الفرضي وطريقة الانحرافات المختصرة؟

الحل:

x_i	01	02	03	04	05	Σ
F_i	05	10	15	14	06	50
$F_i.x_i$	05	20	45	56	30	156
w_i	-02	-01	00	01	02	//
$F_i.w_i$	-10	-10	00	14	12	06
$\grave{w}_i$	-01	-00,50	00	00,50	01	//
$F_i.\grave{w}_i$	-05	-05	00	07	06	03

- **حساب الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة:** $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \frac{156}{50} = 03,12$

- **حساب الوسط الحسابي بالطريقة الوسط الفرضي:** نلاحظ أن أكبر تكرار هو 15، ويقابله x_i=03، إذن نختار الوسط الفرضي $\propto = 03$، إذن يكون:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i} = 03 + \frac{6}{50} = 03 + 00{,}12 = 03{,}12$$

- **حساب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة**: بما أن في هذه الحالة المتغير منفصل؛ إذ يتضمن قيم منفصلة (وليس فئات)، إذن نختار أي قيمة لـ K، فمثلا نختار K=02، ومنه يكون:

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.\dot{w}_i)}{\sum F_i}.K = 03 + \frac{03}{50}.02 = 03{,}12$$

2- الوسيط *Me*: وهو القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين متساويين (أي كل قسم يتضمن نفس العدد من القيم)، قسم أكبر من هذه القيمة وقسم أقل منها؛ أي 50% من قيم السلسلة أقل من قيمة الوسيط و50% من قيم السلسلة أكبر من قيمة الوسيط.

2-1 – حالة البيانات غير المبوبة: ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الوسيط (***Rme***)، وهنا نميز بين حالتين:

أ- إذا كان n (عدد البيانات) فرديا، فإن: $Rme = \frac{n+1}{2}$، وبالتالي يكون الوسيط Me هو القيمة من قيم البيانات التي ترتيبها $Rme = \frac{n+1}{2}$؛ أي: $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$

ب- إذا كان n زوجيا، فإنه الوسيط Me هو متوسط لقيمتين من قيم البيانات، حيث القيمة الأولى نعتبرها كأنها وسيط أول، ونرمز له بـ $Me1$ ورتبته $Rme1 = \frac{n}{2}$، والقيمة الثانية نعتبرها كأنها وسيط ثاني، ونرمز له بـ $Me2$ ورتبته $Rme2 = \frac{n}{2} + 1$

وبالتالي تكون قيمة الوسيط Me هي: $Me = \frac{Me1+Me2}{2}$

مثال (3-4) (حالة n عدد زوجي): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 20 عائلة، وكانت النتائج كالآتي:

01	04	05	03	04	03	01	00	02	00
03	05	01	01	03	01	03	03	04	02

المطلوب: أحسب الوسيط؟

الحل:

أولا نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

00	00	01	01	01	01	01	02	02	03
03	03	03	03	03	04	04	04	05	05

نلاحظ أن عدد البيانات n=20 زوجيا، وبالتالي *Me1* رتبته $Rme1 = \frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$، ونلاحظ أن القيمة التي رتبتها 10 هي $x_{10} = 03$، إذن *Me1*=03، أما Me2 رتبته هي $Rme2 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{20}{2} + 1 = 11$، ومن الجدول نلاحظ أن القيمة التي رتبتها 11 هي كذلك $x_{11} = 03$، إذن *Me2*=03، إذن قيمة الوسيط Me هي: $Me = \frac{Me1+Me2}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$

مثال (3-5) (حالة n عدد فردي): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 09 عائلات، وكانت النتائج كالآتي:

02	01	05	05	04	03	04	04	01

المطلوب: حساب الوسيط؟

الحل:

أولا نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

01	01	02	03	04	04	04	05	05

نلاحظ أن عدد البيانات n=09 فرديا، وبالتالي رتبة الوسيط هي $Rme = \frac{n+1}{2} = \frac{09+1}{2} = 05$، ونلاحظ أن القيمة التي رتبتها 05 هي $x_i = 04$، إذن *Me*=04

2-2- حالة البيانات المبوبة:

2-2-1- المتغير المتصل:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times$$

K: هو طول الفئة التي ينتمي إليها الوسيط (فئة الوسيط)

L_0: الحد الأول لفئة الوسيط

Fcc1: هي قيمة *Fcc* التي هي أقل من القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$

Fcc2: هي قيمة *Fcc* التي هي أكبر من القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$

إذا كانت القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$ هي إحدى قيم التكرار المتجمع الصاعد، فإن قيمة الوسيط تحدد مباشرة؛ وهي قيمة الحد الأعلى للفئة التي هي قبل العمود الذي يتضمن القيمة $\frac{\sum F_i}{2}$ (وهي نفسها الحد الأدنى للفئة التي بعد العمود).

مثال (3-6): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار F_i)	8	15	16	24	12

- **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

- **أولا**: **ايجاد فئة الوسيط**: نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

الفئات		[50-60[		[60-70[		[70-80[		[80-90[		[90-100[		$\sum$
F_i		8		15		16		24		12		75
Fcc	0		8		23		39		63		75	

لدينا: $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{75}{2} = 37{,}5$، ونلاحظ أن القيمة 37,5 تقع بين القيمتين Fcc=23 وFcc=39، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي]80-70]، ثم نقوم بتطبيق القانون على هذه الفئة لتحديد قيمة الوسيط بالضبط، ولمعرفة أي قيمة من هذه الفئة هي الوسيط، وذلك كالآتي:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 70 + \frac{37{,}5 - 23}{39 - 23} . 10 = 79{,}0625$$

مثال (3-7) (حالة $\frac{\sum F_i}{2}$ تقع ضمن قيم Fcc): لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار F_i)	8	15	16	25	14

- **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

– أولا نقوم بإيجاد فئة الوسيط، وذلك بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

الفئات		[50-60[		[60-70[		[70-80[		[80-90[		[90-100[		Σ
F_i		8		15		16		25		14		78
Fcc	0		8		23		39		64		78	

لدينا: $39 = \frac{78}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، نلاحظ أن القيمة 39 تقع ضمن قيم Fcc، إذن مباشرة (وبدون الحاجة إلى تطبيق القانون) فإن الوسيط هو Me=80؛ أي هو الحد الأعلى للفئة التي قبل]80-70] (أو الحد الأدنى للفئة التي بعد]90-80])، وإذا قمنا بتطبيق القانون على الفئة]80-70] سنجد نفس النتيجة، وذلك كالآتي:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 70 + \frac{39-23}{39-23} . 10 = 80$$

2-2-2- المتغير المنفصل:

إذا كانت رتبة الوسيط $Rme = \frac{\sum F_i}{2}$ مساوية لإحدى قيم Fcc، فإن الوسيط Me هو متوسط قيمتي (x_i) قبل وبعد السطر المتضمن رتبة الوسيط؛ وهذا في حالة رسم جدول Fcc بطريقة ترك أسطر فراغة بين قيم (x_i)، أما اذا رسمنا الجدول بطريقة عدم ترك الأسطر الفارغة فإن الوسيط هو متوسط قيمتي (x_i) اللتين تقعان ضمن وبعد السطر المتضمن رتبة الوسيط.

أما إذا كانت رتبة الوسيط غير مساوية لإحدى قيم Fcc؛ أي بين قيمتين لـ Fcc، فإن الوسيط هو قيمة (x_i) التي ضمن السطر الذي بين قيمتي Fcc؛ وهذا في حالة رسم الجدول بطريقة ترك الأسطر الفارغة، أما في طريقة عدم ترك الأسطر فإن الوسيط هو قيمة (x_i) التي ضمن السطر الذي يتضمن قيمة Fcc الأكبر مباشرة من قيمة رتبة الوسيط.

مثال (3-8): لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال، مبينة كما في جدول التوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	14	06

– **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

x_i		01		02		03		04		05		Σ
F_i		05		10		15		14		06		50
Fcc	00		05		15		30		44		50	

لدينا: $25 = \frac{50}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، نلاحظ أن القيمة 25 تقع بين Fcc=15 وFcc=30، إذن مباشرة من الجدول فإن الوسيط هو Me=03.

مثال (3–9): لدينا توزيع مجموعة من الأسر حسب عدد الأطفال، مبينة كما في جدول التوزيع التكراري الآتي:

عدد الأطفال (صفة كمية منفصلة)	01	02	03	04	05
عدد الأسر (F_i)	05	10	15	20	10

– **المطلوب**: حساب الوسيط؟

الحل:

نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

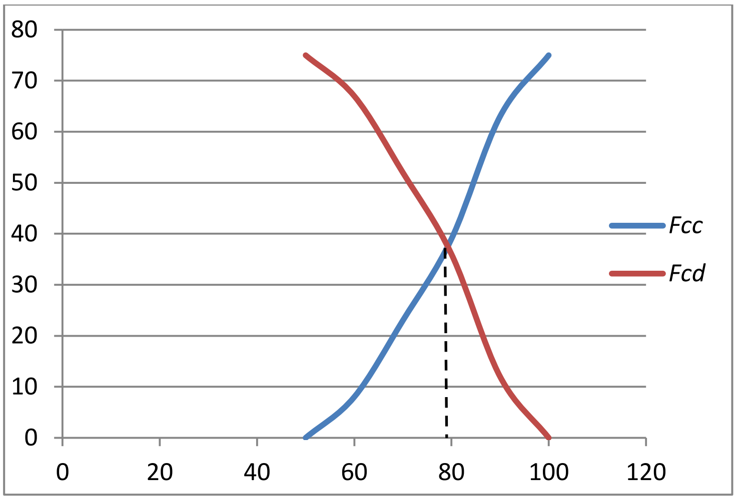
x_i		01		02		03		04		05		Σ
F_i		05		10		15		20		10		60
Fcc	00		05		15		30		50		60	

لدينا: $30 = \frac{60}{2} = \frac{\sum F_i}{2}$، نلاحظ أن القيمة 30 تقع ضمن قيم Fcc، إذن الوسيط هو:

$$Me = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{03 + 04}{2} = 03{,}50$$

2–3– تحديد قيمة الوسيط بيانيا:

في حالة البيانات المبوبة، وإذا كان المتغير متصل، فهناك بعض الطرق لتحديد الوسيط بيانيا، ومن بين أسهلها وأشهرها، هو أن الوسيط يتمثل في النقطة على محور الفواصل عند اسقاط نقطة التقاطع للمنحى التكاملي (منحنى Fcc) والمنحنى التفاضلي (منحنى Fcd)، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:



2-4- مشتقات الوسيط: وتسمى بشبيهات الوسيط، وذلك لأنها من نفس جنس الوسيط، ونفس المبدأ لطريقة الحساب، هذه المشتقات تتمثل في الربيعات، العشيريات، المئينات، وسوف نتطرق فقط للربيعات، لأن باقي المشتقات لها نفس مبدأ الحساب مع الربيعات والوسيط.

الرُبيَع الأول Q_1: وهو القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين، قسم أكبر من هذه القيمة وقسم أقل منها؛ حيث 25% من قيم السلسلة أقل من قيمة الرُبيع الأول و75% من قيم السلسلة أكبر من قيمة الرُبيع الأول.

الرُبيَع الثاني Q_2: هو نفسه الوسيط، وقد تم شرحه وتوضيح كيفية حسابه في مختلف الحالات، لذلك سوف نتطرق إليه فقط في حالة البيانات الغير المبوبة لبعض الغموض التي تتضمنه هذه الحالة، ولتوضيح أن طريقة حساب الوسيط هي نفسها طريقة حساب الربيعات سواء في البيانات المبوبة أو غير المبوبة.

الرُبيَع الثالث Q_3: وهو القيمة التي تقسم السلسلة إلى قسمين، قسم أكبر من هذه القيمة وقسم أقل منها؛ حيث 75% من قيم السلسلة أقل من قيمة الرُبيع الأول و25% من قيم السلسلة أكبر من قيمة الرُبيع الأول.

ملاحظات:

- ✓ من بين الربيعيات فإن الربيع الثاني (الوسيط) هو فقط من يعتبر من مقاييس النزعة المركزية؛
- ✓ يعتمد على الربيع الأول والثالث في حساب بعض مقاييس التشتت (الانحراف الربيعي) كما سنرى لاحقا.

2-4-1 – حساب الربيعيات في حالة البيانات غير المبوبة:

أ- حساب الربيع الأول: ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الربيع الأول كالآتي:

$$RQ1 = \frac{n+1}{4}$$

وهنا نميز بين حالتين:

- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الأول عدد طبيعي، فإن الربيع الأول مباشرة هو قيمة x_i الموافقة لتلك الرتبة؛ أي:

$$Q_1 = x_{\frac{n+1}{4}}$$

- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الأول عدد غير طبيعي، أي أن رتبة الربيع الأول تقع بين رتبتين L و $L+1$، والموافقتين للقيمتين x_L و x_{L+1}، فإنه يتم حساب الربيع الأول وفق العلاقة الآتية:

$$Q_1 = x_L + (x_{L+1} - x_L)(\frac{n+1}{4} - L)$$

نشير إلى أنه تم بناء هذه العلاقة بالاعتماد على **نظرية طاليس** وهي نفس النظرية التي تم من خلالها التوصل إلى العلاقة المستخدمة في حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة.

ب – حساب الربيع الثاني (الوسيط): ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الربيع الثاني كالآتي:

$$RQ2 = \frac{n+1}{2}$$

وهنا نميز بين حالتين:

- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الثاني عدد طبيعي (أي n عدد فردي)، فإن الربيع الثاني مباشرة هو قيمة x_i الموافقة لتلك الرتبة؛ أي: $Q_2 = x_{\frac{n+1}{2}}$، وهو ما تم توضيحه سابقا في حالة الوسيط
- ✓ إذا كانت رتبة الربيع الثاني عدد غير طبيعي (أي n عدد زوجي)، فيكون الربيع الثاني هو:

$$Q_2 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{2} - L\right)$$

ويمكن تبسيط هذه العلاقة للوصول إلى العلاقة المبسطة التي تم توضيحها سابقا في حالة الوسيط، وذلك كالآتي:

في حالة الربيع الثاني يكون $L = \frac{n}{2}$ وبالتالي نجد:

$$\Rightarrow Q_2 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = x_L + \frac{x_{L+1}}{2} - \frac{x_L}{2}$$
$$\Rightarrow Q_2 = \frac{x_L}{2} + \frac{x_{L+1}}{2}$$
$$\Rightarrow Q_2 = \frac{x_L + x_{L+1}}{2}$$

وهي نفس العلاقة التي تم التطرق لها في حالة الوسيط فقط مع تغيير في الرموز، فعندما نضع: $x_L = Me1$، وكذلك نضع $x_{L+1} = Me2$، فإنه تصبح العلاقة كالآتي: $Me = Q_2 = \frac{Me1+Me2}{2}$

ت- حساب الربيع الثالث: ترتب البيانات تصاعديا أو تنازليا، ثم نحسب رتبة الربيع الثالث كالآتي:

$$RQ3 = \frac{3(n+1)}{4}$$

وهنا نميز بين حالتين:

✓ إذا كانت رتبة الربيع الثالث عدد طبيعي، فإن الربيع الثالث مباشرة هو قيمة x_i الموافقة لتلك الرتبة؛ أي:

$$Q_3 = x_{\frac{3(n+1)}{4}}$$

✓ إذا كانت رتبة الربيع الثالث عدد غير طبيعي، أي أن رتبة الربيع الثالث تقع بين رتبتين L و $L+1$، والموافقتين للقيمتين x_L و x_{L+1}، فإنه يتم حساب الربيع الثالث مثل طريقة الربيع الأول مع اختلاف طفيف، وذلك كالآتي:

$$Q_3 = x_L + (x_{L+1} - x_L)(\frac{3(n+1)}{4} - L)$$

مثال 3-10: ليكن لدينا مجموعة من البيانات مرتبة تصاعديا كالآتي:

1 3 4 6 7 9 11

المطلوب: أحسب الربيع الأول، الثاني والثالث؟

الحل:

- **حساب الربيع الأول Q1**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الأول كالآتي:

$$RQ1 = \frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الأول هي عدد طبيعي، إذن مباشرة نجد: $Q1 = x_2 = 3$

– **حساب الربيع الثاني Q2 (الوسيط Me)**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثاني كالآتي:

$$RQ2 = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثاني هي عدد طبيعي، إذن مباشرة نجد: $Q2 = x_4 = 6$

– **حساب الربيع الثالث**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثالث كالآتي:

$$RQ3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(7+1)}{4} = 6$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثالث هي عدد طبيعي، إذن مباشرة نجد: $Q3 = x_6 = 9$

مثال 3–11: ليكن لدينا مجموعة من البيانات مرتبة تصاعديا كالآتي:

2	4	6	6	7	9	9	9	10	12

المطلوب: أحسب الربيع الأول، الثاني والثالث؟

الحل:

– **حساب الربيع الأول Q1**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الأول كالآتي:

$$RQ1 = \frac{n+1}{4} = \frac{10+1}{4} = 2{,}75$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الأول هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=2 وL+1=3، والموافقين للقيمتين $x_2 = 4$ و $x_3 = 6$، إذن نحسب الربيع الأول كالآتي:

$$Q_1 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = x_2 + (x_3 - x_2)\left(\frac{10+1}{4} - 2\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 4 + (6-4)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 5{,}5$$

- **حساب الربيع الثاني Q2 (الوسيط Me)**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثاني كالآتي:

$$RQ2 = \frac{n+1}{2} = \frac{10+1}{2} = 5{,}5$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثاني هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=5 وL+1=6، والموافقين للقيمتين $x_5 = 7$ و $x_6 = 9$، إذن فيمكن حساب الربيع الثاني بطريقتين كالآتي:

- **الطريقة الأولى**: $Q_2 = Me = \frac{Me1+Me2}{2} = \frac{7+9}{2} = 8$

- **الطريقة الثانية**: $Q_2 = Me = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{2} - L\right)$

$$\Rightarrow Q_2 = x_5 + (x_6 - x_5)\left(\frac{10+1}{2} - 5\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = 7 + (9-7)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow Q_2 = 8$$

- **حساب الربيع الثالث Q3**: أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثالث كالآتي:

$$RQ3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(10+1)}{4} = 8{,}25$$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثالث هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=8 وL+1=9، والموافقين للقيمتين $x_8 = 9$ و $x_9 = 10$، إذن نحسب الربيع الثالث كالآتي:

$$Q_3 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{3(n+1)}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_3 = x_8 + (x_9 - x_8)\left(\frac{3(10+1)}{4} - 8\right)$$

$$\Rightarrow Q_3 = 9 + (10-9)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$\Rightarrow Q_3 = 9,25$

2-4-2 – حساب الربيعات في حالة البيانات المبوبة: يمكن حساب كل من الرُبيَع الأول Q_1 والرُبيَع الثالث Q_3، في حالة رسم جدول التكرار المتجمع الصاعد Fcc بطريقة ترك أسطر فارغة بين الفئات، كالآتي:

أ- المتغير الاحصائي المنفصل:

- حساب الربيع الأول: إذا كانت قيمة $\frac{\sum F_i}{4}$ تقع بين قيمتين لـ Fcc، فإن الربيع الأول Q_1 هو مباشرة من الجدول قيمة x_i التي تقع في السطر الذي بين قيمتي Fcc.

إذا كانت قيمة $\frac{\sum F_i}{4}$ هي قيمة من قيم Fcc، فإن الرُبيَع الأول Q_1 هو متوسط قيمتي $(x_1، x_2)$ التي قبل وبعد سطر Fcc المعني؛ أي: $Q_1 = \frac{x_1+x_2}{2}$

- حساب الربيع الثالث:

إذا كانت قيمة $\frac{3\sum F_i}{4}$ تقع بين قيمتين لـ Fcc، فإن الربيع الثالث Q_3 هو مباشرة من الجدول قيمة x_i التي تقع في السطر الذي بين قيمتي Fcc.

إذا كانت قيمة $\frac{3\sum F_i}{4}$ هي قيمة من قيم Fcc، فإن الرُبيَع الثالث Q_3 هو متوسط قيمتي $(x_1، x_2)$ التي قبل وبعد سطر Fcc المعني؛ أي: $Q_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$

ب- المتغير الاحصائي المتصل:

- حساب الربيع الأول: ينبغي أولا ايجاد الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول، حيث نقوم بحساب القيمة $\frac{\sum F_i}{4}$، ثم ننظر أين تقع ضمن قيم Fcc، وهنا نميز بين حالتين:

- إذا كانت هذه القيمة هي احدى قيم Fcc، فهنا مباشرة الربيع الأول هو قيمة الحد الأكبر للفئة التي قبل (والتي هي نفسها قيمة الحد الأدنى للفئة التي بعد)؛

- إذا كانت هذه القيمة تقع بين قيمتين لـ Fcc، ففئة الربيع الأول هي الفئة الموافقة للسطر بين تلك القيمتين لـ Fcc، ويحسب الربيع الأول من خلال العلاقة الآتية: $Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K$

– حساب الربيع الثالث: ينبغي أولا ايجاد الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث، حيث نقوم بحساب القيمة $\frac{3\sum F_i}{4}$، ثم ننظر أين تقع ضمن قيم Fcc، وهنا نميز بين حالتين:

– إذا كانت هذه القيمة هي احدى قيم Fcc، فهنا مباشرة الربيع الثالث هو قيمة الحد الأكبر للفئة التي قبل (والتي هي نفسها قيمة الحد الأدنى للفئة التي بعد)؛

– إذا كانت هذه القيمة تقع بين قيمتين لـ Fcc، ففئة الربيع الثالث هي الفئة الموافقة للسطر بين تلك القيمتين لـ Fcc، ويحسب الربيع الثالث من خلال العلاقة الآتية:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - F_1}{F_2 - F_1} \times K$$

3– المنوال Mo: وهو عبارة عن القيمة الأكثر شيوعا (تكرارا، انتشارا) من بين جميع القيم المعنية.

3–1– حالة البيانات غير المبوبة: في حالة ما إذا كانت هذه البيانات غير مكررة (أو لها نفس التكرار)، فإنه لا يوجد منوال، أي أنه لا توجد قيمة مكررة أكثر من القيم الأخرى، أما إذا كانت هذه القيم مكررة (أو على الأقل بعضها مكرر)، فإن المنوال هو القيمة المكررة أكثر (قد تكون أكثر من قيمة)، ولتسهيل ايجاد هذه القيمة نلجأ إلى تبويب هذه البيانات (تحويلها إلى بيانات مبوبة).

مثال (3–12): قمنا بإحصاء عدد الأطفال في 20 عائلة، وكانت النتائج كالآتي:

01	04	05	03	04	03	01	00	02	00
03	05	01	01	03	01	03	03	04	02

المطلوب: أحسب المنوال؟

الحل:

نقوم بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

00	00	01	01	01	01	01	02	02	03
03	03	03	03	03	04	04	04	05	05

ثم نقوم بتبويب هذه البيانات كالآتي:

x_i	00	01	02	03	04	05	$\sum$
F_i	02	05	02	06	03	02	20

نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي $F_i = 06$، وهي تقابل $xi = 03$، إذن المنوال هو Mo=03.

3-2- حالة البيانات المبوبة:

3-2-1- المتغير المنفصل: مثل الجدول السابق، فإن المنوال هو قيمة (x_i) المقابلة لأكبر تكرار (F_i)، ويمكن أن نميز بين الحالات الآتية:

- ✓ إذا كانت هناك قيمة واحدة للتكرار هي الأكبر، فإن قيمة Mo ستكون واحدة؛ وإذا كانت قيمة التكرار الأكبر موجودة مرتين فسيكون هناك قيمتين لـ Mo، وهكذا على التوالي؛
- ✓ قيمة واحدة لـ (x_i) فقط مكررة، وباقي قيم (x_i) غير مكررة (أي تكرارها يساوي 1)، فهناك قيمة واحدة لـ Mo؛
- ✓ لا يوجد Mo إذا لم تتكرر أي قيمة من قيم (x_i)، أو إذا كانت جميع القيم لها نفس التكرار.

3-2-2- المتغير المتصل:

- حسابيا: $Mo = L_0 + \frac{(F_0-F_1)}{(F_0-F_1)+(F_0-F_2)}.K$

مثال (3-13): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار F_i)	8	15	16	24	12

- المطلوب: حساب المنوال؟

الحل: نلاحظ أن أطوال الفئات متساوية، إذا لا نحتاج إلى تصحيح التكرار، ونلاحظ كذلك أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي 24، وهي تقابل الفئة [80-90[، وهي فئة المنوال، نقوم بتطبيق عليها القانون، فنجد:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)}.K$$

$$= 80 + \frac{(24 - 16)}{(24 - 16) + (24 - 12)}.10 = 80 + 4 = 84$$

إذا كانت أطوال الفئات غير متساوية فإنه يتم إيجاد الفئة المنوالية وحساب المنوال من خلال التكرار المطلق المصحح (كما تم الإشارة سابقا)، ويمكن توضيح ذلك من خلال المثال الآتي:

مثال (3-14): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-65[	[65-75[	[75-80[	[80-100[
عدد الأشخاص (التكرار) (F_i)	8	14	25	23	10

- **المطلوب**: حساب المنوال؟

الحل: نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية، لذلك نلجأ إلى تصحيح قيم التكرار المطلق، كما في الجدول الآتي:

الفئات	[50-60[	[60-65[	[65-75[	[75-80[	[80-100[
أطوال الفئات (Δ)	10	05	10	05	20
التكرار الأصلي F_i	8	14	25	23	10
$\frac{F_i}{\Delta}$	00,80	02,80	02,50	04,60	00,50
التكرار المصحح $F_i^* = \frac{F_i}{\Delta}.10$	08	28	25	46	05

نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق المصحح هي 46، وهي تقابل الفئة [75-80[، وهي فئة المنوال (طولها 5)، نقوم بتطبيق عليها القانون، فنجد:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0^* - F_1^*)}{(F_0^* - F_1^*) + (F_0^* - F_2^*)}.K$$

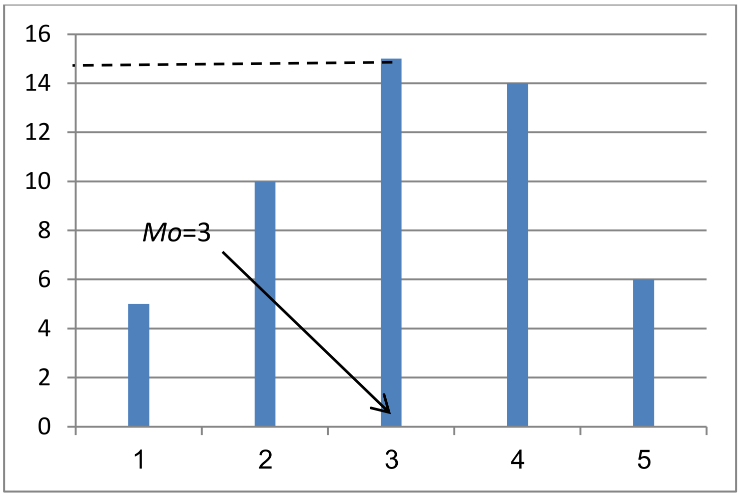
(K هو طول الفئة المنوالية)

$$= 75 + \frac{(46-25)}{(46-25)+(46-05)}.5 \approx 75 + 1{,}69 \approx 76{,}69$$

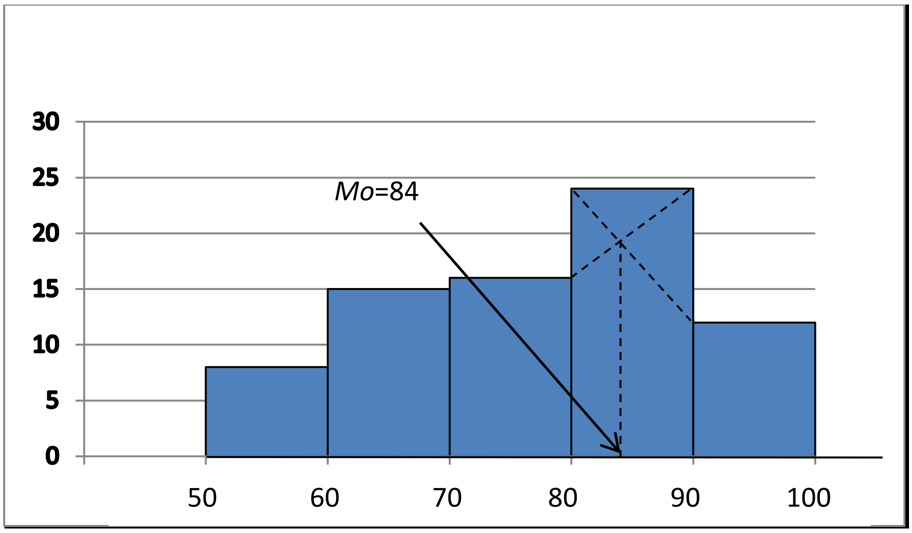
ملاحظة: عند حساب التكرار المصحح، إذا تم اختيار طول الفئة الشائع قيمة أخرى غير القيمة 10، فإنه عند حساب المنوال سنحصل على نفس النتيجة.

3-3- تحديد المنوال بيانيا:

- المتغير المنفصل:



– المتغير المتصل:



4– الوسط الهندسي G : يستخدم لوصف ظاهرة حسب نسبة تغيرها، وخاصة عندما يكون سلوك هذه الظاهرة يتبع نمط المتتالية الهندسية.

أ– الوسط الهندسي البسيط (البيانات غير المبوبة): $G_s = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \dots \times x_n}$

$$Log(G_S) = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} Log(x_i)$$

ب– الوسط الهندسي المرجح (البيانات المبوبة):

– في حالة المتغير المنفصل: $G_p = \sqrt[\sum F_i]{x_1^{F_1} \times x_2^{F_2} \times x_3^{F_3} \times \dots \times x_n^{F_n}}$

$$Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(x_i))}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.Log(x_i))$$

– في حالة المتغير المتصل: $G_p = \sqrt[\sum F_i]{c_1^{F_1} \times c_2^{F_2} \times c_3^{F_3} \times \dots \times c_n^{F_n}}$

$$Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(c_i))}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.Log(c_i))$$

5- الوسط التوافقي: وهو مقلوب المتوسط الحسابي لمقلوب قيم i ؛ أي مقلوب المتوسط الحسابي لقيم $\frac{1}{x_i}$، فمثلا إذا رمزنا للمتوسط الحسابي للقيم $\frac{1}{X_i}$ بالرمز $(\bar{Y})$، فإن الوسط التوافقي هو: $\frac{1}{\bar{Y}}$

أ- الوسط التوافقي البسيط: يكون قانون الوسط التوافقي في هذه الحالة هو: $H_s = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum\frac{1}{x_i}} = \frac{n}{\sum\frac{1}{x_i}}$

ب- الوسط التوافقي المرجح:

– المتغير المنفصل: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{x_i})}$

– المتغير المتصل: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{c_i})}$

6 – الوسط التربيعي MQ: وهو الجذر التربيعي للمتوسط الحسابي لقيم x_i^2، فمثلا إذا رمزنا للمتوسط الحسابي لهذه القيم بـ $\bar{Y}$، فإن الوسط التربيعي هو: $MQ = \sqrt{\bar{Y}}$

أ- الوسط التربيعي البسيط: $MQ_s = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2)}{n}}$

ب- الوسط التربيعي المرجح:

– المتغير المنفصل: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.x_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\sum(Fr_i.x_i^2)}$

– المتغير المتصل: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\sum(Fr_i.c_i^2)}$

مثال (3-15): ليكن لدينا مجموعة من الأشخاص، موزعين حسب أوزانهم كالآتي:

الفئات (الأوزان)	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
عدد الأشخاص (التكرار) (F_i)	8	15	16	24	12

- **المطلوب**: حساب الوسط الهندسي G، الوسط التوافقي H، الوسط التربيعي G؟

الحل:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	Σ
مركز الفئة c_i	55	65	75	85	95	//
F_i	8	15	16	24	12	75
$Log(c_i)$	1,74	1,81	1,87	1,93	1,98	//
$F_i.Log(c_i)$	13,92	27,15	29,92	46,32	23,76	141,07
$\frac{F_i}{c_i}$	0,145	0,231	0,213	0,282	0,126	0,997
$F_i.c_i^2$	24200	63375	90000	173400	108300	459275

- **حساب الوسط الهندسي G**: $$Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(c_i))}{\sum F_i} = \frac{141,07}{75} = 01,88$$

$$Log(G_p) = 01,88 \Rightarrow 10^{Log(G_p)} = 10^{01,88} \Rightarrow G_p \approx 75,857$$

- **حساب الوسط التوافقي H**: $$H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{c_i})} = \frac{75}{0,997} \approx 75,22$$

- **حساب الوسط التربيعي MQ**: $$MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\frac{459275}{75}} \approx 78,2538$$

7- علاقات رياضية تربط بين مقاييس النزعة المركزية:

- العلاقة بين: MQ، H، G، $\bar{X}$ تتمثل في: $$H \leq G \leq \bar{X} \leq MQ$$

- العلاقة بين Mo، Me، $\bar{X}$ تتمثل في: $$G = \sqrt{\bar{X}.H}$$

- إذا كان التوزيع قريب من التماثل، فإن العلاقة بين Mo، Me، $\bar{X}$ هي:

$$(\bar{X} - Mo) = 3.(\bar{X} - Me)$$

- في حالة التوزيع متماثل (متناظر)، فإن العلاقة بين Mo، Me، $\bar{X}$ تتمثل في أن: $$Mo = \bar{X} = Me$$

تمـــارين محلولة

تمرين (3-1): العلامات التي حصل عليها مجموعة من الطلبة، ممثلة في الآتي:

01	12	15	03	08	03	09	12	13	14
06	12	12	07	12	10	19	15	20	17

- أحسب الوسط الحسابي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث والمنوال؟

الحل:

1/ حساب الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n} = \frac{220}{20} = 11$

أي أن العلامة (11) هي متوسط جميع العلامات التي حصل عليها الطلبة.

2/ حساب الوسيط: نقوم أولا بترتيب البيانات تصاعديا كالآتي:

01	03	03	06	07	08	09	10	12	12
12	12	12	13	14	15	15	17	19	20

نلاحظ أن عدد البيانات زوجي، إذن قيمة الوسيط هي: $Me = \frac{Me1+Me2}{2}$

حيث: Me1 رتبته $Rme1 = \frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 12$، إذن: Me1=12 (مباشرة من الجدول).

Me2 رتبته $Rme2 = \frac{n}{2} + 1 = \frac{20}{2} + 1 = 11$، إذن: Me2=12 (مباشرة من الجدول).

وبالتالي تكون قيمة الوسيط Me هي: $Me = \frac{Me1+Me2}{2} = \frac{12+12}{2} = 12$

أي أن العلامة (12) تتوسط وتقسم هذه العلامات إلى قسمين متساويين، قسم أصغر والآخر أكبر من هذه العلامة؛ أو بتعبير آخر فإن 50% من الطلبة حصلوا على أقل من العلامة 12، و50% حصلوا على أكبر من العلامة 12.

3/ حساب الربيع الأول Q1:

أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الأول كالآتي: $RQ1 = \frac{n+1}{4} = \frac{20+1}{4} = 5{,}25$

بما أن قيمة رتبة الربيع الأول هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=5 وL+1=6، والموافقين للقيمتين $x_5 = 7$ و $x_6 = 8$، إذن نحسب الربيع الأول كالآتي:

$$Q_1 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{n+1}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = x_5 + (x_6 - x_5)\left(\frac{20+1}{4} - 5\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 7 + (8-7)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 7,25$$

أي أن العلامة (7,25) تقسم العلامات إلى قسمين غير متساويين، قسم أصغر من هذه العلامة يتضمن 25% من العلامات، والآخر أكبر يتضمن 75% من العلامات، أو بتعبير آخر فإن 25% من الطلبة حصلوا على أقل من العلامة 7,25، و75% حصلوا على أكبر من العلامة 7,25.

4/ حساب الربيع الثالث Q3:

أولا نقوم بحساب رتبة الربيع الثالث كالآتي: $RQ3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(20+1)}{4} = 15,75$

بما أن قيمة رتبة الربيع الثالث هي عدد غير طبيعي، وهي تقع بين العددين الطبيعيين L=15 وL+1=16، والموافقين للقيمتين $x_{15} = 15$ و $x_{16} = 15$، إذن نحسب الربيع الثالث كالآتي:

$$Q_3 = x_L + (x_{L+1} - x_L)\left(\frac{3(n+1)}{4} - L\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = x_{15} + (x_{16} - x_{15})\left(\frac{3(20+1)}{4} - 15\right)$$

$$\Rightarrow Q_1 = 15 + (15-15)\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\Rightarrow Q_3 = 15$$

أي أن العلامة (15) تقسم العلامات إلى قسمين غير متساويين، قسم أصغر من هذه العلامة يتضمن 75% من العلامات، والآخر أكبر يتضمن 25% من العلامات، أو بتعبير آخر فإن 75% من الطلبة حصلوا على أقل من العلامة 15، و25% حصلوا على أكبر من العلامة 15.

5/ حساب المنوال *Mo*: نلاحظ أن هناك قيمة واحدة مكررة أكثر، وهي 12، إذن Mo=12.

أي أن العلامة (12) هي الأكثر شيوعا وتكرارا من بين العلامات التي حصل عليها الطلبة.

تمرين (3–2): ليكن لدينا البيانات الآتية: 2، 4، 5، 6، 8، 10، 12.

المطلوب: حساب الوسط التوافقي، الوسط الهندسي والوسط التربيعي؟

الحل:

1/ حساب الوسط التوافقي:

$$H_s = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} = \frac{7}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12})} = \frac{7}{1,425} \approx 4,91$$

2/ حساب الوسط الهندسي:

$$G_s = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \ldots . \times x_n}$$

$$= \sqrt[7]{2 \times 4 \times 5 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} = \sqrt[7]{230400} \approx 05,83$$

طريقة 2:

$$Log(G_S) = \frac{1}{n} . \sum_{i=1}^{n} Log(x_i)$$

$$= \frac{1}{7} . [(Log(2) + Log(4) + Log(5) + (Log(6) + Log(8) + Log(10) + Log(12)]$$

$$= \frac{5,36}{7} \approx 00,7657$$

إذن:

$$Log(G_S) = 00,7657 \Rightarrow G_S = 10^{00,7657} \approx 05,83$$

3/ حساب الوسط التربيعي:

$$MQ_s = \sqrt{\frac{\sum(x_i^2)}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 8^2 + 10^2 + 12^2}{7}} = \sqrt{\frac{389}{7}} = 07,45$$

تمرين (3–3): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

x_i	03	05	07	08	09	10
F_i	05	12	13	09	07	04

– أحسب الوسط الحسابي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث، المنوال، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي والوسط التربيعي؟

الحل:

x_i	03	05	07	08	09	10	المجموع
F_i	05	12	13	09	07	04	50
$F_i.x_i$	15	60	91	72	63	40	341
$Log(x_i)$	0,48	0,70	0,84	0,90	0,95	1	//
$F_i.Log(x_i)$	02,4	08,4	10,92	08,1	06,65	04	40,47
$\frac{F_i}{x_i}$	01,67	02,40	01,86	01,12	00,78	00,40	08,23
$F_i.x_i^2$	45	300	637	576	567	400	2525

1/ حساب الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \frac{341}{50} = 06{,}82$

2/ حساب الوسيط Me: لدينا $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{50}{2} = 25$، ثم نقوم بإيجاد قيم Fcc، كالآتي:

x_i		03		05		07		08		09		10		المجموع
F_i		05		12		13		09		07		04		50
Fcc	00		05		17		30		39		46		50	

من خلال قيم Fcc، نلاحظ أن القيمة 25، تقع بين القيمة $Fcc=17$، والقيمة $Fcc=30$، وذلك يوافق قيمة $x_i = 07$، إذن قيمة الوسيط هي $Me=07$.

3/ حساب الربيع الأول $Q1$: لدينا $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{50}{4} = 12{,}5$

من خلال قيم Fcc، نلاحظ أن القيمة 12,5، تقع بين القيمة $Fcc=05$، والقيمة $Fcc=17$، وذلك يوافق قيمة $x_i = 05$، إذن قيمة الربيع الأول هي $Q1=05$.

4/ حساب الربيع الثالث $Q3$: لدينا $\frac{3(\sum F_i)}{4} = \frac{150}{4} = 37{,}5$

من خلال قيم Fcc، نلاحظ أن القيمة 37,5، تقع بين القيمة $Fcc=30$، والقيمة $Fcc=39$، وذلك يوافق قيمة $x_i = 08$، إذن قيمة الربيع الثالث هي $Q3=08$.

5/ حساب المنوال Mo: نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي $Fi=13$، وهي تقابل قيمة قيمة $x_i = 07$، إذن قيمة المنوال هي $Mo=07$.

6/ حساب الوسط الهندسي G : $Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(x_i))}{\sum F_i} = \frac{40{,}47}{50} = 00{,}8094$

إذن: $G_P = 10^{00{,}8094} \approx 06{,}45$

7/ حساب الوسط التوافقي: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{x_i})} = \frac{50}{08{,}23} \approx 06{,}07$

8/ حساب الوسط التربيعي: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.x_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\frac{2525}{50}} \approx 07{,}11$

تمرين (3–4): لدينا عينة مكونة من 100 شخص، وجدول التوزيع التكراري لهذه العينة يتمثل في الآتي:

الفئات	[02–06[	[06–10[	[10–14[	[14–18[	[18–22[	[22–26[
Fr	0,08	0,12	0,35	0,25	0,11	0,09

المطلوب: أحسب الوسط الحسابي؟

الحل:

الفئات	[02–06[	[06–10[	[10–14[	[14–18[	[18–22[	[22–26[	المجموع
c_i	04	08	12	16	20	24	//
Fr	0,08	0,12	0,35	0,25	0,11	0,09	01
$Fr.c_i$	0,32	0,96	4,2	4	2,2	2,16	13,84
$F_i = Fr \times 100$	08	12	35	25	11	09	100
$F_i.c_i$	32	96	42	40	220	216	1384

حساب الوسط الحسابي:

الطريقة الأولى: $\bar{X} = \sum(Fr.c_i) = 13,84$

الطريقة الثانية: نقوم بحساب قيم التكرار المطلق من خلال العلاقة $F_i = Fr \times n$، حيث n هي حجم العينة (100 شخص)، ومنه يكون الوسط الحسابي هو: $\bar{X} = \frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{1384}{100} = 13,84$

تمرين (3-5): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[05-15[	[15-25[	[25-35[	[35-45[	[45-55[	[55-65[
F_i	06	09	10	08	04	03

- أحسب الوسط الحسابي، الوسط الهندسي، الوسط التوافقي، الوسط التربيعي، الوسيط، الربيع الأول، الربيع الثالث والمنوال؟

الحل:

الفئات	[05-15[	[15-25[	[25-35[	[35-45[	[45-55[	[55-65[	المجموع
مراكز الفئات c_i	10	20	30	40	50	60	//
F_i	06	09	10	08	04	03	40
$F_i.c_i$	60	180	300	320	200	180	1240
$Log(c_i)$	01	01,30	01,48	01,60	01,69	01,78	//
$F_i.Log(c_i)$	06	11,70	14,80	12,80	06,76	05,34	57,40
$\frac{F_i}{c_i}$	00,60	00,45	00,33	00,20	00,08	00,05	01,71
$F_i.c_i^2$	600	3600	9000	12800	10000	10800	46800

1/ حساب الوسط الحسابي: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{1240}{40} = 31$

2/ حساب الوسط الهندسي G: $Log(G_p) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.Log(c_i))}{\sum F_i} = \frac{57,40}{40} = 01,435$

إذن: $G_P = 10^{01,435} \approx 27,23$

3/ حساب الوسط التوافقي: $H_p = \frac{\sum F_i}{\sum(\frac{F_i}{c_i})} = \frac{40}{01,71} \approx 23,39$

4/ حساب الوسط التربيعي: $MQ_p = \sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum(F_i)}} = \sqrt{\frac{46800}{40}} \approx 34,20$

5/ حساب الوسيط: نقوم بإيجاد قيم التكرار المتجمع الصاعد كالآتي:

Σ		[55-65[		[45-55[		[35-45[		[25-35[		[15-25[		[05-15[		الفئات
40		03		04		08		10		09		06		F_i
//	40		37		33		25		15		06		0	Fcc

لدينا: $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{40}{2} = 20$، ونلاحظ أن القيمة 20 تقع بين القيمتين Fcc=15 وFcc=25، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي [25-35[، ومنه الوسيط هو:

$$\mathrm{Me} = \mathrm{L}_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 25 + \frac{20-15}{25-15} \times 10 = 30$$

6/ حساب الربيع الأول Q1:

لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{40}{4} = 10$، ومن خلال قيم Fcc نلاحظ أن القيمة 10 تقع بين القيمتين Fcc=06 وFcc=15، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي [15-25[، ومنه الربيع الأول هو:

$$\mathrm{Q1} = \mathrm{L}_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 15 + \frac{10-06}{15-06} \times 10 \approx 19,44$$

7/ حساب الربيع الثالث Q3:

لدينا: $\frac{3(\sum F_i)}{4} = \frac{120}{4} = 30$، ومن خلال قيم Fcc نلاحظ أن القيمة 30 تقع بين القيمتين Fcc=25 وFcc=33، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي [35-45[، ومنه الربيع الثالث هو:

$$\mathrm{Q3} = \mathrm{L}_0 + \frac{\frac{3(\sum F_i)}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 35 + \frac{30-25}{33-25} \times 10 \approx 42,14$$

8/ حساب المنوال: نلاحظ أن الفئات متساوية الطول، إذن لا نحسب التكرار المصحح، ونلاحظ أن أكبر قيمة لـلتكرار المطلق هي $F_i = 10$، وبالتالي الفئة المنوالية هي [25-35[، ومنه المنوال هو:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0 - F_1)}{(F_0 - F_1) + (F_0 - F_2)}.K = 25 + \frac{(10-9)}{(10-9)+(10-8)} \times 10 \approx 28,33$$

تمرين (3-6): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[05-15[	[15-35[	[35-45[	[45-65[	[65-75[	[75-85[
F_i	12	14	18	20	16	10

1/ أحسب الوسط الحسابي بالطرق الثلاث: المباشرة، الوسط الفرضي والانحرافات المختصرة؟

2/ أحسب المنوال؟

الحل:

الفئات	[05-15[	[15-35[	[35-45[	[45-65[	[65-75[	[75-85[	المجموع
مراكز الفئات c_i	10	25	40	55	70	80	//
F_i	12	14	18	20	16	10	90
$F_i.c_i$	120	350	720	1100	1120	800	4210
w_i	-45	-30	-15	00	15	25	//
$F_i.w_i$	-540	-420	-270	00	240	250	-740
$\grave{w}_i$	-02,25	01,50-	00,75-	00	00,75	01,25	//
$F_i.\grave{w}_i$	-27	21-	-13,50	00	12	12,50	-37

1/ حساب الوسط الحسابي بالطرق الثلاثة:

– **الطريقة المباشرة**: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{4210}{90} \approx 46,78$

– **طريقة الوسط الفرضي**: نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي 20، ومركز الفئة المقابلة لها هي 55، وهي الوسط الفرضي الذي يتم اختياره؛ أي: α=55 (حتى لو تم اختيار قيمة أخرى فإن الطريقة والنتيجة صحيحة، لكن فقط من أجل توحيد طرق الحل بين الطلبة).

$$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.w_i)}{\sum F_i}$$ حيث: $w_i = c_i - \alpha$

$$= 55 + \frac{(-740)}{90} \approx 46,78$$

– طريقة الانحرافات المختصرة: $$\bar{X} = \alpha + \frac{\sum_{i=1}^{n}(F_i.\grave{w}_i)}{\sum F_i}.K$$

حيث: $\grave{w}_i = \frac{w_i}{K}$ نختار K=20 (طول الفئة الأكبر)

ومنه: $$\bar{X} = 55 + \frac{(-37)}{90} \times 20 \approx 46,78$$

2/ حساب المنوال: نلاحظ أن أطوال الفئات غير متساوية، إذن لابد من اللجوء إلى حساب التكرار المصحح F_i^*، حيث: $F_i^* = \frac{F_i}{\text{طول الفئة}} \times \text{الثابت}$، نلاحظ أن طول الأكثر شيوعا هو 10، وهي قيمة الثابت، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

الفئات	[05-15[	[15-35[	[35-45[	[45-65[	[65-75[	[75-85[
طول الفئة	10	20	10	20	10	10
F_i	12	14	18	20	16	10
$\frac{F_i}{\text{طول الفئة}}$	1,2	0,7	1,8	1	1,6	1
$F_i^* = \frac{F_i}{\text{طول الفئة}} \times 10$	12	07	18	10	16	10

نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المصحح هي 18، وهي توافق الفئة [35-45[، وهي الفئة المنوالية، إذن نقوم بتطبيق القانون على هذه الفئة كالآتي:

$$Mo = L_0 + \frac{(F_0^* - F_1^*)}{(F_0^* - F_1^*) + (F_0^* - F_2^*)}.K$$

$$= 35 + \frac{(18 - 07)}{(18 - 07) + (18 - 10)}.10 \approx 35 + 05,79 \approx 40,79$$

الفصل الرابع:
مقــاييس التشتت

I- مقاييس التشتت المطلق:

1- المدى العام ET .

2- الانحراف المتوسط $e_{\bar{x}}$.

3- الانحراف الوسيط e_{Me}.

4- الانحراف الربيعي e_Q.

5- الانحراف المعياري للعينة S_x (والتباين V_x).

6- الانحراف المعياري للمجتمع σ_x.

II- مقاييس التشتت النسبي.

- ✓ تمــــارين محلــــولــة.

إذا كانت مقاييس النزعة المركزية تعطي نظرة عن كيفية ومدى تمركز القيم، فإن مقاييس التشتت على العكس من ذلك؛ حيث أن الغرض منها هو تلخيص وإعطاء نظرة عن كيفية وطبيعة انتشار وتشتت القيم.

I- مقاييس التشتت المطلق:

1- المدى العام ET: يتمثل في طول السلسلة، ويساوي أكبر قيمة في السلسلة ناقص أقل قيمة.

$$(ET = X_{max} - X_{min})$$

2- الانحراف المتوسط $e_{\bar{X}}$: هو عبارة عن المتوسط الحسابي للقيم المطلقة للانحرافات بين قيم x_i والمتوسط الحسابي $\bar{X}$.

أ/- حالة البيانات غير المبوبة:

$$e_{\bar{X}} = \frac{\sum|x_i-\bar{X}|}{n}$$

ب/- حالة البيانات المبوبة:

- المتغير الاحصائي المنفصل:

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum(F_i|x_i-\bar{X}|)}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.|x_i - \bar{X}|)$$

- المتغير الاحصائي المتصل:

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum(F_i|c_i-\bar{X}|)}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.|c_i - \bar{X}|)$$

3- الانحراف الوسيط e_{Me}: هو المتوسط الحسابي للقيم المطلقة للانحرافات بين قيم x_i والوسيط Me.

أ/- حالة البيانات غير المبوبة:

$$e_{Me} = \frac{\sum|x_i-Me|}{n}$$

ب- حالة البيانات المبوبة:

- **المتغير الاحصائي المنفصل:**

$$e_{Me} = \frac{\sum(F_i|x_i-Me|)}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.|x_i - Me|)$$

- **المتغير الاحصائي المتصل:**

$$e_{Me} = \frac{\sum(F_i|c_i-Me|)}{\sum F_i} = \sum(Fr_i.|c_i - Me|)$$

4- الانحراف الربيعي e_Q: هو نصف المدى ما بين الرُبيع الأول والرُبيع الثالث، وأهميته تتمثل في كونه مقياس للتشتت يمكن حسابه في الجداول التكرارية المفتوحة، ويحسب كالآتي:

$$e_Q = \frac{Q_3-Q_1}{2}$$

5- الانحراف المعياري للعينة S_x (والتباين V_x): الانحراف المعياري للعينة هو الجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، لكن فقط نضع في المقام للقانون n−1 بدل n (أو $\sum F_i$ بدلا $\sum F_i - 1$)

5-1- حالة البيانات غير المبوبة:

$$V_x = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})}{n-1}}$$

$$V_x = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{X})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]}$$

5-2- حالة البيانات المبوبة:

أ- المتغير الإحصائي المنفصل:

$$V_x = \frac{\sum[F_i.(x_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(x_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}}$$

$$V_x = \frac{\sum[F_i.(x_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1} = \frac{\sum\left(F_i.x_i^2\right) - (\sum F_i)(\bar{X})^2}{(\sum F_i) - 1}$$

$$= \frac{1}{(\sum F_i) - 1}\left[\sum(F_i.x_i^2) - \frac{(\sum(F_i.x_i))^2}{(\sum F_i)}\right]$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{(\sum F_i) - 1}\left[\sum(F_i.x_i^2) - \frac{(\sum(F_i.x_i))^2}{(\sum F_i)}\right]}$$

ب- المتغير الإحصائي المتصل:

$$V_x = \frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}$$

$$S_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}}$$

$$V_x = \frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1} = \frac{\sum\left(F_i.c_i^2\right) - (\sum F_i)(\bar{X})^2}{(\sum F_i) - 1}$$

$$= \frac{1}{(\sum F_i) - 1}\left[\sum(F_i.c_i^2) - \frac{(\sum(F_i.c_i))^2}{(\sum F_i)}\right]$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{(\sum F_i) - 1}\left[\sum(F_i.c_i^2) - \frac{(\sum(F_i.c_i))^2}{(\sum F_i)}\right]}$$

6- الانحراف المعياري للمجتمع σ_x: يشبه قانون الانحراف المعياري للعينة، والاختلاف فقط يتمثل أننا في حالة الانحراف المعياري للمجتمع، نضع في المقام للقانون n بدلا n-1 (أو $\sum F_i$ بدلا $\sum F_i - 1$)، فمثلا ففي حالة البيانات غير المبوبة، فالانحراف المعياري للمجتمع هو:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{V_x} = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})}{n}}$$

ملاحظة: هناك علاقات تجريبية تربط بين الانحراف الربيعي، الانحراف المعياري والانحراف المتوسط، وهذا في حالة التوزيع المتماثل، وهي:

$$e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.S_x \qquad e_Q = \frac{2}{3}.S_x$$

II- مقاييس التشتت النسبي: وتستخدم خاصة للمقارنة بين مجموعتين (سلسلتين، جدولين) لمعرفة أيهما أكثر تشتت، حيث كل مجموعة تتضمن صفة لها وحدة مختلفة عن الأخرى (مثل الطول والوزن)، فهنا المقارنة لا تكون إلا من خلال مقاييس التشتت النسبي، أما إذا كانت المجموعتين تتضمن صفتين لهما نفس الوحدة، فهنا يمكن استخدام سواء مقاييس التشتت النسبي أو المطلق.

ومن أهم مقاييس التشتت النسبي، هو معامل الاختلاف النسبي CV (coefficient de variation)، ويمكن كتابة هذا المعامل من خلال صورتين (شكلين $CV1$، $CV2$)، كالآتي:

$$CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100 \qquad CV2 = \frac{Q_3 - Q_1}{Me}.100$$

مثال (4-1): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
F_i	8	15	16	24	12

المطلوب: حساب مقاييس التشتت الآتية: $e_{\bar{x}}$، e_{Me}، e_Q، S_x، σ_x، $CV1$، $CV2$؟

الحل:

Σ	[90-100[	[80-90[	[70-80[	[60-70[	[50-60[	الفئات
	95	85	75	65	55	مركز الفئة c_i
75	12	24	16	15	8	F_i
//	17,73	07,73	02,27	12,27	22,27	$\lvert c_i - \bar{X} \rvert$
796,81	212,76	185,52	36,32	184,05	178,16	$F_i \lvert c_i - \bar{X} \rvert$
//	15,94	05,94	04,06	14,06	24,06	$\lvert c_i - Me \rvert$
802,18	191,28	142,56	64,96	210,9	192,48	$F_i \lvert c_i - Me \rvert$
//	314,35	59,75	05,15	150,55	495,95	$(c_i - \bar{X})^2$
11514,45	3772,2	1434	82,4	2258,25	3967,6	$F_i.(c_i - \bar{X})^2$

– **حساب الانحراف المتوسط** $e_{\bar{x}}$: وجدنا سابقا لهذا المثال أن $\bar{X} = 77,27$، إذن:

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum(F_i|c_i-\bar{X}|)}{\sum F_i} = \frac{796,81}{75} \approx 10,62$$

– **حساب الانحراف الوسيط** e_{Me}: وجدنا سابقا لهذا المثال أن $Me \approx 79,06$، إذن:

$$e_{Me} = \frac{\sum(F_i|c_i - Me|)}{\sum F_i} = \frac{802,18}{75} \approx 10,69$$

– **حساب الانحراف الربيعي** e_Q: لدينا: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$، إذن نقوم بحساب كل من الرُبيع الأول (Q_1) والرُبيع الثالث (Q_3)، وطريقة حسابهما مثل طريقة الوسيط (يسمى كذلك الربيع الثاني)، وذلك كالآتي:

– قيم التكرار المتجمع الصاعد تتمثل في الآتي:

Σ		[90-100[		[80-90[		[70-80[		[60-70[		[50-60[		الفئات
75		12		24		16		15		8		F_i
	75		63		39		23		8		0	Fcc

– حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{75}{4} = 18,75$، ونلاحظ أن القيمة $18,75$ تقع بين القيمتين Fcc=8 وFcc=23، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي [60-70[، ثم نقوم بتطبيق القانون على هذه الفئة لتحديد قيمة الربيع الأول بالضبط، وذلك لمعرفة أي قيمة من هذه الفئة هي الربيع الأول، وذلك كالآتي:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 60 + \frac{18{,}75 - 8}{23 - 8}.10 \approx 67{,}17$$

- حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3\times 75}{4} = 56{,}25$، ونلاحظ أن القيمة 56,25 تقع بين القيمتين Fcc=39 وFcc=63، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي]80-90]، ثم نقوم بتطبيق القانون على هذه الفئة لتحديد قيمة الربيع الثالث بالضبط، وذلك لمعرفة أي قيمة من هذه الفئة هي الربيع الثالث، وذلك كالآتي:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 80 + \frac{56{,}25 - 39}{63 - 39}.10 \approx 87{,}19$$

إذن: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{87{,}19 - 67{,}17}{2} = 10{,}01$

– حساب الانحراف المعياري للعينة (S_x): $S_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}} = \sqrt{\frac{\mathbf{11514{,}45}}{75-1}} \approx 12{,}47$

– حساب الانحراف المعياري للمجتمع (σ_x): $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i)}} = \sqrt{\frac{\mathbf{11514{,}45}}{75}} \approx 12{,}3906$

– حساب معامل الاختلاف الأول (*CV1*): مما سبق وجدنا أن: $\bar{X} = 77{,}27$، $S_x = 11{,}32$، إذن:

$$CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100 = \frac{12{,}47}{77{,}27}.100 \approx 16{,}14$$

– حساب معامل الاختلاف الثاني (*CV2*): مما سبق وجدنا أن: $Q_1 = 67{,}17$، $Q_3 = 87{,}19$، $Me = 79{,}06$، إذن:

$$CV2 = \frac{Q_3 - Q_1}{Me}.100 = \frac{87{,}19 - 67{,}17}{79{,}06}.100 \approx 25{,}32$$

تمـــارين محلولة

تمرين (4-1): ليكن جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	[50-60[
التكرار المطلق	14	20	28	22	16

- أحسب مقاييس التشتت الآتية: الانحراف المتوسط، الانحراف الوسيط، الانحراف الربيعي، الانحراف المعياري للعينة، الانحراف المعياري للمجتمع، معامل الاختلاف الأول ومعامل الاختلاف الثاني؟

الحل:

الفئات	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	[50-60[	المجموع
c_i	15	25	35	45	55	//
F_i	14	20	28	22	16	100
$F_i.c_i$	210	500	980	990	880	3560
$\lvert c_i-\bar{X}\rvert$	20,60	10,60	00,60	09,40	19,40	//
$F_i\lvert c_i-\bar{X}\rvert$	288,40	212	16,80	206,80	310,40	1034,40
Fcc	00	14	34	62	84	100
$\lvert c_i-Me\rvert$	20,71	10,71	00,71	09,29	19,29	//
$F_i\lvert c_i-Me\rvert$	289,94	214,20	19,88	204,38	308,64	1037,04
$(c_i-\bar{X})^2$	424,36	112,36	00,36	88,36	376,36	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^2$	5941,04	2247,2	10,08	1943,92	6021,76	16164

1/ حساب الانحراف المتوسط $e_{\bar{X}}$: نحسب أولا الوسط الحسابي كالآتي:

$$\bar{X}=\frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i}=\frac{3560}{100}=35,60$$

ثم نقوم بحساب الانحراف المتوسط كالآتي:

$$e_{\bar{x}}=\frac{\sum(F_i\lvert c_i-\bar{X}\rvert)}{\sum F_i}=\frac{1034,40}{100}\approx 10,34$$

2/ حساب الانحراف الوسيط e_{Me}: نقوم أولا بحساب الوسيط كالآتي:

لدينا: $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{100}{2} = 50$، ونلاحظ أن القيمة 50 تقع بين القيمتين Fcc=34 وFcc=62، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي]30-40]، ومنه الوسيط هو:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 30 + \frac{50-34}{62-34} \times 10 \approx 35{,}71$$

ومنه الانحراف الوسيط هو: $e_{Me} = \frac{\sum(F_i|c_i - Me|)}{\sum F_i} = \frac{1037{,}04}{100} \approx 10{,}37$

3/ حساب الانحراف الربيعي: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{100}{4} = 25$، ونلاحظ أن القيمة 25 تقع بين القيمتين Fcc=14 وFcc=34، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي]20-30]، ومنه الرُّبيع الأول هو:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 20 + \frac{25-14}{34-14} \times 10 = 25{,}50$$

حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3\times100}{4} = 75$، ونلاحظ أن القيمة 75 تقع بين القيمتين Fcc=62 وFcc=84، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي]40-50]، ومنه الرُّبيع الثالث هو:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 40 + \frac{75-62}{84-62} \times 10 \approx 45{,}91$$

ومنه الانحراف الربيعي هو: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{45{,}91 - 25{,}50}{2} = 10{,}205$

4/ حساب الانحراف المعياري للعينة: $S_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}} = \sqrt{\frac{16164}{99}} \approx 12{,}78$

5/ حساب الانحراف المعياري للمجتمع: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i)}} = \sqrt{\frac{16164}{100}} \approx 12{,}71$

6/ حساب معامل الاختلاف الأول: $CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100 = \frac{12{,}78}{35{,}60}.100 \approx 35{,}90$

7/ حساب معامل الاختلاف الثاني:
$$CV2=\frac{Q_3-Q_1}{Me}.100=\frac{45,91-25,50}{35,71}\times 100\approx 57,15$$

تمرين (4-2): ليكن جدول التوزيع التكراري الآتي:

x_i	01	03	05	06	07
F_i	06	07	20	18	09

-أحسب مقاييس التشتت الآتية: الانحراف المتوسط، الانحراف الوسيط، الانحراف الربيعي، الانحراف المعياري للعينة، الانحراف المعياري للمجتمع، معامل الاختلاف الأول ومعامل الاختلاف الثاني؟

الحل:

x_i	01	03	05	06	07	المجموع
F_i	06	07	20	18	09	60
$F_i.x_i$	06	21	100	108	63	298
$\|x_i-\bar{X}\|$	03,97	01,97	00,03	01,03	02,03	//
$F_i\|x_i-\bar{X}\|$	23,82	13,79	00,60	18,54	18,27	75,02
Fcc	00 06	13	33	51	60	
$\|x_i-Me\|$	04	02	00	01	02	//
$F_i\|x_i-Me\|$	24	14	00	18	18	74
$(x_i-\bar{X})^2$	15,76	03,88	0,0009	01,06	04,12	//
$F_i.(x_i-\bar{X})^2$	94,56	27,16	00,02	19,08	37,08	177,9

1/ حساب الانحراف المتوسط $e_{\bar{x}}$: نحسب أولا الوسط الحسابي كالآتي:

$$\bar{X}=\frac{\sum(F_i.x_i)}{\sum F_i}=\frac{298}{60}\approx 04,97$$

ثم نقوم بحساب الانحراف المتوسط كالآتي:
$$e_{\bar{x}}=\frac{\sum(F_i|x_i-\bar{X}|)}{\sum F_i}=\frac{75,02}{60}\approx 01,25$$

2/ حساب الانحراف الوسيط e_{Me}: نقوم أولا بحساب الوسيط كالآتي:

لدينا: $\frac{\sum F_i}{2}=\frac{60}{2}=30$، ونلاحظ أن القيمة 30 تقع بين القيمتين Fcc=13 وFcc=33، إذن الوسيط هو: $Me=05$

ومنه الانحراف الوسيط هو: $e_{Me} = \frac{\sum(F_i|x_i - Me|)}{\sum F_i} = \frac{74}{60} \approx 01{,}23$

3/ حساب الانحراف الربيعي: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{60}{4} = 15$، ونلاحظ أن القيمة 15 تقع بين القيمتين Fcc=13 وFcc=33، إذن الرُّبيع الأول هو: Q_1 =05 (نفسه الوسيط وهي حالة استثنائية فقط)

حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3 \times 60}{4} = 45$، ونلاحظ أن القيمة 45 تقع بين القيمتين Fcc=33 و Fcc=51، إذن الرُّبيع الثالث هو: $Q_3 = 06$

ومنه الانحراف الربيعي هو: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{06 - 05}{2} = 00{,}50$

4/ حساب الانحراف المعياري للعينة: $S_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(x_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i) - 1}} = \sqrt{\frac{177{,}9}{59}} \approx 01{,}74$

5/ حساب الانحراف المعياري للمجتمع: $\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(x_i - \bar{X})^2]}{(\sum F_i)}} = \sqrt{\frac{177{,}9}{60}} \approx 01{,}72$

6/ حساب معامل الاختلاف الأول: $CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100 = \frac{01{,}74}{04{,}97}.100 \approx 35{,}01$

7/ حساب معامل الاختلاف الثاني: $CV2 = \frac{Q_3 - Q_1}{M}.100 = \frac{06 - 05}{05} \times 100 \approx 20$

تمرين (3-4): ليكن لدينا مجموعتين من البيانات، المجموعة الأولى تخص أوزان عدد من الأشخاص، والمجموعة الثانية تخص أطوال عدد من الأشخاص، وكلا المجموعتين من ممثلتين في جدولين تكراريين كالآتي:

المجموعة الأولى:

الفئات	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	[100-110[	[110-120[
F_i	06	12	19	13	06	04

المجموعة الثانية:

الفئات	[140-150[	[150-160[	[160-170[	[170-180[	[180-190[	[190-200[
F_i	06	10	15	19	17	13

المطلوب: أي المجموعتين أكثر تشتت؟

الحل:

نلاحظ أن المجموعة الأولى من البيانات تخص صفة الوزن، أما المجموعة الثانية فتخص صفة الطول، ومعروف أن وحدة القياس ليس هي نفسها في المجموعتين، فوزن الاشخاص عادة يقاس بالكيلوغرام، أما طولهم فيعبر عنه عادة بالمتر أو بالسنتيمتر، إذن فينبغي استخدام مقاييس التشتت النسبي للمقارنة بين المجموعتين، ومعرفة أيهما أكثر تشتت.

أولا– حساب مقاييس التشتت النسبي للمجموعة الأولى:

الفئات	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	[100-110[	[110-120[	المجموع
c_i	65	75	85	95	105	115	//
F_i	06	12	19	13	06	04	60
$F_i.c_i$	390	900	1615	1235	630	460	5230
$(c_i-\bar{X})^2$	491,51	148,11	04,71	61,31	317,91	774,51	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^2$	2949,06	1777,32	89,49	797,03	1907,46	3098,04	10618,4
Fcc	00	06	18	37	50	56	60

– حساب معامل الاختلاف الأول: $CV1=\frac{S_x}{\bar{X}}.100$

$$\bar{X}=\frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i}=\frac{5230}{60}\approx 87{,}17$$

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^2]}{(\sum F_i)-1}}=\sqrt{\frac{10618{,}4}{59}}\approx 13{,}41$$

إذن: $CV1=\frac{13{,}41}{87{,}17}.100\approx 15{,}38$

– حساب معامل الاختلاف الثاني: $CV2=\frac{Q_3-Q_1}{Me}.100$

حساب الوسيط: لدينا: $\frac{\sum F_i}{2}=\frac{60}{2}=30$، ونلاحظ أن القيمة 30 تقع بين القيمتين Fcc=18 وFcc=37، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي [80-90[، ومنه الوسيط هو:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 80 + \frac{30-18}{37-18} \times 10 \approx 86{,}31$$

حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{60}{4} = 15$، ونلاحظ أن القيمة 15 تقع بين القيمتين Fcc=06 وFcc=18، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي [70-80[، ومنه الربيع الأول هو:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 70 + \frac{15-06}{18-06} \times 10 = 77{,}50$$

حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3\times 60}{4} = 45$، ونلاحظ أن القيمة 45 تقع بين القيمتين Fcc=37 وFcc=50، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي [90-100[، ومنه الربيع الثالث هو:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 90 + \frac{45-37}{50-37} \times 10 \approx 96{,}15$$

ومنه معامل الاختلاف الثاني هو: $CV2 = \frac{96{,}15-77{,}50}{86{,}31}.100 \approx 21{,}61$

ثانيا- حساب مقاييس التشتت النسبي للمجموعة الثانية:

الفئات	[140-150[	[150-160[	[160-170[	[170-180[	[180-190[	[190-200[	المجموع
c_i	145	155	165	175	185	195	//
F_i	06	10	15	19	17	13	80
$F_i.c_i$	870	1550	2475	3325	3145	2535	13900
$(c_i-\bar{X})^2$	826,56	351,56	76,56	01,56	126,56	451,56	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^2$	4959,36	3515,6	1148,4	29,64	2151,52	5870,28	17674,8
Fcc	00 06	16	31	50	67	80	

- حساب معامل الاختلاف الأول: $CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100$

$$\bar{X} = \frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i} = \frac{13900}{80} = 173{,}75$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^2]}{(\sum F_i)-1}} = \sqrt{\frac{17674{,}8}{79}} \approx 14{,}96$$

إذن: $CV1 = \frac{14{,}96}{173{,}75}.100 \approx 08{,}61$

- حساب معامل الاختلاف الثاني: $CV2 = \frac{Q_3-Q_1}{Me}.100$

حساب الوسيط: لدينا: $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{80}{2} = 40$، ونلاحظ أن القيمة 40 تقع بين القيمتين Fcc=31 وFcc=50، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي [170-180[، ومنه الوسيط هو:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 170 + \frac{40-31}{50-31} \times 10 \approx 174{,}74$$

حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{80}{4} = 20$، ونلاحظ أن القيمة 20 تقع بين القيمتين Fcc=16 وFcc=31، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي [160-170[، ومنه الربيع الأول هو:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 160 + \frac{20-16}{31-16} \times 10 \approx 162{,}67$$

حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3\times 80}{4} = 60$، ونلاحظ أن القيمة 60 تقع بين القيمتين Fcc=50 وFcc=67، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي [180-190[، ومنه الربيع الثالث هو:

$$\mathrm{Q}_3 = \mathrm{L}_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 180 + \frac{60-50}{67-50} \times 10 \approx 185{,}88$$

ومنه معامل الاختلاف الثاني هو: $CV2 = \frac{185{,}88-162{,}67}{174{,}74}.100 \approx 13{,}28$

إذن بالنسبة للمجموعة الأولى، فإن: $CV1 = 15{,}38 \quad CV2 = 21{,}61$

وبالنسبة للمجموعة الثانية، فإن: $CV1 = 08{,}61 \quad CV2 = 13{,}28$

ومنه نقول أن المجموعة الأولى أكثر تشتت من المجموعة الثانية، وهذا سواء بالنسبة لمعامل الاختلاف الأول أو الثاني، وهذا لأن معامل الاختلاف الأول للمجموعة الأولى أكبر من معامل الاختلاف الأول للمجموعة الثانية، وكذلك معامل الاختلاف الثاني للمجموعة الأولى أكبر من معامل الاختلاف الثاني للمجموعة الثانية.

تمرين (4-4): برهن على صحة العلاقة الآتية:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2-\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right)}$$

الحل:

$$\sigma_x=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n}}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum(x_i^2-2x_i.\bar{x}+\bar{x}^2)}$$

$$=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-2.\bar{x}.\frac{\sum x_i}{n}+\frac{\sum \bar{x}^2}{n}}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-2.\bar{x}.\bar{x}+\frac{n.\bar{x}^2}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-\left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}-\frac{(\sum x_i)^2}{n^2}}=\sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2-\frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)}$$

تمرين (4-5): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	< 10	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	>50
F_i	05	07	10	19	13	06

- أحسب مختلف مقاييس النزعة المركزية، ومقاييس التشتت الممكن حسابها؟

الحل:

الفئات	< 10	[10-20[	[20-30[	[30-40[	[40-50[	>50	المجموع
F_i	05	07	10	19	13	06	60
Fcc	00	05	12	22	41	54	60

1/ حساب الوسيط: لدينا: $\frac{\sum F_i}{2}=\frac{60}{2}=30$، ونلاحظ أن القيمة 30 تقع بين القيمتين Fcc=22 وFcc=41، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي [30-40[، ومنه الوسيط هو:

$$Me = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 30 + \frac{30-22}{41-22} \times 10 \approx 34{,}21$$

2/ حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{60}{4} = 15$، ونلاحظ أن القيمة 15 تقع بين القيمتين Fcc=12 وFcc=22، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي]20-30[، ومنه الربيع الأول هو:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 20 + \frac{15-12}{22-12} \times 10 = 23$$

3/ حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3\times60}{4} = 45$، ونلاحظ أن القيمة 45 تقع بين القيمتين Fcc=41 وFcc=54، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي]40-50[، ومنه الربيع الثالث هو:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 40 + \frac{45-41}{54-41} \times 10 \approx 43{,}08$$

4/ حساب الانحراف الربيعي: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{43{,}08-23}{2} = 10{,}04$

5/ حساب معامل الاختلاف الثاني: $CV2 = \frac{Q_3 - Q_1}{M}.100 = \frac{43{,}08-23}{34{,}21} \times 100 \approx 58{,}70$

تمرين (4-6): لدينا 8 مناطق سكانية، وقمنا بإحصاء عدد العيادات الطبية المتخصصة في طب الأطفال في كل منها فكانت النتائج كالآتي: 03، 02، 04، 05، 09، 07، 05.

المطلوب: حساب مقاييس التشتت؟

الحل:

1/ حساب الانحراف المتوسط: نقوم أولا بحساب الوسط الحسابي كالآتي:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{(2+3+4+5+5+7+9)}{07} = \frac{35}{07} = 05$$

ومنه الانحراف المتوسط هو:

$$e_{\bar{x}} = \frac{\sum|x_i-\bar{X}|}{n} = \frac{|2-5|+|3-5|+|4-5|+|5-5|+|5-5|+|7-5|+|9-5|}{07}$$

$$= \frac{3+2+1+0+0+2+4}{07} = \frac{12}{07} \approx 01,71$$

2/ حساب الانحراف الوسيط: نقوم أولا بحساب الوسيط كالآتي: نلاحظ أن عدد البيانات فردي (07)، إذن رتبة الوسيط هي $Rme = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = \frac{08}{02} = 04$، ولمعرفة قيمة الوسيط نقوم أولا بترتيب البيانات تصاعديا (لأنها معطاة غير مرتبة)، وذلك كالآتي:

$$x_7 = 09 ، x_6 = 7 ، x_5 = 5 ، x_4 = 5 ، x_3 = 4 ، x_2 = 3 ، x_1 = 2$$

نلاحظ أن القيمة ذات الرتبة الرابعة هي $x_4 = 5$، إذن الوسيط هو $Me = 05$

ونلاحظ أن قيمة الوسط الحسابي هي نفسها قيمة الوسيط، إذن دون الحاجة إلى إعادة حساب الانحراف الوسيط، فهو نفسه الانحراف المتوسط؛ أي أن:

$$Me = \bar{X} = 05 \Rightarrow e_{Me} = e_{\bar{x}} = 01,71$$

3/ حساب الانحراف الربيعي: $e_Q = \frac{Q_3-Q_1}{2}$

حساب الربيع الأول: بما أن عدد البيانات فردي، إذن رتبة الربيع الأول هي $RQ_1 = \frac{n+1}{4} = \frac{7+1}{4} = \frac{08}{04} = 02$، وحسب البيانات المرتبة سابقا تصاعديا، فإن الربيع الأول هو: $Q_1 = 3$

حساب الربيع الثالث: رتبة الربيع الثالث هي $RQ_3 = \frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(7+1)}{4} = \frac{24}{04} = 06$، وحسب البيانات المرتبة سابقا تصاعديا، فإن الربيع الثالث هو: $Q_3 = 7$

ومنه الانحراف الربيعي هو : $e_Q = \frac{7-3}{2} = 02$

4/ حساب الانحراف المعياري للعينة: $S_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n-1}}$

$$= \sqrt{\frac{(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{7-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{9+4+1+0+0+4+16}{6}} = \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 02$$

5/ حساب الانحراف المعياري للمجتمع:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n}} = \sqrt{\frac{24}{7}} \approx 01{,}85$$

6/ حساب معامل الاختلاف الأول:

$$CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100 = \frac{02}{05} \times 100 = 40$$

7/ حساب معامل الاختلاف الثاني:

$$CV2 = \frac{Q_3-Q_1}{Me}.100 = \frac{7-3}{05} \times 100 = 80$$

تمرين (4-7): قمنا بدراسة عينتين احصائيتين، والجدول الآتي يلخص بعض المعطيات لكلتا العينتين:

البيان	n	$\sum x_i$	$\sum x_i^2$
العينة الأولى	20	620	21300
العينة الثانية	30	840	25400

1/ أي العينتين أكثر تشتت؟

2/ بافتراض أن توزيع العينة الأولى متماثل، أوجد قيمة المنوال والوسيط؟

3/ بافتراض أن توزيع العينة الثانية قريب من التماثل، وإذا علمت أن الوسيط يساوي 30,50، فأوجد قيمة المنوال؟

الحل:

1/ للمقارنة بين العينتين، ومعرفة أيهما أكثر تشتت، نقوم بحساب معامل الاختلاف لكل منهما، كالآتي:

العينة الأولى: نلاحظ أنه لا يمكن حساب معامل الاختلاف الثاني، لأن المعطيات غير كافية.

حساب معامل الاختلاف الأول:

$$CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100$$

حساب الوسط الحسابي:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{620}{20} = 31$$

حساب الانحراف المعياري: $S_x = \sqrt{\frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$، نلاحظ أنه حسب هذه الصيغة لقانون الانحراف المعياري، فإن المعطيات لا تسمح بحسابه، إذن نختار الصيغة المناسبة، وهي كالآتي:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{20-1}\left(21300 - \frac{(620)^2}{20}\right)} = \sqrt{\frac{1}{19}(2080)} \approx 10{,}46$$

ومنه معامل الاختلاف الأول للعينة الأولى هو: $CV1 = \frac{10{,}46}{31}.100 \approx 33{,}74$

العينة الثانية: مثل العينة الأولى، فإنه لا يمكن حساب إلا معامل الاختلاف الأول، وذلك كالآتي:

$$CV1 = \frac{S_x}{\bar{X}}.100$$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{840}{30} = 28$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} = \sqrt{\frac{1}{30-1}\left(25400 - \frac{(840)^2}{30}\right)} = \sqrt{\frac{1}{29}(1880)} \approx 08{,}05$$

ومنه معامل الاختلاف الأول للعينة الثانية هو: $CV1 = \frac{08{,}05}{28}.100 = 28{,}75$

نلاحظ أن $CV1 = 33{,}74$ للعينة الأولى أكبر من $CV1 = 28{,}75$ للعينة الثانية، إذن نقول أن العينة الأولى أكثر تشتت من العينة الثانية، وهذا حسب معيار المقارنة المتمثل في معامل الاختلاف الأول.

2/ حساب المنوال والوسيط للعينة الأولى: توزيع العينة الأولى متماثل معناه أن الوسط الحسابي يساوي الوسيط ويساوي المنوال، أي: $\bar{X} = Me = Mo = 31$

3/ حساب المنوال للعينة الثانية: توزيع العينة الثانية قريب من التماثل، معناه أن العلاقة التي تربط بين الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال، ليست علاقة مساواة، بل هناك علاقة أخرى تربط بينهم، وهي كالآتي:

$$(\bar{X} - Mo) = 3.(\bar{X} - Me) \Rightarrow (28 - Mo) = 3.(28 - 30{,}50)$$

$$\Rightarrow Mo = 28 + 07{,}50 = 35{,}50$$

تمرين (4-8):

1/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $\bar{X} = 10; \ \sum x_i = 250; \quad S_x^2 = 08{,}25$

أحسب الوسط التربيعي والانحراف المتوسط، علما أن هذا التوزيع متماثل؟

2/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $\sum \frac{1}{x} = 1{,}50; \quad \sum x^2 = 6430; \quad n = 20;$

$Me = 16{,}50; \quad Mo = 14{,}70$

أحسب الوسط الهندسي والانحراف المعياري للعينة، علما أن هذا التوزيع قريب من التماثل؟

3/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $Q_1 = 06; e_x = 02; \ m_2 = 70; \ Me = 08$

- أحسب الانحراف المعياري للمجتمع، علما أن التوزيع متماثل؟

4/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $\sum x_i = 375; H = 10; \ G = 12{,}50; \ S_x^2 = 13{,}375$

- أحسب المتوسط التربيعي والانحراف المتوسط، علما أن التوزيع متماثل؟

5/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $m_1 = 15; m_2 = 260; \ \sum x_i^2 = 5200$

- أحسب الانحراف المتوسط، علما أن التوزيع متماثل؟

6/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $\bar{X} = 19; MQ = 21; \ Q_1 = 07; \ n = 10$

- أحسب الانحراف المعياري للعينة والربيع الثالث، علما أن التوزيع متماثل؟

الحل:

1/ حساب الوسط التربيعي والانحراف المتوسط:

حساب الوسط التربيعي: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \mathrm{n} = \frac{\sum x_i}{\bar{X}} = \frac{250}{10} = 25$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} \Rightarrow S_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum x^2 = S_x^2.(n-1) + \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sum x^2 = 08{,}25.(25-1) + \frac{(250)^2}{25} \Rightarrow \sum x^2 = 2698$$

ومنه يكون الوسط التربيعي هو: $MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{2698}{25}} \approx 10{,}39$

حساب الانحراف المتوسط: بما أن التوزيع متماثل، فإنه في هذه الحالة هناك علاقة رياضية تربط بين الانحراف المعياري للعينة والانحراف المتوسط، وهي كالآتي: $e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.S_x \Rightarrow e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.\sqrt{08{,}25} \approx 02{,}30$

2/ حساب الوسط الهندسي والانحراف المعياري للعينة:

بما أن التوزيع قريب من التماثل، إذن نستخدم العلاقة الرياضية التي تربط بين الوسط الحسابي، الوسيط والمنوال، وذلك كالآتي: $(\bar{X} - Mo) = 3.(\bar{X} - Me) \Rightarrow \bar{X} = \frac{3Me - Mo}{2}$

$$\Rightarrow \bar{X} = \frac{3(16{,}50) - 14{,}70}{2} \Rightarrow \bar{X} = 17{,}40$$

$$H = \frac{n}{\sum\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{20}{01{,}50} \approx 13{,}33$$

ومنه يكون الوسط الهندسي هو: $G = \sqrt{\bar{X}.H} \Rightarrow G = \sqrt{17{,}40 \times 13{,}33} \approx 15{,}23$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \sum x_i = n.\bar{X} \Rightarrow \sum x_i = 20(17{,}40) = 348$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right)} \Rightarrow S_x = \sqrt{\frac{1}{20-1}\left(6920 - \frac{(348)^2}{20}\right)}$$

$$\Rightarrow S_x \approx 06{,}75$$

3/ حساب الانحراف المعياري للمجتمع:

بما أن التوزيع متماثل، إذن يكون: $Me = \bar{X} = Mo = 08$

نعلم كذلك أن: $m_1 = \bar{X} = 08$

إذن نجد : $U_2 = \sigma_x^2 = m_2 - m_1^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = 70 - (08)^2 \Rightarrow \sigma_x^2 = 06 \Rightarrow \sigma_x \approx 02,45$

4/ حساب المتوسط التربيعي والانحراف المتوسط:

لدينا: $G = \sqrt{\bar{X}.H} \Rightarrow \bar{X} = \frac{G^2}{H} \Rightarrow \bar{X} = \frac{(12,50)^2}{10} = 15,625$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \text{n} = \frac{\sum x_i}{\bar{X}} = \frac{375}{15,625} = 24$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} \Rightarrow S_x^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \sum x^2 = S_x^2.(n-1) + \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}$$

$$\Rightarrow \sum x^2 = 13,375.(24-1) + \frac{(375)^2}{24} \Rightarrow \sum x^2 = 6167$$

ومنه يكون الوسط التربيعي هو: $MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{6167}{24}} \approx 16,03$

حساب الانحراف المتوسط: بما أن التوزيع متماثل، فإنه يكون:

$$e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.S_x \Rightarrow e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.\sqrt{13,375} \approx 02,92$$

5/ حساب الانحراف المتوسط: $m_2 = \frac{\sum x_i^2}{n} \Rightarrow n = \frac{\sum x_i^2}{m_2} \Rightarrow n = \frac{5200}{260} = 20$

$$m_1 = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \sum x_i = n \times m_1 = 20 \times 15 = 300$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} \Rightarrow S_x = \sqrt{\frac{1}{20-1}\left(5200 - \frac{(300)^2}{20}\right)}$$

$$\Rightarrow S_x = \sqrt{\frac{700}{19}} \Rightarrow S_x \approx 06{,}07$$

بما أن التوزيع متماثل، فإنه يكون: $e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.S_x \Rightarrow e_{\bar{x}} = \frac{4}{5}.06{,}07 = 04{,}856$

6/ حساب الانحراف المعياري للعينة والربيع الثالث:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \sum x_i = n \times (\bar{X}) = 10 \times 19 = 190$$

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \Rightarrow \sum x_i^2 = n \times (MQ)^2$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = 10 \times (21)^2 = 4410$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}\right)} \Rightarrow S_x = \sqrt{\frac{1}{10-1}\left(4410 - \frac{(190)^2}{10}\right)}$$

$$\Rightarrow S_x = \sqrt{\frac{800}{09}} \Rightarrow S_x \approx 09{,}43$$

بما أن التوزيع متماثل إذن يكون: $e_Q = \frac{2}{3}.S_x \Rightarrow e_Q = \frac{2}{3} \times (09{,}43) = 06{,}29$

ومنه يكون: $e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \Rightarrow Q_3 = 2e_Q + Q_1 \Rightarrow Q_3 = 2(06{,}29) + 07$

$$\Rightarrow Q_3 = 19{,}58$$

الفصل الخامس:

مقاييـــس الشكـــل

I- العـــزوم:

I-1- العـــزوم اللامركزية.

I-2- العـــزوم المركزية.

I-3- العلاقة بين العـــزوم المركزية والعزوم اللامركزية.

II- الالتواء:

II-1- معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة).

II-2- معامل بيرسون للالتواء.

II-3- معامل يول للالتواء.

III- التفرطح.

✓ تمـــارين محلـولـــة.

الغرض من مقاييس الشكل، هو إعطاء صورة عن شكل (منحنى) انتشار القيم، وذلك لمعرفة مدى اعتباره مفرطح أو مدبب، ملتوي نحو اليمين أو نحو اليسار.

I- العـــزوم: عبارة عن قيم احصائية تكون حول نقطة البدء (الصفر)، أو حول المتوسط الحسابي، ورتبة العزم تتحدد بدرجة القوة (الأس) التي ترفع إليها القيم أو انحرافاتها عن الصفر أو المتوسط الحسابي، ويتم دراستها هنا، لأنها تدخل في حساب مقاييس الشكل (التي هي محور دراستنا هنا).

I-1- العـــزوم اللامركزية: هي قيم احصائية من الرتبة r ($r \in N$)، تتمركز حول الصفر ($b=0$).

نرمز للعزم اللامركزي بـ m_r، حيث r تشير إلى درجة العزم، فمثلا: m_1 هو العزم اللامركزي الأول (من الدرجة الأولى)، m_2 هو العزم اللامركزي الثاني (من الدرجة الثانية)، m_3 هو العزم اللامركزي الثالث (من الدرجة الثالثة)،.....وهكذا.

أ- البيانات غير المبوبة: القانون العام للعزوم اللامركزية هو: $m_r = \frac{\sum x_i^r}{n}$

وبالتالي يكون: $m_1 = \frac{\sum x_i}{n}$، $m_2 = \frac{\sum x_i^2}{n}$، $m_3 = \frac{\sum x_i^3}{n}$.......الخ.

ب- البيانات المبوبة:

- المتغير المنفصل: القانون العام في هذه الحالة هو: $m_r = \frac{\sum (F_i . x_i^r)}{\sum F_i} = \sum (Fr . x_i^r)$

من خلال القانون العام يمكن حساب مختلف العزوم كالآتي:

$$m_1 = \frac{\sum (F_i . x_i)}{\sum F_i} = \bar{X} \text{، } m_2 = \frac{\sum (F_i . x_i^2)}{\sum F_i} = \sum (Fr . x_i^2) \text{، } m_3 = \frac{\sum (F_i . x_i^3)}{\sum F_i} = \sum (Fr . x_i^3) \text{...الخ.}$$

- المتغير المتصل: القانون العام في هذه الحالة هو: $m_r = \frac{\sum (F_i . c_i^r)}{\sum F_i} = \sum (Fr . c_i^r)$

من خلال القانون العام يمكن حساب مختلف العزوم كالآتي:

$$m_1 = \frac{\sum (F_i . c_i)}{\sum F_i} = \bar{X} \text{، } m_2 = \frac{\sum (F_i . c_i^2)}{\sum F_i} = \sum (Fr . c_i^2) \text{، } m_3 = \frac{\sum (F_i . c_i^3)}{\sum F_i} = \sum (Fr . c_i^3) \text{...الخ.}$$

I-2- العـــزوم المركزية: هي قيم احصائية من الرتبة r ($r\in N$)، تتمركز حول الوسط الحسابي ($b=\bar{X}$).

نرمز للعزم اللامركزي بـ $\boldsymbol{U_r}$، حيث r تشير إلى درجة العزم، فمثلا: $\boldsymbol{U_1}$ هو العزم المركزي الأول (من الدرجة الأولى)، $\boldsymbol{U_2}$ هو العزم المركزي الثاني (من الدرجة الثانية)، $\boldsymbol{U_3}$ هو العزم المركزي الثالث (من الدرجة الثالثة)،.....وهكذا.

أ- البيانات غير المبوبة: القانون العام للعزوم المركزية هو: $U_r = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^r}{n}$

وبالتالي يكون: $U_1 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})}{n} = 0$، $U_2 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^2}{n} = \sigma_x^2$، $U_3 = \frac{\sum(x_i-\bar{X})^3}{n}$.......الخ.

ب- البيانات المبوبة:

- المتغير المنفصل: القانون العام في هذه الحالة هو: $U_r = \frac{\sum[F_i.(x_i-\bar{X})^r]}{\sum F_i}$

ومنه يكون: $U_1 = \frac{\sum[F_i.(x_i-\bar{X})]}{\sum F_i} = 0$، $U_2 = \frac{\sum[F_i.(x_i-\bar{X})^2]}{\sum F_i} = \sigma_x^2$،

$U_3 = \frac{\sum\left[F_i.(x_i-\bar{X})^3\right]}{\sum F_i}$....الخ.

- المتغير المتصل: القانون العام في هذه الحالة هو: $U_r = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^r]}{\sum F_i}$

ومنه يكون: $U_1 = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})]}{\sum F_i} = 0$، $U_2 = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^2]}{\sum F_i} = \sigma_x^2$،

$U_3 = \frac{\sum\left[F_i.(c_i-\bar{X})^3\right]}{\sum F_i}$....الخ.

I-3- العلاقة بين العـــزوم المركزية والعزوم اللامركزية:

$$U_2 = m_2 - m_1^2$$

$$U_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$$

$$U_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

II– الالتواء:

II–1– معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة):

$$\gamma_F = \frac{U_3}{\sigma_x^3}$$

II–2– معامل بيرسون للالتواء: وهنا يمكن أن نميز بين:

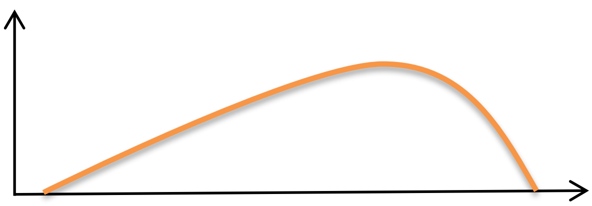
معامل بيرسون الأول $\gamma_1 = \frac{\bar{X}-Mo}{\sigma_x}$ معامل بيرسون الثاني: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X}-Me)}{\sigma_x}$

II–3– معامل يول للالتواء: يعتمد على الرُبيعيات، وبالتالي عكس المعاملات السابقة التي تعتمد على الوسط الحسابي وبالتالي لا يمكن استخدامها في الجداول المفتوحة؛ لأنه لا يمكن في الجداول المفتوحة حساب الوسط الحسابي، فإن هذا المعامل يمكن استخدامه في الجداول المغلقة والمفتوحة، ويُرمز له بـ : $\boldsymbol{\gamma_3}$ ، حيث:

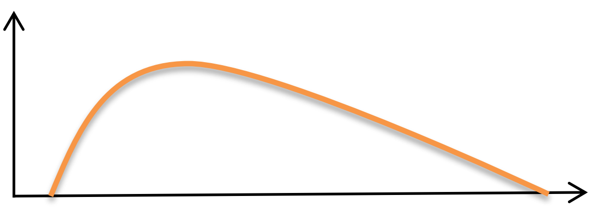
$$\gamma_3 = \frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_1)}$$

ملاحظة: من خلال قيم معاملات الالتواء يمكن أن نحكم على شكل الالتواء، وليس شرط أن تدل كل المعاملات على نفس الاتجاه للالتواء؛ أي أنه قد يكون حسب بعض قيم المعاملات فإن شكل التوزيع ملتوي نحو اتجاه معين، وحسب معاملات أخرى فإن شكل التوزيع ملتوي نحو اتجاه آخر، ويمكن التمييز بين الحالات الثلاثة الآتية:

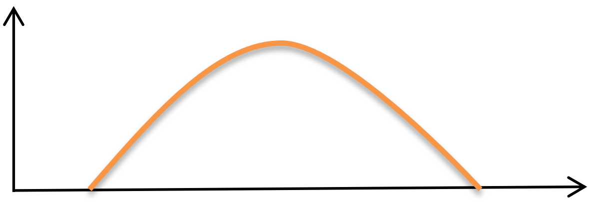
- الالتواء سالب (التواء نحو اليسار): معناه تكون قيمة المعامل أقل تماما من الصفر (قيمة سالبة)، ويكن شكل الالتواء كالآتي:



- الالتواء موجب (التواء نحو اليمين): معناه تكون قيمة المعامل أكبر تماما من الصفر (قيمة موجبة)، ويكن شكل الالتواء كالآتي:



– غير ملتوي: معناه تكون قيمة المعامل تساوي الصفر، ويكون شكل الالتواء متناظر؛ أي أن الجزء على اليمين من قمة المنحنى (الذروة) يطابق ويناظر الجزء على اليسار، وذلك كالآتي:



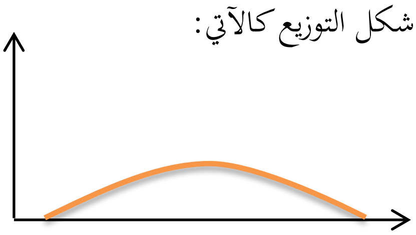
III– التفرطح

III– التفرطح: يُرمز لمعامل التفرطح بـ $\boldsymbol{K}$، حيث:

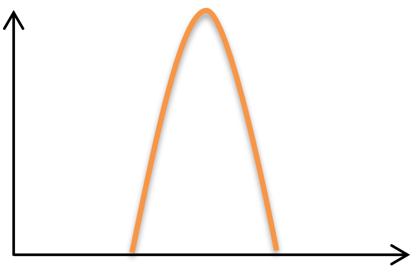
$$K = \frac{U_4}{U_2^2} = \frac{u_4}{\sigma_x^4}$$

ونميز بين الحالات الآتية:

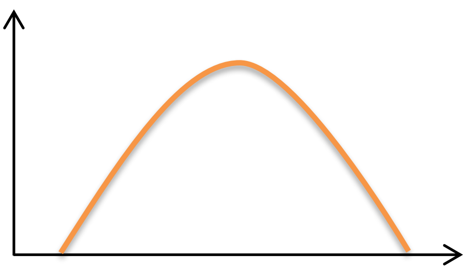
– إذا كان: $K < 3$ فإن التوزيع مفرطح، ويكون شكل التوزيع كالآتي:



– إذا كان: $K > 3$ فإن التوزيع مدبب؛ ويكون شكل التوزيع كالآتي:



– إذا كان: $K = 3$ فيكون التوزيع معتدل القمة؛ ويكون شكل التوزيع كالآتي:



ملاحظة: قد يكون الشكل يأخذ أحد حالات التفرطح، وفي نفس الوقت يأخذ أي حالة من حالات الالتواء، فمثلا قد يكون الشكل مفرطح وملتوي نحو اليسار، أو مدبب وغير ملتوي،...الخ.

تمارين محلولة

تمرين (5-1): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[
F_i	8	15	16	24	12

المطلوب:

1- حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4؟

2- حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4؟

3- استنتاج شكل الالتواء لهذا التوزيع؟

4- حساب مختلف معاملات الالتواء، وما هو شكل الالتواء لهذا التوزيع؟

5- حساب معامل التفرطح K، وهل التوزيع مفرطح القمة؟

الحل:

الفئات	[50-60[	[60-70[	[70-80[	[80-90[	[90-100[	Σ
c_i	55	65	75	85	95	//
F_i	8	15	16	24	12	75
$F_i.c_i^3$	1331000	4119375	6750000	14739000	10288500	37227875
$F_i.c_i^4$	73205000	267759375	506250000	1252815000	977407500	3077436875
$(c_i-\bar{X})^3$	-11039,96	-1845,79	-11,65	462,48	5576,59	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^3$	-88319,68	-27668,85	-186,4	11099,52	66919,08	-38156,65
$(c_i-\bar{X})^4$	245823,52	22641,80	26,40	3576,51	98891,34	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^4$	1966588,16	339627	422,4	85836,24	1186696,08	3579169,88

1- حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4:

$$m_1=\frac{\Sigma(F_i.c_i)}{\Sigma F_i}=\bar{X}\approx 77,26667$$ (تم حسابه سابقا)

$$m_2 = \frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i} = \left(\sqrt{\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i}}\right)^2 = (MQ)^2 = (78{,}2538)^2 \approx 6123{,}6667$$

$$m_3 = \frac{\sum(F_i.c_i^3)}{\sum F_i} = \frac{37227875}{75} \approx 496371{,}6667$$

$$m_4 = \frac{\sum(F_i.c_i^4)}{\sum F_i} = \frac{3077436875}{75} = 41032491{,}67$$

2- حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4:

$$U_1 = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})]}{\sum F_i} = 0$$

$$U_2 = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^2]}{\sum F_i} = \sigma_x^2 = (12{,}3906)^2 \approx 153{,}53$$ (تم حساب x سابقا)

$$U_3 = \frac{\sum\left[F_i.(c_i-\bar{X})^3\right]}{\sum F_i} = \frac{-38156{,}65}{75} \approx -508{,}75$$

$$U_4 = \frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^4]}{\sum F_i} = \frac{3579169{,}88}{75} \approx 47722{,}26$$

3- استنتاج شكل الالتواء لهذا التوزيع: مما سبق وجدنا أن: $\bar{X} = 77{,}27$، $Me = 79{,}06$، $Mo = 84$، إذن نلاحظ أن: $Mo = 84 > Me = 79{,}06 > \bar{X} = 77{,}2667$، إذن يمكن أن نستنتج مسبقا أن التوزيع ملتوي نحو اليسار؛ أي سالب الالتواء.

4- حساب مختلف معاملات الالتواء:

- معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة):

$$\gamma_F = \frac{U_3}{\sigma_x^3} = \frac{-508{,}75}{(12{,}39)^3} = \frac{-508{,}75}{1902{,}01} \approx -0{,}27$$

- معامل بيرسون للالتواء:

معامل بيرسون الأول: $$\gamma_1 = \frac{\bar{X}-Mo}{\sigma_x} = \frac{(77{,}27-84)}{12{,}39} \approx -0{,}54$$

معامل بيرسون الثاني: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X}-Me)}{\sigma_x} = \frac{3(77,27-79,06)}{12,39} = \frac{-5,37}{12,39} \approx -0,43$

– معامل يول للالتواء: وجدنا قبل أن: $Q_1 = 67,17$، $Q_3 = 87,19$، $Me = Q_2 = 79,06$، إذن يمكن حساب معامل يول كالآتي:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{(87,19 - 79,06) - (79,06 - 67,17)}{(87,19 - 67,17)}$$
$$= \frac{18,13 - 11,89}{20,02} \approx 00,31$$

نلاحظ أن مختلف معاملات الالتواء التي تم حسابها، ذات قيم سالبة (باستثناء معامل يول)، إذن فالتوزيع هو سالب الالتواء (ملتوي نحو اليسار)، وهذا من منطلق أغلب معاملات الالتواء المحسوبة، وهذا ما يؤكد استنتاجه سابقا.

5– حساب معامل التفرطح: $K = \frac{U_4}{U_2^2} = \frac{u_4}{\sigma_x^4} = \frac{47722,26}{(12,39)^4} = \frac{47722,26}{23565,96} \approx 02,025$

نلاحظ أن $K<3$، إذن فالتوزيع مفرطح القمة.

تمرين (5–2): ليكن لدينا جدول التوزيع التكراري الآتي:

الفئات	[00–02[	[02–04[	[04–06[	[06–08[	[08–10[
F_i	03	05	08	06	02

المطلوب:

1– حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4؟

2– حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4؟

3– استنتاج قيمة العزوم المركزية: U_2، U_3، U_4، وهذا بالاعتماد على قيمة العزوم اللامركزية؟

4– حساب مختلف معاملات الالتواء، وما هو شكل الالتواء لهذا التوزيع؟

5– حساب معامل التفرطح K، وهل التوزيع مفرطح القمة؟

الحل:

الفئات	[00-02[	[02-04[	[04-06[	[06-08[	[08-10 [	Σ
c_i	01	03	05	07	09	//
F_i	03	05	08	06	02	24
$F_i.c_i$	03	15	40	42	18	118
$F_i.c_i^2$	03	45	200	294	162	704
$F_i.c_i^3$	03	135	1000	2058	1458	4654
$F_i.c_i^4$	03	405	5000	14406	13122	32936
$(c_i-\bar{X})^2$	15,34	03,67	0,0069	04,34	16,67	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^2$	46,02	18,35	0,055	26,04	33,34	123,805
$(c_i-\bar{X})^3$	-60,10	-07.04	0,00057	09,04	68,07	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^3$	-180,3	-35,2	0,00456	54,24	136,14	-25,115
$(c_i-\bar{X})^4$	235,40	13,50	0,000047	18,82	277,92	//
$F_i.(c_i-\bar{X})^4$	706,2	67,5	0,000376	112,92	555,84	1442,46
Fcc	00	03	08	16	22	24

1– حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى: m_1، m_2، m_3، m_4:

$$m_1=\frac{\sum(F_i.c_i)}{\sum F_i}=\bar{X}=\frac{118}{24}\approx 04,917$$

$$m_2=\frac{\sum(F_i.c_i^2)}{\sum F_i}=\frac{704}{24}\approx 29,33$$

$$m_3=\frac{\sum(F_i.c_i^3)}{\sum F_i}=\frac{4654}{24}\approx 193,92$$

$$m_4=\frac{\sum(F_i.c_i^4)}{\sum F_i}=\frac{32936}{24}=1372,33$$

2– حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى: U_1، U_2، U_3، U_4:

$$U_1=\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})]}{\sum F_i}=0$$

$$U_2=\frac{\sum[F_i.(c_i-\bar{X})^2]}{\sum F_i}=\sigma_x^2=\frac{123,805}{24}\approx 05,158$$

$$U_3=\frac{\sum\left[F_i.(c_i-\bar{X})^3\right]}{\sum F_i}=\frac{-25,115}{24}\approx -01,046$$

$$U_4=\frac{\sum\left[\boldsymbol{F_i}.(\boldsymbol{c_i}-\bar{\boldsymbol{X}})^{\boldsymbol{4}}\right]}{\sum \boldsymbol{F_i}}=\frac{1442,46}{\boldsymbol{24}}\approx 60,10$$

3- استنتاج قيمة العزوم المركزية*: $\boldsymbol{U_2}$، $\boldsymbol{U_3}$، $\boldsymbol{U_4}$:

$$U_2=m_2-m_1^2=29,33-(04,917)^2\approx 05,153$$

$$U_3=m_3-3m_2m_1+2m_1^3=193,92-3(29,33)(04,917)+2(04,917)^3$$

$$=193,92-432,65+237,75=-00,98$$

$$U_4=m_4-4m_3m_1+6m_2m_1^2-3m_1^4$$

$$=1372,33-4(193,92)(04,917)+6(29,33)(04,917)^2-3(04,917)^4$$

$$=1372,33-3814,02+4254,65-1753,56=59,4$$

4- حساب مختلف معاملات الالتواء:

- حساب معامل فيشر للالتواء (معامل الالتواء العزمي/الطريقة الدقيقة):

$$\sigma_x^2=05,158\Rightarrow\sigma_x\approx 02,27$$

$$\gamma_F=\frac{U_3}{\sigma_x^3}=\frac{-01,046}{(02,27)^3}=\frac{-01,046}{11,69}\approx -0,089$$

- حساب معامل بيرسون للالتواء:

معامل بيرسون الأول: $\gamma_1=\frac{\bar{X}-Mo}{\sigma_x}$

نقوم أولا بحساب المنوال: نلاحظ أن أكبر قيمة للتكرار المطلق هي 8، وهي توافق الفئة [4-6[، ومنه المنوال هو:

$$Mo=L_0+\frac{(F_0-F_1)}{(F_0-F_1)+(F_0-F_2)}.K=04+\frac{(08-05)}{(08-05)+(08-06)}\times 02=05,20$$

* نشير إلى أن قيمة العزوم المركزية عند حسابها بالطريقة الغير مباشرة قد تكون مختلفة عن الطريقة المباشرة، وهذا بسبب الأعداد بالفاصلة، والتي يتم تقريبها وليس لخطأ ما، وهو ما يلاحظ في هذا السؤال، وهذا عند الحساب بالآلة الحاسبة أما عند الحساب ببرنامج Excel سنجد نفس النتيجة للطريقتين، أما عندما تكون الأعداد بالفاصلة غير مقربة فيتم الحصول على نفس النتيجة (أنظر الصفحة رقم 99).

$$\gamma_1 = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma_x} = \frac{(04,917 - 05,20)}{02,27} \approx -0,12$$

معامل بيرسون الثاني: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X} - Me)}{\sigma_x}$

نقوم أولا بحساب الوسيط: لدينا: $\frac{\sum F_i}{2} = \frac{24}{2} = 12$، ونلاحظ أن القيمة 12 تقع بين القيمتين Fcc=08 وFcc=16، إذن الفئة التي ينتمي إليها الوسيط هي]04-06]، ومنه الوسيط هو:

$$\mathrm{Me} = \mathrm{L}_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{2} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 04 + \frac{12 - 08}{16 - 08} \times 02 = 05$$

إذن: $\gamma_2 = \frac{3(\bar{X} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3(04,917 - 05)}{02,27} \approx -0,11$

– **حساب معامل يول للالتواء:** وجدنا Me=05 (نفسه الربيع الثاني)، إذن نقوم بحساب كل من الرُّبيع الأول والثالث، كالآتي:

حساب الربيع الأول: لدينا: $\frac{\sum F_i}{4} = \frac{24}{4} = 06$، ونلاحظ أن القيمة 06 تقع بين القيمتين Fcc=03 وFcc=08، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الأول هي]02-04]، ومنه الربيع الأول هو:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 02 + \frac{06 - 03}{08 - 03} \times 02 = 03,20$$

حساب الربيع الثالث: لدينا: $\frac{3\sum F_i}{4} = \frac{3\times 24}{4}$ 18، ونلاحظ أن القيمة 18 تقع بين القيمتين Fcc=16 وFcc=22، إذن الفئة التي ينتمي إليها الربيع الثالث هي]06-08]، ومنه الربيع الثالث هو:

$$Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3\sum F_i}{4} - Fcc_1}{Fcc_2 - Fcc_1} \times K = 06 + \frac{18 - 16}{22 - 16} \times 02 \approx 06,67$$

ومنه معامل يول هو:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{(06,67 - 05) - (05 - 03,20)}{(06,67 - 03,20)}$$
$$= \frac{01,67 - 01,80}{03,47} \approx -0,037$$

نلاحظ أن جميع معاملات الالتواء التي تم حسابها، ذات قيم سالبة، إذن فالتوزيع هو سالب الالتواء (ملتوي نحو اليسار)، وهذا من منطلق جميع معاملات الالتواء المحسوبة.

5- حساب معامل التفرطح: $K=\frac{U_4}{U_2^2}=\frac{u_4}{\sigma_x^4}=\frac{\mathbf{60,10}}{(\mathbf{02,27})^4}=\frac{60,10}{26,55}\approx 02,26$

نلاحظ أن $K<3$، إذن فالتوزيع مفرطح القمة.

تمرين (5-3): ليكن لدينا البيانات الأولية الآتية:

14 12 12 12 08 07 05 05 03 02

المطلوب: حساب ما يلي:

1/ العزوم اللامركزية الأربعة الأولى؟

2/ العزوم المركزية الأربعة الأولى بالطريقة المباشرة؟

3/ العزوم المركزية بدلالة العزوم اللامركزية؟

الحل:

80	14	12	12	12	08	07	05	05	03	02	x_i
804	196	144	144	144	64	49	25	25	09	04	x_i^2
9068	2744	1728	1728	1728	512	343	125	125	27	08	x_i^3
108468	38416	20736	20736	20736	4096	2401	625	625	81	16	x_i^4
164	36	16	16	16	00	01	09	09	25	36	$(x_i-\bar{X})^2$
12	216	64	64	64	00	-01	-27	-27	-125	-216	$(x_i-\bar{X})^3$
4148	1296	256	256	256	00	01	81	81	625	1296	$(x-\bar{X})^4$

1- حساب العزوم اللامركزية الأربعة الأولى:

$$m_1=\frac{\sum(x_i)}{n}=\bar{X}=\frac{80}{10}=08$$

$$m_2=\frac{\sum(x_i^2)}{n}=\frac{804}{10}=80,40$$

$$m_3=\frac{\sum(x_i^3)}{n}=\frac{9068}{10}=906,8$$

$$m_4 = \frac{\sum(x_i^4)}{n} = \frac{108468}{10} = 10846{,}8$$

2- حساب العزوم المركزية الأربعة الأولى:

$$U_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})}{n} = 0$$

$$U_2 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^2}{n} = \sigma_x^2 = \frac{164}{10} = 16{,}40$$

$$U_3 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^3}{n} = \frac{12}{10} = 01{,}20$$

$$U_4 = \frac{\sum(x_i - \bar{X})^4}{n} = \frac{4148}{10} = 414{,}8$$

3/ حساب العزوم المركزية بدلالة العزوم اللامركزية:

$$U_2 = m_2 - m_1^2 = 80{,}40 - (08)^2 = 16{,}40$$

$$U_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 906{,}8 - 3(80{,}40)(08) + 2(08)^3$$

$$= 906{,}8 - 1929{,}6 + 1024 = 01{,}20$$

$$U_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

$$= 10846{,}8 - 4(906{,}8)(08) + 6(80{,}40)(08)^2 - 3(08)^4$$

$$= 10846{,}8 - 29017{,}6 + 30873{,}6 - 12288 = 414{,}8$$

تمرين (5-4): ليكن لدينا البيانات الاحصائية الآتية:

$$\sum F_i = 100; \quad Me = 06{,}30; \quad Mo = 07; \quad Q_1 = 04{,}60; \quad Q_3 = 12{,}30;$$

$$\sum F_i.x_i = 820; \quad \sum F_i.x_i^2 = 7600; \quad \sum F_i.x_i^3 = 78000; \quad \sum F_i.x_i^4 = 903000;$$

المطلوب: أحسب معامل الالتواء العزمي، معامل بيرسون الأول والثاني للالتواء، معامل يول للالتواء ومعامل التفرطح العزمي؟

الحل:

1/ حساب العزوم اللامركزية:

$$m_1 = \frac{\sum(F_i.x_i)}{\sum F_i} = \bar{X} = \frac{820}{100} = 08,20$$

$$m_2 = \frac{\sum(F_i.x_i^2)}{\sum F_i} = \frac{7600}{100} = 76$$

$$m_3 = \frac{\sum(F_i.x_i^3)}{\sum F_i} = \frac{78000}{100} = 780$$

$$m_4 = \frac{\sum(F_i.x_i^4)}{\sum F_i} = \frac{903000}{100} = 9030$$

2/ حساب العزوم المركزية بدلالة العزوم اللامركزية:

$$U_1 = 00$$

$$U_2 = \sigma_x^2 = m_2 - m_1^2 = 76 - (08,20)^2 = 08,76$$

$$U_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3 = 780 - 3(76)(08,20) + 2(08,20)^3$$

$$= 780 - 1869,6 + 1102,736 = 13,136$$

$$U_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$$

$$= 9030 - 4(780)(08,20) + 6(76)(08,20)^2 - 3(08,20)^4$$

$$= 9030 - 25584 + 30661,44 - 13563,65 = 543,79$$

3/ حساب معاملات الالتواء والتفرطح:

معامل الالتواء العزمي: $$\gamma_F = \frac{U_3}{\sigma_x^3} = \frac{13,136}{\left(\sqrt{08,76}\right)^3} = \frac{13,136}{25,927} \approx 00,51$$

معامل بيرسون الأول للالتواء: $$\gamma_1 = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma_x} = \frac{08,20 - 07}{\sqrt{08,76}} = \frac{01,20}{02,96} \approx 00,40$$

معامل بيرسون الثاني للالتواء: $$\gamma_2 = \frac{3(\bar{X} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3(08,20 - 06,30)}{02,96} = \frac{05,70}{02,96} \approx 01,92$$

معامل يول للالتواء:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{(12{,}30 - 06{,}30) - (06{,}30 - 04{,}60)}{(12{,}30 - 04{,}60)} = \frac{04{,}30}{07{,}70} \approx 00{,}558$$

نلاحظ أن جميع معاملات الالتواء التي تم حسابها، ذات قيم موجبة، إذن فالتوزيع موجب الالتواء (ملتوي نحو اليمين)، وهذا من منطلق جميع معاملات الالتواء المحسوبة.

معامل التفرطح: $K = \frac{u_4}{\sigma_x^4} = \frac{U_4}{U_2^2} == \frac{543{,}79}{(\mathbf{08{,}76})^2} = \frac{543{,}79}{76{,}74} \approx 07{,}086$

نلاحظ أن $K>3$، إذن فالتوزيع مدبب القمة.

تمرين (5-5):

1/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $Q_1 = 04;\ \ e_x = 02{,}40;\ \ Me = 05$

- أحسب معامل يول للالتواء، علما أن التوزيع متماثل؟

2/ ليكن لدينا المعطيات الآتية: $Mo = 13{,}10;\ MQ = 14;\ \sum x_i = 124;\ \ n = 12$

- أحسب معامل بيرسون الثاني للالتواء، علما أن التوزيع قريب من التماثل؟

3/ لدينا: $m_1 = 12; m_2 = 190;\ U_4 = 3980$

- أحسب معامل التفرطح؟

الحل:

1/ **بما أن التوزيع متماثل إذن يكون:** $e_x = \frac{4}{5}\ \ {}_x\Rightarrow S_x = \frac{5}{4}\ \ {}_x\Rightarrow S_x = \frac{5}{4}(02{,}40) = 03$

$$e_Q = \frac{2}{3} S_x \Rightarrow e_Q = \frac{2}{3}(03) = 02$$

$$e_Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \Rightarrow Q_3 = 2(e_Q) + Q_1 \Rightarrow Q_3 = 2(02) + 04 = 08$$

إذن معامل يول للالتواء هو:

$$\gamma_3 = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{(Q_3 - Q_1)} = \frac{(08 - 05) - (05 - 04)}{(08 - 04)} = \frac{02}{04} = 00,50$$

2/ حساب معامل بيرسون الثاني للالتواء:

$$MQ = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \Rightarrow \sum x_i^2 = n \times (MQ)^2$$

$$\Rightarrow \sum x_i^2 = 12 \times (14)^2 = 2352$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right)} \Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{12}\left(2352 - \frac{(124)^2}{12}\right)}$$

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{89,22} \Rightarrow \sigma_x \approx 09,44$$

بما أن التوزيع قريب من التماثل، إذن يكون:

$$(\bar{X} - Mo) = 3.(\bar{X} - Me) \Rightarrow Me = \frac{2\bar{X} + Mo}{3}$$

$$\Rightarrow Me = \frac{2(\frac{124}{12}) + 13,10}{3} \Rightarrow Me \approx 11,25$$

ومنه يكون معامل بيرسون الثاني

$$\gamma_2 = \frac{3(\bar{X} - Me)}{\sigma_x} = \frac{3 \times \left(\frac{124}{12} - 11,25\right)}{09,44} \approx -00,29$$

ونشير إلى أنه في حالة حساب معامل بيرسون الأول للالتواء، فإننا نجد أنه يساوي معامل بيرسون الثاني (باستثناء بعض التقريب الذي قد ينتج بسبب الفواصل)، وهذا لأن التوزيع قريب من التماثل، وذلك كالآتي:

$$\gamma_1 = \frac{(\bar{X} - Mo)}{\sigma_x} = \frac{\left(\frac{124}{12} - 13,10\right)}{09,44} \approx -00,29$$

3/ حساب معامل التفرطح: لدينا: $U_2 = m_2 - m_1^2 \Rightarrow U_2 = 190 - (12)^2 \Rightarrow U_2 = 46$

إذن معامل التفرطح هو: $K = \frac{U_4}{U_2^2} = \frac{2980}{(\mathbf{46})^2} = \frac{3980}{2116} \approx 01,88$

امتحانات مقترحة

جامعة 8 ماي 1945 قالمة السنة الجامعية 2013–2014

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير المدة الزمنية: ساعة ونصف (1.30سا)

السنة الأولى جذع مشترك

الامتحان النهائي للإحصاء الوصفي

تعليمات مهمة للطلبة:

- لا يستخدم القلم الأحمر في أي حال من الأحوال على ورقة الإجابة
- يجب أن تكون الإجابات واضحة (بدون تشطيب أو تضخيم)
- تأخذ كافة النتائج النهائية برقمين بعد الفاصلة مع التقريب

التمرين الأول (06 نقاط):

1– لتكن لدينا المعطيات التالية:

لتكن لدينا المعطيات التالية: $\bar{X} = 18,15 \quad \sum x = 363 \quad S_x^2 = 16,25$

أحسب قيمة المتوسط التربيعي، ثم قيمة الانحراف المتوسط الحسابي، علما أن هذا التوزيع هو توزيع متماثل

2– لتكن لدينا المعطيات التالية: $m_2 = 60; \quad Me = 6,5; \quad Q_1 = 4; e_{\bar{x}} = 3$

إذا علمت أن هذا التوزيع هو توزيع متماثل، حدد قيمة كل من: $\gamma_F; \ \sigma_x$

3– بفرض أن لدينا توزيع قريب من التماثل، فإذا علمت أن:

$$\sum \frac{1}{x} = 1,34; \quad \sum x^2 = 3936; \quad n = 15; \quad Me = 14,3; \quad Mo = 14,1$$

أحسب قيمة المتوسط الهندسي، ثم قيمة الانحراف المعياري للعينة

التمرين الثاني (14 نقطة)

ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

الفئات	20–10	30–20	40–30	50–40	60–50
التكرارات	25	25	60	30	20

المطلوب حساب:

1– كافة مقاييس النزعة المركزية

2– كافة مقاييس التشتت

3– كافة مقاييس الشكل (بالطرق الدقيقة والتقريبية)

جامعة 8 ماي 1945 قالمة **السنة الجامعية 2013–2014**

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير **المقياس: الإحصاء الوصفي**

السنة الأولى جذع مشترك **المدة: ساعة ونصف**

الامتحان الاستدراكي

التمرين الأول (08 نقاط)

ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي

الفئات	5–0	15–5	20–15	35–20	40–35	60–40
التكرارات	12	20	8	36	6	48

أحسب قيمة: المنوال، الانحراف المتوسط الحسابي، الانحراف بالنسبة للوسيط، الانحراف الربيعي ومعامل الاختلاف الأول؟

التمرين الثاني (07 نقاط)

ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

الفئات	16–8	24–16	32–24	40–32	48–40
التكرارات	6	15	10	11	8

أحسب قيمة: المتوسط الهندسي، المتوسط التربيعي، معامل بيرسون للالتواء الأول والثاني؟

التمرين الثالث (05 نقاط)

لتكن لدينا المعطيات التالية: $\sum F_i x_i = 544$ $S_x^2 = 21,99$ $\bar{X} = 13,6$

$$\sum F_i x_i^2 = 8256 \qquad \sum F_i x_i^3 = 134656 \qquad \sum F_i x_i^4 = 2307072$$

حدد قيمة معامل الالتواء العزمي ومعامل التفرطح العزمي؟

جامعة 8 ماي 1945 قالمة — السنة الجامعية 2014–2015

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير — مقياس: الاحصاء الوصفي

السنة الأولى جذع مشترك — المدة الزمنية: ساعتان (2سا)

الامتحان النهائي

تعليمات: يجب على الطالب (ة) احترام التعليمات التالية

- يمنع استخدام القلم الأحمر على ورقة الاجابة (خاص بالأستاذ المصحح)
- يجب أن تكون الإجابات واضحة ودقيقة (دون تضخيم و/أو تشطيب)
- كل الجداول الخاصة بالحسابات تكون على ورقة المحاولات، ولا تكتب على ورقة الاجابة إلا المعدلات والنتائج
- تؤخذ كافة النتائج النهائية (بالنسبة لكل قيمة) برقمين بعد الفاصلة مع التقريب

التمرين الاختياري الأول (06 نقاط)

فيما يلي البيانات الاحصائية التالية:

$$\sum F_i x_i = 12960,\quad \sum F_i x_i^2 = 1596800,\quad \sum F_i x_i^3 = 210912000,\quad \sum F_i x_i^4 = 29527040000,$$
$$\sum F_i = 200,\quad Mo = 56,\quad Me = 61,\quad Q_1 = 56,\quad Q_3 = 68$$

أحسب قيمة كل من معامل الالتواء العزمي، معاملي بيرسون الأول والثاني للالتواء، معامل يول للالتواء ومعامل التفرطح العزمي

التمرين الاختياري الثاني (06 نقاط)

1– بفرض أن التوزيع محل الدراسة هو توزيع متماثل، فإذا علمت أن: $\mu_4 = 3267\,;\ m_2 = 289\,;$
$\sum x^2 = 4335;\ m_1 = 16$

أحسب قيمة كل من معامل التفرطح والانحراف المتوسط الحسابي

2– لتكن لدينا المعطيات التالية: $MQ = 15;\ \sum x = 139;\ \ n = 10;\ Mo = 14,2$

إذا علمت أن هذا التوزيع قريب من التماثل، حدد قيمة كل من S_x و γ_2

3– لتكن لدينا المعطيات التالية: $Q_1 = 2,08;\ n = 8;\ \ MQ = 17,5;\ \bar{x} = 17$

إذا علمت أن هذا التوزيع هو توزيع متماثل، حدد قيمة كل من S_x و Q_3

التمرين الإجباري (14 نقطة)

ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي

الفئات	50–70	70–90	90–110	110–130	130–150	150–170	170–190
التكرارات	8	10	16	22	30	18	10

أحسب قيمة كل من: $\bar{X}$، G، H، MQ، Mo، Me، Q_1، Q_3، $e_{\bar{X}}$، e_{Me}، e_Q، S_x، σ_x، CV_1، CV_2

بالتوفيق للجميع

جامعة 8 ماي 1945 قالمة السنة الجامعية 2017–2018

كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير مدة الامتحان: ساعة

السنة الأولى جذع مشترك التاريخ: 2018/06/21

الامتحان الاستدراكي لمقياس الإحصاء 01

ملاحظات هامة:

1– تكون الاجابات على شكل: قانون، تعويض، نتيجة نهائية.

2– تؤخذ كل النتائج برقمين بعد الفاصلة مع التقريب.

3– لا تستخدم القلم الأحمر

تمرين: ليكن لدينا التوزيع التكراري التالي:

الفئات	0–5	5–10	10–20	20–25	25–40	40–45
التكرارات	5	10	20	15	30	20

أحسب المقاييس الإحصائية التالية: $\bar{X}$، G، H، MQ، Mo، Q_1، Me، Q_3، $e_{\bar{X}}$، e_Q، S_x،

σ_x، CV_1، CV_2، γ_F

جامعــة 8 مــاي 1945 – قالمـة | كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
السنة الأولى جذع مشترك | الموسم الجامعي 2020/2019 | المدة الزمنية: ساعة و 50 دقيقة
الاسم الكامل للطالب:.......................... رقم التسجيل:............................... الفوج:.......
الرقم السري: .... (خاص بالإدارة) | الثلاثاء: 28/01/ 2020

الرقم السري:.............. (خاص بالإدارة) | العلامة: ..../20

الامتحان النهائي في مقياس إحصاء 1

ملاحظة هامة: تكون الإجابة على الشكل التالي: القانون = التعويض العددي = النتيجة النهائية مثل ما يلي: $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{100}{10} = 10$
كما يُحتفظ برقمين بعد الفاصلة مع التقريب في جميع العمليات. ويُمنع استعمال اللون الأحمر.

التمرين الأول (6 نقاط): البيانات التالية تمثل التكرارات المتجمعة لـ 120 شخص ينشطون في السوق المالي حسب عدد الأسهم التي يمتلكها كل شخص منهم في محفظته المالية. هؤلاء الأشخاص موزمون بالتساوي على مجموعتين (المجموعة الأولى والمجموعة الثانية).

عدد الأسهم (x_i)	1	2	3	4	5
التكرار المتجمع الصاعد (Fcc) للمجموعة الأولى	8	20	40	52	60
التكرار المتجمع النازل (Fcd) للمجموعة الثانية	60	49	22	15	4

أحسب المقاييس التالية:

المجموعة الأولى:	المجموعة الثانية:
عدد الأسهم الأكثر شيوعاً : (Mo)	الربيع الأول: (Q_1) ....
متوسط عدد الأسهم: $(\bar{x})$	متوسط عدد الأسهم: $(\bar{x})$ ....
عدد الأسهم الوسيط: (Me)	الربيع الثالث: (Q_3) ....
الانحراف المعياري للعينة: (S_x)	الانحراف المعياري للعينة: (S_x) ....
معامل الاختلاف الأول: (CV_1)	معامل الاختلاف الأول: (CV_1) ....
ما طبيعة التوزيع التكراري للمجموعة الأولى مع التبرير؟..	
أي المجموعتين أكثر تشتتاً مع التبرير ؟..	

أقلب الصفحة

$1/_2$

<u>التمرين الثاني (14 نقطة):</u> أراد باحث أن يدرس توزيع الأجور الشهرية (10^3 دج) التي يحصل عليها عمال مؤسسة ما، حيث قام بجمع البيانات المبينة في الجدول التالي عن 40 عامل في هذه المؤسسة.

50	51	50	60	48	46	58	42	56	30	36	35	34	32	55	32	57	31	54	40
50	60	60	59	59	46	58	57	31	57	41	55	32	54	30	54	53	51	52	51

بافتراض أن هذا الباحث قام بتقسيم هذه البيانات إلى ستة (6) فئات، أحسب ما يلي:

متوسط الأجور بطريقة الوسط الفرضي: ($\bar{x}$)	متوسط الأجور بالطريقة المباشرة: ($\bar{x}$) ....
الأجر الوسيط: (Me)	الأجر السائد: (Mo) ....
الربيع الثالث: (Q_3)	الربيع الأول: (Q_1) ....
المتوسط التوافقي: (H)	المتوسط الهندسي: (G) ....
الانحراف المتوسط: (e^{-})	المتوسط التربيعي: (MQ) ....
الانحراف المعياري للمجتمع: (σ_x)	الانحراف الوسيط: (e_{Me}) ....
معامل الاختلاف الثاني: (CV_2)	الانحراف الربيعي: (e_Q) ....

بالتوفيـــــق

$^2/_2$

الخـــــــــاتمة

الخاتمة

تم التطرق في هذه المطبوعة إلى المحاور الأساسية للإحصاء الوصفي، وتم التقيد بالبرنامج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي في الجزائر، وبما يتلاءم مع المستوى العام والاحتياجات العلمية لمختلف وعموم الطلبة (وليس للطلبة المتفوقين فقط) ، ويبقى هذا المقياس وهذا العلم، مجاله واسع، فيمكن للطلبة المتميزين والمتفوقين، والراغبين في التعمق أكثر، الرجوع إلى مختلف المراجع المتوفرة والكثيرة في مجال الاحصاء الوصفي، فذلك سيكون أكثر سهولة بعد أن يتم اكتساب المعارف الأساسية، والاحاطة بالإطار العام للإحصاء الوصفي.

أتمنى التوفيق والنجاح لجميع الطلبة والأساتذة، وخاصة طلبة وأساتذة جامعة 8 ماي 1945 قالمة، وكل إنسان راغب وطامح في النجاح، وأي استفسارات أو أخطاء في المطبوعة أرجوا تنبيهي بها؛ لأن هذا العمل ما هو إلا جهد بشري، وبالتالي فطبيعي وأكيد أنه لا يخلوا من النقص والتقصير.

الحمـــد لله الذي بنعمـــته تتم الصالحـات

المراجع

المراجع

1- أحمد عبد السميع طبيّه، **مبادئ الإحصاء**، ط1، الأردن: دار البداية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.

2- أنيس اسماعيل كنجو، **الاحصاء والاحتمال**، ط1، السعودية: مكتبة العبيكان للنشر، 2000.

3- بشيشي وليد، **الإحصاء 1**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة، 2016/2015.

4- بيري نورة، **الإحصاء 1**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة، 2017/2016.

5- جلاطو جيلالي، **الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة**، ط 8، الجزائر: ديوان المطبوعات الجامعية، 2010.

6- حيدوشي عاشور، **محاضرات في الاحصاء الوصفي**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة أكلي محند أولحاج –البويرة-، 2016/2015.

7- سعدو عادل، **محاضرات وتطبيقات في الإحصاء 1**، غير منشورة، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة.

8- مشعلي بلال، **الإحصاء 1**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة 8 ماي 1945 – قالمة، 2019/2018.

9- معوشي عيماد، **محاضرات في الإحصاء الوصفي**، مطبوعة بيداغوجية، كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة يحي فارس – المدية، 2019/2018.

10- موراي شبيجل، **الإحصاء – سلسلة ملخصات شوم**، ترجمة شعبان عبد الحميد شعبان، ط 7، مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، 2004.

11- موراي شبيجل وآخرون، **الاحتمالات والاحصاء – سلسلة ملخصات شوم**، ترجمة محمود علي أبو النصر ومصطفى جلال مصطفى، ط 1، مصر: الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، 2004.