République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatiques
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

Mlle. BOURENEB Bochra et Mlle. GHENANOUA Khadidja

Intitulé

Comportement Asymptotique D'une Equation Des Ondes Avec Des Types De Kernels Pas Nécessairement Décroissante.

Dirigé par : Mohammed Es-salih Aries

Devant le jury

PRESIDENT	**Pr.** Sakrani Samia	**PROF**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.** M. Es-s Aries	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.** Rebiai Ghani	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Juin 2021

Table des matières

Remerciements

En premier lieu, nous voudrions à remercier chaleureusement le directeur de recherche **Dr ARIES MOHAMMED ES-SALIH** pour sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse.

Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif et m'encourager pendant ces années. Il m'a témoigné sa confiance.

Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette mémoire. Pour tout cela,nons ne l'en remercierions jamais assez.

Nous remercons **Prof. Sakrani Samia**, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de cette mémoire.

Nous remercons également le **Dr. Rebiai Ghania**, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Durant mes années de recherche à l'université de **08 Mai 1945 de Guelma**, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

nous voudrions remercier ma famille, en particulier mon père et ma mère, ma soeur et mes frères, pour leur amour et leur soutien sans faille.

Nous les remercie de m'avoir supporté et encouragé pendant les moments de doute.

Nous n'aurions jamais pu faire cette mémoire sans eux. Enfin, toute personne ayant aidé de près où de loin à la réalisation de cette mémoire est vivement remerciée.

Résumé

Dans cet article nous considérons un problème qui se pose dans laviscoélasticité.Nous prouvons un décroissance exponentielle des solution sous des hypothèses plus faibles que celles fréquemment utilisées dans la littérature.En particulier,les pas nécessairement exposés décroissant essentiellement à zéro comme on l'avait suposé auparavant.Les résultats actuels améliorent également un travaux antérieurs des auteurs.

Keywords : Exponential decay ; Memory term ; Relaxation function ; Viscoelasticity.

Abstract

In this paper we consider a problem which arises in viscoelasticity.We prove an exponential decay of solutions under weaker assumptions than the ones frequently used in the literature.In particular,the kernels we are considering are not necessarily exponentially decaying to zero as was assumed before.The present results improve also a previous work of the authors.

Keywords : Exponential decay ; Memory term ; Relaxation function ; Viscoelasticity.

[redacted]

[redacted]

[redacted]

Introduction

Dans cette mémoire on s'intéresse à l'étude le comportement asymptotique du problème linéaire d'une équation intégro-différentielle.On montrera que l'énergie du système décroit exponentiellement vers zéro, quand le temps tend vers l'infini, en présence d'une dissipation linéaire, pourvu que le noyau dans le terme mémoire est aussi exponentiellement décroissant. De nouvelles hypothèses seront considérées. Le problème (P) de l'équation des ondes suivant avec un terme non local en temps et une dissipation interne faible.

$$\begin{cases} u_{tt} + a(x)u_t = \Delta u - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{P}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Les fonctions $u_0(x)$ et $u_1(x)$ sont des données initiales et la fonction de relaxation $h(t)$ sera fixée plus loin.

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité, (voir [17] pour la discussion de l'origine de ces modèles). Des problèmes similaires et aussi des versions non linéaires ont été discutés par plusieurs auteurs (voir [1] , [2] , [3] , [5] , [15] ,). Pour des problèmes similaires avec des noyaux singuliers intégrables et non intégrables, le lecteur pourra aussi consulter [6] , [7] , [9] , [10] , [13] , [14]. Dans [1] , le problème a été considéré sur un domaine étoilé avec une dissipation non linéaire $g(u_t)$. D'autre part, le taux de convergence vers zéro n'a pas été trouvé. Dans tous ces travaux l'hypothèse suivante sur le terme noyau

$$h'(t) \leq -\xi h(t), \ \forall t \geq 0 \tag{$P\prime$}$$

a été imposée.

Dans ce travail on donnera un taux de convergence explicite pour la solution de problème (P). C'est l'objectif de ce chapitre. On montrera que la solution est exponentièllement asymptotiquement stable pourvu que le noyau qui apparait dans le terme mémoire soit aussi exponentiellement décroissant vers zéro.De plus, nous remplaçons l'hypothèse ci-dessus qui est fréquemment utilisée par les conditions

$$h^{'}(t) \leq 0 \quad \text{et } e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0,\infty), \quad \text{pour un certain } \ \alpha > 0.$$

Aucune autre condition sur la dérivée de $h(t)$ n'a été supposée. Notre méthode a deux avantages : Elle est simple (aucune machinerie lourde n'est nécessaire) et ça couvre un certain nombre de noyaux qui n'ont pas été traités précédemment (par exemple les noyaux constants sur des sous-intervalles). A cette fin, une nouvelle fonctionnelle de type Lyapounov a été établie. En effet, nous modifierons l'énergie associée au système en ajoutant un terme convenablement choisi, ce qui nous permet d'éliminer certains termes indésirables.

Chapitre 1

Rappels et Définitions

Afin de facilité la lecture de ce travail il nous a paru utile de rappeler quelques élément d'analyse fonctionnelles et leurs principales proprétés.

1.1 Espace L^p

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. L'espace $L^p(\Omega)$, $p \in [1, +\infty[$ est l'espace vectoriel des (classes de) fonctions u définies sur Ω à valeur dans $\mathbb{k}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que u est mesurable et $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω. L'espace $L^p(\Omega)$ muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{pour } p \in [1, +\infty[$$

est un espace de Banach.

Définition 1.1.2 *On appelle $L^\infty(\Omega)$ l'espace constitué des (classes de) fonctions mesurables et bornées presque partout sur Ω. Muni de la norme*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess\, |u(x)|$$

où

$$\sup_{x \in \Omega} ess\, |u(x)| = \{\inf \ C \succ 0 \ tel\ que\ \ |u(x)| \leq C \ p.p\ sur\ \Omega\}.$$

Remarque 1.1.1 *$L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de Banach.Dans le cas où $p = 2$, $L^{2}(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx$$

est un espace de Hilbert.

1.2 Notions de base sur les distributions

1.2.1 Rappels et définitions

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) définie par $f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_n(x_1, ..., x_n))$. Rappelons que l'application f est de classe $\mathbb{C}^k$ sur Ω, ce que l'on note par $f \in \mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, si toutes les dérivées partielles d'ordre inferieure ou égal à $\mathbb{k}$ sont des fonction continues sur Ω. L'espace $\mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$ ou $\mathbb{C}^k(\Omega, \mathbb{C})$ selon le contexte est noté par $\mathbb{C}^k(\Omega)$.

1.2.2 Fonction de classe $\mathbb{C}^{\infty}(\Omega)$ à support compact

Définition 1.2.1 *Soit une fonction continue ϕ définie sur un espace topologique X et à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. le support de la fonction ϕ est*

$$\sup(\phi) = \overline{\{x \in X,\ \phi(x) \neq 0\}}.$$

L'espace de base $D(\Omega)$

Définition 1.2.2 *On appelle espace des fonctions d'essai, et que l'on note par $D(\Omega)$, l'espace des fonction ϕ définies et indéfiniment dérivables et à support compact dans Ω. Autrement dit*

$$D(\Omega) = \{\text{espace des fonctions } C^{\infty} \text{ à support compact } \subset \Omega\}.$$

On désigne par $D(\bar{\Omega})$ l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$.

1.2.3 Espace des distributions $D'(\Omega)$

Définition 1.2.3 *(Notion et carectérisation de distribution)Soient $n \geq 1$ un entier et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une distribution T sur Ω est une forme linéaire sur $D'(\Omega)$ à valeur réelles (ou complexes) vérifiant la propriété de continuité suivante :*

Pour tout compact K, il existe $C_K \succ 0$ et $p_K \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout fonction $\varphi \in D(\Omega)$ avec $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| .$$

Autrement dit

$$T \in D'(\Omega) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \quad \forall \varphi \in D(\Omega), \varphi \to \langle T, \varphi \rangle \text{ est linéaire de } D(\Omega) \text{ dans } \mathbb{R}. \\ 2) \quad \text{Si } \varphi_j \to 0 \text{ dant } D(\Omega) \text{ alors } \langle T, \varphi_j \rangle \to 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases}$$

On note toujours par $D'(\Omega)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) des distributions sur Ω (à valeurs respectivement réelles ou complexes).

1.3 Espaces de sobolev

Définition 1.3.1 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, un entier $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, \infty]$.L'espace de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = v \in L^p ; D^\alpha v \in L^p(\Omega), \text{ pour } |\alpha| \leq m$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{,m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, pour\ 1 \leq p \prec +\infty$$

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup ess\, |D^\alpha u(x)|, pourp = +\infty.$$

Evidemment

$$\|v\|_{W^{m,p(\Omega)}} = L^p(\Omega) .$$

On vérifie sans peine que les espaces $\|v\|_{W^{0,p(\Omega)}}$ munis de la norme ainsi définie sont des espaces de Banach. C'est une conséquence facile du fait que $L^p(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{L^p(\Omega)}$est complet, du fait qu'une suite des fonctions convergeont dans $L^p(\Omega)$ converge dans $D'(\Omega)$ vers la même limite, et enfin de la continuité de la dérivation dans $D'(\Omega)$ .Un cas particulier très important de ces espaces de Sobolev et celui où $p = 2$.On note que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

Par rapport aux espaces de sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, les espace $H^m(\Omega)$ possèdent une propriété supplémentaire fort agréable ; ce sont des espaces de Hilbert, pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$$

où l'on rappelle que

$$(\varphi,\psi)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \bar{\varphi}(x)\,\psi(x)\,dx$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$|u|_{H^m(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace $H_0^1(\Omega)$ désigne la fermeture de l'espace $D(\Omega)$ dans la norme $H^1(\Omega)$.

$$H_0^1(\Omega) = D(\Omega)^{H^1(\Omega)}$$

Formule de Green

On définit les traces de u sur la frontière Γ par l'application linéaire continue, appelé trace

$$\begin{cases} \gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \qquad u \to u/_\Gamma \end{cases}$$

Théorème 1.3.1 *La fonction* $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est surjective et son noyau est l'espace* $H_0^1(\Omega)$.

Proposition 1.3.1 *(**Formule de Green**). Soit* Ω *un ouvert borné régulier de* $\mathbb{R}^n$. *Si* $f, g \in H^1(\Omega)$ *,alors pour* $1 \leq i \leq n$, *on a*

$$\int_\Omega f \frac{\partial g}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega g \frac{\partial f}{\partial x_i} dx + \int_\Gamma (\gamma_0 f)\ (\gamma_0 g)\, \nu_i d\Gamma,$$

où $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ *est la normale unitaire extèrieure à* Γ.*Si* $f \in H^2(\Omega)$ *et* $g \in H^1(\Omega)$ *,on a **la formule de Green :***

$$\int_\Omega \nabla f \nabla g dx = -\int_\Omega \Delta f g dx + \int_\Gamma g \frac{\partial f}{\partial \nu} d\Gamma.$$

1.4 Quelques inégalités

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposent conjugué de p c'est à dire

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Inégalité de Hölder

Théorème 1.4.1 *Soient* $f \in L^p(\Omega)$ *et* $g \in L^q(\Omega)$, *alors* $fg \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Remarque 1.4.1 *Si* $p = q = 2$ *on aura l'inégalité de **Cauchy-Schwarz.***

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégualité de poincaré

Théorème 1.4.2 *Soit* Ω *un ouvet borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière assez régulière. Alors*

$$\|u\|_2 \leq B \|\nabla u\|_2 \text{, pour } u \in H_0^1(\Omega)$$

où $B^{-1} = \inf_{u \neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$.

Inéqalité de Young

Théorème 1.4.3 *Soient* $1 \prec p, q \prec \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $a, b \geq 0$.*Alors pour tout* $\eta \succ 0$,

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^q$$

où

$$C_\eta = \frac{1}{q(\eta p)^{\frac{p}{q}}},$$

1.5 Lemmes de types Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du types gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration.

Lemme 1.5.1 *Soient* m,$\eta \in C([0,T];\mathbb{R})$ *telles que* $m(t) \geq 0$ *et* $n(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et soit* $a \geq 0$. *si* $\Psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *est une fonction telle que :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t \eta(s)\,\Psi(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)\ \ ds\right) \exp\left(\int_0^t \eta(s)\ \ ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

Pour le particulier $m = 0$, ce lemme devient :

Corollaire 1.5.1 *Soit* $\eta \in C([0,T;\mathbb{R}])$ *tel que* $\eta(t) \geq 0$ *pour tout* $t \in [0,T]$ *et soit* $a \geq 0$.*si* $\Psi \in C([0,T];\mathbb{R})$ *est une fonction telleque :*

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t \eta(s)\,\Psi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\Psi(t) \leq a \exp\left(\int_0^t \eta(s)\ \ ds\right) \forall t \in [0,T].$$

1.6 La résolvante

Nous rappelons la notion de la résolvante de l'équation

$$u"(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s)\, Au(s)\, ds = 0, \tag{1.1}$$

où A est un opérateur linéaire auto adjoint sur X avec domaine dense $D(A)$ et $g \in L^1_{loc}(0, \infty)$ (voir [11], pour les noyaux réguliers).

Définition 1.6.1 *Une famille* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *des opérateurs linéaires bornés dans* X *est appelée* ***la résolvante*** *de l'équation* (1.1) *si les conditions suivantes sont vérifiées :*

(S1) $S(0) = I$ et fortement continue sur $[0, \infty)$, *i.e.* pour tout $x \in X$, $S(.)\, x$ est continue,

(S2) $S(t)$ commute avec $A : S(t)\, D(A) \subset D(A)$ et

$$AS(t)\, x = S(t)\, Ax, \quad x \in D(A), \quad t \geq 0,$$

(S3) pour tout $x \in D(A)$, $S(.)\, x$ est deux fois continûment différentiable dans X sur $[0, \infty)$ et $S'(0)\, x = 0$,

(S4) pour tout $x \in D(A)$ et tout $t \geq 0$,

$$S"(t)\, x + AS(t)\, x - \int_0^t g(t-\tau)\, AS(\tau)\, x d\tau = 0.$$

Chapitre 2

Comportement asymptotique du problème linéaire dans le cas $(a(x) = 1)$.

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} + u_t = \Delta u - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.1}$$

Ce problème modélise certains phénomènes en viscoélasticité, (voir [17] pour la discussion de l'origine de ces modèles). pour le résults de l'existence et l'unicité de ce probléme à été fait par plusieures auteurs.

Dans cette section, nous présentons et nous démontrons nos résultats.

Premièrement nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ qui satisfait à :

$$\begin{cases} (\text{A1}) & h'(t) \leq 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}_+, \\ (\text{A2}) & 1 - \int\limits_0^\infty h(s)ds = 1 - \overline{h} = l > 0, \\ (\text{A3}) & e^{\alpha t}h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \quad \text{pour} \quad \alpha > 0. \end{cases}$$

Nous désignent par $l, \bar{l}, l_\alpha, \overline{l_\alpha}$ et $\bar{h}$ les expretions suivantes

$$\begin{cases} l\,(t) = h'\,(t) + \gamma h\,(t)\,, \\ \bar{l} = \int_0^\infty l\,(s)\,ds, \\ l_\alpha = e^{\alpha t} l\,(t)\,, \\ \overline{l_\alpha} = \int_0^\infty l_\alpha\,(s)\,ds, \\ \bar{h} = \int_0^\infty h\,(s)\,ds. \end{cases} \tag{2.1'}$$

Ensuite , on définit l'énergie classique associée à (2.1) par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx. \tag{2.2}$$

Théorème 2.1 :

Si *les hypothèses* (*A*1) − (*A*3) *sont satisfaites, alors l'énergie de* (2.1) *décroit de façon exponentielle vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives* C *et* $\beta > 0$ *telles que*

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t},\ t \geq 0.$$

Preuve :

On a

$$u_{tt} + u_t = \Delta u - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds \tag{2.1''}$$

Multiplions cette équation $(2.1)''$par u_t, pour tout $t > 0$ et on intègre par rapport à Ω il vient :

$$(u_{tt}, u_t)_\Omega + (u_t, u_t)_\Omega = (\Delta u(t), u_t)_\Omega - (\int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, u_t)_\Omega = 0$$

$$\int\limits_\Omega (u_{tt}u_t + u_t u_t)dx = \int\limits_\Omega (\Delta u(t)u_t)dx - \int\limits_\Omega u_t \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)dsdx,$$

en utilisant **la formule de Green** on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx) + \int_\Omega |u_t|^2 dx = -\int_\Omega (\nabla u(t) \nabla u_t) dx \\ + \int_\Gamma u(t) \frac{\partial u_t}{\partial \eta} d\sigma + \int_\Omega \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) \nabla u(t) ds dx \\ - \int_\Gamma \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) \frac{\partial u}{\partial \eta} u(t) ds d\sigma. \end{cases} \tag{2.3}$$

Or

$$-\int_\Omega \nabla u(t) \nabla u_t(t) dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx, \tag{2.4}$$

on remplace (2.4) dans (2.3) ,on obtient :

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx] = -\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) \nabla u(t) ds dx, \tag{2.5}$$

avec

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \tag{(2.5)'}$$

La différentiation de $E(t)$ par rapport à la variable t donne

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx. \tag{2.6}$$

Deuxiéme terme de (2.6) ne dépend pas un signe constant.
Posons,

$$(h \Box \nabla u)(t) = \int_\Omega \int_0^t h(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx. \tag{2.7}$$

Montrons que

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = \left(\underbrace{-\displaystyle\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx}\right)_1 + \left(\underbrace{\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t)}\right)_2 \\ \underbrace{+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\displaystyle\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right\}}_3 - \left(\underbrace{\frac{1}{2}h(t)\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx}\right)_4 . \end{cases} \tag{2.8}$$

On a :

$$(3) = \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_0^t h(s)ds\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx$$

$$(3) + (4) = \int_0^t h(s)ds\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx,$$

et

$$(2) = \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^t h'(t-s)|\nabla\left(\nabla u(t)\right) - \nabla\left(\nabla u(s)\right)|^2 dsdx,$$

$$(1) = -\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx,$$

Alors de $(1)+(3)+(4)=0$
et comme :

$$\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = (h'\Box\nabla u)(t),$$

on aura :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t),$$

et donc,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = -\int_\Omega \nabla u_t\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) \\ +\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(s)ds\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right) - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx. \end{cases} \tag{2.9}$$

On introduit l'energie modifiée de $E(t)$,qu'on note $e(t)$:

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t).$$

En dérivant $e(t)$ par rapport au temps,on obtient

$$e(t) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t). \tag{2.10}$$

$$e(t) := E(t) - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)$$

De (2.10) on obtient

$$\frac{d}{dt}e(t) = \frac{d}{dt}E(t) - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds \int_{\Omega} 2\nabla u \nabla u_t dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}e(t) = -\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx \\ -\frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_0^t h(s)ds \int_{\Omega} 2\nabla u \nabla u_t dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) \end{cases}$$

donc :

$$\frac{d}{dt}e(t) = -\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t). \tag{2.11}$$

Remarquons que de l'hypothèse $(A1)$ on a

$$e'(t) \leq 0, \qquad t \geq 0$$

c'est à dire $e(t)$ est décroissante.

De plus, de la définition de $e(t)$, $(h\Box\nabla u)(t)$ et de l'hypothèse $(A2)$, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$E(t) \leq Me(t), \qquad t \geq 0.$$

si on ajoute l'hypothèse

$$(A_1) \qquad h'(t) \leq 0 \qquad \forall\, t \geq 0$$

on aura

$$\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) = \int_{\Omega}\int_{0}^{t} h'(t-s)|\nabla\left(\nabla u(t)\right) - \nabla\left(\nabla u(s)\right)|^2 ds dx \leq 0 \tag{2.12}$$

et

$$e'(t) \leq 0, \qquad t \geq 0$$

c'est à dire $e(t)$ est décroissante.

de plus,par les définitions de $e(t)$,$(h\Box\nabla u)(t)$ et (A_2),il existe $M > 0$ tel que :

$$E(t) \leq Me(t), \qquad t \geq 0.$$

En effet,

on veut avoir :

$$Me(t) - E(t) \geq 0$$

C'est à dire :

$$M\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)\right\} - \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right)dx \geq 0$$

et donc ;

$$\left(\frac{M-1}{2}\right)\left\{\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx + \left[M\left(1-\int_0^t h(s)ds - \frac{1}{2}\right)\right]\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx + \frac{M}{2}(h\Box\nabla u)(t)\right\} \geq 0 \tag{2.13}$$

si on choisit :

$$\left\{\begin{array}{c} \left(\frac{M-1}{2}\right) \geq 0 \\ M\left(1-\int_0^t h(s)ds - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{M}{2} \geq 0 \end{array}\right. \tag{2.14}$$

Aors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{M-1}{2} \geq 0 \quad \text{si } M \geq 1 \\ \\ \frac{M}{2} \geq 0 \quad \text{si } M \geq 0 \end{array} \right\}$$

d'aprés ;

$$\left\{ \begin{array}{l} (A_2) \qquad 1 - \int\limits_0^t h(s)ds = l > 0, \\ \qquad \text{avec } h(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0, \end{array} \right.$$

et comme :

$$(h\Box\nabla u)(t) \geq 0 \text{ avec } h(t) \geq 0 \ \forall t \geq 0,$$

on aura :

$$\int\limits_0^t h(s)ds \leq \int\limits_0^{+\infty} h(s)ds \tag{2.15}$$

$$1 - \int\limits_0^t h(s)ds \geq 1 - \int\limits_0^{+\infty} h(s)ds = l > 0. \tag{2.16}$$

Donc pour $M > 0$ on a :

$$M \left(1 - \int\limits_0^t h(s)ds \right) \geq Ml \tag{2.17}$$

$$M \left(1 - \int\limits_0^t h(s)ds \right) - \frac{1}{2} \geq Ml - \frac{1}{2} \ \text{ si } \ M > \frac{1}{2l}. \tag{2.18}$$

Donc il suffit de choisir :

$$M = \max(0, 1, \frac{1}{2l}),$$

donc ;

$$\exists M = \max(0, 1, \frac{1}{2l}) > 0$$

tel que :

$$M(t) \leq M \exp(t) \quad \ \forall \ t \geq 0$$

Ensuite, on introduit les deux fonctionnelles.Dans les travaux précédents,on suppose que $h'(t) \geq 0$.Par conséquent,à partir de (2.11),nous voyons que $e'(t) \leq 0$.Cela implique que $e(t) \leq e(0)$ pour tout $t \geq 0$.Dans notre cas,nous ne supposons pas que $h'(t) \leq 0$.Supposons pas que $h'(t) \leq 0$.En fait nous permettons à la fonction $h(t)$ d'osciller.

Pour prouver notre résultat nous devons introduire la fonction auxiliaire suivante :

$$\Phi(t) := \int_{\Omega} u_t u dx \tag{2.19}$$

et

$$\Psi(t) := \int_{\Omega} \int_{0}^{t} L_{\alpha}(t-s) \left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx =: \left(L_{\alpha} \square \nabla u\right)(t), \tag{2.20}$$

avec

$$L_{\alpha}(t) := e^{-\alpha t} \int_{t}^{\infty} l_{\alpha}(s) ds = e^{-\alpha t} \int_{t}^{\infty} l(s) e^{\alpha s} ds \tag{2.21}$$

α vérifié (A_3) c'est à dire :

$$\exists\ \alpha > 0 \ \ \exp(\alpha t) h(t) \in L^1(R_+).$$

et $l(t)$ est tel que défini dans (2.1)'.En outre,nous considérons que les fonctions :

$$\left\{ \begin{array}{l} V(t) := e(t) + \varepsilon \Phi(t) + \eta \Psi(t) - \eta \left(\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx + \\ \\ \qquad 2\eta \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx, \end{array} \right. \tag{2.22}$$

pour certains constants ε et η à déterminer.

Proposition 2.1 : Il existe des constantes positives $\varepsilon_0, \eta_0, \zeta_1$et ζ_2 de telle sorte que

$$\frac{1}{2}\left(h \square \nabla u\right)(t) + \zeta_1 E(t) \leq V(t) \leq \zeta_2 \left(E(t) + \Psi(t) + \left(h \square \nabla u\right)(t)\right), \tag{2.23}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et $0 < \eta \leq \eta_0$.

Preuve :

Nous commençons par montrer l'inégalité du coté gauche dans (2.23).Pour la fonctiennelle $\Phi(t)$,nous avont clairement

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{C_p}{2}\int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx, \tag{2.24}$$

où $C_p$est la constante de poincaré.Le dernier terme de la définition de $V(t)$ peut etre estimé comme

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\left[(\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t))\right] dsdx \\ = \left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(t) \times \int_0^t L_\alpha(t-s)\left[(\nabla u(s) - \nabla u(t))\right] dsdx \\ = (\int_0^t L_\alpha(s)ds) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx \end{cases}$$

l'inégalité de Young pour $\delta_1 > 0$;donne :

$$\begin{cases} \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ \leq (\int_0^t L_\alpha(s)(s)ds) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \delta_1 \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + \frac{1}{4\delta_1}\left[\int_0^t L_\alpha(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds\right]^2 \\ \leq (\delta_1 + \int_0^t L_\alpha(s)ds) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dsdx + \frac{1}{4\delta_1}(\int_0^t L_\alpha(s)ds)(\int_0^t L_\alpha(t-s)\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]^2 ds \\ \leq \left(\delta_1 + \int_0^t L_\alpha(s)ds\right) \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{1}{4\delta_1}\left(\int_0^t L_\alpha(s)\, ds\right)\Psi(t), \end{cases}$$

pour un certain $\delta_1 > 0$.Notez que d'après (2.1)' et (2.21)

$$\int_0^t L_\alpha(s)ds \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty l(s)e^{\alpha s}ds =: \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha},$$

Par conséquent

$$\int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq (\delta_1 + \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha})\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{\overline{l_\alpha}}{4\alpha\delta_1}\Psi(t). \tag{2.25}$$

On a aussi,

$$\Phi(t) = \int_\Omega u_t u dx,$$

l'inégalité de Young donne :

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 |u|^2 \, dx,$$

et on applique aussi **l'inégalité de poincaré**,on obtient :

$$\Phi(t) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 + \int_{\Omega} \frac{C_p}{2} |\nabla u|^2 \, dx, \tag{2.26}$$

pour tout $C_p > 0$;

En vertu de (2.24) et (2.25) nous déduisons de (2.22) que

$$V(t) \geq e(t) + \eta \left(1 - \frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1}\right) \Psi(t) - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \left[\frac{3\eta \overline{l_\alpha}}{\alpha} + 2\eta\delta_1 + \frac{\varepsilon C_p}{2}\right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \tag{2.27}$$

En utilisant la finition (2.10) de $e(t)$ on obtient

$$\begin{cases} V(t) \geq \eta \left(1 - \frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1}\right) \Psi(t) + \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 + \frac{1}{2} \left(h \Box \nabla u\right)(t) \\ \quad + \left[\frac{1}{2}\left(1 - \overline{h}\right) - \frac{3\eta \overline{l_\alpha}}{\alpha} - 2\eta\delta_1 - \frac{\varepsilon C_p}{2}\right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx. \end{cases} \tag{2.28}$$

il est Clair que,en choisissant $\delta_1 = \overline{l_\alpha}/\alpha, \eta < \left(1 - \overline{h}\right) \alpha \overline{l_\alpha}/20$ et $\varepsilon < \min\left\{1, \left(1 - \overline{h}\right)/2C_p\right\}$,

il apparait que

$$V(t) \geq \zeta_1 E(t) + \frac{1}{2}(h \Box \nabla u)(t),$$

pour une certaine constante positive ζ_1.

D'autre part,en tenant compete de (2.24) et (2.25) (avec $\delta_1 = \frac{1}{2}$) dans (2.22),

nous entrainons que

$$\begin{cases} V(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \left[\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon C_p}{2} + \eta \left(1 + \frac{2\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\right] \int_{\Omega} |\nabla u(t)|^2 dx \\ \quad + \frac{1}{2} \left(h \Box \nabla u\right)(t) + \eta \left(1 + \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \Psi(t). \end{cases} \tag{2.29}$$

cela implique que

$$V(t) \leq \zeta_2(E(t)+\Psi(t)+(h\Box\nabla u)(t)), \tag{2.30}$$

pour une certaine constante positive ζ_2.

soit $\varepsilon = \min\left\{\frac{1-\overline{h}}{2(1-\overline{h}+C_p)}, \frac{1-\overline{h}}{4}\gamma\right\}$ et $\overline{l_\alpha} < \frac{1-\overline{h}}{20}\varepsilon$.Maintenant nous sommes en mesure d'énoncer et de prouver notre premier résultat.

Théoreme 2.2 : Supposons que les hypothèses $(A1)$ et $(A2)$ soient respectrées,que les données initiales (u_0, u_1) satisfont $E(0) > 0$ et que $\overline{l}_\alpha$ est comme ci-dessus.Alors l'énergie classique $E(t)$ de (1) décroit vers zéros de manière exponentielle.C'est-à-dire qu'il existe des constantes positives C et $\beta > 0$ telles que

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, t \geq 0.$$

Preuve

Une différentielle de (2.19) et (2.20) le long de la solution de (2.1) donne :

En utilisant l'équation (2.1) de notre problème, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\Phi(t)}{dt} = \int\limits_\Omega |u_t|^2\,dx + \int\limits_\Omega u_{tt}u dx = \int\limits_\Omega |u_t|^2\,dx - \int\limits_\Omega u_t u dx - \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\ \qquad\qquad + \int\limits_\Omega \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx. \end{array}\right. \tag{2.31}$$

D'aprés **cauchy shwarz** :

$$\int\limits_\Omega \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx \leq \sqrt{\int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx}\sqrt{\int\limits_\Omega \left(\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds\right)^2 dx}. \tag{2.32}$$

Et de **l'inégalité de young** avec $\delta_1 = \frac{1}{2}$ on a :

$$\begin{cases} \int\limits_{\Omega} \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx \leq \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds \right)^2 dx \\ \qquad \leq \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^t h(t-s) ds \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 \, ds dx \\ \qquad \leq \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \dfrac{1-l}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 \, ds dx. \end{cases}$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1-l}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 \, ds dx. \tag{2.33}$$

Majorant $V(t)$:
on a :

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt}e(t) + \varepsilon \frac{d\Phi(t)}{dt} + \eta \frac{d\Psi(t)}{dt}. \tag{2.34}$$

Montrons que :

$$\begin{cases} \dfrac{d\Phi(t)}{dt} \leq \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \int\limits_{\Omega} u_t u dx - \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\ + \dfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \dfrac{1-l}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s) |\nabla u(s)|^2 \, ds dx \end{cases} \tag{2.35}$$

on a :

$$\Phi(t) = \int\limits_{\Omega} u_t u dx$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \int\limits_{\Omega} u_t u_t dx + \int\limits_{\Omega} u_{tt} u dx,$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \int\limits_{\Omega} u_{tt} u dx,$$

d'aprés

$$(A_2) \qquad 1-\int_0^{+\infty} h(s)ds = l > 0$$

et comme

$$\int_0^t h(s)ds \leq \int_0^{+\infty} h(s)ds = 1-l$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t h(t-s)ds \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx \leq \frac{1-l}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx. \tag{2.36}$$

donc,

$$\int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \int_\Omega \left|\nabla u(s)\right|^2 dx + \frac{1-l}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx$$

donc,

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \int_\Omega u_t u dx - \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \frac{1-l}{2}\int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx. \tag{2.37}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{d\Psi(t)}{dt} = -\alpha\Psi(t) - \left(l\Box\nabla u\right)(t) + 2\left(\int_0^t L_\alpha(s)\right)\int_\Omega \nabla u(t)\nabla u_t(t)dx \\ \qquad -2\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx. \end{array}\right. \tag{2.38}$$

observez que

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx = \frac{d}{dt}\left[\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx\right] \\ \qquad -L_\alpha(0)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \alpha\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ \qquad + \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx. \end{array}\right. \tag{2.39}$$

En utilisant (2.39) dans (2.38),nous voyons que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left[\Psi(t)-\left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx+2\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx\right] \\ =-\alpha\Psi(t)-(l\Box\nabla u)(t)+2L_\alpha(0)\int_\Omega|\nabla u|^2dx-L_\alpha(t)\int_\Omega|\nabla u|^2dx \\ -2\alpha\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx-2\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx. \end{cases} \tag{2.40}$$

Maintenant,une différentiation de $V(t)$ (voir (2.22)) par rapport au temps donne :

$$\frac{dV(t)}{dt}=\frac{de(t)}{dt}+\varepsilon\frac{d\Phi(t)}{dt}+\eta\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{c}\Psi(t)-\left(\int_0^t L_\alpha(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u|^2dx \\ +2\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx.\end{array}\right] \tag{2.41}$$

En temant compte de (2.11),(2.31)et (2.40)dans (2.41) nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt}\leq-(1-\varepsilon)\int_\Omega|u_t|^2dx-(\varepsilon-2\eta L_\alpha(0)+\eta L_\alpha(t))\int_\Omega|\nabla u|^2dx \\ +\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t)-\varepsilon\int_\Omega u_tudx+\varepsilon\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ -\alpha\eta\Psi(t)-\eta\left(l\Box\nabla u\right)(t)-2\eta\alpha\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t L_\alpha\left(t-s\right)\nabla u(s)dsdx \\ -2\eta\int_\Omega\nabla u(t)\int_0^t l\left(t-s\right)\nabla u(s)dsdx. \end{cases} \tag{2.42}$$

Notons que d'aprés (2.1)' et (2.21),nous avons

$$L_\alpha(0)=\int_0^t l_\alpha(s)ds=\overline{l_\alpha}.$$

Ensuite,nous utilisons l'estimation (2.25) et des estimations similaires pour le cinquième et dernier terme dans la partie droite de la relation (2.42),àsavoir :

$$\int_\Omega\nabla u\int_0^t h\left(t-s\right)\nabla u(s)dsdx\leq\left(\delta_2+\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx+\frac{1}{4\delta_2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left(h\Box\nabla u\right)(t) \tag{2.43}$$

et

$$\int_\Omega \nabla u(t)l(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \left(\delta_3 + \int_0^t l(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{1}{4\delta_3}\left(\int_0^t l(s)ds\right)(l\Box\nabla u)(t), \tag{2.44}$$

pour certaines constante positives δ_2 et δ_3.Comme pour le quatrième terme,nous adoptons l'estimation

$$\int_\Omega u_t u dx \leq \delta_4 \int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{C_p}{4\delta_4}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx, \delta_4 > 0. \tag{2.45}$$

En utilisant (2.43)-(2.45) dans (2.42),on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dV(t)}{dt} \leq -\left(1-\varepsilon-\varepsilon\delta_4\right)\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}\left(h'\Box\nabla u\right)(t) + \eta\alpha\left(\frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1}-1\right)\Psi(t) \\ \qquad -\left[\varepsilon - \frac{\varepsilon C_p}{4\delta_4} - \varepsilon\left(\delta_2+\overline{h}\right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\delta_3\right]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx \\ \qquad\qquad -\eta\left(1-\frac{\overline{l}}{2\delta_3}\right)\left(l\Box\nabla u\right)(t) + \frac{\varepsilon\overline{h}}{4\delta 2}\left(h\Box\nabla u\right)(t). \end{array}\right. \tag{2.46}$$

Nous avons utilisé ici le fait que

$$\overline{l} = \int_0^\infty l(s)ds \leq \int_0^\infty l(s)e^{\alpha s}ds = \overline{l_\alpha}.$$

Comme

$$\frac{d}{dt}h(t) = l(t) - \gamma h(t),$$

nous déduisons de (2.46)que

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{dV(t)}{dt} \leq -\left[1-\varepsilon\left(1+\delta_4\right)\right]\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}(l\Box\nabla u)(t) - \frac{\gamma}{2}(h\Box\nabla u)(t) \\ \quad -[\varepsilon(1-\overline{h}-\delta_2-\frac{C_p}{4\delta_4}) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\delta_3]\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx \\ -\eta\alpha\left(1-\frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1}\right)\Psi(t) + \frac{\varepsilon\overline{h}}{4\delta_2}(h\Box\nabla u)(t) - \eta\left(1-\frac{\overline{l}}{2\delta_3}\right)(l\Box\nabla u)(t). \end{array}\right.$$

Equivalente :

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt} \leq -\left[1-\varepsilon\left(1+\delta_4\right)\right] \int_\Omega |u_t|^2 dx - \left[\eta\left(1-\frac{\bar{l}}{2\delta_3}\right) - \frac{1}{2}\right](l\Box\nabla u)(t) \\ \quad - \left[\varepsilon\left(1-\overline{h}-\delta_2-\frac{C_p}{4\delta_4}\right) - 2\eta\alpha\delta_1 - 6\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\delta_3\right] \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\ \qquad -\frac{1}{2}\left[\gamma - \frac{\varepsilon\overline{h}}{2\delta_2}\right](l\Box\nabla u)(t) - \eta\alpha\left(1-\frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1}\right)\Psi(t). \end{cases} \tag{2.47}$$

Enfin,nous choisissons $\delta_1 = \overline{l_\alpha}/\alpha$,$\delta_2 = \left(1-\overline{h}\right)/4$,$\delta_3 = \bar{l}$,$\delta_4 = C_p/\left(1-\overline{h}\right)$,$\eta = 1$ et $\varepsilon = \min\left\{\frac{1-\overline{h}}{2(1-\overline{h}+C_p)}, \frac{1-\overline{h}}{4}\gamma\right\}$.

Alors,si $\overline{l_\alpha} < \frac{1-\overline{h}}{20}\varepsilon$ on déduit de (2.47) que :

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -C_1\left(E(t) + \Psi(t) + \left(h\Box\nabla u\right)(t)\right),$$

pour certaine constante positive C_1.En vertu de la **proposition 2.1** (l'inégalité de droite),nous trouvons :

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -\frac{C_1}{\zeta_2}V(t) =: -\beta V(t), t \geq 0.$$

Donc,

$$\begin{cases} \dfrac{dV(t)}{dt} \leq -\beta V(t) \quad \forall \quad t \geq 0 \\ V(t) \neq 0 \quad \forall t \geq 0 \end{cases}$$

alors

$$\int_0^t \frac{V'(s)}{V(s)} ds \leq -\beta \int_0^t ds = -\beta t,$$

$$\begin{aligned} \ln V(t) - \ln V(0) &\leq -\beta t \\ \ln V(t) &\leq \ln V(0) - \beta t \end{aligned}$$

et on aura :

$$V(t) \leq V(0)\exp(-\beta t) \qquad \forall t \geq 0$$

comme ;

$$E(t) \leq Me(t)$$

$$e(t) \leq V(t) = e(t) + \varepsilon\Phi(t) + \eta\Psi(t)$$
$$E(t) \leq MV(0)\exp(-\beta t)$$
$$E(t) \leq c\exp(-\beta t) \quad \text{avec } c = MV(0) > 0$$

Nous en déduisons que :

$$V(t) \leq V(0)e^{-\beta t}, t \geq 0.$$

Remarquez que par notre hypothèse $E(0) > 0$ dans le **théorème 2.2.**,nous avons $V(0) > 0$.

De vouveau par la **proposition 2.1** (l'inégalité du coté gauche) nous concluons l'assertion de notre **théorème 2.1 :**

$$E(t) \leq \frac{V(0)}{\zeta_1}e^{-\beta t}, t \geq 0.$$

La preuve est complète

Chapitre 3

Comportement asymptotique du problème linéaire dans le cas $(a(x) = 0)$.

3.1 Introduction

Dans cette chapitre nous étudierons le cas où $a(x) = 0$ où nous développerons les calculs pour montrer que l'énergie associée est exponentiellement décroissante. Ce qui signifie que la dissipation faîble représentée par le terme mémoire est suffisante pour mener le système vers l'équilibre interne (faible) u_t.

Nous allons montrer que la faible dissipation produite par le terme intégrale seul est suffisant pour conduire le système au repos de maniére exponentielle.sans la dissipation interne .

si h vérifie les condition $(A_1) - (A_2)$ plus la condition :

$$| h'(t) | e^{-\sigma t} \in L^1(0, \infty), \quad \text{pour } \sigma \geq 0$$

alors on pourra vérifier que les solutions de cette equation vont décroittrent de manière exponentielle vers zéro

soit le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - \int_0^1 ht\left(-s\right)\Delta u\left(s\right) & \text{dans } \Omega \times R_+ \\ u = 0 & \text{dans } \Gamma \times R_+ \\ u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) & \text{dans } \Omega \\ u\left(x,0\right) = u_1\left(x\right) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

cherchons $c > 0$ et $\beta > 0$ tels que l'on ait :

$$E\left(t\right) \leq C\exp\left(-\beta t\right),\ t \geq 0$$

pour $a\left(x\right) = 0$ on a :

$$\frac{d}{dt}E\left(t\right) = \int_\Omega \nabla u_t \int_0^1 h\left(t-s\right)u\left(s\right)dsdx \tag{3.2}$$

on remarque que la dérivée est égale à un terme non local qu' on ne sait pas son signe.

Nous considérons ici la fonction

$$W(t) = V(t) + \lambda\Theta(t) + \mu\Gamma(t), \tag{3.3}$$

où $V(t)$ est comme dans (2.22),

$$\Theta(t) = \int_\Omega u_t \int_0^t h\left(t-s\right)\left(u(s) - u(t)\right)dsdx \tag{3.4}$$

et

$$\Gamma(t) = \int_\Omega \int_0^t H_\alpha\left(t-s\right)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx \tag{3.5}$$

avec

$$H_\alpha(t) = e^{-\alpha t}\int_t^\infty h(s)e^{\alpha s}ds.$$

Désignons par

$$\overline{h_\alpha} = \int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds.$$

Pour la preuve de notre deuxième résultat,nous avons besoin de la proposition on introduie $\Theta(t)$ qui est définit par :

$$\begin{cases} \Theta(t) = \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx \\ = \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\,u(t)\,dsdx - \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\,u(s)\,dsdx \end{cases} \tag{3.6}$$

comme

$$h(t) \geq 0;\ \forall t \geq 0$$

on a :

$$\int_0^t h(t-s)\,ds \leq \int_0^{+\infty} h(t-s)\,ds$$

et

$$\begin{cases} 1 - \int_0^{+\infty} h(s)\,ds = l \\ \text{et } \int_0^{+\infty} h(s)\,ds = 1-l \end{cases}$$

Proposition 3.1 : Il existe des constante positives ε_0,η_0,λ_0,ζ_3 et ζ_4 telles que

$$\zeta_3\left(E(t) + (h\square\nabla u)(t)\right) \leq W(t) \leq \zeta_4\left(E(t) + \Psi(t) + (h\square\nabla u)(t) + \Gamma(t)\right) \tag{3.7}$$

pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,$0 < \eta \leq \eta_0$ et $0 < \lambda \leq \lambda_0$.

Preuve :

Le coté gauche de (2.23) et l'estimateur

On démontre le coté gauche dans (3.7) on a :

$$\Theta(t) = \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)(u(s)-u(t))\,dsdx,$$

On démontre le cosans la dissipation interne .

comme

$$h(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

avec

on a :

$$\int_0^t h(t-s)\,ds \le \int_0^{+\infty} h(t-s)\,ds$$

et

$$1-\int_0^{+\infty} h(s)\,ds = l \Longrightarrow \int_0^{+\infty} h(s)\,ds = 1-l \tag{3.8}$$

donc ;

$$\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\,u(t)\,dsdx \le \left(\int_0^{+\infty} h(t-s)\,ds\right)\int_\Omega u_t u dx \\ \le (1-l)\int_\Omega u_t u(t)\,dx \end{array}\right. \tag{3.9}$$

d'aprés **l'inégalité de young** on aura :

$$\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\,u(t)\,dsdx \le \delta_1 (1-l)\int_\Omega \mid u\mid^2 dx \\ +\frac{1-l}{4\delta_1}\int_\Omega \mid u_t\mid^2 dx \end{array}\right. \tag{3.10}$$

ou $\quad \delta_1>0, a=u(t)$ et $b=u_t$

d'aprés **l'inégalité de poincaré** ;$\exists c_p>0$ tel que :

en appliquant à nouveau l'**inégalité de young** sur le second terme de $\Theta(t)$ on aura :

$$\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\,u(s)\,dsdx \le \delta_2 \int_\Omega \left(\int_0^t h(t-s)\,u(s)\,ds\right)^2 dx \\ +\frac{1}{4\delta_2}\int_\Omega \mid u_t\mid^2 dx \end{array}\right. \tag{3.11}$$

$\delta_2>0,$

$$a=\int_0^t h(t-s)\mid u(s)\mid ds \quad \text{et } b=u_t$$

$$\left(\int_0^t h(t-s)\,u(s)\,ds\right)^2 \le \int_0^t h^2(t-s)\,ds \int_0^t \mid u(s)\mid^2 ds \tag{3.12}$$

On remplace (3.12) danc (3.10) on obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega u_t \int_0^t h\left(t-s\right) u\left(s\right) dsdx \leq \delta_2 \int_\Omega \int_0^t h^2\left(t-s\right) ds \int_0^t \mid u\left(s\right) \mid^2 dsdx \\ +\frac{1}{4\delta_2} \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx \\ \leq \delta_2\left(1-l\right) \int_\Omega \int_0^t h\left(t-s\right) ds \int_0^t \mid u\left(s\right) \mid^2 dsdx \\ +\frac{1}{4\delta_2} \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx \\ \leq \delta_2\left(1-l\right) c_p \int_\Omega \int_0^t h\left(t-s\right) ds \int_0^t \mid \nabla u\left(s\right) \mid^2 dsdx \\ +\frac{1}{4\delta_2} \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx \end{array}\right. \tag{3.13}$$

choisissons δ_2 de telle sorte qu'on aura :

$$\frac{1}{4\delta_2} \leq \frac{1-l}{4\delta_2}$$

alors ;

$$\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega u_t \int_0^t h\left(t-s\right) u\left(s\right) dsdx \leq \delta_2\left(1-l\right) c_p \int_\Omega \int_0^t h\left(t-s\right) ds \int_0^t \mid \nabla u\left(s\right) \mid^2 dsdx \\ +\frac{1-l}{4\delta_2} \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx \end{array}\right. \tag{3.13}$$

on remplaçant par (3.13) et (3.3) dans $\Theta\left(t\right)$;il vient :

$$\left\{\begin{array}{c} \Theta\left(t\right) \leq \delta_1\left(1-l\right) c_p \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 dx \\ +\frac{1-l}{4}\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right) \int_\Omega \mid u_t \mid^2 dx \\ +\delta_2\left(1-l\right) c_p \int_\Omega \int_0^t h\left(t-s\right) ds \int_0^t \mid \nabla u\left(s\right) \mid^2 dsdx \end{array}\right. \tag{3.14}$$

l'inégalité de Young donne par :

$$\Theta(t) \leq \frac{1}{2} \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^t (h\Box\nabla u)(t) ds,$$

et on applique aussi **l'inégalité de Poincaré**,on obtient :

$$\Theta(t) \leq k_1 \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{C_p \overline{h}}{4k_1} \left(h\Box\nabla u\right)(t)\,, \text{ pour tour } C_p > 0, k_1 > 0, \tag{3.14}$$

on regroupe (2.22),(2.35) et (3.3) dans (2.32),on obtient :

$$\begin{cases} W(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_t(t)|^2 \, dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \eta(1 - \frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1})\Psi(t) \\ +\lambda k_1 \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \frac{C_p\overline{h}}{4k_1}(h\Box\nabla u)(t) + \mu \int_\Omega \int_0^t H_\alpha(t-s) |\nabla u(s)|^2 \, dsdx \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} W(t) \leq \varepsilon_3 \left(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u(t) + \lambda \left[k_1 \int_\Omega |u_t|^2 \, dx + \frac{C_p\overline{h}}{4k_1}(h\Box\nabla u)(t)\right] + \mu\Gamma(t)\right) \\ \qquad \leq \varepsilon_3 \left[E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \Theta(t) + \Gamma(t)\right] \end{cases} \tag{3.15}$$

implique que

$$W(t) \geq \zeta_1 E(t) - \lambda k_1 \int_\Omega |u_t|^2 dx - \frac{\lambda C_p\overline{h}}{4k_1} (h\Box\nabla u)(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t).$$

Par la définition de $E(t)$,nous pouvons écrire :

$$W(t) \geq \left(\frac{\zeta_1}{2} - \lambda k_1\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{\zeta_1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda C_p\overline{h}}{4k_1}\right)(h\Box\nabla u)(t) + \mu\Gamma(t). \tag{3.16}$$

En choisissant $k_1 = \lambda C_p\overline{h}$ et $\lambda^2 < \frac{\zeta_1}{2C_p\overline{h}}$ nous obtenons l'inégalité de gauche dans l'énoncé de la **proposition 3.1** Pour l'autre ingalité,il suffit de remarquer que

$$W(t) \leq \zeta_2(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla u)(t)) + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{\lambda C_p\overline{h}}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \mu\Gamma(t). \tag{3.17}$$

Ceci termine **la preuve.**

Théoréme 3.1 : Supposons que les hypothèses $(A1)$ et $(A2)$ soint respectées et que les données initiales (u_0, u_1) satisfont $E(0) > 0$. Supposons en outre que $\overline{h_\alpha}$ et $\overline{l_\alpha}$ et la sont suffisamment petits.

Ensuite,l'énergie classique $E(t)$ de (2.1) décroit vers zéro de maniére exponentielle.C'est-à-dire qu'il existent des constants positives C et $\beta > 0$ telles que

$$E(t) \leq Ce^{-\beta t}, t \geq 0.$$

Preuve

Dans le cas présent $(a(x)=0)$, nous avons :

$$\frac{de(t)}{dt}=-\frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx+\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) \tag{3.18}$$

et

$$\begin{cases} \frac{d\phi(t)}{dt}=\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx+\int_{\Omega}u_{tt}udx \\ =\int_{\Omega}|u_t|^2-\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\int_{\Omega}\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx. \end{cases} \tag{3.19}$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt}=\frac{de(t)}{dt}+\varepsilon\frac{d\Phi}{dt}+\eta\frac{d\Psi}{dt} \\ +\eta\frac{d}{dt}\left[\Psi(t)-(\int_0^t H_\alpha(s)ds)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+2\int_{\Omega}\nabla u(t)\int_0^t H_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx\right]. \end{cases}$$

Par conséquent,à partir de (2.40), (2.41), (3.18) et (3.19).nous voyons que :

$$\begin{cases} \frac{dV(t)}{dt}=\varepsilon\int_{\Omega}|u_t|^2dx-(\varepsilon+\frac{1}{2}h(t)+\eta L_\alpha(0))\int_{\Omega}|\nabla u|^2dx \\ +\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t)+\varepsilon\int_{\Omega}\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx-\alpha\eta\Psi(t) \\ -\eta(l\Box\nabla u)(t)-2\eta\alpha\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ -2\eta\int_{\Omega}\nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx. \end{cases} \tag{3.20}$$

Une différentiation des expressions dans (3.4) et (3.5) par rapport à t donne :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Theta(t)=\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega}u_t\int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx\right] \\ =\int_{\Omega}u_{tt}\int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx \\ +\int_{\Omega}u_t\frac{d}{dt}\int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))\,dsdx \end{cases} \tag{3.21}$$

on a d'aprés problème (3.1) :

$$u_{tt}=\Delta u-\int_0^t h\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds \tag{3.22}$$

on remplace (3.29) donc (3.28) on obtient :

$$\begin{cases} \int_\Omega u_{tt}\int_0^t h(t-s)(u(t)-u(s))dsdx \\ =\int_\Omega\left[\Delta u-\int_0^1 h\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds\right]\int_0^t h\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right)dsdx \\ =\int_\Omega\Delta u\int_0^t h\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right)dsdx \\ -\int_\Omega\left[\int_0^1 h\left(t-s\right)\Delta u\left(s\right)ds\right]\int_0^t h\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right)dsdx \end{cases} \tag{3.23}$$

d'aprés la **formule de Green**

$$\begin{cases} \int_\Omega\Delta u\int_0^t h\left(t-s\right)\left(u\left(t\right)-u\left(s\right)\right)dsdx=-\int_\Omega\nabla u\int_0^t h\left(t-s\right)\left(\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right)dsdx \\ +\int_\Gamma\nabla u\int_0^t h\left(t-s\right)\left(\nabla u\left(t\right)-\nabla u\left(s\right)\right)\eta dsd\sigma \end{cases} \tag{3.24}$$

si $0<t_0<t$;et par la **formule de Green** on aura :

$$\begin{cases} \int_\Omega u_t\int_0^t h'\left(t-s\right)u\left(s\right)dsdx=\int_\Omega u_t\int_0^t h'\left(t-s\right)u\left(s\right)dsdx \\ \leq\delta_3\int_\Omega\mid u_t\mid^2 dx+\frac{1}{4\delta 3}\int_\Omega\int_0^t\left(h'\left(t-s\right)\right)^2 \\ \mid u\left(t\right)\mid^2 dsdx \\ \leq\delta 3\int_\Omega\mid u_t\mid^2 dx \\ +\frac{c_p}{4\delta 3}\int_0^{+\infty}\left|h'\left(t-s\right)\right|ds\int_\Omega\int_0^t h'(t-s)\mid\nabla u\left(s\right)\mid^2 dsdx \end{cases} \tag{3.25}$$

en remplaçant dans on aura

$$=\int_\Omega u_{tt}\int_0^t h\left(t-s\right)u\left(s\right)dsdx+\int_\Omega u_t\int_0^t\left[h'\left(t-s\right)u\left(s\right)+h'\left(t-s\right)u\left(s\right)\right]dsdx$$

en remplaçant de nouveau par la valeur de u_{tt} et on appliquant la **formule de Green** il vient :

$$\begin{cases} = \int_\Omega \left[\Delta u - \int_0^t h\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,dsdx\right] \int_0^t h\,(t-s)\,u\,(s)\,dsdx \\ - \int_\Omega u_t \int_0^t h'\,(t-s)\,u\,(s)\,dsdx + \int_\Omega u_t \int_0^t h\,(c-s)\,u\,(c)\,dsdx \\ = \int_\Omega \Delta u \int_0^t h\,(t-s)\,u\,(s)\,dsdx - \int_\Omega \left[\int_0^t h\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,ds\right] \int_0^t h\,(t-s)\,u\,(s)\,dsdx \\ - \int_\Omega u_t \int_0^t h'\,(t-s)\,u\,(s)\,dsdx + \int_\Omega u_t \int_0^t h\,(t-c)\,u\,(t)\,dsdx \end{cases} \tag{3.26}$$

par la **formule de Green**, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d\Theta(t)}{dt} = -\int_\Omega \nabla u \int_0^t h\,(t-s)\,\nabla u\,(s)\,dsdx + \int_\Gamma \nabla u \int_0^t h\,(t-s)\,u\,(s)\,\eta dsd\sigma \\ + \int_\Omega \int_0^t h^2\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,\Delta u\,(s)\,dsdx \\ - \int_\Gamma \int_0^t h^2\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,\Delta u\,(s)\,\eta dsd\sigma \\ + \int_\Omega u_t \int_0^t h'\,(t-s)\,u\,(s)\,dsdx + \int_\Omega u_t \int_0^t h\,(t-s)\,u\,(t)\,dsdx \end{cases} \tag{3.27}$$

comme $u = 0$ sur Γ :en déduit que :

$$\int_\Gamma \nabla u \int_0^t h\,(t-s)\,u\,(s)\,\eta dsd\sigma = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d\Theta(t)}{dt} = -\int_\Omega \nabla u \int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx \\ + \int_\Omega (\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds)(\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds)dx \\ + \int_\Omega u_t \int_0^t h'(t-s)(u(s) - u(t))dsdx - (\int_0^t h(s)ds) \int_\Omega |u_t|^2 dx \end{cases} \tag{3.28}$$

et

$$\Gamma'(t) = -\alpha\Gamma(t) - \int_\Omega \int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx + \overline{h_\alpha} \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx, \tag{3.29}$$

respectivement.Maintenant,en tenant compte de (3.20)- (3.28)-(3.29) dans la dérivée de $W(t)$ (voir (3.3)),

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dV}{dt} + \lambda\frac{d\Theta}{dt} + \mu\frac{d\Gamma}{dt}$$

On obtient :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dW}{dt} = -(\lambda\int_0^t h(s)ds - \varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2dx + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \alpha\mu\Gamma(t) \\ -(\varepsilon + \eta L_\alpha(t) - 2\eta L_\alpha(0) - \mu\overline{h_\alpha})\int_\Omega |\nabla u(s)|^2dx \\ +\lambda\int_\Omega(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds)(\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds)dx \\ -\lambda\int_\Omega \nabla u\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx - \eta(l\Box\nabla u)(t) \\ -2\eta\alpha\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t L_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx + \varepsilon\int_\Omega \nabla u \times \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ -2\eta\int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ +\lambda\int_\Omega u_t\int_0^t h'(t-s)(u(s) - u(t))dsdx \\ -\mu\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx. \end{array}\right. \tag{3.30}$$

Nous adoptons les estimations

$$\left\{\begin{array}{c} \int_\Omega \nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \leq \delta_2\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{1}{4\delta_2}(\int_0^t h(s)ds) \\ \times\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2dsdx, \delta_2 > 0, \end{array}\right.$$

$$\int\limits_\Omega(\int\limits_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))dsdx \leq \delta_6\int\limits_\Omega |\nabla u(t)|^2dx + \frac{\overline{h}}{4\delta_6}(h\Box\nabla u)(t), \delta_6 > 0$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} \int_\Omega(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds)(\int_0^t h(t-s)(\nabla u(s) - \nabla u(t))ds)dx \\ \leq k_2\int_\Omega(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds)^2dx + \frac{\overline{h}}{4k_2}(h\Box\nabla u)(t), \quad k_2 > 0. \end{array}\right.$$

Compte tenu de ces estimations,des relations (2.25) et (2.44) nous pouvons écrire :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dW(t)}{dt} \leq -\left(\lambda \int_0^t h(s)ds - \varepsilon\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\left(h'\Box\nabla u\right)(t) \\ -\alpha\eta\left(1 - \frac{\overline{l_\alpha}}{2\alpha\delta_1}\right)\Psi(t) - \left(\varepsilon - \varepsilon\delta_2 - 6\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\alpha\delta_1 - 2\eta\delta_3 - \mu\overline{h_\alpha} - \lambda\delta_5\right) \\ \times \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx - \eta\left(1 - \frac{\bar{l}}{2\delta_3}\right)(l\Box\nabla u)(t) \\ +\frac{\lambda\bar{h}}{4}\left(\frac{1}{\delta_5} + \frac{1}{k_2}\right)(l\Box\nabla u)(t) - \alpha\mu\Gamma(t) \\ +\lambda \int_\Omega u_t \int_0^t h'(t-s)(u(s) - u(t))dsdx \end{array}\right. \tag{3.31}$$

prise $\delta_1 = \bar{l}_2/\alpha$,$\delta_2 = \frac{1}{2}$,$\delta_3 = \bar{l}$,$\delta_5 = \varepsilon/6\lambda$,$k_2 = \varepsilon/\lambda$ et remplacer $h'(t)$ par $l(t) - \gamma h(t)$ dans (3.31),nous trouvons :

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dW(t)}{dt} \leq -\left(\lambda \int_0^t h(s)ds - \varepsilon\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx - \frac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \frac{1}{2}(\eta - 1)\left(l\Box\nabla u\right)(t) \\ -\left(\frac{\varepsilon}{3} - 10\eta\overline{l_\alpha} - \mu\overline{h_\alpha}\right) \int_\Omega |\nabla u(s)|^2 dx - \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{7\lambda^2\bar{h}}{2\varepsilon}\right)\left(h\Box\nabla u\right)(t) \\ -\alpha\mu\Gamma(t) - \left(\mu - \frac{3\varepsilon\bar{h}}{2}\right) \int_\Omega \int_0^t u(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx \\ +\lambda \int_\Omega u_t \int_0^t l(t-s)(u(s) - u(t))dsdx - \lambda\gamma \int_\Omega u_t \int_0^t h'(t-s)(u(s) - u(t))dsdx. \end{array}\right.$$

nous supposons que $t \geq t_0 > 0$ de sorte que

$$\int_0^t h(s)ds \geq \int_0^{t_0} h(s)ds =: h_0.$$

Ensuite,avec l'aide de

$$\left\{ \int_\Omega u_t \int_0^t l(t-s)(u(s) - u(t))dsdx \leq \frac{h_0}{3} \int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{3C_p\bar{l}}{4h_0}(l\Box\nabla u)(t), \right.$$

et

$$\left\{\int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-s)(u(s))dsdx \leq \frac{h_0}{3\gamma}\int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{3\gamma C_p \overline{h}}{4h_0}(h\Box\nabla u)(t)\right.$$

on obtientl

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{dW(t)}{dt} \leq -\left(\frac{\lambda h_0}{3} - \varepsilon\right)\int_{\Omega}|u_t|^2dx - \frac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \frac{1}{2}\left(\eta - 1 - \frac{3\lambda C_p \bar{l}}{4h_0}\right)(l\Box\nabla u)(t) \\ \\ -(\frac{\varepsilon}{3} - 10\eta\overline{l_\alpha} - \mu\overline{h_\alpha})\int_{\Omega}|\nabla u(s)|^2 dx \\ \\ -\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{7\lambda^2\overline{h}}{2\varepsilon} - \frac{3\lambda\gamma^2 C_p\overline{h}}{2h_0}\right)(h\Box\nabla u)(t) - \alpha\mu\Gamma(t) - \left(\mu - \frac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right) \times \int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2 dsdx. \end{array}\right.$$

mise en scène $\lambda = \frac{h_0}{h}\min\{\frac{1}{3C_p\gamma}, \frac{\gamma}{63}\}, \varepsilon = \lambda h_0/6, \eta = 2+\frac{3C_p\bar{l}}{2h_0}, \mu = \frac{\lambda h_0(9\overline{h_\alpha^2}+1)}{36\overline{h_\alpha}}$,il semble que si $\overline{h_\alpha} < \frac{1}{3}$ et $\overline{l_\alpha} \leq \varepsilon/60\eta$, nous entrainons :

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -C_2(E(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \Psi(t) + \Gamma(t)),$$

pour une certaine constante positive C_2.D'après la relation du coté droit de la **proposition 3.1** nous trouvons :

$$\frac{dW(t)}{dt} \leq -\frac{C_2}{\zeta_4}W(t) =: -\beta W(t).$$

Donc

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq -\beta W(t),$$

Alors

$$\frac{d}{dt}W(t) \leq -\beta W(t), \ \exists\beta > 0, \ \forall t \geq 0,$$

donc

$$\left\{\begin{array}{c} \frac{d}{dt}W(t) \leq -\beta W(t) \quad \forall t \geq 0 \\ \\ W(t) \neq 0 \ \ \forall t \geq 0 \end{array}\right.$$

D'ou

$$\int_0^t \frac{W'(s)}{W(s)}ds \leq -\beta\int_0^t ds = -\beta t,$$

$$\begin{cases} \ln W(s) - \ln W(0) \leq -\beta t \\ \\ \ln W(s) \leq \ln W(0) - \beta t \end{cases}$$

et on aura :

$$W(t) \leq W(0) \exp(-\beta t) \, \forall t \geq 0$$

comme

$$\begin{cases} E(t) \leq Me(t) \\ e(t) \leq W(t) \\ W(t) \leq MV(0) \exp(-\beta t) \\ E(t) \leq C \exp(-\beta t) \end{cases}$$

avec

$$C = MV(0) > 0$$

Clairement ,

$$W(0) = V(0) > 0.$$

Par conséquent,

$$W(t) \leq W(0)e^{-\beta t}, t \geq t_0 > 0.$$

L'autre inégalité de la **proposition 3.1** donne :

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\zeta_3} e^{-\beta t}, \quad t \geq t_0 > 0.$$

La preuve est maintenant complète.

Conclusion

Dans ce travail, nous avons montré que la dissipation faible produite par le terme mémoire seul est suffisante pour qu'on ait décroissance exponentielle et ramener le système vers l'état d'équilibre. Ceci est rendu possible par les nouvelles fonctionnelles que nous avons introduit. On projete de généraliser ces travaux au cas où le noyau h n'est pas nécésseraiement décroissant c'est à dire vérifiant les conditions suivantes :

$$h'(t) + \gamma h(t) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et

$$\left[h'(t) + \gamma h(t)\right] e^{\alpha t} \in L^1(0, \infty) \quad \text{pour un certain } \alpha > 0.$$

Dons cette mémoire, nous étudie le comportement asymptotique du problème linéaire d'une équation des ondes.

Bibliographie

[1] Aassila M. Cavalcanti M., M. and Soriano J. A., Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a starshaped domain, SIAM J. Control and Optimization 38(5) :1581-1602, 2000.

[2] Alabau-Boussouira F., Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, Appl. Math. Optim., 51(1), 61-105, 2005.

[3] Appleby J. A. D. Fabrizio M. Lazzari B. and Reynolds D. W., On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 16 (10) : p. 1677-1694, 2006.

[4] Berrimi S. and Messaoudi S. A., Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Analysis-Theory Methods Applications, 64 (10) : p. 2314-2331, 2006.

[5] Berrimi S. and Messaoudi S. A., Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. Elect J. Di . Eqns, (88) : p. 1-10, 2004, 89.

[6] Burq N., Controlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers. Asymptot. Anal., 14(2) :157-191, 1997.

[7] Cannarsa P. Sforza D., A stability result for a class of nonlinear integro-differential equations with Lź kernels, Appl. Math. (Warsaw) 35 :395-430, 2008.

[8] Carleman T., Sur un problème d'unicité pur systèmes d'équations aux dérivées partielles a deux variables indépendantes. Ark. Mat., Astr. Fys., 26(17) :9, 1939.

[9] Cavalcanti M. M., Khemmoudj A. and Medjden M., Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients

and dynamic boundary condition, Jour. Math. Anal. Appl, Volume 328, Issue 2, p. p. 900-930, 2007.

[10] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N., Introduçaao a teoria das distribui çooes e aos espaços de Sobolev, Maring a : Eduem, 2009.

[11] Cavalcanti M. M., Cavalcanti M M, Domingos Cavalcanti V N., Prates Filho J S, and Soriano J A, Domingos Cavalcanti V N and Martinez P, General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. Nonlinear Anal., 68 (1) : p. 177-193, 2008.

[12] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Prates Filho J S, and Soriano J A., Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. Di . Integ. Eqs., 14 (1) : p. 85-116, 2001. 90.

[13] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Soriano J A., Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Electron. J. Differential Equations 44 : 1-14, 2002.

[14] Cavalcanti M. M, Oquendo H P., Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, SIAM J. Control Optim. 42 (4) : 1310-1324, 2003.

[15] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Ryuichi Fukuoka and Daniel Toundykov., Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions, J. Evol. Equ. 9 :143-169, 2009.

[16] Chai, S., Guo, Y., Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory, Diff. and Integral Equations, Volume 17, Num. 5-6, pp. 669-680, 2004.

[17] Chouli M., Une introduction aux problémes inverses elliptiques et paraboliques, Université Paul Verlaine-Metz, Ile de Saulcy, 57045 Metz cedex, France. ISSN 1154-483, ISBN 978-642-02459-3, Springer Dordrecht Heidelberg London New york.

[18] Clark M. R., Existence of solutions for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in a non-cylinder domain, Internat. J. Math. et Math. Sci. Vol. 19 No 1 (1996) 151-160.

[19] Dafermos C. M., On abstract Volterra equation with applications to linear viscoeladticity, J. Differ. Equations 7 : 554-569, 1970.

[20] Evans L. C., Partial Differential Equations. 1998, Graduate Studies in Mathematics, AMS. 91.

[21] Fabrizio M. Giorgi C., Pata V., A new approach to equations with memory, Arch. Ration. Mech. Anal. 198 : 189-232, (2010).

[22] Fernandez-Cara E. and Zuazua E., The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case. Adv. Differential Equations, 5(4-6) :465-514, 2000.

[23] Fujita H. and Kato T., On the Navier-Stoks initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal, 16 : pp. 269-315, 1964.

[24] Graber P.J., Lasiecka I., Analyticity and Gevrey class regularity for a strongly damped wave equation with hyperbolic dynamic boundary conditions, Semigroup Forum, DOI 10.1007/s00233-013-9534-3, 2013.

[25] Heminna, A. Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions, Port. Math., 58(3), 271-315, 2001.

[26] Ingham A. E., Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. Math. Z., 41(1) : 367-379, 1936.

[27] Khemmoudj A., Medjden M., Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy-Ventcel Problem, Bol. Soc. Paran. Mat., 22(2), 97-116, 2004.

[28] Khemmoudj A., Aries M. S., Stabilisation of a wave equation with localised memory term and boundary frictional damping, International Journal of Control, DOI : 10.1080/00207179.2018.1438669, 2018.

[29] Khemmoudj A., Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse, USTHB, Alger 2007.

[30] Lagnese J., Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, J. Di , Equations, 50 : 163-182, 1983.

[31] Medjden M., Tatar N. E., Asymptotic behavior for a viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel, Applied mathemtics and Computation, 167, 1221-1235, 2005.

[32] Medjden M. and Tatar N. E., On the wave equation with a temporal nonlocal term and a weak dissipation, Dynamic Systems and Applications December 2007, Volume16, Number 4.