République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Mémoire de Master Académique en Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique

Présenté par :

BOUlHOULOU SARRA et BAHLOUL SOUHIR

Intitulé

Fonction zêta de Riemann et prolongement Analytique

Dirigé par : AZZOUZA Noureddine (Maître de conférences B, Univ. Guelma)

Soutenu le : 13 juillet 2021 **Devant le Jury composé de :**

Mr MEFTAH Badreddine	**MCB**	Univ. Guelma	Président
Mr AZZOUZA Noureddine	**MCB**	Univ. Guelma	Encadreur
Mr BELLAOUAR Djamel	**MCA**	Univ. Guelma	Examinateur

Année Universitaire 2020/2021

REMERCIEMENS

En premier lieu, nous remercions « ALLAH « le Tout Puissant qui nous a donné la force, la volonté et le courage pour accomplir ce modeste travail.

Nos vifs remerciements vont à notre encadreur : Mr AZZOUZA Noureddine, Docteur à l'université de Guelma ; pour ses précieux conseils et son aide durant toute la période de travail.

Nous voulons exprimer nos remerciements les plus dévoués aux membres du jury,Mr MEFTAH Badreddine et Mr BELLAOUAR Djamel qui nous ont, honorées en acceptant d'examiner ce travail.

Nous voulons remercier aussi, tous les enseignants du département de Mathématique.

MERCI.

Dédicaces

Je dédie ce projet de fin d'études à ma très chère mère pour ses sacrifices et tous ses efforts, à mon père qui m'a toujours aidé et motivé dans mes études, à mon cher frère Ayoub, ainsi à tout ma famille.

J'adresse tous mes remerciements à mes amis surtout MESSIOUD Hadjer, BOURAGHDA Khadidja et LABLAB Safinaz, et à tous ceux qui ont participé directement ou indirectement à la réalisation de ce mémoire.

BOULHOULOU SARRA.

Dédicaces

Je dédie ce projet de fin d'étude à ma très chère mère pour ses sacrifices et tous ses efforts, à mon père, qui m'a toujours aidé et motivé dans mes études, à mon frère Nabil; et à mes sœurs, ainsi à toute ma famille.

J'adresse tous mes remerciements à mes amies, surtout NOUARI Bouchra; et à tous ceux quiont participé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire .

BAHLOUL SOUHIR.

Table des matières

Notations

Nous regroupons quelques notations qui seront utiles dans notre travail.
• $\mathbb{C}$: L'ensemble des nombres complexes tels que :

$$\mathbb{C} = \{\sigma + it : (\sigma, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

• $s = \sigma + it$, désigne un nombre complexes, tel que :
  * σ est la partie réelle du nombre complexe s.
  * t est la partie imaginaire du nombre complexe s.
• $\mathbb{N}$: L'ensemble des entiers naturels $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.
• $\mathbb{N}^*$: L'ensemble des entiers naturels positifs $\{1, 2, 3, ...\}$.
• $\mathbb{P}$: L'ensemble des nombres premiers.
• $\mathbb{Z}$: L'ensemble des nombres entiers relatifs.
• Si m et n sont deux entiers, (m, n) désignera leur pgcd.
• Pour $t \in \mathbb{R}$, $[t]$ désigne la partie entière du nombre réel "t" et $\{t\}$ désigne la partie fractionnaire du nombre réel "t".
• "$d \mid n$" signifie "d" divise n, "$d \nmid n$" sa négation i.e. "d" ne divise pas "n".

• "$p^\alpha \| n$" signifie "p^α / n" et "$p^{\alpha+1} \nmid n$".

Introduction

En mathématiques, la fonction zêta de Riemann notée $\zeta(s)$ a été nommée par le mathématicien Bernhard Riemann. C'est une fonction à variable complexe et ses applications en théorie des nombres, en particulier l'étude des nombres premiers, se sont avérées essentielles et elle joue un rôle important en arithmétique.

Bernhard Riemann est considéré comme le premier à étudier la fonction ζ pour la variable complexe $s \in \mathbb{C}$. Il a bénéficié du développement de la théorie de l'analyse complexe aux mains d'éminents scientifiques tels que Cauchy (1789-1857) et Carl Weierstrass (1815-1897). Riemann est considéré comme l'un des fondateurs de cette branche des mathématiques.

Les nouvelles méthodes de Riemann, qui n'étaient pas à la disposition d'Euler, lui ont permis d'étudier la fonction sur d'autres domaines et de trouver des relations mystérieuses et des secrets qui prouvent la relation étroite de la fonction zêta avec les nombres premiers.

Fonction zêta de Riemann pour une variable complexe :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Dans ce mémoire, il s'agit d'exposer le prolongement analytique de la fonction zêta de Riemann, définie sur $\sigma = \mathrm{Re}\,(s) > 1$, à tout le plan complexe sauf en $s = 1$, et ceci par étapes et de différentes manières.

Au premier chapitre, on exposera des outils mathématiques d'analyse réelle et complexe, utiles à notre étude, tels que la notion de fonction arithmétique, l'intégrale de Riemann-Stieltjes, le théorème de sommation d'Abel, les nombres et polynômes de Bernoulli, puis le développement d'Euler-Maclaurin et enfin, la fonction gamma.

Au deuxième chapitre, on donnera une présentation succincte de la série de Riemann sur le corps des réels, puis de la fonction zêta sur le corps des complexes. On y expliquera la notion du prolongement analytique.

Au troisième chapitre, on présentera tout d'abord le prolongement de zêta, sur le demi-plan complexe $\sigma = \mathrm{Re}\,(s) > 0$ de deux façons différentes, puis le prolongement analytique sur tout le plan complexe sauf $s = 1$. Enfin, on achève avec des informations importantes sur la fonction zêta ainsi que sa relation avec certaines séries de Dirichlet, ses zéros et la conjecture de Riemann.

Chapitre 1

Outils mathématiques d'analyse réelle et complexe

1.1 Fonction arithmétique

Définition 1.1.1 ([1]) *Une fonction arithmétique est une application définie de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{C}$.*

On distingue deux types de fonctions arithmétiques :

1.1.1 Fonction arithmétique additive

Définition 1.1.2 *Une fonction arithmétique f est dite additive, si et seulement si :*

$$f(nm) = f(n) + f(m) \ si \ (m,n) = 1. \tag{1.1}$$

Fonction complètement additive

Définition 1.1.3 *Une fonction arithmétique f est dite complètement additive, si et seulement si :*

$$f(nm) = f(n) + f(m) \quad si \ m,n \quad des \ entiers. \tag{1.2}$$

Exemple 1.1.1 *La fonction $\Omega(n)$ nombre de facteurs premiers de n y compris leurs multiplicités, définie par*

$$\Omega(n) = \sum_{p^\alpha || n} \alpha$$

est une fonction complètement additive, par exemple on a :

$$\Omega(144) = \Omega(2^4.3^2) = \Omega(2^4) + \Omega(3^2) = 4 + 2 = 6.$$

1.1.2 Fonction arithmétique multiplicative

Définition 1.1.4 *Une fonction arithmétique f est dite multiplicative, si et seulement si :*

$$f(1) = 1 \quad et \quad f(nm) = f(n)f(m) \ \ si \ \ (n, m) = 1.$$

Dans ce cas pour tout entier $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$ on a :

$$f(n) = \prod_{p^\alpha || n} f(p^\alpha). \tag{1.3}$$

Fonction arithmétique complètement multiplicative

Définition 1.1.5 *Une fonction arithmétique f est dite complètement multiplicative si et seulement si :*

$$f(1) = 1 \ \text{ et } \ f(nm) = f(n)f(m) \quad \text{pour tout } n \text{ et } m \text{ dans } \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas pour tout entier $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$ on a

$$f(n) = \prod_{p^\alpha || n} (f(p))^\alpha. \tag{1.4}$$

1.1.3 Certaines fonctions arithmétiques

1. Fonction $d(n)$ nombre de diviseurs de n

Définition 1.1.6 *Pour tout entier $n \geq 1$, on note par $d(n)$ le nombre de diviseurs d'un entier n qui est définie par :*

$$\begin{aligned} d(n) &= Card\{\ d \in \mathbb{N}^*, d \mid n\ \} \\ &= \sum_{d|n} 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

$d(7) = card\ \{1, 7\} = 2.$
$d(9) = card\ \{1, 3, 9\} = 3 \neq d(3).d(3) = 2.2 = 4.$
$d(24) = card\ \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} = 8 = d(3).d(8) = 24.$
d est non fortement multiplicative.

Pour $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$ alors $d(n) = \prod_{p^\alpha || n} (\alpha + 1)$.

Quelques valeurs de la fonction $d(n)$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$d(n)$	2	2	3	2	4	2	4	3	4

2. Fonction $\sigma(n)$ somme de diviseurs de n

Définition 1.1.7 *Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction somme de diviseurs $\sigma(n)$ est définie par :*

$$\sigma(n) \quad = \sum_{d|n} d. \tag{1.6}$$

$\sigma(5) = 1 + 5 = 6$
$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$
$\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$
σ est non fortement multiplicative.
Si $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$ alors $\sigma(n) = \prod_{p^\alpha || n} \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}$.

Quelques valeurs de la fonction $\sigma(n)$

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(n)$	3	4	7	6	12	8	15	13	18

3. Fonction de Von Mangoldt

Définition 1.1.8 *La fonction de von Mangoldt est définie par :*

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & si \quad n = p^\alpha \quad avec\ p \in \mathbb{P} \quad et \quad \alpha \geq 1 \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{1.7}$$

Λ n'est ni additive ni multiplicative.

Quelques valeurs de la fonction Von Mangoldt

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Lambda(n)$	0	$\log 2$	$\log 3$	$\log 2$	$\log 5$	0	$\log 7$	$\log 2$	$\log 3$	0

4. La fonction de Möbius

Définition 1.1.9 *La fonction de Möbius $\mu(n)$ est définie comme suit : pour tout entier*

$$n = p_1^{a_1}...p_k^{a_k},$$

on a

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ (-1)^k & si\ \ a_1 = a_2 = ... = a_k = 1 \text{ (produit des facteurs premiers distincts)} \\ 0 & sinon. \end{cases} \quad (1.8)$$

$\mu(n) = 0$ si et seulement si, n a un facteur carrée > 1. De plus, μ est multiplicative.

Quelques valeurs

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

5. Fonction indicatrice d'Euler

Définition 1.1.10 *La fonction indicatrice d'Euler $\Phi(n)$ est définie par :*

$$\begin{aligned} \Phi(n) &= Card\{m \in \mathbb{N}^*/m \leq n \quad et\ (m,n) = 1)\} \\ &= \sum_{\substack{m \leq n \\ (m,n)=1}} 1. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Φ est multiplicative. De plus pour $n = \prod_{p^\alpha || n} p^\alpha$ on a $\Phi(n) = n \prod_{p/n} (1 - \frac{1}{p})$.

Quelques valeurs de la fonction $\Phi(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4

1.1.4 Séries de Dirichlet

Définition 1.1.11 ([1]) *On appelle série de Dirichlet toute série ayant la forme suivante :*

$$D(f,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}, \quad (1.10)$$

où f est une fonction arithmétique et $s = \sigma + it$ un complexe.

Exemple 1.1.2 $f(n) = \mu(n), f(n) = (-1)^n, f(n) = d(n)$ *(on verra par la suite leurs relation avec la fonction zêta).*

Proposition 1.1.1 *Si la série de Dirichlet suivante :*

$$D(f,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

converge pour $s = s_0$ avec $\operatorname{Re} s = \sigma$ et $\operatorname{Re} s_0 = \sigma_0$, alors elle converge uniformément sur tout domaine fermé contenu dans $\sigma > \sigma_0$ et $D(f,s)$ est analytique pour $\sigma > \sigma_0$.

Corollaire 1.1.1 *Si $D(f,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge pour $s = s_0$, alors $D(f,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ converge pour tout s tel que que $\sigma \geq \sigma_0$.*

En général, il existe une abscisse de convergence σ_c telle que $D(f,s)$ converge pour $\sigma \geq \sigma_c$ et diverge pour $\sigma < \sigma_c$.

Définition 1.1.12 *On note σ_a l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet et elle est définie par :*

$$\sigma_a = \inf \left\{ \sigma \in \mathbb{R} \quad \textit{et} \quad D(f,s) \quad \textit{converge absolument pour } \operatorname{Re}(s) > \sigma \right\}.$$

Théorème 1.1.1 *Soient f et g deux fonctions arithmétiques, on suppose que les séries de Dirichlet $D(f,s)$ et $D(g,s)$ sont absolument convergentes, alors*

1/ La somme de deux séries de Dirichlet est définie par :

$$D(f,s) + D(g,s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n) + g(n)}{n^S}.$$

2/ Le produit de deux séries de Dirichlet est définie par :

où $f * g$ est le produit de convolution de Dirichlet de f et g et est défini par :

$$f * g = \sum_{d/n} f(d) g(n|d).$$

1.2 Intégrale de stieltjes

1.2.1 Définition et propriétés

On introduit ici une intégrale généralisant celle de Riemann où dans $\int_a^b f(x)dx$ le x de dx, l'intégrateur peut être remplacé par une fonction $g(x)$ i.e. $\int_a^b f(x)dg(x)$.

Définition 1.2.1 *Soit les deux fonctions f et g définies sur $[a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Pour toute subdivision de $[a,b]$*

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$

et pour tout $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ vérifiant $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ pour tout $i \in \{1...n\}$, on pose :

$$S(\sigma, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

On dit que f est Riemann-Stieltjes intégrable par rapport à g s'il existe une constante L tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta, \textit{tel que} \quad \sup_{i=1...n} (x_i - x_{i-1}) < \delta \Longrightarrow |S(\sigma, \xi) - L| < \varepsilon.$$

On écrira $f \in RS(g)$ et on note $L = \int_a^b f(x)dg(x)$.

Proposition 1.2.1 *Soient $f, f_1, f_2 \in RS(g)$ et g une fonction sur $[a,b]$ et c_1, c_2 constantes alors :*

1/

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dg(x) = c_1 \int_a^b f_1(x)dg(x) + c_2 \int_a^b f_2(x)dg(x).$$

2/

$$\int_a^b f(x)d(c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x)) = c_1 \int_a^b f(x)dg_1(x) + c_2 \int_a^b f(x)dg_2(x).$$

3/

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x)$$

valable si au moins l'une des deux intégrales est définie.

4/ Si f et g sont continues sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dg(x) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Théorème 1.2.1 *Si f est continue sur $[a,b]$ et g est une fonction en escalier sur $[a,b]$ possédant des sauts $c_0,...c_n$ au points $a \leq x_0 < ... < x_n \leq b$ de $[a\ b]$, c'est-à-dire $c_i = g(x_i+0) - g(x_i-0)$*

$$\begin{aligned} g(x) &= 0, && (a \leq x < x_0) \\ g(x) &= c_0 + c_1 + ... + c_{k-1,} && (x_{k-1} \leq x < x_k\ ;\ k = 1, ...n) \\ g(x) &= c_0 + c_1 + ... + c_{n-1,} + c_n && (x_n \leq x \leq b), \end{aligned}$$

alors

$$\sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i) = \sum_{a \leq x_i \leq b} c_i f(x_i) = \int_a^b f(x)dg(x). \tag{1.11}$$

Corollaire 1.2.1 *Sous les hypothèses du Théorème 1.2.1, on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq i \leq b} c_i f(x_i) &= \int_{x_0^-}^b f(x)dg(x) \\ &= f(u)g(u)\ |_{x_0^-}^b - \int_{x_0}^b g(u)f'(u)du, \ \ car \quad (g(x_o^-) = 0) \\ &= f(b)g(b) - \int_{x_0}^b g(u)f'(u)du. \end{aligned}$$

1.2.2 Formule sommatoire d'Abel

Une autre façon d'établir le corollaire précédent sans utiliser l'intégrale de Stieltjes.

Théorème 1.2.2 ([17]) *Soit (a_n) une suite de nombres complexes et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 pour $x \geq 1$, soit*

$$g(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n,$$

alors, pour tout $x \geq a$, on a

$$\sum_{a \le n \le x} a_n f(n) = g(x)f(x) - \int_a^x g(t)f'(t)dt. \tag{1.12}$$

Preuve. On a $g(0) = 0$ pour $x < a$ et $a_n = g(n) - g(n-1)$ pour tout réel x. On pose $A(N) = \sum_{1 \le n \le N} a_n f(n)$

$$\begin{aligned}
A(N) &= \sum_{n=1}^{N} a_n f(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} (g(n) - g(n-1)) f(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} g(n) f(n) - \sum_{n=1}^{N} g(n-1) f(n) \\
&= \sum_{n=1}^{N} g(n) f(n) - \sum_{n=1}^{N-1} g(n) f(n+1) \\
&= g(N)f(N) - \sum_{n=1}^{N-1} g(n)(f(n+1) - f(n)) \\
&= g(N)f(N) - \sum_{n=1}^{N-1} g(n) \int_n^{n+1} f'(t)dt \\
&= g(N)f(N) - \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t)f'(t)dt, \text{ (car } g(t) = g(n) \text{ pour tout } t \in [n, n+1[) \\
&= g(N)f(N) - \int_1^N g(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

Soit maintenant x un réel, on pose alors $N = [x]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Il est clair que $g(x) = g(N)$ et $A(x) = A(N)$. En effet

$$\begin{aligned}
A(x) &= A(N) = g(N)f(N) - \int_1^N g(t)f'(t)dt \\
&= g(N)f(N) - \left(\int_1^x g(t)f'(t)dt - \int_N^x g(t)f'(t)dt \right) \\
&= g(N)f(N) - \int_1^x g(t)f'(t)dt + \int_N^x g(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

On a $g(t) = g(N)$ pour tout t dans l'intervalle $[N, x]$, donc

$$\begin{aligned}
\int_N^x g(t)f'(t)dt &= \int_N^x g(N)f'(t)dt \\
&= g(N) \int_N^x f'(t)dt \\
&= g(N)\left(f(x) - f(N)\right) \\
&= g(N)f(x) - g(N)f(N) \\
&= g(x)f(x) - g(N)f(N),
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
A(x) &= g(N)f(N) - \int_1^x g(t)f'(t)dt + g(x)f(x) - g(N)f(N) \\
&= g(x)f(x) - \int_1^x g(t)f'(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Remarque 1.2.1 *Si* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)f(x) = 0$, *alors*

$$\sum_{n \geq 1} a_n g(n) = -\int_1^\infty g(t)f'(t)dt.$$

Exemple 1.2.1 *Considérons* $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $a_n = 1$ *pour tout* n*, on a :* $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$*. En posant*

$$g(x) = \sum_{n \leq x} 1 = [x], \text{ on a : } x = [x] + \{x\} \text{ avec } 0 \leq \{x\} < 1.$$

La série harmonique

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \int_{-1}^{x} \frac{d[t]}{t} = \frac{[x]}{x} + \int_{1}^{x} \frac{[t]}{t^2} dt = \frac{[x]}{x} + \int_{1}^{x} \frac{t - \{t\}}{t^2} dt \\ &= \log(x) + \left(1 - \int_{1}^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt\right) - \frac{\{x\}}{x} + \int_{x}^{\infty} \frac{\{t\}}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Puisque l'intégrale $\int_1^x \frac{\{t\}}{t^2} dt$ *est convergente pour* $x \longrightarrow \infty$ $\left(0 \leq \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} < 1\right)$ *et* $0 \leq \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} < \frac{1}{x}$*, donc on peut affirmé que* $\lim\limits_{N \longrightarrow \infty} \left(\sum\limits_{n \leq N} \frac{1}{n} - \log(N)\right) = 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} dt = \gamma$*, dite constante d'Euler et vaut* $0.577....$

Ainsi

$$\sum_{n \leq N} \frac{1}{n} = \log(N) + \gamma + K \text{ avec } 0 \leq K < \frac{1}{N}.$$

1.3 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

1.3.1 Nombres de Bernoulli

Définition 1.3.1 *Les nombres de Bernoulli sont les coefficients* B_n *dans le développement en série infinie :*

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n t^n}{n!} \qquad \forall t \in \mathbb{C} \quad |t| < 2\pi. \tag{1.13}$$

Les nombres de Bernoulli peuvent être calculés aussi par la double somme :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i i^n. \tag{1.14}$$

Quelques nombres de Bernoulli

Les premiers nombres de Bernoulli sont donnés par le tableau suivant :

k	**B**$_k$	
0	1/1=	1.00000 00000
1	-1/2=	-0.50000 00000
2	1/6=	0.16666 66667
4	-1/30=	-0.03333 33333
6	1/42=	0.02380 95238
8	-1/30=	-0.03333 33333
10	5/66=	0.07575 75758
12	-691/2730=	-0.25311 35531
14	7/6=	1.16666 66667
16	-3617/510=	-7.09215 68627
18	43867/7 =	54.97117 79494
20	-174611/330=	-529.12424 24242

De plus pour $n \geq 1$, on a $B_{2n+1} = 0$.

1.3.2 Polynômes de Bernoulli

Les polynômes de Bernoulli forment l'unique suite de polynômes $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de période 1 tel que pour $0 \leq x \leq 1$, on a :

1. $B_0(x) = 1$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 B_n(x)dx = 0$.

La fonction génératrice pour les polynômes de Bernoulli est donnée par la relation suivante :

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.15}$$

Les premiers polynômes de Bernoulli sont :

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1 \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2} \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6} \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \\
B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x \\
B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}.
\end{aligned}$$

Quelques propriétés

$$\begin{aligned}
B_n(0) &= B_n & n \geq 0 \\
B_n(1) &= B_n(0) & n \geq 2 \\
B_n(x+1) - B_n(x) &= nx^{n-1} & n \geq 1 \\
B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_k x^{n-k}. & \\
B_n(1-x) &= (-1)^n B_n(x) & n \geq 1 \\
|B_{2n}(x)| &\leq |B_{2n}| & 0 \leq x \leq 1 \\
|B_{2n+1}(x)| &\leq (2n+1).\,|B_{2n}| & 0 \leq x \leq 1 \\
|B_n(x)| &\leq n!2^{1-n}\pi^{-n}\zeta(n), & n \geq 2, 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

1.3.3 Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

Soit f une fonction a valeurs complexes, de classe C^K définie sur $[a,b]$ avec $a < b$ réels.

L'énoncé qui suit, exprime la somme $\sum\limits_{a<n\leq b} f(n)$ avec l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, les valeurs de f (ainsi que ses dérivées) aux extrémités $f(a)$ et $f(b)$ et d'un reste.

Théorème 1.3.1 (Formule d'Euler-Maclaurin)

$$\sum_{a<n\leq b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{K} \tfrac{(-1)^k}{k!} \left(B_k(\{b\})f^{(k-1)}(b) - B_k(\{a\})f^{(k-1)}(a)\right) + R_K, \qquad (1.16)$$

où R_K est le reste et est donné par :

$$R_K = -\tfrac{(-1)^K}{K!} \int_a^b f^{(K)}(x) B_K(\{x\}) dx.$$

Corollaire 1.3.1 *Si a, b sont des entiers f une fonction de classe C^{2K} définie sur $[a, b]$ où K est un nombre pair, alors*

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \tfrac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{K} \tfrac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_K, \tag{1.17}$$

dont le rest R_K vaut

$$R_K = -\tfrac{1}{(2K)!} \int_a^b f^{(2K)}(x) B_{2K}(\{x\}) dx,$$

où les B_{2k} désignent les nombres de Bernoulli.

De plus R_K s'exprime à l'aide du polynôme de Bernoulli $B_{2K}(t)$, et on a

$$|R_K| \leq \frac{|B_{2K}|}{(2K)!} \int_a^b |f^{(2K)}(x)| dx.$$

Preuve. (Corollaire) On démontre la formule

$$\sum_{k=a}^{b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right) + R_K$$

et

$$R_K = -\frac{1}{(2K)!} \int_a^b f^{(2K)}(x) B_{2K}(x - [x]) dx,$$

sur l'intervalle $[n, n+1]$, avec $n \in \mathbb{Z}$, puis on en déduit la formule précédente par sommation pour $n \in \mathbb{Z}$ où $a \leq n \leq b-1$.

Soit g une fonction continûment dérivable sur $[n, n+1]$. En utilisant la propriété suivante des polynômes de Bernoulli : $\forall m \in \mathbb{N} \quad B'_{m+1} = (m+1)B_m$, et par le biais de l'intégration par parties, on trouve :

$$\int_n^{n+1} g(t) B_m(t-n) dt = \left[g(t) \frac{B_{m+1}(t-n)}{m+1}\right]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} g'(t) \frac{B_{m+1}(t-n)}{m+1} dt.$$

Sachant que pour $m \geq 1$, on a $B_{m+1}(1) = B_{m+1}(0) = b_{m+1}$, on en déduit que pour $m \geq 1$, la formule suivante

$$\int_n^{n+1} g(t) B_m(t-n)\, dt = \frac{b_{m+1}}{m+1}(g(n+1) - g(n)) - \frac{1}{m+1}\int_n^{n+1} g'(t) B_{m+1}(t-n)\, dt.$$

Sachant que (pour $m = 0$) on a :

$$B_0(t) = 1 \text{ et } \ B_1(1) = \frac{1}{2} \ \text{ et } B_1(0) = -\frac{1}{2},$$

on en déduit que pour g deux fois continûment dérivable la quantité suivante

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} g(t)\, dt &= \int_n^{n+1} g(t) B_0(t-n)\, dt \\
&= \frac{1}{2}(g(n+1) + g(n)) - \int_n^{n+1} g'(t) B_1(t-n)\, dt \\
&= \frac{g(n+1) + g(n)}{2} - \frac{b_2}{2}(g'(n+1) - g'(n)) + \frac{1}{2}\int_n^{n+1} g''(t) B_2(t-n)\, dt.
\end{aligned}$$

Soit f une fonction $2K$-fois continûment dérivable ($K > 0$). Par récurrence sur K, on montre :

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(t)\, dt &= \frac{f(n) + f(n+1)}{2} + \sum_{k=2}^{2K} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{k!}(f^{(k-1}(n+1) - f^{(k-1)}(n)) \\
&\quad + \frac{1}{(2K)!}\int_n^{n+1} f^{(2K)}(t) B_{2K}(t-n)\, dt.
\end{aligned}$$

Enfin, avec la propriété : $\forall j \geq 1, B_{2j+1} = 0$, on en déduit (pour $K = 2j$) :

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(t)\, dt &= \frac{f(n) + f(n+1)}{2} - \sum_{j=1}^{K} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(n+1) - f^{(2j-1)}(n)\right) \\
&\quad + \frac{1}{(2K)!}\int_n^{n+1} f^{(2K)}(t)\ B_{2K}(t-n) dt,
\end{aligned}$$

où $n = [t]$. Ainsi par sommation sur $n \in \mathbb{Z}$ $(a \leq n \leq b-1)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=a}^{b-1} \frac{f(n)+f(n+1)}{2} &= \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{j=1}^{K} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\right) \\ &\quad - \frac{1}{(2K)!}\int_a^b f^{(2K)}(t)\ B_{2K}(t-[t])dt.\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Majoration du reste

Si f est une fonction complexe $2K$-fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$ (avec $K \geq 1$), on peut majorer le reste (ou « terme d'erreur ») de la formule d'Euler-Maclaurin en utilisant la majoration des polynômes de Bernoulli d'indice pair : $|B_{2K}(t)| \leq |B_{2K}|$:

$$|R_K| \leq \frac{|B_{2k}|}{(2k)!}\int_a^b |f^{(2k)}(x)|dx.$$

Application : Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\sum_{m\leq n} \frac{1}{m} &= \log(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \sum_{i=1}^{k} \frac{B_{2i}}{2i..n^{2i}} + R_{2k} \\ \text{avec} \quad \gamma &= 0.577215664901532860... \\ \text{et} \quad R_{2k} &= \int_n^{\infty} \frac{B_{2k}(\{t\})}{t^{2k+1}}dt \ \ , k \geq 2 \qquad |R_{2k}| \leq \frac{|B_{2k}|}{2k.n^{2k}}.\end{aligned}$$

Pour $n = 100, k = 5$, on obtient $\gamma = \sum_{m\leq 100} \frac{1}{m} - \log(100) - \frac{1}{200} + \sum_{i=1}^{5} \frac{B_{2i}}{2i..n^{2i}}$ avec une erreur de $\frac{5}{660.10^{20}} < 10^{-22}$.

1.4 Fonction gamma

1.4.1 Définition et propriétés

Définition 1.4.1 *On définit la fonction gamma par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \tag{1.18}$$

où x appartient au demi-plan $\{x \in \mathbb{C} \text{ (resp. } \mathbb{R}) : \mathrm{Re}(x) > 0\}$.

Proposition 1.4.1

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
3. Pour tout entier positif n, on a $\Gamma(n+1) = n!$.
4. Formule des compléments : $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad (s \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z})$.
5. Formule de duplication : $\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.2^{1-2s}\Gamma(2s)$.
6. Pour tout s tel que $\sigma > 0$, on a : $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$.
7. La fonction $\frac{1}{\Gamma(s)}$ est holomorphe dans tout le plan complexe et admet le développement en produit infini suivant :

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = s \exp(\gamma s) \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{s}{n}\Big) \exp(-\frac{s}{n}).$$

1.4.2 Prolongement analytique de la fonction gamma

Théorème 1.4.1 ([11]) *La fonction $\Gamma(s)$ initialement définie pour $\{\mathrm{Re}(s) > 0\}$ bénéficie d'un prolongement méromorphe au plan complexe sur $\mathbb{C}$ avec pour seules singularités, des pôles simples aux entiers négatifs $s = 0, -1, -2....$ où elle a pour résidus :*

$$res_{s=-n}\Gamma = \ (-1)^n/n!.$$

Preuve. Il suffit de prolonger Γ à tout demi-plan de la forme $\{\mathrm{Re}(s) > -m\}$ avec m un entier ≥ 1 quelconque.

Pour $Re(s) > -1$, définissons :

$$\Phi_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}.$$

Puisque $\Gamma(s+1)$ est holomorphe dans $\{Re(s) > -1\}$, il est claire que Φ_1 est méromorphe dans ce demi-plan et qu'elle a une unique singularité, un pôle d'ordre 1 en $s = 0$. Comme $\Gamma(1) = 1$ son résidu vaut $1 = \frac{(-1)^0}{0!}$.

De plus dans le sous demi-plan $\{Re(s) > 0\} \subset \{\mathrm{Re}(s) > -1\}$, l'identité fondamentale montre que cette fonction

$$\Phi_1(s) = \Gamma\frac{(s+1)}{s} = \Gamma(s)$$

coïncide bien avec la fonction à prolonger.

Pour un entier $m \geq 1$ quelconque, définissons dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > -m\}$ la fonction :

$$\Phi_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s+m-1)...(s+n+1)(s+n)(s+n-1)\cdots\ (s+1)s.}.$$

Visiblement cette fonction est méromorphe avec des pôles simples en $s = -m+1, ..., -1, 0$ et en un point entier négatif $\quad s = -n \quad$ avec $\quad 0 \leq n \leq m-1$ quelconque, elle a pour résidu :

$$\begin{aligned} res_{s=-n}\Phi_m(s) &= \frac{\Gamma(-n+m)}{(-n+m-1)...(1)(-1)(-2)...(-n)} \\ &= \frac{(m-n+1)!}{(m-n+1)!(-1)^n n!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

■

Chapitre 2

Quelques notions sur la fonction zêta de Riemann

2.1 Série de Riemann réelle

Définition 2.1.1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série dont le terme général est donné par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$ *est dite série de Riemann d'exposant α.*

Théorème 2.1.1 *La série de Riemann d'exposant α est convergente, si et seulement si $\alpha > 1$ et diverge pour $\alpha \leq 1$.*

Preuve. Dans le cas $\alpha \leq 0$: le terme générale $\frac{1}{n^\alpha}$ ne converge pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente.

Dans le cas $\alpha = 1$: la série se ramène à la série harmonique qui est divergente.

Dans les autres cas : on compare les sommes partielles de la série avec des intégrales de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$.

On a en effet, pour $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{(k-1)^\alpha}$$

Supposons $1 < \alpha$. On obtient, pour tout $n \geq 2$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq 1 + \int_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt \\ &= 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

La suite (S_n) est majorée donc la série (à termes réels positifs) converge.

Supposons $0 < \alpha < 1$. On obtient de même pour tout $n \geq 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{(k-1)^{\alpha}} \geq \sum_{k=2}^{n+1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^{\alpha}} dt \geq \int_{1}^{n+1} \frac{1}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}((n+1)^{1-\alpha} - 1).$$

Le terme de droite diverge vers $+\infty$. Il en est de même de la suite (S_n). La série est donc divergente. ■

2.2 Fonction zêta de Riemann

Définition 2.2.1 *La fonction zêta de Riemann est une fonction à variable complexe, qui est définie pour tout* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ *et s'écrit sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \mathrm{Re}(s) = \sigma > 1 \\ &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} ... \end{aligned} \tag{2.1}$$

Pour $s = \sigma + it$

$$\begin{aligned} n^{-s} &= \exp(-s.\log(n)) = \exp(-\sigma.\log(n) - it.\log(n)) \\ &= n^{-\sigma}.\cos(t.\log(n)) \; - i.\left(n^{-\sigma}.\sin(t.\log(n))\right). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Re}(\zeta(s)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(t.\log(n))}{n^{\sigma}}$ *et* $\mathrm{Im}(\zeta(s)) \; = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(t.\log(n))}{n^{\sigma}}$.

Proposition 2.2.1 ([13]) *La fonction zêta de Riemann est absolument convergente pour tout* $\sigma > 1$.

Preuve. On a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s},$$

donc

$$\begin{aligned} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n^{\sigma+it}|} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|n^{\sigma} e^{it\ln n}|} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}, \end{aligned}$$

et cette série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{\sigma}}$ converge pour tout $\sigma > 1$ (d'après le critère de Riemann).

On en déduit que : la fonction ζ est absolument convergente pour tout $\sigma > 1$.

■

Proposition 2.2.2 *Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$\zeta^{'}(s) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^s}$$

et

$$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s}.$$

Preuve. Soit $\sigma > 1$:

posons U_n la fonction définie pour $\sigma > 1$ par $U_n(s) = \frac{1}{n^s}$.

1. On montre que la fonction zêta de Riemann est une fonction de classe C^1.

* $\forall n$, U_n est de classe C^1, pour $\sigma > 1$

$$U_n'(s) = -\frac{\ln(n)}{n^s},$$

* $|U_n'(s)| \leq \frac{\ln(n)}{n^{\sigma}}$, $\sigma > 1$ et la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^{\sigma}}$ est convergente.

La série $\sum_{n\geq 1} U_n'$ est uniformément convergente pour $\sigma > 1$.

Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$, on a :

$$\zeta^{'}(s) = -\sum_{n\geq 1}\frac{\ln(n)}{n^s}.$$

Ainsi, la fonction zêta de Riemann est une fonction de classe C^1.

2. On montre par récurrence que la fonction zêta de Riemann est une fonction de classe C^k et satisfait la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \zeta^{(k)}(s) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s} \qquad \sigma > 1.$$

vérifiée pour $k = 1$.

Soit $k \geq 1$ on suppose que la propriété est vraie pour l'ordre k, on montre qu'elle est vraie, pour l'ordre $k + 1$.

Soit $\sigma > 1$, posons $U_n^{(k)}$ la fonction définie pour $\sigma > 1$ par :

$$U_n^{(k)}(s) = \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s}.$$

(i) $\forall n, U_n^{(k)}$ est de classe C^1 pour $\sigma > 1$, et on a

$$U_n^{(k)'}(s) = \frac{(-1)^{k+1} \ln^{k+1}(n)}{n^s}.$$

(ii) $|U_n^{(k)\prime}(s)| \leq \frac{\ln^{k+1}(n)}{n^\sigma}$, $\forall\ \sigma > 1$ et la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\ln^{k+1}(n)}{n^\sigma}$ est convergente.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n^{(k)'}$ est donc uniformément convergente pour $\sigma > 1$, donc d'après le théorème de dérivation sous le signe $\sum$ la fonction ζ est de classe C^{k+1} pour $\sigma > 1$, de plus :

$$\zeta^{(k+1)}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{k+1} \ln^{k+1}(n)}{n^s} \qquad \sigma > 1.$$

On en déduit que :

$$\zeta^{(k)}(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^k \ln^k(n)}{n^s}.$$

Ainsi, nous concluons que la fonction zêta de Riemann est une fonction de classe C^k. ∎

2.3 Quelques formules de la fonction zêta de Riemann

2.3.1 Produit d'Euler

Une formule qui montre la relation de la fonction de zêta avec les nombres premiers.

Théorème 2.3.1 ([13]) *Pour tout* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *la fonction zêta de Riemann s'écrit sous la forme*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \tag{2.2}$$

où $p \in \mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, ...\}$ *est l'ensemble des nombres premiers (entiers positifs).*

Preuve. Par définition de $\zeta(s)$ on a

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + ... \tag{2.3}$$

On divise l'équation (2.3) par 2^s, on obtient

$$\frac{\zeta(s)}{2^s} = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + ... \tag{2.4}$$

Retranchant (2.3) de (2.4), on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + ... \tag{2.5}$$

Maintenant on divise (2.5) par 3^s, on obtient

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\frac{\zeta(s)}{3^s} = \frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + ... \tag{2.6}$$

Soustrayons (2.5) de (2.6), on trouve

$$\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{11^s} + ...$$

On répète l'opération de division par p^s puis on fait la soustraction de la relation précédente, on obtient :

$$...\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1,$$

et comme

$$\left(1 - \frac{1}{11^s}\right)\left(1 - \frac{1}{7^s}\right)\left(1 - \frac{1}{5^s}\right)\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)... = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1 - \frac{1}{p^s}),$$

alors

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}(1 - \frac{1}{p^s})\zeta(s) = 1.$$

Ainsi

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1 - \frac{1}{p^s})^{-1}.$$

■

2.3.2 Formule intégrale

Théorème 2.3.2 ([13]) *La relation qui relie la fonction zêta de Riemann et la fonction gamma est donnée par la formule intégrale suivante :*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du \ , \qquad \sigma > 1. \tag{2.7}$$

Preuve. on a

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{et} \quad \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

donc

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} (\frac{t}{n})^{s-1} \frac{dt}{n},$$

si on pose $t = nu$, on trouve

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{s-1} du.$$

En appliquant le théorème de convergence monotone, on trouve

$$\begin{aligned} \zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{s-1} du \\ &= \int_0^{+\infty} (\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nu}) u^{s-1} du, \quad \text{si} \ \ \sigma > 1. \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{s-1} du \right| &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nu} u^{\sigma-1} du \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(\sigma)}{n^\sigma} = \Gamma(\sigma) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} < +\infty. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a pour $\sigma > 1$

$$\begin{aligned}\zeta(s)\Gamma(s) &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1-e^{-u}} u^{s-1} du \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du.\end{aligned}$$

On peut dire que c'est une équation fonctionnelle reliant ζ et Γ, mais il y en a d'autres. ■

2.3.3 Equation fonctionnelle

Théorème 2.3.3 ([14]) *La fonction ζ de Riemann a une équation fonctionnelle sous la forme :*

$$F(s) = F(1-s), \tag{2.8}$$

où

$$F(s) = \pi^{\frac{-s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s).$$

Preuve. On a :

$$\Gamma(s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

En adoptant le changement de variable $s \to \frac{s}{2}$, on obtient

$$\Gamma(\frac{s}{2}) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{s}{2}-1} dt$$

Par le biais du nouveau changement de variable : $t = \pi n^2 x \to dt = \pi n^2 dx$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{s}{2}) &= \int\limits_0^{+\infty} (\pi n^2 x)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} \pi n^2 dx \\ &= \int\limits_0^{+\infty} \pi^{\frac{s}{2}} n^s x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\frac{1}{n^s} = \int\limits_0^{+\infty} x^{\frac{s}{2}-1} e^{-\pi n^2 x} dx.$$

Par sommation, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\frac{1}{n^s}=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2x}dx,$$

ce qui entraîne

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\int_0^{+\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}dx.$$

Ainsi

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\int_0^{+\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}dx.$$

Il est commode de rappeler que la fonction $\vartheta(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}e^{-\pi n^2x}$ est connue sous le nom de fonction thêta de Jacobi

et vérifie

$$\vartheta(x)=1+2\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}=1+2\Psi(x)\ ;\ \vartheta(\frac{1}{x})=\sqrt{x}\vartheta(x).$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\pi n^2x}dx &= \int_0^{+\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\ \Psi(x)dx\\ &= \int_1^{+\infty}x^{\frac{s}{2}-1}\ \Psi(x)dx+\int_0^{1}x^{\frac{s}{2}-1}\ \Psi(x)dx.\end{aligned}$$

On a : $\vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\vartheta(\frac{1}{x}) \Longrightarrow 2\Psi(x) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}(2\Psi(\frac{1}{x}) + 1) \Longrightarrow \Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\Psi(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx &= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}(\frac{1}{\sqrt{x}}\Psi(\frac{1}{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2})dx \\
&= \int_0^1 [x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\Psi(\frac{1}{x})dx + \frac{1}{2}(x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1})]dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\Psi(\frac{1}{x})dx + \frac{1}{2}\int_0^1 (x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1})dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\Psi(\frac{1}{x})dx + \frac{1}{2}[\frac{1}{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}x^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{s}{2}}x^{\frac{s}{2}}]_0^1 dx \\
&= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\Psi(\frac{1}{x})dx + \frac{1}{s(s-1)}.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable : $x = \frac{1}{u} \to dx = -\frac{1}{u^2}du \quad |_0^1 \to |_\infty^1$, on trouve

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx = \int_\infty^1 (\frac{1}{u})^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\Psi(u)(-\frac{du}{u^2}) + \frac{1}{s(s-1)}.$$

En remplaçant u par x dans l'équation ci-dessus

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx = \int_\infty^1 (\frac{1}{x})^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}\Psi(x)(-\frac{dx}{x^2}) + \frac{1}{s(s-1)}.$$

Réarrangeant cette dernière et intégrant là on obtient

$$\int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx = \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\Psi(x)dx + \frac{1}{s(s-1)}$$

$$\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx = \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx + \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx.$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx &= \int_1^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx + \int_1^\infty x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\Psi(x)dx + \frac{1}{s(s-1)} \\ &= \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\Psi(x)dx + \frac{1}{s(s-1)},\end{aligned}$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_0^\infty x^{\frac{s}{2}-1}\Psi(x)dx,$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\Psi(x)dx + \frac{1}{s(s-1)}.$$

On remplace s par $1-s$

$$\pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) = \int_1^\infty (x^{\frac{s}{2}-1} + x^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}})\Psi(x)dx + \frac{1}{s(s-1)},$$

donc

$$F(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{(1-s)}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s) = F(1-s).$$

D'où le résultat :

$$F(s) = F(1-s).$$

C'est donc l'équation fonctionnelle de la fonction ζ de Riemann. De plus, en multipliant les deux membres de cette identité par $\Gamma(1-\frac{s}{2})$, on a :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{\frac{-(1-s)}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(1-\frac{s}{2})\zeta(1-s).$$

Les formules des compléments et de duplication permettent de simplifier :

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s).$$

■

Chapitre 3

Prolongement analytique de la fonction zêta de Riemann

Théorème 3.0.4 (Principe du prolongement analytique) *Soit Ω un ouvert connexe du plan complexe et soient f et g deux fonctions analytiques sur Ω, coïncidant sur une partie $\sum$ de Ω, qui a un point d'accumulation dans Ω, alors elles coïncident sur Ω.*

Exemple 3.0.1 *La série $f(z) = 1+z+z^2+....$ converge pour $|z| < 1$ et on a $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Or, le membre de droite est définit analytiquement pour $z \in \mathbb{C} \backslash \{1\}$. Il constitue donc un prolongement analytique de f.*

3.1 Prolongement analytique de $\zeta(s)$ sur $\mathrm{Re}(s) > 0$

On va procéder au prolongement analytique de $\zeta(s)$ sur $\mathrm{Re}(s) > 0$, de plusieurs façons :

3.1.1 Prolongement analytique de $\zeta(s)$ par le biais de la fonction êta de Dirichlet

Fonction êta de Dirichlet

Définition 3.1.1 *On appelle fonction êta de Dirichlet, la série de Dirichlet ainsi définie pour s complexe*

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} \qquad (3.1) \\ &= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s} ... \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1 *La fonction η est définie, homomorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$.

Preuve. *Il suffit de montrer que* $\left|\sum_{n=2N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right|$ *tend vers* 0*, pour* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$.

En effet

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=2N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}\right| &= \left|\left(\frac{1}{(2N+1)^{s.}} - \frac{1}{(2N+2)^{s.}}\right) + \left(\frac{1}{(2N+3)^{s.}} - \frac{1}{(2N+4)^{s.}}\right) + ...\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{(2N+1)^{s.}} - \frac{1}{(2N+2)^{s.}}\right| + ...
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 2N+1} \left|\frac{1}{(k)^{s.}} - \frac{1}{(k+1)^{s.}}\right| &= \sum_{k \geq 2N+1} \left| s \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^{s+1}} \right| \leq |s| \int_{2N+1}^{\infty} \frac{dt}{t^{\sigma+1}} \\
&= \frac{|s|}{\sigma. (2N+1)^{\sigma}} \longrightarrow 0, \text{ quand } N \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.2 ([13]) *La fonction ζ admet un prolongement méromorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$*, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu* 1.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}
(1 - 2^{1-s})\zeta(s) &= (1 - 2\frac{1}{2^s})\zeta(s) \\
&= (1 - 2\frac{1}{2^s})(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...) \\
&= (1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ...) - 2(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + ...) \\
&= 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{6^s}... \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \eta(s),
\end{aligned}$$

donc

$$\zeta(s) = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \eta(s).$$

Le membre de droite est convergeant pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$, il définit donc un prolongement de $\zeta(s)$ au demi-plan $\sigma > 0$ avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1. ■

3.1.2 Prolongement analytique de $\zeta(s)$ via la formule sommatoire d'Abel

Proposition 3.1.3 *([17])La fonction $\zeta(s)$ se prolonge en une fonction méromorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 0$, avec un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.*

Preuve. On applique la formule sommatoire d'Abel à la fonction $\zeta(s)$, on a

$$\sum_{1 \leq n \leq x} a_n f(n) = g(x)f(x) - \int_1^x g(t)f'(t)dt.$$

On pose $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$g(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} a_n = \sum_{1 \leq n \leq x} 1 = [x].$$

D'autre part,

$$f(t) = (t+N)^{-s} \Rightarrow \quad f'(t) = -s(t+N)^{-s-1},$$

où $N \in \mathbb{N}$. Alors pour $g(t) = [t]$ et pour $\sigma > 1$ on a $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)f(x) = 0$. Ainsi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+N)^s} = -\int_1^{+\infty} [t]((t+N)^{-s})'dt = s\int_1^{+\infty} [t](t+N)^{-s-1}dt.$$

Donc

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = s\int_1^{+\infty} [t](t+N)^{-s-1}dt.$$

Or, $[t] = 0$ pour $0 \leq t < 1$, en posant $u = t + N$, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^s} &= s\int_0^{+\infty} [t](t+N)^{-s-1}dt. \\
&= s\int_N^{+\infty} [u-N]u^{-s-1}du \\
&= s\int_N^{+\infty} \frac{(u-N) - \{u-N\}}{u^{s+1}}du,
\end{aligned}$$

où $\{u-N\}$ désigne la partie décimale de $u-N$, avec $\{u-N\} = (u-N) - [u-N]$ et on a

$$\begin{aligned} s\int_N^{+\infty} \frac{(u-N) - \{u-N\}}{u^{s+1}}du &= s\int_N^{+\infty} \frac{(u-N) - \{u\}}{u^{s+1}}du \\ &= \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du. \end{aligned}$$

Donc

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du.$$

En particulier, pour $N = 1$, on a

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du. \tag{3.2}$$

Comme

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\{u\}}{u^{s+1}}du \right| \leq \frac{1}{\sigma},$$

alors (3.2) représente un prolongement analytique de ζ en $\{s : \mathrm{Re}(s) > 0\} \backslash \{1\}$, avec $Res(\zeta, 1) = 1$ car $\lim\limits_{s \to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$. ■

Remarque 3.1.1 *On montre, ci-dessous, l'efficacité de l'intégrale de Stieltjes, en écrivant pour* $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \int_{1-}^{\infty} \frac{d\,[x]}{x^s} = s\int_1^{\infty} \frac{[x]}{x^{s+1}} = s\left(\frac{1}{s-1} - \int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}dx\right).$$

3.1.3 Autre méthode

On étudie la fonction $f(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$

Proposition 3.1.4 *f est holomorphe sur le demi-plan* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Preuve. Il est clair que

$$f(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)dx.$$

On pose

$$f_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right) dx, \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Les fonctions f_n sont holomorphes sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ et pour $\sigma > 0$, on a :

$$\begin{aligned} |f_n(s)| &\leq \int_n^{n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| dx \leq \sup_{n \leq x \leq n+1} \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \right| \\ &= \sup_{n \leq x \leq n+1} \left| s \int_n^x \frac{dt}{t^{s+1}} \right| \leq \frac{|s|}{n^{\sigma+1}}. \end{aligned}$$

Ceci implique que la série f_n converge uniformément vers f sur les sous ensembles compacts du demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$, d'ou f est holomorphe sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$. ■

3.2 Prolongement analytique de zêta pour $\mathrm{Re}(s) \leq 0$

Il nous reste à définir un prolongement analytique pour $\mathrm{Re}(s) \leq 0$

3.2.1 Prolongement à l'aide de la fonction gamma

Théorème 3.2.1 ([13]) *La fonction ζ définie dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$, possède un prolongement méromorphe dans le plan complexe $\mathbb{C}$, avec un pôle simple $s = 1$ de résidu 1.*

Preuve. 1. On prouve le prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ avec l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout nombre complexe s tel que $Re(s) = \sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

alors

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

et on a

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt,$$

la deuxième intégrale est une fonction holomorphe pour tout s. On utilise les nombres de Bernoulli :

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n t^n}{n!}$$

puis, on les remplace dans la première intégrale et en intégrant termes à termes, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt &= \int_0^1 t^{s-2}\frac{t}{e^t-1}dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n t^n}{n!}t^{s-2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{B_0 t^0}{0!}\ t^{s-2}dt+\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{B_n t^n}{n!}t^{s-2}dt \\
&= \int_0^1 t^{s-2}dt+\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_n t^n}{n!}t^{s-2}dt \\
&= \frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_n}{n!(n+s-1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\zeta(s)=\frac{1}{(s-1)\Gamma(s)}+\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{B_n}{n!(n+s-1)}+\frac{1}{\Gamma(s)}\int_1^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt.$$

On distingue deux cas :

1ère cas : Quand $s\neq -k, k\in\mathbb{N}$

La série de droite est convergente, donc le membre de droite est holomorphe.

2éme cas : Lorsque $s\longrightarrow -k\in\mathbb{Z}_-$

On sait que les pôles de la fonction $\Gamma(s)$ sont les entiers négatifs et par suite les zéros de la fonction $\frac{1}{\Gamma(s)}$ sont les entiers négatifs. Donc, la fonction $\zeta(s)$ et la somme d'une fonction qui tend vers 0 et de terme

$$\begin{aligned}
\lim_{s\longrightarrow -k}\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!(s+k)} &= \lim_{s\longrightarrow -k}\frac{s+k}{Rés(\Gamma,-k)}\frac{B_{k+1}}{(k+1)!(s+k)} \\
&= (-1)^k k!\frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \\
&= (-1)^k k!\frac{B_{k+1}}{(k+1)k!} \\
&= (-1)^k\frac{B_{k+1}}{(k+1)},
\end{aligned}$$

ce qui donne le prolongement analytique de la fonction ζ en une fonction méromorphe sur tout $\mathbb{C}$, sauf au point $s=1$.

Finalement : $\zeta(-k)=(-1)^k\frac{B_{k+1}}{(k+1)}$, comme $B_{2k+1}=0$ pour $k\geq 1$, on a $\zeta(-2k)=0$.

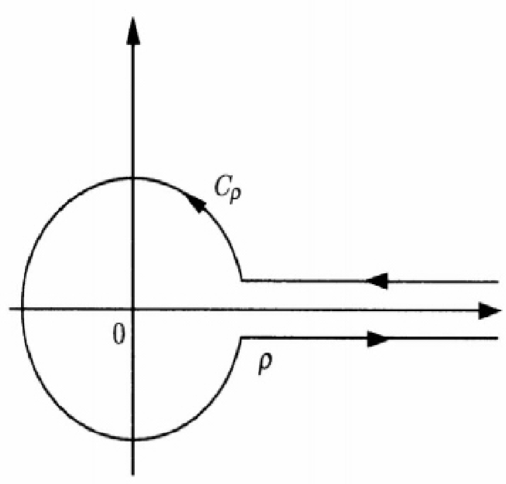
Les nombres $(-2k)$ sont des zéros triviaux de la fonction zêta et ils sont simples.

2. On prouve le prolongement analytique sur $\mathbb{C}$ par une intégrale de contour.

Pour $\sigma>1$ on définie $\zeta(s)$ par :

$$\zeta(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt,$$

on commence par la définition du contour C_p tel que :



FIGURE(3.1) -Le contour de Hankel

pour $s\in\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s)>1$, on note $C_\rho=C_{\rho 1}\cup C_{\rho 2}\cup C_{\rho 3}$, où chaque lacet représenter respectivement la demi-droite dont les points ont argument 0, décrire de $+\infty$ à ρ, le cercle de rayon ρ et de centre 0, dont l'argument des points croît de 0 à 2π, et la demi-droite dont les points ont argument 2π, décrire de ρ à $+\infty$. Donc on définie l'intégrale de contour tel que :

$$I(s) = \int\limits_{C_\rho} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du$$

$I(s)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ pour $0 < \rho < 2\pi$ avec $e^u - 1 \neq 0$,
et on a

$$I(s) = \int\limits_{C_{\rho 1}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int\limits_{C_{\rho 2}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du + \int\limits_{C_{\rho 3}} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du.$$

Premièrement, on a

$$\int\limits_{C_\rho 1} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \int\limits_{+\infty}^{\rho} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du,$$

aussi (avec $Arg(u) = 0$)

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \int\limits_{+\infty}^{\rho} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = - \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = -\zeta(s)\Gamma(s).$$

De même on a

$$\int\limits_{C\rho 2} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \mathcal{O}(\rho^{\sigma - 1}),$$

ainsi

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \int\limits_{C\rho 2} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \lim_{\rho \longrightarrow 0} \int\limits_{|u| = \rho} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = 0,$$

et enfin

$$\int\limits_{C\rho 3} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du = \int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} du,$$

ainsi (avec $Arg(u) = 2\pi$)

$$\lim_{\rho \longrightarrow 0} \int\limits_{\rho}^{+\infty} \frac{u^{s-1}}{e^u - 1} dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{t^{s-1} e^{2i\pi(s-1)}}{e^t - 1} dt = e^{2i\pi(s-1)} \zeta(s)\Gamma(s),$$

on a, donc

$$\begin{aligned} I(s) &= -\zeta(s)\Gamma(s) + e^{2i\pi(s-1)}\zeta(s)\Gamma(s) \\ &= (e^{2i\pi(s-1)} - 1)\zeta(s)\Gamma(s), \end{aligned}$$

on utilise les formules d'Euler, on obtient

$$\begin{aligned} e^{2i\pi(s-1)} - 1 &= e^{i\pi(s-1)}(e^{i\pi(s-1)} - e^{-i\pi(s-1)}) \\ &= 2i\sin(\pi(s-1))e^{i\pi(s-1)} \\ &= 2i\sin(\pi(s))e^{i\pi(s)}, \end{aligned}$$

en substituant l'expression, on aura

$$I(s) = 2i\sin(\pi(s))e^{i\pi(s-1)}\zeta(s)\Gamma(s).$$

Sachons que

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s} \Rightarrow \Gamma(s)\sin\pi s = \frac{\pi}{\Gamma(1-s)},$$

d'oú

$$\begin{aligned} I(s) &= 2i\sin(\pi(s))e^{i\pi(s)}\zeta(s)\Gamma(s) \\ &= 2i\pi e^{i\pi(s)}\frac{\zeta(s)}{\Gamma(1-s)}, \end{aligned}$$

et finalement, on obtient

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{e^{-i\pi(s)}\Gamma(1-s)}{2i\pi}I(s) \\ &= \frac{e^{-i\pi(s)}\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_{C_\rho}\frac{u^{s-1}}{e^u-1}du. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\zeta(s) = \frac{e^{-i\pi(s)}\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_{C_\rho}\frac{u^{s-1}}{e^u-1}du.$$

Cette formule, est définie pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$, aussi elle représente le prolongement analytique de $\zeta(s)$ sur le plan complexe sauf en $s = 1$, car l'expression à droite reste valable pour tout valeur bornée de s, qui définie une fonction analytique, et comme l'intégrale I est holomorphe sur $\mathbb{C}$, cela implique le prolongement analytique de ζ sur $\mathbb{C}$. ■

3.3 Prolongement analytique de $\zeta(s)$ avec la formule d'Euler-Maclaurin

La formule d'Euler-Maclaurin (voir [15]), appliquée à la fonction $x \mapsto x^{-s}$ sur l'intervalle $[1; N]$ qui est C^n, pour tout entier n, donne :

$$\sum_{r=1}^{N} r^{-s} = \frac{1-N^{1-s}}{s-1} + \frac{1-N^{-s}}{2} + \sum_{k=2}^{n} B_k \frac{s(s+1)...(s+k-2)}{k!}(1-N^{-s-k+1}) - R_{n,N}(s),$$

où les coefficients B_k sont les nombres de Bernoulli et

$$R_{n,N}(s) = \frac{1}{n!} s(s+1)...(s+n-1) \int_{1}^{N} B_n(x-[x]) x^{-s-n} dx,$$

dont les $B_n(x)$ sont les polynômes de Bernoulli et $[x]$ désigne la partie entière de x.

En faisant tendre N vers l'infini et en restant dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 1$, on en déduit pour tout entier $n = 1, 2, 3...$ que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} B_k \frac{s(s+1)...(s+k-2)}{k!} - \frac{s(s+1)...(s+n-1)}{n!} \int_{1}^{\infty} B_n(x-[x]) x^{-s-n} dx.$$

Les fonctions $x \mapsto B_n(x-[x])$ étant périodiques et polynomiales sur $[0\,;1[$, elles restent bornées sur l'intervalle d'intégration, donc l'intégrale à droite converge si $\mathrm{Re}(s) > 1-n$. Donc le membre de droite définit, sur $\mathrm{Re}(s) > 1-n$,une fonction, ζ_n holomorphe en dehors de 1,qui prolonge ζ. L'unicité du prolongement analytique montre que les fonctions ζ_n, et sur ζ_{n+1}, sont identiques sur $\mathrm{Re}(s) > 1-n$. Ces identités permettent donc de définir une unique fonction méromorphe sur tout le plan complexe (avec un seul pôle en 1), coïncidant avec la fonction ζ, déjà définie pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ et qu'on appelle encore ζ.

On peut même utiliser, le développement de Laurent de zêta au voisinage de $s = 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k (s-1)^k, ou\ \nu_k = \frac{(-1)^k}{k!} \lim_{N \longrightarrow \infty} (\sum_{n=1}^{N} \frac{\log(n)^k}{n} - \frac{\log(N)^{k+1}}{k+1}); \quad \nu_0 = 0.577....$$

Chapitre 4

Conclusion et autres résultats

4.1 Relation de zêta avec certaines séries de Dirichlet

À partir de la série de Dirichlet et de ζ on démontre les formules suivantes, en faisant appel à la convolution de Dirichlet des fonctions arithmétiques qui vérifie :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f*g(n)}{n^s}$$

où

$$f*g(n)=\sum_{d/n}f(d)g(\frac{n}{d}).$$

Si $\mathrm{Re}(s)>1$, alors

$$\zeta^2(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)}{n^s}\text{, où } d \text{ est la fonction nombre de diviseurs : } d(n)=\sum_{d/n}1,$$

donc

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s},$$

où μ est la fonction de Möbius.

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s},$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\zeta(s-a) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)}{n^s} \\
\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s},
\end{aligned}$$

où σ_a est la fonction diviseur à la puissance a :

$$\sigma_a(n) = \sum_{d/n} d^a$$

et

$$\frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda(n)}{n^s},$$

où λ est la fonction de Liouville, définie par $\lambda(n) = (-1)^{\Omega(n)}$

$$\frac{\zeta^4(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d(n)^2}{n^s}.$$

4.2 Valeurs de la fonction zêta pour s entier différent de 1

Euler a calculé (dans le cadre de sa solution au problème de Bâle) la valeur de la fonction ζ, pour les entiers positifs pairs en utilisant l'expression de $\frac{\sin x}{x}$ sous forme de produit infini, il en a déduit la formule :

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} = \frac{|B_{2k}|(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} \tag{4.1}$$

valable pour tout entier positif k, où les B_{2k} sont les nombres de Bernoulli. D'ici nous obtenons des séries infinies correspondant aux puissances paires de π :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}, \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555}, \zeta(12) = \frac{691\pi^{12}}{638512875}, \ldots$$

Pour les entiers impairs, le calcul n'est pas simple. Ramanujan a beaucoup travaillé sur ces séries et Apéry a démontré en 1979 que $\zeta(3)$ vaut environ 1,2020569... est irrationnel. En 2000, Tanguy Rivoal a démontré qu'il existe une infinité de nombres irrationnels parmi les valeurs aux entiers impairs. On conjecture que toutes les valeurs aux entiers impairs sont irrationnelles et même transcendantes.

$\zeta(5) = 1.036927.....,\zeta(7) = 1.008349......,\zeta(9) = 1.002008....,\zeta(11) = 1.000494.....$

Pour les entiers négatifs impairs, on a : $\zeta(-n) = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{n+1}$

Remarque 4.2.1 *Pour les réels s, non entiers on peut utiliser l'approximation par la formule d'Euler-Maclaurin (section 3.3).*

4.3 Zéros de zêta et conjecture de Riemann

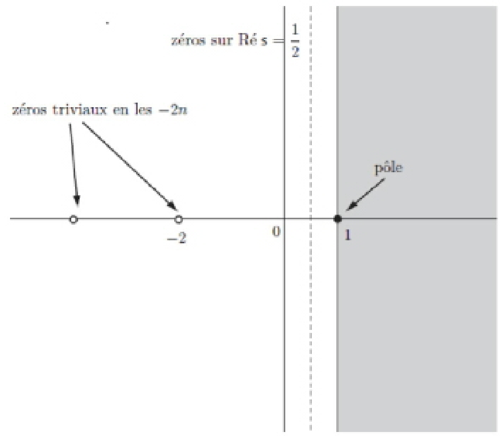
En 1859, Georg Friedrich Bernhard Riemann avait annoncé la conjecture suivante, dite Hypothèse de Riemann

4.3.1 Conjecture

Soit $\zeta(s)$ une fonction complexe de variable complexe $s = \sigma + it$ définie par le prolongement analytique de la fonction :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) = \sigma > 1,$$

sur tout le plan complexe sauf au point $s = 1$. Alors les zéros non triviaux de $\zeta(s) = 0$ sont de la forme :$s = \frac{1}{2} + it$



FIGURE(4.1)-La bande critique

Théorème 4.3.1 ([16]) *Les zéros de $\zeta(s)$ satisfont :*

1. $\zeta(s)$ n'a pas de zéros pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.
2. Le seul pôle de $\zeta(s)$ est au point $s = 1$, son résidu vaut 1 et il est simple.
3. Les zéros triviaux de $\zeta(s)$ sont déterminés pour les valeurs $s = -2, -4, \ldots$
4. Les zéros non triviaux se situent tous dans la région $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, dite bande critique et ils sont symétriques respectivement par rapport à l'axe vertical $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ et l'axe des réels $\mathrm{Im}(s) = 0$.

Proposition 4.3.1 *L'hypothèse de Riemann est équivalente à l'énoncé suivant :tous les zéros de la fonction êta de Dirichlet*

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

qui se situent dans la bande critique $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$*, sont sur la droite critique* $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$*.*

4.3.2 Calculs des zéros de zêta

On s'intéresse aux zéros de cette fonction, c'est-à-dire aux nombres complexe s tels que $\zeta(s) = 0$. La fonction $\zeta(s)$ a des zéros aux points entiers négatifs pairs $s = -2, -4, -6, \ldots$, on les appelle les zéros triviaux. Les zéros non triviaux sont situés dans la bande critique : elle est formée des nombres complexe $s = \sigma + it$ tels que

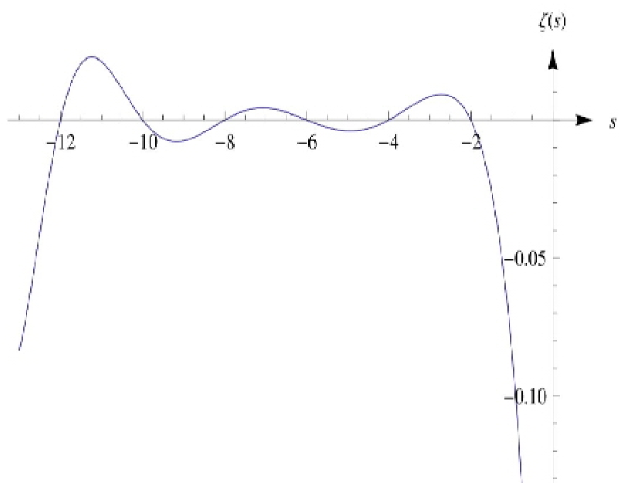
$$0 \leq \mathrm{Re}(s) = \sigma \leq 1.$$

Les zéros triviaux

Par la relation fonctionnelle, il apparaît que la fonction ζ s'annule pour tous les entiers de la forme $-2k, (k > 0)$ par suite du facteur $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$, mais pas en $s = 0$ par suite du facteur $\Gamma(1-s)$. Ces zéros sont appelés des zéros triviaux.

La relation fonctionnelle permet de plus de montrer que chacun zéro est simple puisque la valeur de la dérivée en $(-2k)$ est :

$$\zeta'(-2k) = (-1)^k \frac{(2k)!\zeta(2k+1)}{2^{2k+1}\pi^{2k}} \neq 0.$$



FIGURE(4.2)- zéros triviaux de la fonction zêta

Les zéros non triviaux

Il existe d'autres zéros. On obtient de la relation fonctionnelle que la fonction ζ admet une infinité de zéros dans la bande $\text{Re}(s) \in]0,1[$. Pour cela, on remarque que la fonction

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

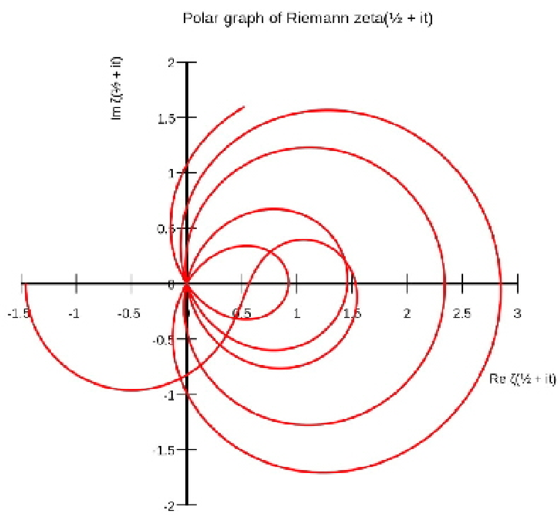
vérifie

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

On n'en déduit que la fonction

$$\Xi(s) = \xi(\frac{1}{2} + is)$$

est paire. On montre que les deux fonctions ξ et Ξ sont deux fonctions entières d'ordre 1 et comme $\Xi(s)$ est paire, la fonction $s \mapsto \Xi(\sqrt{s})$ est une fonction entière d'ordre $\frac{1}{2}$, elle admet donc, d'après la théorie générale des fonctions entières une infinité de zéros. Ces zéros se traduisent par une infinité de zéros de ζ dans la bande $\mathrm{Re}(s) \in]0,1[$. On ignore pour l'instant si l'hypothèse de Riemann, qui affirme que tous ces zéros sont de partie réelle $\frac{1}{2}$, est vraie.



FIGURE(4.3)-Trajectoire de $\boldsymbol{\zeta(\frac{1}{2}+iy)}$ pour y de 0 à 34

4.3.3 Calcul des premiers zéros de la fonction zêta

Les premières informations numériques sur les zéros sur la ligne critique $\sigma = \frac{1}{2}$ ont été fournies par Gram en 1903.

Premiers zéros $\frac{1}{2} + it$ sur la droite critique

En 2004, Gourdon et Demichel, ont calculé 10^{13} premiers zéros de zêta. Ils sont tous sur $\sigma = \frac{1}{2}$.

Année	**Nombres de zéros**	**Calculer par**
1859(approx.)	1	B. Riemann[51,P.159]
1903	15	J. P. Gram[58]
1914	79	R. J. Backlund [10]
1925	138	J. I.Hutchinson [76]
1935	1041	E. C. Titchmarsh[153]
1953	1,104	A. M. Turing[158]
1956	15,000	D. H. Lehmer [95]
1956	25,000	D. H. Lehmer [94]
1958	35,337	N. A. Meller [104]
1966	250,000	R. S. Lehman [92]
1968	3,500,000	J. B. Rosser,et al. [137]
1977	40,000,000	R. P. Brent [168]
1979	81,000,001	R. P. Brent [26]
1982	200,000,001	R.P.Brent , et al [27]
1983	300,000,001	J. van de Lune , H. J. J. te Riele[159]
1986	1,500,000,001	J. van de Lune ,et al [160]
2001	10,000,000,000	J. van de Lune (unpubilshed)
2004	900,000,000,000	S. Wedeniwski [168]
2004	10,000,000,000,000	X. Gourdon [57]

Actuellement les méthodes modernes basées sur les logiciels de mathématiques permettent de calculer un nombre considérable de zéros $\rho = \frac{1}{2} + it$.

Théorème 4.3.2 (Hardy) *Il existe une infinité de réels t tels que $\zeta(1/2 + it) = 0$.*

En outre, on a démontre que plus de $\frac{5}{12}$ des zéros de zêta, sont sur $\sigma = \frac{1}{2}$.

rang du	**t zéro**	**rang du**	**t zéro**	**rang du**	**t zéro**
(10,20)	14.13472514	(51,55)	52.97032148	(78,80)	79.33737502
(20,23)	21.02203964	(55,58)	56.44624770	(80,83)	82.91038085
(23,30)	25.01085758	(58,60)	59.43704400	(83,85)	84.73549298
(30,32)	30.42487613	(60,64)	60.83177852	(85,88)	87.4252746
(32,35)	32.93506159	(64,66)	65.11254405	(88,90)	88.80911121
(35,40)	37.58617816	(66,68)	67.07981053	(90,93)	92.49189927
(40,42)	40.91871901	(68,70)	69.54640171	(93,95)	94.65134404
(42,45)	43.32707328	(70,75)	72.06715767	(95,97)	95.87063423
(45,49)	48.00515088	(75,76)	75.70469070	(97,100)	98.83119422
(49,51)	49.77383248	(76,78)	77.14484007		

Bibliographie

[1] G. Tenenbaum, Introduction to analytic and probabilistic number theory. Third edition. Translated from the 2008 French edition by Patrick D. F. Ion. Graduate Studies in Mathematics, 163. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[2] Andreas Strömnergsson. Analytic Number Theory : Lecture Notes Based on Davenport's Book. http ://www2.math.uu.se/ astrombe/analtalt08/www notes.pdf.

[3] H. Davenport, Harold. Multiplicative number theory. Third edition. Revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, 74. Springer-Verlag, New York, 2000.

[4] H. M. Edwards, Riemann's zeta function. Pure and Applied Mathematics, Vol. 58. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974.

[5] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, Multiplicative number theory. I. Classical theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 97. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[6] E. C. Titchmarsh, The theory of functions. Second edition. Oxford University Press, Oxford, 1939.

[7] W. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[8] A. Ivić, The Riemann zeta-function. The theory of the Riemann zeta-function with applications. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley \& Sons, Inc., New York, 1985.

[9] J. Stopple, A primer of analytic number theory. From Pythagoras to Riemann. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[10] D. V. Widder, The Laplace Transform. Princeton Mathematical Series, vol. 6. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1941.

[11] E. M. Stein and R. Shakarchi, Complex analysis. Princeton Lectures in Analysis, 2. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[12] Formule d'Euler _Maclaurin.Wikipédia

[13] N. Hamadou, Quelques Résultats sur la Fonction zêta de Riemann. Mémoire de Master. Univ. Djilali Bounaama. Khemis Miliana. 2017.

[14] S. Anseur, Matrices aléatoires et fonction zêta de Riemann. Mémoire de Master. Univ. Larbi Ben M'hidi. O.E.B. 2015.

[15] Fonction zêta de Riemann-wikipédia

[16] L. Bouznad, Une formule asymptotique pour la quantité des nombres de Gauss. Mémoire de Master. Univ. mouloud mammeri. Tizi Ouzou. 2016.

[17] C. Cheverry, Page perso. https ://perso.univ-rennes1.fr/christophe.cheverry/christophe.cheverry/
CoursB02S2suite.pdf