

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par :

Gouaidia Sarra et Kaidouchi Boutheyna

Intitulé

**Cycles limites de quelques EDO d'ordre supérieur via la
méthode de moyennisation**

Dirigé par :

Dr. Sellami Nabil

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Badi Sabrina	PROF	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Sellami Nabil	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Zenkoufi Lilia	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2021



Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

*A mes chers parent, **Fatima** et **toumi**, qui ont toujours été la pour moi, et qui m'ont donne de labeur et de persévérance.*

*A mes frères **hamza** et **Mohamed el Hadi**,*

*A mes sœurs **sabrine** et **hind***

*A mon ami **bochra** et son petit*

Amen Allah

*A mon **grand-mère**, mes oncles et mes tantes que dieu leur donne une longe etjoyeuse vie.*

A touts les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'a maintenant, merci pour leurs amours et leurs encouragements.

Sons oublier mon binôme boutheyna

Sarra



Dédicace

Je dédie ce mémoire

*A mes chers parents ma mère **RABIAA** et mon père
AMAR*


*Pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur
encouragement.*

*A mon frère **Salah Dinne***

*A ma sœur **Farida** et sons marie **Zaki** et sa petite **Rafif***

*A mes sœur **Samra** et **Faiza***

*Tous mes camarades de la promotion 2021
Sans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire,
du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur
A toute personne qui m'ont encouragé ou aidé au long
de mes études.*



BOUTHEYNA

Table des matières

Résumé	ii
Abstract	iii
Remerciements	iv
Introduction	v
1 Notions Préliminaires	1
1.1 Système dynamique, flot, points d'équilibre et linéarisation . . .	1
1.2 Nature des points d'équilibre	2
1.3 Portrait de phase et cycle limites	5
2 Théorie de moyennisation	8
2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques	8
2.2 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques	11
3 Cycles limites d'une classe d'EDO du troisième ordre.	17
3.1 Cas 1 : $\mu \neq 0$	17
3.2 Cas 2 : $\mu = 0$	22
4 Cycles limites d'une classe d'EDO du quatrième ordre.	25
4.1 Cas 1 $\lambda \neq \mu$ et $\lambda\mu \neq 0$	25
4.2 Cas 2 : $\lambda = \mu \neq 0$	30
4.3 Cas 3 : $\lambda \neq \mu = 0$	35

ملخص

نهتم بدراسة الحلول الدورية المعزولة لقسمين من المعادلات التفاضلية العادية. باستعمال نظرية المتوسط من الدرجة الأولى، نقوم بتحويل مسألة البحث عن الحلول الدورية المعزولة لجملة معادلات تفاضلية إلى مسألة البحث عن الجذور غير المنحلة لجملة معادلات جبرية غير خطية.

القسم الأول هو عبارة عن معادلات تفاضلية من الدرجة الثالثة من الشكل

$$\ddot{x} - \mu\dot{x} + \dot{x} - \mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

حيث μ هو وسيط حقيقي، ε صغير كفاية و $F \in C^2$ هي دالة حقيقية غير خطية

القسم الثاني هو عبارة عن معادلات تفاضلية من الدرجة الرابعة من الشكل

$$x^{(4)} - (\lambda + \mu)\ddot{x} + (1 + \lambda\mu)\dot{x} - (\lambda + \mu)\dot{x} + \lambda\mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x})$$

حيث λ و μ هما وسطان حقيقيان، ε صغير كفاية و $F \in C^2$ هي دالة حقيقية غير خطية

Résumé

Dans ce mémoire, on étudie les cycles limites de deux classes d'équations différentielles ordinaires autonomes. En utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre, on transforme l'étude des cycles limites d'un système différentiel ordinaire à l'étude des racines non dégénérées d'un système algébrique non linéaire.

La première classe étudiée est du troisième ordre et de la forme

$$\ddot{x} - \mu\ddot{x} + \dot{x} - \mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

où μ est un paramètre réel, ε est suffisamment petit et la fonction $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 .

La deuxième classe est du quatrième ordre de la forme

$$\ddot{x} - (\lambda + \mu)\ddot{x} + (1 + \lambda\mu)\ddot{x} - (\lambda + \mu)\dot{x} + \lambda\mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}),$$

où λ et μ sont deux paramètres réels, ε est suffisamment petit et $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^4 .

Abstract

We study the limit cycles of two classes of autonomous ordinary differential equations. Using the first order averaging theory, we transform the study of limit cycles to the study of non degenerate zeros of an algebraic system.

The first class studied is of third order and of the form

$$\ddot{x} - \mu\dot{x} + \dot{x} - \mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x})$$

where μ is a real parameter, ε is small enough and $F \in C^2$ is a non-linear function.

The second class studied is of fourth order and of the form

$$\ddot{\ddot{x}} - (\lambda + \mu)\ddot{\dot{x}} + (1 + \lambda\mu)\ddot{x} - (\lambda + \mu)\dot{x} + \lambda\mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\dot{x}}),$$

where λ and μ are real parameters, ε is small enough and $F \in C^2$ is a non-linear function

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier ALLAH qui nous a donné le pouvoir d'effectuer ce modeste travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude, notre reconnaissance et nos profonds remerciements à notre directeur de mémoire **Dr. Sellami Nabil**. Nous le remercions sincèrement pour sa confiance, ses encouragements, ses conseils précieux et pour le temps qu'il nous a accordé malgré ses obligations, ses devoirs et ses responsabilités. Nous le remercions également pour sa rigueur, sa bonne humeur, sa sympathie et sa modestie.

Nos remerciements vont également aux **Prof. Badi Sabrina** et **Dr Zenkoui.Lilia** pour l'honneur qu'elles nous ont fait en acceptant de faire partie du jury de ce mémoire.

Introduction

Les équations différentielles ordinaires modélisent beaucoup de problèmes concrets dans différentes branches scientifiques à savoir la physique, la mécanique, l'astronomie, l'écologie,...

Dans la théorie qualitative des équations différentielles ordinaires et des systèmes dynamiques, l'étude de l'existence, le nombre et la stabilité des solutions périodiques est l'un des plus importants problèmes. Un cycle limite d'une EDO est une solution périodique isolée, cette notion a été introduite par H Poincaré [13] en 1881. Plusieurs méthodes pour la recherche des solutions périodiques des EDO ont été créées et développées, on peut citer le théorème de Poincaré Bendixson, le critère de non existence de Dulac, la bifurcation de Hopf, la méthode de Melnikov, méthodes de perturbations,... Le seizième problème de Hilbert consiste à déterminer le nombre maximum de cycles limites d'un système planaire polynomial de degré n , il a été présenté en 1900 [4] et reste irrésolu.

La méthode de Moyennisation est l'une des plus importantes méthodes de perturbations utilisées actuellement dans l'étude des cycles limites des EDO et des systèmes dynamiques. Elle a été introduite par Krylov et Bogoliubov en 1937 [5], Malkin (1956) [12], Bogoliubov et Mitropolskii [1] 1961, Roseau (1966) [14]. Elle a été ensuite développée par Sanders and Verhulst [15], Buica, Françoise et Llibre (2007) [2]...

Dans ce mémoire, on utilise la méthode de Moyennisation du premier ordre afin d'étudier les cycles limites de deux classes d'équations différentielles ordinaires autonomes perturbées du troisième et du quatrième ordre.

Beaucoup d'articles ont étudié les cycles limites des EDO du second ordre ou d'ordre supérieur à deux : troisième, quatrième, cinquième,... en utilisant la méthode de Moyennisation, on peut citer [3, 9, 7, 10, 11, 16].

Notre mémoire comporte quatre chapitres :

Le premier chapitre est un rappel des notions préliminaires de la théorie

qualitative des EDO et des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, on introduit deux résultats importants de la théorie de Moyennisation du premier ordre avec des exemples d'applications.

Dans le troisième chapitre on applique la théorie de moyennisation du premier ordre citée dans le deuxième chapitre à la recherche des cycles limites d'une classe d'EDO du troisième ordre.

Enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude des cycles limites d'une classe d'EDO du quatrième ordre en appliquant la théorie de Moyennisation du premier ordre.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Dans ce chapitre on va donner quelques notions générales de la Théorie qualitative des systèmes dynamiques. Premièrement on définit les Systèmes dynamiques et les notions de : flot, point d'équilibre et la linéarisation, et on passe à la définition du Portrait de phase, Point d'équilibre hyperbolique, Solution périodique, système différentiel autonome, cycle limite, amplitude de cycle limite, et enfin la définition d'un Cycle limite hyperbolique.

1.1 Système dynamique, flot, points d'équilibre et linéarisation

Définition 1.1 (Système dynamique) : Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$, telle que :

- $U(., x) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
- $U(0, x) = x$.
- $U(t + s, x) = U(t, U(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où A est une matrice constante, la solution de (1.1) est

$$x(t) = e^{tA}x_0.$$

Le système (1.1) engendre un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$U(t, x) = e^{tA}x,$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

Définition 1.2 (Flot) : Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.2}$$

On appelle flot du système différentiel (1.2), l'ensemble des application $\phi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définies par $\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$ où $\phi(t, x_0)$ est la solution telle que $\phi(0, x_0) = x_0$.

Définition 1.3 (Points d'équilibre) : on appelle point d'équilibre ou point critique, du système différentiel non linéaire (1.2) le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ qui vérifie $f(x_0) = 0$.

Définition 1.4 (Système linéarisé) : on appelle système linéarisé de (1.2) au voisinage du point d'équilibre x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Définition 1.5 (Point d'équilibre hyperbolique) : Si la jacobienne $Df(x_0)$ n'a aucune valeur propre avec une partie réelle nulle, alors le point d'équilibre est dit hyperbolique.

1.2 Nature des points d'équilibre

Soit le système différentiel linéaire $\dot{x} = Ax$, où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon les valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $x = x_0$ est un point selle, il est toujours instable (voir Figure 1.1).

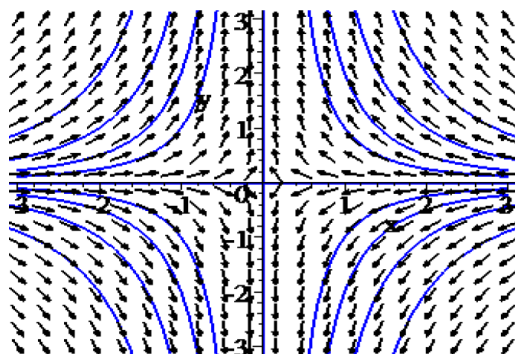


Fig (1.1) : Selle.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :

(a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $x = x_0$ est un noeud stable.

(b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, le point critique $x = x_0$ est un noeud instable (voir Fig 1.2).

(c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, le point critique $x = x_0$ est un noeud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$.

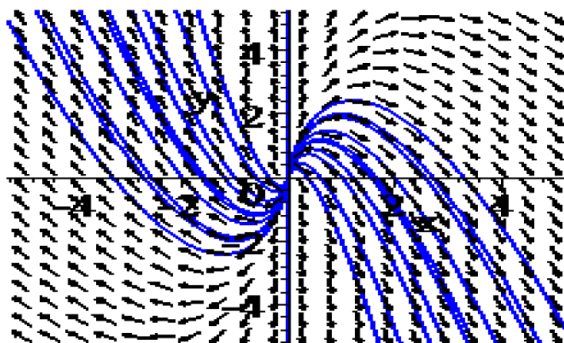


Fig (1.2) : Noeud instable.

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $x = x_0$ est un foyer. Il est stable si $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $Re(\lambda_{1,2}) > 0$.(voir Fig 1.3).

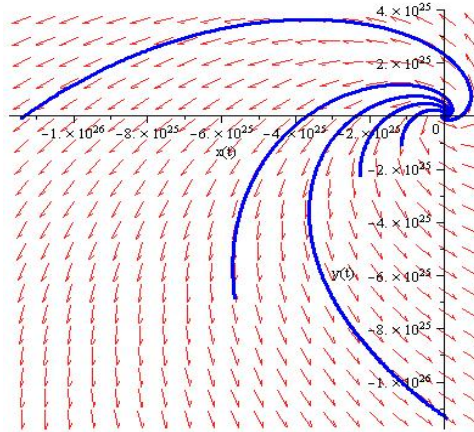


Fig (1.3) : Foyer.

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, le point critique $x = x_0$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Fig 1.4).

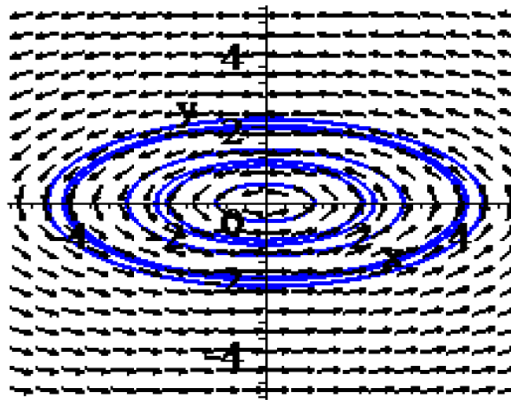


Fig (1.4) : centre.

Définition 1.6 (Solution stable et asymptotiquement stable) : Soit le système différentiel non autonome et non linéaire

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

On suppose que $f(t, x)$ satisfait les conditions du Théorème d'existence et d'unicité des solutions. Une solution $\phi(t)$ du système (1.3) telle que $\phi(t_0) = \phi_0$ est dite stable au sens de Lyapunov si :

$$\|x(t_0) - \phi_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - \phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si de plus :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \phi(t)\| = 0,$$

alors la solution $\phi(t)$ est asymptotiquement stable.

1.3 Portrait de phase et cycle limites

Définition 1.7 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.4)$$

où P et Q sont deux polynôme en x et y . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.4) sont représentées dans le plan (x, y) par des courbes appelées orbites. Les points d'équilibre de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points d'équilibre représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

Définition 1.8 (Solution périodique) : on appelle solution périodique ou cycle toute trajectoire $\Psi_t(x)$ du système différentiel non linéaire (1.2) telle qu'il existe un nombre $T > 0$, vérifiant :

$$\Psi(t + T, x) = \Psi(t, x) \text{ pour } T > 0.$$

Le plus petit réel $T > 0$ qui vérifie la formule précédente est appelé période. pour un système autonome, à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace de phase .

Définition 1.9 (Système différentiel autonome) : Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où l'expression de $f(x)$ ne dépendent pas de t , on dit que le système est autonome.

Définition 1.10 (cycle limite) : Un cycle limite est une solution périodique isolée, c'est à dire qu'on ne peut pas trouver une autre orbite fermée dans son voisinage.

Exemple 1.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta x - y - \beta x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + \beta y - \beta y(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (1.5)$$

telle que β est un paramètre. Après le passage au coordonnées polaires $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ le système (1.5) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \beta r(1 - r^2). \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Posons

$$f(r) = \dot{r} = \beta r(1 - r^2).$$

Alors si $\beta \neq 0$,

$$f(r) = 0 \implies r = 0 \text{ ou } r = 1.$$

On a donc un point d'équilibre $(0, 0)$ et un cycle limite d'amplitude $r = 1$

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t + \theta_0), \sin(t + \theta_0))$$

où

$$x^2 + y^2 = 1.$$

1. Pour $\beta > 0$, on a deux cas :

(a) Si $r < 1$, Alors $f(r) > 0$, d'où $r(\nearrow)$.

(b) Si $r > 1$, Alors $f(r) < 0$, d'où $r(\searrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est stable .

2. Pour $\beta < 0$:

(a) Si $r < 1$, $f(r) < 0$, d'où $r(\searrow)$.

(b) Si $r > 1$, $f(r) > 0$, d'où $r(\nearrow)$.

Donc le cycle limite d'amplitude $r = 1$ est instable .

3. Si $\beta = 0$, le système a une infinité d'orbites périodiques, et il n'y a pas de cycle limite.

Définition 1.11 (Amplitude de cycle limite) :

L'amplitude du cycle limite est la valeur maximale de la variable x du cycle limite.

Définition 1.12 (Cycle limite hyperbolique) :

Soit E un ouvert de \mathbb{R}^2 et $f \in C^1(E)$, Soit $\varphi(t)$ un cycle limite de période T du système (1.2), alors $\varphi(t)$ est hyperbolique si $\int_0^T \nabla \cdot f(\varphi(t)) dt \neq 0$, où $\nabla \cdot f(\varphi(t))$ est la divergence de f en $\varphi(t)$ et on a :

a) $\varphi(t)$ est stable si $\int_0^T \nabla \cdot f(\varphi(t)) dt < 0$.

b) $\varphi(t)$ est instable si $\int_0^T \nabla \cdot f(\varphi(t)) dt > 0$.

Chapitre 2

Théorie de moyennisation

Dans ce chapitre, on présente une introduction de la théorie de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques d'une équation différentielle ordinaire ou d'un système différentiel.

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

On considère le système différentiel à valeur initiale suivant :

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x(t)) + \varepsilon^2 R(t, x(t), \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

Avec $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D un domaine bornée et $t \geq 0$. On suppose que $F(t, x)$ et $R(t, x, \varepsilon)$ sont T -Périodiques en t . Le système moyenné associé au système (2.1) est défini par ;

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0(y(t)), \quad y(0) = x_0, \quad (2.2)$$

où

$$f^0(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, y) ds. \quad (2.3)$$

Le Théorème suivant nous donne les conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné (2.2) fournissent des solutions périodiques du système (2.1).

2.1. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR
LES ORBITES PÉRIODIQUES

Théorème 2.1 Considérons le système (2.1) et supposons que les fonctions vectorielles $F, R, D_x F, D_x^2 F$ et $D_x R$ sont continues et bornées par une constante M (indépendante de ε) dans $[0, \infty[\times D$ avec $-\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. De plus, on suppose que F et R sont T -périodiques en t avec T indépendante de ε .

a) Si $p \in D$ est un point singulier du système moyenné (2.2) telle que

$$\det(D_x f^0(p)) \neq 0, \quad (2.4)$$

alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) telle que $x_\varepsilon(t) \rightarrow p$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

b) Si le point singulier $y = p$ du système moyenné (2.2) est hyperbolique alors pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, la solution périodique correspondante $x_\varepsilon(t)$ du système (2.1) est unique, hyperbolique et de même type de stabilité que p .

Preuve : voir Verhulst [17].

Exemple 2.1 Considérons l'équation de Van der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x},$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y. \end{cases} \quad (2.5)$$

En coordonnées polaire (r, θ) où $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, ce système devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta, \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon \cos \theta(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin \theta, \end{cases}$$

où d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta + O(\varepsilon^2).$$

De (2.3) on obtient

$$f^0(r) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(1 - r^2 \cos^2 \theta) \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{8}r(r^2 - 4).$$

La seule racine positive de $f^0(r)$ est $r = 2$. Comme $(\frac{df^0}{dr})(2) = 1$, d'après le Théorème 2.1 il suit que le système (2.5) pour $|\varepsilon| \neq 0$ suffisamment petit,

admet un cycle limite qui bifurque de l'orbite périodique de rayon 2 du système non perturbé (2.5) avec $\varepsilon = 0$. De plus, comme $\left(\frac{df^0}{dr}\right)(2) = 1 > 0$, ce cycle limite est instable .

Exemple 2.2 Soit l'équation différentielle

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-1 + 2x + 3x^2)\dot{x},$$

qui peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(3x^2 + 2x - 1)y. \end{cases} \quad (2.6)$$

Le système non perturbé de (2.6) est

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

En coordonnées polaire

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta), \\ y = r \sin(\theta), \end{cases}$$

Le système (2.6) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(-1 + 2r \cos(\theta) + 3r^2 \cos^2(\theta))r \sin^2(\theta), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(-\cos(\theta) \sin(\theta) + 2r \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 3r^2 \sin(\theta) \cos^3(\theta)). \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon r(-1 + 2r \cos(\theta) + 3r^2 \cos^2(\theta))r \sin^2(\theta) + O(\varepsilon^2).$$

D'après (2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} f^0(r) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r(-1 + 2r \cos(\theta) + 3r^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta) d\theta, \\ &= -\frac{1}{8}r(-4 + 3r^2), \end{aligned}$$

2.2. AUTRE MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR LES ORBITES PÉRIODIQUES

qui a une seule racine positive donnée par

$$r = \sqrt{\frac{4}{3}},$$

ce qui implique que

$$\frac{df^0}{dr} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right) = -1 \neq 0.$$

Alors, d'après le Théorème 2.1, le système (2.6) possède un seul cycle limite d'amplitude $\sqrt{\frac{4}{3}}$ qui bifurque des orbites périodiques du système non perturbé quand $\varepsilon = 0$. Comme $\frac{df^0}{dr} \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \right) = -1 < 0$, ce cycle limite est stable .

2.2 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

On considère le problème de la bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel

$$\dot{x}(t) = F_0(x, t) + \varepsilon F_1(x, t) + \varepsilon^2 F_2(x, t, \varepsilon), \quad (2.7)$$

avec ε suffisamment petit. Les fonctions $F_0, F_1 : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $F_2 : \Omega \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions C^2 , T -périodiques en t et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . On suppose que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = F_0(x, t). \quad (2.8)$$

a une sous-variété de dimension k de solutions périodiques.

Soit $x(t, z)$ la solution du système non perturbé (2.8) telle que $x(0, z) = z$. La linéarisation du système (2.8) le long de la solution périodique $x(t, z)$ est écrite comme

$$\dot{y} = D_x F_0(x(t, z), t)y. \quad (2.9)$$

Dans la suite on note par $M_z(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.9) et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées ;

i.e. $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Théorème 2.2 Soit $V \subset \mathbb{R}^k$ un ouvert borné, $\beta_0 : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction C^2 . On suppose que

(i) $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta_0(\alpha)), \alpha \in \bar{V}\} \subset \Omega$ et que pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $X(t, z_\alpha)$ de (2.8) est T -périodique.

(ii) Pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ de (2.8) telle que la matrice $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$ contient dans le haut coin droit la matrice nulle de dimensions $k \times (n-k)$ et dans le bas coin droit une matrice $\Delta_\alpha((n-k) \times (n-k))$ avec $\det \Delta_\alpha \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(x(t, z_\alpha), t) dt \right). \quad (2.10)$$

S'il existe $a \in V$ telle que $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((\frac{d\mathcal{F}}{d\alpha})(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.7) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve : voir Malkin [12] et Roseau [14] et voir Buica, Francoise, Llibre [2].

Si $k = n$, on a le corollaire suivant.

Corollaire 2.1 On suppose qu'il existe un ensemble ouvert et borné V avec $\bar{V} \subset \Omega$ telle que pour chaque $z \in \bar{V}$, la solution $x(t, z)$ est T -périodique et on considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^T M_z^{-1}(t, z) F_1(x(t, z), t) dt. \quad (2.11)$$

S'il existe un $a \in V$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$ et $\det((\frac{d\mathcal{F}}{dz})(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow z$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Exemple 2.3 On considère l'équation suivante

$$\ddot{x} - \ddot{x} + \dot{x} - x = \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3). \quad (2.12)$$

Si $y = \dot{x}$, $z = \ddot{x}$, l'équation (2.12) peut être écrite sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = x - y + z + \varepsilon(2 + \cos t)(x^2 + 2x^3) = x - y + z + \varepsilon F(x, y, z, t). \end{cases} \quad (2.13)$$

2.2. AUTRE MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER
ORDRE POUR LES ORBITES PÉRIODIQUES

L'origine est l'unique point d'équilibre du système (2.13) lorsque $\varepsilon = 0$. La partie linéaire du système (2.13) avec $\varepsilon = 0$ à l'origine est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice A sont $\pm i$ et 1. Avec la transformation linéaire inversible $(X, Y, Z)^t = B(x, y, z)^t$, on transforme le système (2.13) en un autre système dont sa partie linéaire est la forme de Jordan réelle de la partie linéaire du système (2.13) avec $\varepsilon = 0$, c-à-d $(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})^t = J(X, Y, Z)^t$, où J est la forme de Jordan réelle de la matrice A donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$BAB^{-1} = J \implies BA - JB = 0,$$

d'où

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} X = x - y, \\ Y = -y + z, \\ Z = x + z, \end{cases}$$

et

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x = \frac{X-Y+Z}{2}, \\ y = \frac{-X-Y+Z}{2}, \\ z = \frac{-X+Y+Z}{2}. \end{cases}$$

Le nouveau système s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y, \\ \dot{Y} = X + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t), \\ \dot{Z} = Z + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z, t). \end{cases} \quad (2.14)$$

où

$$\tilde{F}(X, Y, Z, t) = \left(F\left(\frac{X - Y + Z}{2}, \frac{-X - Y + Z}{2}, \frac{-X + Y + Z}{2}, t \right) \right)$$

Pour $\varepsilon = 0$, la solution du système (2.14) _{$\varepsilon=0$} est

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \cos t - Y_0 \sin t \\ Y_0 \cos t + X_0 \sin t \\ Z_0 e^t \end{pmatrix}.$$

Avec les notation introduites dans le Théorème 2.2, le système (2.14) est similaire au système (2.7) avec

$$\begin{aligned} x &= (X, Y, Z), \quad F_0(x, t) = (-Y, X, Z), \\ F_1(x, t) &= (0, \tilde{F}, \tilde{F}) \text{ et } F_2(x, t, \varepsilon) = (0, 0, 0), \end{aligned}$$

Soit $x(t, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon)$ la solution du système (2.14) telle que

$$x(0, X_0, Y_0, Z_0, \varepsilon) = (X_0, Y_0, Z_0).$$

Le système (2.14) avec $\varepsilon = 0$ a un centre linéaire à l'origine dans le plan (X, Y) qui est un plan invariant par le flot du système non perturbé, et les solutions périodiques de ce centre sont

$$X(t, X_0, Y_0, 0, 0) = (X(t), Y(t), Z(t)),$$

telles que

$$X(t) = X_0 \cos t - Y_0 \sin t, \quad Y(t) = Y_0 \cos t + X_0 \sin t, \quad Z(t) = 0. \quad (2.15)$$

Notons que ces solutions sont 2π -périodiques .

Pour notre système le V et le α du Théorème 2.2 sont

$$V = \{(X, Y) : 0 < X^2 + Y^2 < \rho\} \text{ pour } \rho > 0 \text{ et } \alpha = (X_0, Y_0) \in V.$$

La matrice fondamentale $M(t)$ du système (2.14) avec $\varepsilon = 0$ par rapport à la solution périodique (2.15) telle que $M(0) = I$ est

2.2. AUTRE MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER
ORDRE POUR LES ORBITES PÉRIODIQUES

$$M(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'elle est indépendante des conditions initiales $(X_0, Y_0, 0)$ et on a

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi} \end{pmatrix}.$$

On a $(1 - e^{-2\pi}) \neq 0$. Alors toutes les conditions du Théorème 2.2 sont satisfaites. Par conséquent, on doit étudier les zéros $\alpha = (X_0, Y_0) \in V$ des deux premières composantes $(\mathcal{F}_1(\alpha), \mathcal{F}_2(\alpha))$ de la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$ donnée dans (2.10).

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \sin t \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt & (2.16) \\ &= \int_0^{2\pi} \sin t F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_2(\alpha) &= \int_0^{2\pi} \cos t \tilde{F}(x(t, X_0, Y_0, 0, 0), t) dt & (2.17) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t F\left(\frac{X(t) - Y(t)}{2}, -\frac{X(t) + Y(t)}{2}, \frac{-X(t) + Y(t)}{2}, t\right) dt, \end{aligned}$$

où $X(t)$ et $Y(t)$ sont données par (2.15). On pose $\mathcal{F}(\alpha) = (f_1(X_0, Y_0), f_2(X_0, Y_0))$ et on intègre (2.16) et (2.17) on obtient

$$\begin{cases} f_1(X_0, Y_0) = \frac{-1}{16}(Y_0 + X_0)(6X_0^2 + X_0 + 6Y_0^2 - Y_0), \\ f_2(X_0, Y_0) = \frac{3}{8}(-Y_0X_0^2 + Y_0^2X_0) - \frac{3}{8}(-Y_0^3 + X_0^3) + \frac{1}{8}(Y_0^2 + X_0^2) - \frac{1}{8}Y_0X_0. \end{cases}$$

Si $f_1(X_0, Y_0) = f_2(X_0, Y_0) = 0$, on trouve $(X_0^*, Y_0^*) = (\frac{-1}{4}, \frac{1}{4})$. On a

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(X_0, Y_0)} \right)_{|(X_0, Y_0) = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})} = \frac{3}{2048} \neq 0.$$

Alors pour $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ avec $\varepsilon_0 > 0$ suffisamment petit, il existe une solution 2π -périodique de l'équation différentielle (2.12) telle que

$$x(0, \varepsilon) \rightarrow -\frac{1}{4}, \quad \dot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \ddot{x}(0, \varepsilon) \rightarrow \frac{1}{4},$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Chapitre 3

Cycles limites d'une classe d'EDO du troisième ordre.

Le but de ce chapitre est d'étudier les solutions périodiques de l'équation différentielle du 3^{ème} ordre suivante

$$\ddot{x} - \mu\dot{x} + \dot{x} - \mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}). \quad (3.1)$$

ici les variables x et t , et les paramètres μ et ε sont réels : de plus ε est un petit paramètre réel et la fonction $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 et Ω est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 . Le point désigne la dérivée par rapport à une variable indépendante t .

L'objectif est d'étudier les orbites périodiques des équations différentielles du troisième ordre de type (3.1).

On distingue deux cas différents suivant les valeurs du paramètre μ , $\mu \neq 0$ et $\mu = 0$:

3.1 Cas 1 : $\mu \neq 0$

Théorème 3.1

Supposons que $\mu \neq 0$ dans l'équation différentielle (3.1). Pour toute racine simple positif r_0^* de la fonction

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta d\theta, \quad (3.2)$$

où

$$\begin{cases} A = -\frac{r_0(\cos\theta + \mu \sin\theta)}{1 + \mu^2}, \\ B = \frac{r_0(\sin\theta - \mu \cos\theta)}{1 + \mu^2}, \\ C = \frac{r_0(\cos\theta + \mu \sin\theta)}{1 + \mu^2}. \end{cases}$$

L'équation différentielle (3.1) a une solution périodique $x_\varepsilon(t)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2}, \quad (3.3)$$

de

$$\ddot{x} - \mu\ddot{x} + \dot{x} - \mu x = 0.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Théorème 3.1 voir J.Libres,L.Roberto [9]

Si $y = \dot{x}$ et $z = \ddot{x}$; alors nous écrivons l'équation différentielle du troisième ordre (3.1) comme un système différentiel du premier ordre dans le sous-ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Donc nous avons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \mu(x + z) + \varepsilon f(x, y, z). \end{cases} \quad (3.4)$$

Le système (3.4) avec $\varepsilon = 0$ admet un seul point critique à l'origine.

La matrice jacobienne admet les valeurs propres $i, -i, \mu$.

Avec le changement linéaire des variables $(X, Y, Z)^T = C(x, y, z)^T$ avec

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\mu & 1 \\ -\mu & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

nous transformons le système différentiel (3.4) en le système différentiel suivant telle que la partie linéaire du système (3.4) se transforme à sa forme de jordan réelle.

On obtient alors

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = \mu Z - \varepsilon \tilde{F}(X, Y, Z), \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\tilde{F}(X, Y, Z) = F(A, B, C)$ et

$$\begin{cases} A = -\frac{x+z+\mu y}{1+\mu^2}, \\ B = \frac{y-\mu(x+z)}{1+\mu^2}, \\ C = \frac{x+\mu(y-\mu z)}{1+\mu^2}, \end{cases}$$

Maintenant on passe des coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) aux coordonnées cylindriques (r, θ, Z) de \mathbb{R}^3 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (3.5) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta, \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{G(r, \theta, Z) \sin \theta}{r}, \\ \dot{Z} = \mu Z - \varepsilon G(r, \theta, Z), \end{cases} \quad (3.6)$$

où

$$G(r, \theta, Z) = \tilde{F}(r \cos \theta, r \sin \theta, Z),$$

En divisant sur $\dot{\theta}$ on obtient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, Z) \cos \theta + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z + \varepsilon \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) + o(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.7)$$

Le système (3.7) est écrit sous la forme du système (2.7) du chapitre 2, avec

$$X = \begin{pmatrix} r \\ Z \end{pmatrix}, \quad F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu Z \end{pmatrix}, \quad F_1(\theta, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} G(r, \theta, Z) \cos \theta \\ \frac{\mu Z \sin \theta - r}{r} G(r, \theta, Z) \end{pmatrix},$$

Si $\varepsilon = 0$, le système non perturbé :

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = 0, \\ \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z, \end{cases} \quad (3.8)$$

possède les solutions 2π -périodiques en θ suivantes

$$(r(\theta), Z(\theta)) = (r_0, 0). \quad \forall r_0 > 0.$$

Nous décrivons les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du Théorème 2.2 dans le cas particulier du système différentiel (3.7). Ainsi nous avons que $k = 1$ et $n = 2$.

Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand.

Alors $V =]r_1, r_2[$, $\alpha = r_0 \in V$, $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est défini comme $\beta(r_0) = 0$ l'ensemble \mathcal{Z} est $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}$.

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer que la solution est $x(\theta) = z_\alpha = (r_0, 0)$ 2π -périodique. La matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(\theta)$ du système différentiel linéaire (3.8) associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ est l'identité de \mathbb{R}^2 , est donnée par

$$M(\theta) = M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix},$$

donc satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du Théorème 2.2, et nous pouvons donc appliquer ce théorème au système (3.7).

Maintenant $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\xi(r, Z) = r$. Nous calculons la fonction (2.10)

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C) \cos \theta d\theta.$$

où A, B et C sont définis dans l'énoncé du Théorème 3.1. Alors par le Théorème 2.2 nous avons que pour toute solution simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ nous avons une solution périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (3.7) telle que

$$(r_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(0)) \rightarrow (r_0^*, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

En revenant sur les changements de coordonnées, on obtient une solution périodique $(r_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ du système (3.6) telle que

$$(r_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0^*, t, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent on obtient une solution périodique $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ du système (3.5) telle que

$$(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0^* \cos t, r_0^* \sin t, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Donc comme

$$x = -\frac{X + Z + \mu Y}{1 + \mu^2}, \tag{3.9}$$

nous avons une solution périodique $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ du système (3.4) telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow -\frac{r_0^*(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2} \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Notons que l'expression précédente fournit une solution périodique de l'équation différentielle linéaire

$$\ddot{x} - \mu\ddot{x} + \dot{x} - \mu x = 0.$$

Par conséquent, la preuve du Théorème 3.1 est achevée.

Le corollaire suivant est une application du Théorème 3.1

Corollaire 3.1

Supposons que $\mu \in]1, 3[$ et la fonction F dans l'équation (3.1) est donnée par :

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = x^4 + x^3 + (\dot{x})^2 + x^2(\dot{x})^2 - x^2\dot{x} + x - \dot{x} + 1.$$

Alors l'équation (3.1) possède un cycle limite $x_\varepsilon(t)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{\frac{2\sqrt{-(\mu-3)(\mu-1)(\mu^2+1)}}{\mu-3}(\cos t + \mu \sin t)}{1 + \mu^2}, \quad (3.10)$$

de l'équation $\ddot{x} - \mu\ddot{x} + \dot{x} - \mu x = 0$. si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve

On applique le Théorème 3.1

Si , $F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = x^4 + x^3 + (\dot{x})^2 + x^2(\dot{x})^2 - x^2\dot{x} + x - \dot{x} + 1$, alors l'équation (3.1) de vient

$$\ddot{x} - \mu\ddot{x} + \dot{x} - \mu x = \varepsilon(x^4 + x^3 + (\dot{x})^2 + x^2(\dot{x})^2 - x^2\dot{x} + x - \dot{x} + 1). \quad (3.11)$$

Pour appliques le Théorème 3,1 on doit calculer la fonction (3.2), on trouve

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{8} \frac{r_0(4\mu^3 - 4\mu^2 + 4\mu + r_0^2\mu - 4 - 3r_0^2)}{1 + \mu^2}. \quad (3.12)$$

La fonction $\mathcal{F}(r_0)$ possède une racine réelle

$$r_0 = \frac{2\sqrt{-(\mu-3)(\mu-1)(\mu^2+1)}}{\mu-3}. \quad (3.13)$$

On a aussi

$$(\mathcal{F}'(r_0)) = -\frac{(\mu - 1)}{1 + \mu^2} \neq 0$$

Alors d'après le théorème (3.1) l'équation (3.11) possède un cycle limite $x_\varepsilon(t)$.

Finalement, (3.10) est obtenue en substituant (3.13) dans (3.3)

3.2 Cas 2 : $\mu = 0$

Si $\mu = 0$, l'équation (3.1) devient :

$$\ddot{x} + \dot{x} = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}) \tag{3.14}$$

Pour énoncer le résultat suivant, nous avons besoin de définir les fonctions

$$\begin{cases} f_1(r_0, Z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) \cos \theta d\theta, \\ f_2(r_0, Z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\alpha, \beta, \gamma) d\theta, \end{cases}$$

telle que

$$\alpha = -Z_0 - r_0 \cos \theta, \beta = r_0 \sin \theta, \gamma = r_0 \cos \theta.$$

Théorème 3.2

S'il existe (r_0^*, Z_0^*) tel que

$$\begin{cases} f_1(r_0^*, Z) = 0, \\ f_2(r_0^*, Z) = 0, \end{cases}$$

et

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r_0, Z_0)} \right) (r_0^*, Z_0^*) \neq 0$$

Alors l'équation différentielle (3.14) a une solution périodique $x_\varepsilon(t)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t) = -r_0 \cos t - Z_0,$$

de $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Théorème 3.2 voir J.Libre,L.Roberto [9]

D'après la preuve du Théorème 3.1, l'équation (3.14) peut être transformée au système (3.7), on prend alors le système (3.7) et on pose $\mu = 0$, on obtient le système suivant

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, z) \cos \theta + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = \varepsilon G(r, \theta, z) + o(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.15)$$

avec $(r, z) \in D \subset \mathbb{R}^2$ et D un sous-ensemble ouvert dans \mathbb{R}^2 .

Notons que le système (3.14) est sous la forme standard de la Théorème de la moyennisation pour appliquer le Théorème 3.2. Alors le système différentiel moyenné est

$$\left(\frac{dr}{d\theta}, \frac{dZ}{d\theta} \right) = \varepsilon g^0(r, Z), \quad (3.16)$$

où

$$g^0(r, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (G(r, s, Z) \cos s, G(r, s, Z)) ds \quad (3.17)$$

Par le Théorème 3.2 pour tout point singulier $p = (r_0, Z_0)$ du système (3.16) tel que

$$\det \left(\frac{\partial g^0}{\partial(r, Z)} \right) \Big|_{(r, Z)=p} \neq 0, \quad (3.18)$$

il existe une solution 2π -périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (3.15) telle que $(r_\varepsilon(0), Z_\varepsilon(0)) \rightarrow p$ si $\varepsilon \rightarrow 0$, alors (3.16) équivaut à

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, Z)} \right) (r_0, Z_0) \neq 0$$

où f_1 et f_2 sont les fonctions définies juste avant l'énoncé du Théorème 3.2.

En remontant sur les changements de coordonnées, la solution 2π -périodique $(r_\varepsilon(\theta), Z_\varepsilon(\theta))$ du système (3.15) donne une solution périodique $(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t))$ du système (3.5) avec $\mu = 0$ telle que

$$(X_\varepsilon(t), Y_\varepsilon(t), Z_\varepsilon(t)) \rightarrow (r_0 \cos t, r_0 \sin t, z_0) \text{ comme } \varepsilon \rightarrow 0$$

De plus, à partir de (3.9), nous avons une solution périodique $(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z_\varepsilon(t))$ du système (3.4) telle que

$$x_\varepsilon(t) \rightarrow -r_0 \cos t - Z_0 \text{ si } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Le preuve du Théorème 3.2 est achevée.

Une application du Théorème 3.2 est donnée par le Corollaire suivant.

Corollaire 3.2

Supposons que la fonction F dans l'équation (3.14) est donnée par

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = x^2 - \ddot{x} - 1.$$

Alors l'équation (3.14) possède un cycle limite $x(t)$ qui tend vers la solution périodique

$$x(t) = -\frac{1}{2}\sqrt{6} \cos t - \frac{1}{2}$$

de l'équation $\ddot{x} + \dot{x} = 0$ si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Corollaire 3.2 On applique le Théorème 3.2. Si

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}) = x^2 - \ddot{x} - 1,$$

alors les fonctions f_1 et f_2 du Théorème 3.2 sont données par

$$\begin{cases} f_1(r_0, Z_0) = \frac{1}{2} \frac{2Z_0 r_0 \pi - r_0 \pi}{\pi}, \\ f_2(r_0, Z_0) = \frac{1}{2} \frac{2Z_0^2 \pi - r_0^2 \pi - 2\pi}{\pi}, \end{cases}$$

ce système admet la solution suivante.

$$(r_0^*, z_0^*) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}, \frac{1}{2} \right),$$

avec

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r_0, z_0)} \right) (r_0^*, z_0^*) = -\frac{3}{2} \neq 0.$$

Alors, d'après le Théorème 3.2, il existe un cycle limite de l'équation (3.14).

Chapitre 4

Cycles limites d'une classe d'EDO du quatrième ordre.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les solutions périodiques de l'équation différentielle du 4^{ème} ordre suivante

$$\ddot{\ddot{x}} - (\lambda + \mu)\ddot{\ddot{x}} + (1 + \lambda\mu)\ddot{\ddot{x}} - (\lambda + \mu)\dot{\ddot{x}} + \lambda\mu x = \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}), \quad (4.1)$$

où λ, μ et ε sont des paramètres réels, ε est petit et F est une fonction non linéaire.

On distingue trois cas suivant les valeurs des paramètres λ et μ :

Cas 1 : $\lambda \neq \mu$ et $\lambda\mu \neq 0$.

Cas 2 : $\lambda = \mu \neq 0$.

Cas 3 : $\lambda \neq \mu = 0$.

4.1 Cas 1 $\lambda \neq \mu$ et $\lambda\mu \neq 0$

Un résultat sur les cycles limites de l'équation (4.1) dans ce cas est donnée par le théorème suivant

Théorème 4.1. Supposons que $\lambda \neq \mu$ et $\lambda\mu \neq 0$, pour toute racine simple positif r_0^* de la fonction

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta,$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{((\lambda+\mu)\cos\theta+(\lambda\mu-1)\sin\theta)r_0}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, \\ B = \frac{((\lambda\mu-1)\cos\theta-(\lambda+\mu)\sin\theta)r_0}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, \\ C = -\frac{((\lambda+\mu)\cos\theta+(\lambda\mu-1)\sin\theta)r_0}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, \\ D = \frac{((1-\lambda\mu)\cos\theta+(\lambda+\mu)\sin\theta)r_0}{(1+\lambda^2)(1+\mu^2)}, \end{cases}$$

l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{r_0^* ((\lambda + \mu) \cos t + (-1 + \lambda\mu) \sin t)}{(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)} \quad (4.2)$$

de

$$\ddot{\ddot{x}} - (\lambda + \mu)\ddot{\ddot{x}} + (1 + \lambda\mu)\ddot{x} - (\lambda + \mu)\dot{x} + \lambda\mu x = 0$$

si $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve du Théorème 4.1 voir J Llibre, A Makhlouf [6]

En introduisant les variables $(x, y, z, v) = (x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}})$ nous écrivons l'équation différentielle du quatrième ordre (4.1) comme un système différentiel du premier ordre défini dans un sous-ensemble ouvert Ω de \mathbb{R}^4 . On a donc le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = -\lambda\mu x + (\lambda + \mu)y + (1 + \lambda\mu)z + (\lambda + \mu)v + \varepsilon F(x, y, z, v). \end{cases} \quad (4.3)$$

Le Système (4.3) avec $\varepsilon = 0$ a un unique point singulier à l'origine avec des valeurs propres $\pm i$, λ et μ . Nous écrivons système (4.3) de manière à ce que la partie linéaire à l'origine soit sous sa forme normale de Jordan réelle. Alors, en faisant le changement de variables $(x, y, z, v) \rightarrow (X, Y, Z, V)$ donné par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda\mu & -\lambda - \mu & 1 \\ \lambda\mu & -\lambda - \mu & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\mu} & 1 & -\frac{1}{\mu} \\ -\lambda & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix},$$

le système différentiel (4.3) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon G(X, Y, Z, V), \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = \lambda Z - \frac{\varepsilon}{\mu} G(X, Y, Z, V), \\ \dot{V} = \mu V + \varepsilon G(X, Y, Z, V), \end{cases} \quad (4.4)$$

où $G(X, Y, Z, V) = F(A, B, C, D)$ avec

$$\begin{cases} A = \frac{-V(1+\lambda^2)+Y(\lambda-\mu)(\lambda\mu-1)+X(\lambda^2-\mu^2)-Z\mu(1+\mu^2)}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \\ B = \frac{X(\lambda-\mu)(\lambda\mu-1)+Y(-\lambda^2+\mu^2)-\mu(V(1+\lambda^2)+Z\lambda(1+\mu^2))}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \\ C = \frac{-Y(\lambda-\mu)(\lambda\mu-1)+X(-\lambda^2+\mu^2)-\mu(V\mu+\lambda^2(Z+V\mu+Z\mu^2))}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \\ D = \frac{-X(\lambda-\mu)(\lambda\mu-1)+Y(\lambda^2-\mu^2)-\mu(V(1+\lambda^2)\mu^2+Z\lambda^3(1+\mu^2))}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}. \end{cases}$$

Notons que la partie linéaire du système différentiel (4.4) à l'origine est sous sa forme normale réelle de Jordan, et que A, B, C et D sont bien définis car $\lambda \neq \mu$.

On passe des variables cartésiennes (X, Y, Z, V) aux variables cylindriques (r, θ, Z, V) de \mathbb{R}^4 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (4.4) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos \theta H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{\sin \theta}{r} H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{Z} = \lambda Z - H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{V} = V\mu + \varepsilon H(r, \theta, Z, V), \end{cases} \quad (4.5)$$

où $H(r, \theta, Z, V) = F(a, b, c, d)$ avec

$$\begin{cases} a = -\frac{V+V\lambda^2+Z\mu+Z\mu^3-r(\lambda-\mu)((\lambda+\mu)\cos\theta+(\lambda\mu-1)\sin\theta)}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \\ b = \frac{-\mu(V(1+\lambda^2)+Z\lambda(1+\mu^2))+r(\lambda-\mu)((\lambda\mu-1)\cos\theta-(\lambda+\mu)\sin\theta)}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \\ c = -\frac{\mu(\mu V+\lambda^2(Z+\mu V+\mu^2 Z))+r(\lambda-\mu)((\lambda+\mu)\cos\theta+(\lambda\mu-1)\sin\theta)}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \\ d = -\frac{V(1+\lambda^2)\mu^3+Z\lambda^3\mu(1+\mu^2)+r(\lambda-\mu)((\lambda\mu-1)\cos\theta-(\lambda+\mu)\sin\theta)}{(1+\lambda^2)(\lambda-\mu)(1+\mu^2)}, \end{cases}$$

Maintenant, nous changeons la variable indépendante de t à θ , le système différentiel (4.5) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta H + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = \lambda Z + \varepsilon \frac{\lambda\mu Z \sin \theta - r}{\mu r} H + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dV}{d\theta} = \mu V + \varepsilon \frac{\mu V \sin \theta + r}{r} H + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (4.6)$$

où $H = H(r, \theta, Z, V)$.

Nous appliquerons le Théorème 2.2 au système différentiel (4.6). Notons que le système (4.6) peut être écrit comme le système (2.7) en prenant

$$X = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = \theta, \quad F_0(\theta, X) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda Z \\ \mu V \end{pmatrix},$$

$$F_1(\theta, X) = \begin{pmatrix} \cos \theta H \\ \frac{\lambda \mu \sin \theta Z - r}{r} H \\ \frac{\mu r \sin \theta V + r}{r} H \end{pmatrix}.$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système (2.8) dans notre cas, c'est-à-dire les solutions périodiques du système (4.6) avec $\varepsilon = 0$. Clairement ces solutions périodiques sont

$$(r(\theta), Z(\theta), V(\theta)) = (r_0, 0, 0),$$

pour tout $r_0 > 0$; c'est-à-dire sont tous les cercles du plan $Z = V = 0$ du système (4.5). Bien entendu toutes ces solutions périodiques dans les coordonnées (r, Z, V) ont une période 2π en la variable θ .

Nous décrirons les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du Théorème 2.2. dans le cas particulier du système différentiel (4.6). On a donc que $k = 1$ et $n = 3$. Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. Ensuite, nous prenons le sous-ensemble ouvert borné W de \mathbb{R} comme $W =]r_1, r_2[$, $\alpha = r_0$ et $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini comme $\beta(r_0) = (0, 0)$. L'ensemble \mathcal{Z} est

$$\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}.$$

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer que la solution $X(\theta) = z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ est 2π périodique.

La matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(\theta)$ du système différentiel linéaire (4.6) avec $\varepsilon = 0$ associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^3 est

$$M(\theta) = M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda\theta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix},$$

satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du Théorème 2.2 car λ et μ ne sont pas nuls.

Maintenant $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\xi(r, Z, V) = r$. On calcule la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r_0) &= \mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, x(t, z_\alpha)) dt \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta, \end{aligned}$$

où les expressions de A, B, C et D sont celles données dans l'énoncé du théorème 4.2. Alors d'après le Théorème 2.2 on a que pour tout zéro simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ on a une solution périodique $(r, Z, V)(\theta, \varepsilon)$ du système (4.6) telle que

$$(r, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On revenant sur le changement de coordonnées on obtient une solution périodique $(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (4.6) telle que

$$(r, \theta, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent on obtient une solution périodique $(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (4.5) telle que

$$(X, Y, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On a une solution périodique $(x, y, z, v)(t, \varepsilon)$ du système (4.4) telle que

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{r_0^*((\lambda + \mu) \cos t + (-1 + \lambda\mu) \sin t)}{(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)} \rightarrow \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Bien entendu, il est facile de vérifier que l'expression précédente fournit une solution périodique de l'équation différentielle linéaire $\ddot{x} - (\lambda + \mu)\dot{x} + (1 + \lambda\mu)x - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu x = 0$. Donc le théorème 4.1 est démontré.

Corollaire 4.1 On pose $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = x^3 - x$, si $\lambda \neq \mu$, $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda + \mu \neq 0$, alors l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3 + 3\mu^2 + 3\lambda^2 + 3\lambda^2\mu^2}((\lambda + \mu) \cos t + (\lambda\mu - 1) \sin t)}{(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)} \quad (4.7)$$

de $\ddot{\ddot{x}} - (\lambda + \mu)\ddot{x} + (1 + \lambda\mu)\ddot{x} - (\lambda + \mu)\dot{x} + \lambda\mu x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

Preuve du Corollaire 4.1 Soit $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = x^3 - x$, $\lambda \neq -\mu$, $\lambda + \mu \neq 0$. Alors la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ de l'énoncé du Théorème 4.1 est

$$\mathcal{F}(r_0) = -\frac{r_0(\lambda + \mu)(-3r_0^2 + 4\lambda^2\mu^2 + 4\lambda^2 + 4\mu^2 + 4)}{8(1 + \lambda^2)^2(1 + \mu^2)^2}.$$

La fonction $\mathcal{F}(r_0)$, a le zéro positif

$$r_0^* = \frac{2}{3}\sqrt{3 + 3\mu^2 + 3\lambda^2 + 3\lambda^2\mu^2}.$$

La dérivée de \mathcal{F} en r_0^* est

$$\mathcal{F}'(r_0^*) = \frac{\lambda - \mu}{(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)} \neq 0.$$

Alors, il existe un cycle limite de l'équation (4.1).

Enfin (4.7) est obtenue en substituant la racine r_0^* dans (4.2).

4.2 Cas 2 : $\lambda = \mu \neq 0$

Dans ce cas, on a le resultat suivant

Théorème 4.2

On suppose que $\lambda = \mu \neq 0$, pour chaque racine positif r_0^* de la fonction

$$\mathcal{F}(r_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta,$$

où

$$\begin{cases} A = \frac{(2\mu \cos \theta + (\mu^2 - 1) \sin \theta) r_0}{(1 + \mu^2)^2}, \\ B = \frac{((\mu^2 - 1) \cos \theta - 2\mu \sin \theta) r_0}{(1 + \mu^2)^2}, \\ C = \frac{(-2\mu \cos \theta + (1 - \mu^2) \sin \theta) r_0}{(1 + \mu^2)^2}, \\ D = \frac{((1 - \mu^2) \cos \theta + 2\mu \sin \theta) r_0}{(1 + \mu^2)^2}, \end{cases}$$

l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{r_0^*(2\mu \cos t + (\mu^2 - 1) \sin t)}{(1 + \mu^2)} \quad (4.8)$$

de $\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + (1 + \mu^2)x - 2\mu\dot{x} + \mu^2x = 0$ quant $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve voir J Llibre, A Makhoulouf [6]

L'équation (4.1) avec $\lambda = \mu \neq 0$ est

$$\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + (1 + \mu^2)x - 2\mu\dot{x} + \mu^2x = \varepsilon F(x; \dot{x}; \ddot{x}; \ddot{x}) \quad (4.9)$$

l'équation (4.9) est équivalente au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = -\mu^2x + 2\mu y + (1 + \mu^2)z + 2\mu v + \varepsilon F(x, y, z, v). \end{cases} \quad (4.10)$$

Le système (4.10) avec $\varepsilon = 0$ a un unique point singulier à l'origine avec des valeurs propres $\pm i$ et μ . Nous écrivons le système (4.10) de manière à ce que la partie linéaire à l'origine soit sous sa forme normale de Jordan réelle. Donc, en faisant le changement de variables $(x, y, z, v) \rightarrow (X, Y, Z, V)$ donné par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^2 & -2\mu & 1 \\ \mu^2 & -2\mu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix},$$

le système différentiel (4.10) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon G(X, Y, Z, V), \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = \mu Z + V, \\ \dot{V} = \mu V + \varepsilon G(X, Y, Z, V), \end{cases} \quad (4.11)$$

où $G(X, Y, Z, V) = F(A, B, C, D)$ avec

$$\begin{cases} A = \frac{-Y+Z+2(-V+X)\mu+(Y+Z)\mu^2}{(1+\mu^2)^2}, \\ B = \frac{V-\mu^2V+(-1+\mu^2)X+\mu(-2Y+Z+\mu^2Z)}{(1+\mu^2)^2}, \\ C = \frac{Y-\mu^2Y+\mu(-2X+2V+\mu Z(1+\mu^2))}{(1+\mu^2)^2}, \\ D = \frac{X-\mu^2X+\mu(2Y+\mu(\mu Z(1+\mu^2)+(3+\mu^2)V))}{(1+\mu^2)^2}. \end{cases}$$

On passe des variables cartésiennes (X, Y, Z, V) aux variables cylindriques (r, θ, Z, V) de \mathbb{R}^4 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$. Dans ces nouvelles variables, le système différentiel (4.11) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos \theta H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{\sin \theta}{r} H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{Z} = \mu Z + V, \\ \dot{V} = \mu V + \varepsilon H(r, \theta, Z, V), \end{cases} \quad (4.12)$$

où $H(r, \theta, Z, V) = F(a, b, c, d)$ avec

$$\begin{cases} a = \frac{Z+\mu^2Z-2\mu Z+2\mu r \cos \theta+r(\mu^2-1) \sin \theta}{(1+\mu^2)^2}, \\ b = \frac{V-\mu^2V+\mu Z(1+\mu^2)+(\mu^2-1)r \cos \theta-2\mu r \sin \theta}{(1+\mu^2)^2}, \\ c = \frac{\mu[\mu(1+\mu^2)Z+2V-2r \cos \theta]+(1-\mu^2)r \sin \theta}{(1+\mu^2)^2}, \\ d = \frac{(1-\mu^2)r \cos \theta+\mu[\mu(1+\mu^2)Z+(3+\mu^2)V+2r \sin \theta]}{(1+\mu^2)^2}, \end{cases}$$

Maintenant, nous changeons la variable indépendante de t à θ , le système différentiel (4.12) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta H + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = \mu Z + V + \varepsilon \frac{(\mu Z+V) \sin \theta}{r} H + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dV}{d\theta} = \mu V + \varepsilon \frac{\mu V \sin \theta+r}{r} H + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (4.13)$$

Où $H = H(r, \theta, Z, V)$.

On va appliquer le Théorème 2.2 au système différentiel (4.13). Notons que le système (4.13) peut être écrit comme le système (2.7) en prenant

$$X = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = \theta, \quad F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu Z + V \\ \mu V \end{pmatrix},$$

$$F_1(\theta, x) = \begin{pmatrix} \cos \theta H \\ \frac{(\mu Z + V) \sin \theta}{r + \mu V} H \\ \frac{r \sin \theta}{r} H \end{pmatrix}.$$

Nous étudierons les solutions périodiques du système (2.8) dans notre cas, c'est-à-dire les solutions périodiques du système (4.13) avec $\varepsilon = 0$. Clairement ces solutions périodiques sont

$$(r(\theta), Z(\theta), V(\theta)) = (r_0, 0, 0),$$

pour tout $r_0 > 0$; c'est-à-dire sont tous les cercles du plan $Z = V = 0$ du système (4.12). Toutes ces solutions périodiques dans les coordonnées (r, Z, V) ont une période 2π en la variable θ .

Nous décrirons les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé de Théorème 2.2 dans le cas particulier du système différentiel (4.13). On a donc que $k = 1$ et $n = 3$. Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. Ensuite, nous prenons le sous-ensemble ouvert borné W de \mathbb{R} comme $W =]r_1, r_2[$, $\alpha = r_0$ et $\beta : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini comme $\beta(r_0) = (0, 0)$. L'ensemble \mathcal{Z} est

$$\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (r_0, 0, 0), r_0 \in [r_1, r_2]\}.$$

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer que la solution $X(\theta) = z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ est 2π périodique.

La matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(\theta)$ du système différentiel linéaire (4.13) avec $\varepsilon = 0$ associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, 0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^3 est

$$M(\theta) = M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu\theta} & \theta e^{\mu\theta} \\ 0 & 0 & e^{\mu\theta} \end{pmatrix}.$$

Puisque la matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} & 2\pi e^{-2\pi\mu} \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\mu} \end{pmatrix},$$

satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du Théorème 2.2 on peut l'appliquer au système (4.13).

Maintenant $\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est $\xi(r, Z, V) = r$. On calcule la fonction

$$\begin{aligned} F(r_0) &= F(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, X(t, z_\alpha)) dt \right), \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta, \end{aligned}$$

où les expressions de A, B, C et D sont celles données dans l'énoncé du Théorème 4.2. Alors d'après le Théorème 2.2 on a que pour tout zéro simple $r_0^* \in [r_1, r_2]$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ on a une solution périodique $(r, Z, V)(\theta, \varepsilon)$ du système (4.13) telle que

$$(r, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En revenant sur le changement de coordonnées on obtient une solution périodique $(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (4.12) telle que

$$(r, \theta, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent on obtient une solution périodique $(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (4.11) telle que

$$(X, Y, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0, 0) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On a une solution périodique $(x, y, z, v)(t, \varepsilon)$ du système (4.10) telle que

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{r_0^*(2\mu \cos t + (\mu^2 - 1) \sin t)}{(1 + \mu^2)^2} \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Il est facile de vérifier que l'expression précédente fournit une solution périodique de l'équation différentielle linéaire $\ddot{x} - 2\mu\ddot{x} + (1 + \mu^2)\ddot{x} - 2\mu\dot{x} + \mu^2x = 0$. Donc le Théorème est démontré.

Corollaire 4.2 On pose $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = x^3 - \dot{x}$, si $\mu \neq \pm 1, \mu \neq 0$, alors l'équation différentielle (4.9) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow \frac{\frac{1}{3} \frac{(\sqrt{6}\sqrt{\mu(\mu^2-1)})(1+\mu^2)}{\mu} ((2\mu) \cos t + (\mu^2 - 1) \sin t)}{(1 + \lambda^2)(1 + \mu^2)} \quad (4.14)$$

de $\ddot{x} - (2\mu)\ddot{x} + (1 + \mu^2)\dot{x} - (2\mu)x + \mu^2x = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

Preuve du Corollaire 4.2 Soit $F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = x^3 - \dot{x}$, alors la fonction $\mathcal{F}(r_0)$ de l'énoncé du Théorème 4.2 est

$$\mathcal{F}(r_0) = -\frac{r_0(2\mu)(-3r_0^2\mu + 2\mu^6 + 2\mu^4 - 2\mu^2 - 2)}{4(1 + \mu^2)^4}.$$

La fonction $\mathcal{F}(r_0)$ a une racine positif r_0^* donnée par

$$r_0^* = \frac{1}{3} \frac{(\sqrt{6}\sqrt{\mu(\mu^2-1)})(1 + \mu^2)}{\mu}.$$

On a aussi

$$\mathcal{F}'(r_0^*) = \frac{\mu^2 - 1}{(1 + \mu^2)^2} \neq 0.$$

Alors, d'après le Théorème 4.2, il existe une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ de l'équation (4.9). Finalement (4.14) est obtenue en substituant la racine r_0^* dans (4.8).

4.3 Cas 3 : $\lambda \neq \mu = 0$.

Dans ce cas, l'équation (4.1) prend la forme

Théorème 4.3

Supposer $\lambda \neq \mu = 0$, pour chaque (r_0^*, V_0^*) solution du système

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(r_0, V_0) = 0, \\ \mathcal{F}_2(r_0, V_0) = 0, \end{cases}$$

satisfaisant

$$\det \left(\frac{\partial(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)}{\partial(r_0, V_0)} \Big|_{(r_0, V_0) = (r_0^*, V_0^*)} \right) \neq 0$$

avec

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1(r_0, V_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta, \\ \mathcal{F}_2(r_0, V_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C, D) d\theta, \end{cases}$$

lorsque

$$\begin{cases} A = \frac{(1+\lambda^2)V_0 + (\lambda \sin \theta - \lambda^2 \cos \theta)r_0}{\lambda + \lambda^3}, \\ B = \frac{(\cos \theta + \lambda \sin \theta)r_0}{1 + \lambda^2}, \\ C = \frac{(-\lambda \cos \theta + \sin \theta)r_0}{1 + \lambda^2}, \\ D = \frac{(\cos \theta + \lambda \sin \theta)r_0}{1 + \lambda^2}, \end{cases}$$

l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow -\frac{(1 + \lambda^2)V_0^* + (\lambda \sin t - \lambda^2 \cos t)r_0^*}{\lambda + \lambda^3},$$

de $\ddot{x} - \lambda \dot{x} + \ddot{x} - \lambda \dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve voir J Llibre, A Makhlouf [6]

Nous avons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = \lambda y + \lambda v - z + \varepsilon F(x, y, z, v), \end{cases} \quad (4.14)$$

le système non perturbé a un unique point singulier à l'origine avec des valeurs propres $\pm i, 0, \lambda$. Nous écrivons le système (4.14) de telle sorte que la partie linéaire à l'origine sera dans sa forme normale réelle de Jordan puis en faisant le changement de variables $(x, y, z, v) \rightarrow (X, Y, Z, V)$ donné par

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -\lambda & 1 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \end{pmatrix},$$

le système différentiel (4.14) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y + \varepsilon G(X, Y, Z, V), \\ \dot{Y} = X, \\ \dot{Z} = \lambda Z + \varepsilon G(X, Y, Z, V), \\ \dot{V} = \varepsilon G(X, Y, Z, V), \end{cases} \quad (4.15)$$

où $G(X, Y, Z, V) = F(A, B, C, D)$ avec

$$\begin{cases} A = \frac{Z + \lambda(-Y + \lambda X) - (1 + \lambda^2)V}{1 + \lambda^2}, \\ B = -\frac{X - Z + \lambda Y}{1 + \lambda^2}, \\ C = \frac{Y - \lambda X + \lambda Z}{1 + \lambda^2}, \\ D = \frac{X + \lambda(Y + \lambda Z)}{1 + \lambda^2}. \end{cases}$$

Notons que λ ne peut pas être zéro. Maintenant on passe des variables cartésiennes (X, Y, Z, V) aux cylindriques (r, θ, Z, V) de \mathbb{R}^4 , où $X = r \cos \theta$ et $Y = r \sin \theta$ dans ces nouvelles variables le système différentiel (4.15) peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \cos \theta H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{\theta} = 1 - \varepsilon \frac{\sin \theta}{r} H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{Z} = \lambda Z + \varepsilon H(r, \theta, Z, V), \\ \dot{V} = \varepsilon H(r, \theta, z, v), \end{cases} \quad (4.16)$$

où $H(r, \theta, Z, V) = F(a, b, c, d)$

avec

$$\begin{cases} a = \frac{Z - (1 + \lambda^2)V + \lambda(\lambda \cos \theta - \sin \theta)r}{1 + \lambda^2}, \\ b = \frac{-(\cos \theta + \lambda \sin \theta)r + Z}{1 + \lambda^2}, \\ c = \frac{(-\lambda \cos \theta + \sin \theta)r + \lambda Z}{1 + \lambda^2}, \\ d = \frac{(\cos \theta + \lambda \sin \theta)r + \lambda^2 Z}{1 + \lambda^2} \end{cases}$$

Maintenant nous changeons la variable indépendante de t à θ , le système différentiel (4, 16) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \cos \theta H + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dZ}{d\theta} = \lambda Z + \varepsilon \frac{r + \lambda Z \sin \theta}{r} H + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dV}{d\theta} = \varepsilon H + o(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (4.17)$$

où $H = H(r, \theta, Z, V)$.

On appliquera le Théorème 2.2 au système différentiel (4.17) on note que le système (4.17) peut s'écrire comme le système (2.1) en prenant

$$x = \begin{pmatrix} r \\ Z \\ V \end{pmatrix}, \quad t = \theta, \quad F_0(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda Z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_1(\theta, x) = \begin{pmatrix} \cos \theta H \\ \frac{r + \lambda \sin \theta Z}{r} H \\ H \end{pmatrix}.$$

Nous étudierons la solution périodique du système (2.8) dans notre cas, c'est-à-dire que la solution périodique du système (4.17) avec $\varepsilon = 0$ cette solution périodique est

$$(r(\theta), Z(\theta), V(\theta)) = (r_0, 0, V_0),$$

pour tout $r_0 > 0$ ce sont tous des cercles dans le plan $Z = 0, V = V_0$ du système (4.15). Toutes ces solutions périodiques dans les coordonnées (r, Z, V) ont des périodes 2π en la variables θ .

Nous décrivons les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 2.2 dans le cas particulier du système différentiel (4.17). Ainsi nous avons que $k = 2$ et $n = 3$ nous prenons le sous-ensemble ouvert borné W de \mathbb{R}^2 comme

$$W = \{(r_0, V_0) : 0 < r_0^2 + V_0^2 < \mathbb{R}^2\},$$

avec $r_0 > 0$ arbitrairement grand. Ici $\alpha = (r_0, V_0)$ et $\beta : W \rightarrow \mathbb{R}, \beta(r_0, V_0) = 0$ l'ensemble \mathcal{Z} est

$$\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (r_0, V_0, 0), (r_0, V_0) \in W\}.$$

Clairement pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer que la solution $x(\theta) = z_\alpha = (r_0, V_0, 0)$ est 2π -périodique.

La matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(\theta)$ du système différentiel linéaire (4.17) avec $\varepsilon = 0$ associé à la solution 2π -périodique $z_\alpha = (r_0, V_0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ soit l'identité de \mathbb{R}^3 , est :

$$M(\theta) = M_{z_\alpha}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\theta} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - e^{-2\pi\lambda} \end{pmatrix},$$

satisfait les hypothèses de l'énoncé de Théorème 2.2, pour $\lambda \neq 0$, nous pouvons l'appliquer au système (4.17), la fonction.

$\xi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\xi(r, Z, V) = (r, V)$.

On calcule la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r_0, V_0) &= \mathcal{F}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) F_1(t, z_\alpha) dt \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta F(A, B, C, D) d\theta \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, B, C, D) d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(r_0, V_0) \\ \mathcal{F}_2(r_0, V_0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où les expressions de A, B, C et D sont celles données dans l'énoncé du Théorème 4.3. Alors, d'après le Théorème 2.2 nous avons que pour toute racine simple $(r_0^*, V_0^*) \in W$ de la fonction $\mathcal{F}(r_0, V_0)$ on a une solution périodique $(r, Z, V)(\theta, \varepsilon)$ du système (4.17) telle que

$$(r, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, V_0^*) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En revenant sur les changements de coordonnées on obtient une solution périodique $(r, \theta, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (4.16) telle que

$$(r, \theta, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0, V_0^*) \text{ comme } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par conséquent, on obtient une solution périodique $(X, Y, Z, V)(t, \varepsilon)$ du système (4.15) telle que

$$(X, Y, Z, V)(0, \varepsilon) \rightarrow (r_0^*, 0, 0, V_0^*) \text{ comme } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On a une solution périodique $(x, y, z, v)(t, \varepsilon)$ du système (4.14) telle que

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow -\frac{(1 + \lambda^2)V_0^* + (\lambda \sin t - \lambda^2 \cos t)r_0^*}{\lambda + \lambda^3} \text{ comme } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Il est facile de vérifier que l'expression précédente fournit une solution périodique de l'équation différentielle linéaire $\ddot{x} - \lambda \dot{x} + \ddot{x} - \lambda \dot{x} = 0$ d'où le Théorème 4.3 est prouvé.

Corollaire 4.3 Supposons que la fonction F dans l'équation (4.1) est donnée par

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{x}) = x^2 - 1.$$

CHAPITRE 4. CYCLES LIMITES D'UNE CLASSE D'EDO DU
QUATRIÈME ORDRE.

Alors l'équation différentielle (4.1) a une solution périodique $x(t, \varepsilon)$ tendant vers la solution périodique

$$x(t, \varepsilon) \rightarrow -\frac{(\lambda \sin t - \lambda^2 \cos t)\sqrt{2\lambda^2 + 2}}{\lambda + \lambda^3},$$

de $\ddot{x} - \lambda\ddot{x} + \dot{x} - \lambda\dot{x} = 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

Preuve du Corollaire 4.3

On applique le Théorème 4.3, si

$$F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = x^2 - 1,$$

alors les fonctions f_1, f_2 du Théorème 4.3 sans

$$\begin{cases} f_1(r_0, V_0) = -\frac{V_0 r_0}{(1+\lambda^2)}, \\ f_2(r_0, V_0) = -\frac{1}{2} \frac{2\lambda^4 - r_0^2 \lambda^2 - 2V_0^2 \lambda^2 + 2\lambda^2 - 2V_0^2}{\lambda^2(1+\lambda^2)}, \end{cases}$$

ce système admet une solution :

$$(r_0, V_0) = \left(\sqrt{2\lambda^2 + 2}, 0 \right),$$

avec

$$\det \left(\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(r, V)} \right) (r_0, V_0) = \frac{2}{1 + \lambda^2} \neq 0.$$

Alors, d'après le Théorème 4.3, le Corollaire est prouvé.

Conclusion

Dans ce mémoire, on appliqué la méthode de moyennisation du premier ordre a la recherche des cycles limites de deux classes d'EDO du troisième et du quatrième ordre.

La méthode de moyennisation transforme le problème de la recherche des cycles limite d'un système différentiel en un problème algébrique de la recherche des racines non dégénérées d'un système non linéaire, et donne une condition suffisante de l'existence des cycles limite.

Cette méthode donne de bons résultats pour certaines classes d'EDO, mais elle ne donne pas toute les solutions périodiques de l'EDO.

Bibliographie

- [1] N.N. Bogoliubov and Yu.A.Mitropolskii, Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations, Gordon and Breach, New York, 1961.
- [2] A. Buica, J. P. Francoise and J. Llibre, Periodic Solutions of Nonlinear Periodic Differential Systems with a Small Parameter, Comm. Pure Appl. Anal. 6 N°1 (2007), pp. 103-111.
- [3] A. Cima, J. Llibre, and M. A Teixeira, Limit cycles of some polynomial differential system in dimension 2, 3 and 4 via averaging theory, Applicable Analysis, 87 (2008), 149-164.
- [4] D. Hilbert, Mathematische Probleme, Lecture, in : Second Internat. Congr. Math.,Paris, 1900, Nachr. Ges. Wiss. Goett. Math.-Phys. Kl. (1900) 253.297; English transl. : Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902) 437.479.
- [5] N.M. Krylov and N.N. Bogoliubov. Introduction to Nonlinear Mechanics (in Russian), Izd. AN UkSSR, Kiev, 1937. Vvedenie v Nelineinikhu Mekhaniku.
- [6] J Llibre, A Makhlof, Limit cycles for fourth order autonomous differential equations.Electronic Jornal of Différetial Equations, vol. 2012 (2012), No. 22, pp. 1-17.
- [7] J. Llibre and A. Makhlof, On the limit cycles for a class of fourth-order differential equations, J. Phys. A : Math. Theor, 45, 055214, 2012
- [8] J. Llibre and A. Makhlof, Periodic orbits of the fourth-order non-autonomous differential equation $u'''' + qu'' + pu = \varepsilon f(t, u, u', u'', u''')$, Appl. Math & Comp 219, 827-836, 2012.
- [9] J.Libre,L.Roberto.On the periodic orbits of the third-order differential equation.Applied Mathematics letters 26 (2013) 425-430.

- [10] J. Llibre, N. Sellami, and A. Makhlouf, Limit Cycles for a Class of Fourth-Order Differential Equations, *Applicable Analysis* 88 (12), (2009), 1617-1630.
- [11] J. Llibre, J. Yu, and X. Zhang, Limit Cycles for a Class of Third Order Differential Equations, *Rocky Mountain J. Math.* 40 N° 2 (2010), pp. 581-594.
- [12] I.G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [13] H. Poincaré, Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. Math. Pures. Appl.* Vol. 3 No. 7, 375–422 (1881).
- [14] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.8 Springer–Verlag, Berlin–New York, 1966.
- [15] J. A. Sanders, and F. Verhulst, Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems, *Applied Mathematical Sciences* 59, Springer, New York, 1985.
- [16] N. Sellami and A. Makhlouf, Limit Cycles for a Class of Fifth-Order Differential Equations, *Ann. of Diff. Equ.* 28 : 2 (2012), 202-219.
- [17] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Universitext, 2nd ed, Springer, Berlin, 1996.