**publique Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université 8 Mai 1945 Guelma**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière**
**Département de Mathématiques**

# Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : **Benamara Insaf**

**Talhaoui Lemya**

# Intitulé

## Etudes qualitative des solutions d'équations Différentielles fractionnaires de type Caputo-Hadamard

**Dirigé par :**

**Mr. Hamid Boulares**
**Devant le jury**

| | | | |
|---|---|---|---|
| PRESIDENT | Dr. Benarioua Khadir | MCB | Univ-Guelma |
| RAPPORTEUR | Dr. Hamid Boulares | MCA | Univ-Guelma |
| EXAMINATEUR | Dr.Laribi Naima | MCB | Univ-Guelma |

**Session Juillet 2021**

# Etudes qualitative des solutions d'équations différentielles fractionnaires de type Caputo-Hadamard

Mémoire de master, Par Talhaoui Lemya et Insaf Benamara
Conseiller: Dr. Hamid Boulares

## Dédicaces

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté D'entamer et de terminer ce mémoire.
Je dédie ce travail
A mes parents Messaoud et Fatima Zohra pour m'avoir encouragé, soutenu, aidé, je suis fier, chaque jour pour un peu plus, de l'éducation que vous m'avez donnée, sans laquelle je n'aurais sans doute jamais envisagé d'aller aussi loin
A mes grandes- pères Hamid, Rghays dieu le bénis set grands-méres Hafsa, Yasmina allah yachfiha.
A mes chers oncles et mes tantes
A l'ensemble de ma famille ( Seddik et Hadeel )
A mes amis, Fatima, Feriel, Boutheyna, Bouchra, Khouloud, Lina, djamila.
**Insaf Benamara**

## Dédicaces

Je remercie Dieu le tout puissant de m'avoir donné la santé et la volonté D'entamer et de terminer ce mémoire.
Je dédie ce travail
A mes parents Salah et Lwiza pour m'avoir encouragé, soutenu, aidé, je suis fier, chaque jour pour un peu plus, de l'éducation que vous m'avez donnée, sans laquelle je n'aurais sans doute jamais envisagé d'aller aussi loin
A mes grandes famille Talhaoui, Guelmi, Fartas, Hamouda.
A l'ensemble de ma famille Abd rahman, Soultana, Mouloud, Sara, Tarak.
A mes amis, Bouthayna, Zahra, Ikram, Nour.

**Talhaoui Lemya**

# Remerciements

Louange à Dieu, seigneur de l'univers, qui m'a comblé de ses bienfaits, ma guidé dans toutes les années d'études et ma donné la volonté, la patience et le courage pour terminer ce travail.
Je tiens à exprimer mes vifs remerciement à mon Encadreur **Dr**. **Hamid Boulares**, pour ces précieux conseils et pour tout le temps qui' il ma consacré.
J'adresse mes remerciements à **Dr**. **Benarioua Khadir**, **Dr**. **Laribi Naima** qui ma fait l'honneur de présider le jury.
Ainsi que routes les personnes, qui ont participé de prés ou loin à la réalisation de ce travail

# Abstract

We study in this work the existence and uniqueness of solutions for a fractional boundary value problem involving Hadamard-type fractional differential equations and nonlocal fractional integral boundary conditions. Our results are based on some classical fixed point theorems. Some illustrative examples are also included.



**Keywords:** Existence and uniqueness, Hadamard-type fractional differential equations, nonlocal fractional integral boundary conditions.

# Résumé

La présente étude a pour objet d'étudier l'existence et l'unicité des solutions pour un problème de valeurs aux limites fractionnaires en impliquant des équations différentielles fractionnaires de type Hadamard et des conditions aux limites intégrales fractionnaires non locales. Nos résultats sont basés sur quelques théorèmes classiques du point fixe. Quelques exemples illustratifs sont également inclus.

**Mots-clés:** L'existence et l'unicité, équations différentielles fractionnaires de type Hadamard, conditions aux limites intégrales fractionnaires non locales.

# Contents

## Notations générales

$\mathbb{R}$ : ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$ : ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$ : espace vectoriel de dimensionn construit sur le corps des réels.
$\mathbb{N}$ : ensemble des nombres naturels.
$Q$ : ensemble des nombres rationnels.
$[a, b)$ : intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité $a$ et $b$.
$C = C(K, F)$ : ensemble des fonctions continues de $K$ dans $F$.
$|.|$ : valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\Gamma(.)$ : fonction Gamma d'Euler.
$e.v.n$ : espace vectoriel normé.
$[\alpha]$ : partie entière de$\alpha$.
$[\beta]$ : partie entière de $\beta$.

# Chapter 1

# Introduction

Le calcul fractionnaire est devenu une branche indispensable des mathématiques, grace à son énorme application dans différents domaine tels que la physique, la chimie, l'ingénierie, finance et d'autre sciences qui ont été développées dans la dernière décenie, en plus de l'importance que lui portent beaucoup de chercheurs en mathématique elle même. L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité ainsi que plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe jouent un role important voir [35, 36]. Les théorèmes du point fixe sont des outils mathématiques de base qui montrent l'existence des solutions dans divers types d'équations. La théorie du point fixe est au sein de l'analyse non linéaire vu qu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans nombreux problèmes non linéaires.

L'objet de ce travail de recherche est de donner certains résultats concernant les études qualitatives des solutions d'equations differentielles fractionnaires de type Cputo-Hadamard.On accorde ainsi des résultats d'existence et d'unicité pour ce problèmes.Afin d'atteindre nos objectifs nous avons divisé notre travail en trois chapitres.

Dans le $1^{ere}$ chapitre on donne quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de type Cputo -Hadamard.

Dans le dexième chapitre nous alons définir quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard.Celà sera illustré par quelques exemples d'applications.Les résultats de ce chapitre se figurent dans voir [35, 36]..

Tandis que le dernier chapitre sera consacré à l'étude du problème aux limites de Hadamard suivant:

$$D^q x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in (1, e), \tag{1.1}$$

$$x(1) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\alpha_i} x(\eta_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left( J^{\beta i} x(e) - J^{\beta_j} x(\varepsilon_j) \right), \tag{1.2}$$

ou $D^q$et la derive fractionnaire de hadmard d'ordre $q$, $f : [1, e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue $\eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_m$, $\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n$ et $j^\phi$ et l'intégral fractionnaire de Hadamard d'ordre $\phi > 0$ ($\phi = \alpha_i$, $\beta_j$, $i = 1...m$, $j = 1...n$.

Nos résultats principaux sont obtenus via [7].

## 1.1 Thèmes connexes dans le domaine des mathématiques

**Théorème 1** . *Le calcul fractionnaire est un domaine d'analyse mathématique, impliquant le concept d'intégration et de dérivation d'ordre fractionnaire et son application. le terme score est un terme impropre, mais il est réservé pour une utilisation ultérieure.*

Cependant, comme il est devenu le sujet des conférences et d'articles spéciaux ces dernières années, il peut être considéré comme un nouveau sujet de recherche. pour le premier cours, B. Ross mérite d'être mentionné. Il a organisé le premier cours sur le calcul fractionnaire et son application à l'Université de New Haven en juin 1974. Actuellement, une partie de la liste des textes et comportements dédiés au calcul et à ses applications comprend plus d'une dizaine de rubriques. Le plus important d'entre eux est l'encyclopédie de Samko, Kilbas et Marichev. En outre, nous avons également passé en revue l'impact sur Davis, Erdélyi, Gel'fand et Shilov, Djrbashian, Karp Attention aux articles tels que Caputo, Babenko, Gren‡o et Vessella, qui contiennent implicitement des calculs bien détaillés des scores d'analyse pour certains aspects mathématiques et / ou applications physiques. Ces dernières années, l'application du calcul fractionnaire à l'analyse numérique et aux diférents domaines du physique et d'ingénierie (qui peuvent inclure des phénomènes fractionnaires) a suscité un grand intérêt pour le calcul fractionnaire.

#### Domaines d'application: quelques exemples

L'application de la théorie du calcul des fractions est également gratuite en science. Les fondamentaux sont très divers et semblent multipliés Ils apparaissent souvent dans différents domaines de recherche.Nous mentionons ainsi quelques exemples de domaines d'application.

Électronique:

À l'aide de données expérimentales, Schmidt et Drumher ont prouvé le courant traversant le condensateur est proportionnel à la dérivée partielle de la tension, par le fait d'utiliser le composé ($L_iN_2H_5S0_4$) et de prendre des mesures dans une large gamme de températures et de fréquences, ils ont observé Fonctions1 électriques réelles et . . . ctives, même sensibilité ($\varepsilon = \varepsilon_1 + J\varepsilon_2$) est très grand $\left(\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim 10^6\right)$ et varie en fonction de la fréquence Suivez la commande$\frac{1}{2}$ (avec $\varepsilon_1 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$).

La relation suivante, valable pour un composé ($L_iN_2H_5S0_4$)

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \omega^{-\frac{1}{2}} (1 - i) = \varepsilon_1 \sqrt[2]{2}\, (i\omega)^{-\frac{1}{2}} \text{ avec } i = \sqrt[2]{-1}$$

# Chapter 2

# *Integral fractionnaire de type Hadamard et ou sens de Hadamard*

Dans ce chapitre on montre quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire de type Hadamard et au sens de Hadamard. nous mentionnons également quelques exemples d'application voir [25, 26, 36, 38].

## 2.1 Quelques définitions:

### 2.1.1 Espaces $AC^n_{\delta,\mu}[a,b]$:

Soit $[a,b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$

**Définition 2** . *Une fonction $f$ est dite absolument continue sur un intervalle $[a,b]$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute famille finie d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $[a_k\ ,b_k] \subset [a,b]$ , $k = 1, 2...n$ tel que*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \eta \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |f(b_k)| - f(a_k) < \varepsilon. \tag{2.1}$$

**Notation**: On note par $AC[a,b]$ l'espace des fonctions absolument continuent sur $[a,b]$.

**Théorème 3** . *l'espace $AC$ $[a,b]$ coincide avec l'espase des primitives de fonction sommable de lebesgue, autrement-dit:*

$$f \in AC[a,b] \Longleftrightarrow f(x) = c + \int_a^x \Phi(t)\partial t,\ (\Phi \in L^1(a,b)). \tag{2.2}$$

Ainsi une fonction continue absolument $f$ à une dérivée sommable $f'(x) = \Phi(x)$ dans $[a, b]$. Cela signifie que:

$$\Phi(t) = f'(t) \text{ et } c = f(a) \tag{2.3}$$

**Définition 4** . *Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $AC^n[a, b]$ l'espace des fonctions à valeur complexe $f$ ayant des dérives jusqu'a l'ordre $(n-1)$ continue sur $[a, b]$ telle que $f^{(n-1)}(x) \in AC[a, b]$, celà veut dire:*

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : [a, b] \implies \mathbb{C} \text{ et } \left(D^{n-1} f\right)(x) \in AC[a, b] \left(D = \frac{\partial}{\partial x}\right) \right\},$$

en particulier, on a $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

**Définition 5** .*L'espace note $AC^n_{\delta,\mu}[a, b]$ $(n \in \mathbb{N}^*,\ \mu \in \mathbb{R})$ défini par*

$$AC^n_{\partial,\mu}[a, b] = \left\{ g : [a, b] \implies C : \delta^{n-1}[x^\mu g(x)] \in AC[a, b],\ \mu \in \mathbb{R},\ \delta = x\frac{d}{dx} \right\} \tag{2.4}$$

*fait appelle à l'espace des fonctions absolument continuent avec points. En particulier, quaud $\mu = 0$ l'space $AC^n_\delta[a, b] = AC^n_{\delta,0}[a, b]$ et ainsi que:*

$$AC^n_\delta[a, b] = \{g = [a, b] \to c : \delta^{n-1}[g(x)] \in AC[a, b],\ \delta = \frac{d}{dx}\}. \tag{2.5}$$

*Quand $\mu = 0$ et $n = 1$, l'espace $AC^1_\delta[a, b]$ coincide avec $AC[a, b]$*

## 2.2 La fonction Gamma d'Euler et la fonction Béta d'Euler

### 2.2.1 La *Fonction Gamma d'Euler*

**Définition 6** *La fonction gamma (notée par la lettre grecque $\Gamma$) est une fonction complexe, considerée également comme une fonction spéciale, elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes (à l'exception des entiers négatifs): on a pour tout entier*

$$n > 0,\ \Gamma(n) = (n-1)! = 1 * 2 * ... * (n-1),\ \Gamma : z \longrightarrow \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \tag{2.6}$$

la fonction $\Gamma$ satisfait les proprietés suivantes (theoreme de Bohr-Mollerup)
(1) pour tout $z > 0$ on a :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \text{ et si } z \in \mathbb{N}^* \text{ alors } \Gamma(z) = (z-1)!$$

(2) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ superieur à 1 on a :

$$\frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha\Gamma(\alpha)} < \frac{2}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2.7}$$

(3) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$.

(4) $\Gamma(\alpha)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z < 1$.

(5) la fonction ln 0 $\Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

(6) $|\Gamma(z)|$ est bornée dans la bande $1 \leq \text{Re}(z) \leq 2$.

### 2.2.2 La *Fonction Béta d'Euler*

**Définition 7** . *la fonction bèta, également appelée intégrale d'Euler du premier type, est une fonction spéciale étroitement liée à la fonction gamma et aux coefficients binomiaux il est défini par l'intégrale:*

$$B(z_1, z_2) = \int_0^1 t^{z_1-1}(1-t)^{z_2-1}dt \quad (R\,(z_1) > 0 \text{ et } R\,(z_2) > 0)\,, \tag{2.8}$$

une propriété clée de la fonction bétà et sa relation étroite avec la fonction gamma, comme suit:

$$B(z_1, z_2) = \Gamma(z_1)\Gamma(z_2),\ (R(z_1) > 0 \text{ et } R(z_2) > 0) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} B(x,y) &= \frac{(-z_1-1)!(z_2-1)!}{(z_1+z_2-1)!} \\ &= \frac{z_1+z_2}{z_1 z_2} * \frac{1}{\binom{z_1+z_2}{z_1}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

## 2.3 Espace $L^p(a,b)$ :

Soit $(a,b)$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$

**Définition 8** . *L'espace* $L^p(a,b)$, $(1 < p \leq +\infty)$ *est l'espace des fonctions* $f$ *mésurables intégrables ou sens de lebesgue à valeurs réells telle que la norme,* $\|f\|_p < +\infty$ *ou*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}},\ (1 \leq p < +\infty), \tag{2.11}$$

et pour $p = +\infty$ on a

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)| ,$$

et $L^\infty(a, b)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées pour $(a, b)$,

# Chapter 3

# Résultats d'existence et d'unicité pour les équations différentielles fractionnaires de type Hadamard avec condition aux limites fractionnaire intégrale non locale

## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre voir [39], nous avons étudier la limite de Hadamard suivante:

$$D^q x(t) = f(t, x(t)), \quad 1 < q \leq 2, \quad t \in (1, e), \tag{3.1}$$

$$x(1) = 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\alpha_i} x(\eta_i) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left( J^{\beta i} x(e) - J^{\beta_j} x(\varepsilon_j) \right), \tag{3.2}$$

ou $D^q$ et la derivée fractionnaire de Hadamard d'ordre $q$, $f : [1, e] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue $\eta_1 < \eta_2 < ... < \eta_m$, $\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n$ et $j^{\phi}$ et l'intégral fractionnaire de Hadamard d'ordre $\phi > 0$ ($\phi = \alpha_i$, $\beta_j$, $i = 1...m$, $j = 1...n$.

Nous mentionnons que les conditions aux limites intégrales sont rencontrées dans diverses applications telles que:la dynaque des populations, les systemes cellulaires ansi que le génis chimique.

La condition (3.2) est une forme générale des conditions aux limites intégrales considerée dans [1] et couvre de multiples applications

par exemple, si $\alpha_i = \beta_j = 1$ pour tout $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1,\ 2...n$, alors la condition (3.2) se réduit á

$$x\left(1\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \int_1^{\eta_1} x\left(s\right) \frac{ds}{s} + ... + \lambda_m \int_1^{\eta_m} x\left(s\right) \frac{ds}{s} \\ = \quad & \mu_1 \int_{\xi_1}^{e} x\left(s\right) \frac{ds}{s} + .... + \mu_n \int_{\xi_n}^{e} x\left(s\right) \frac{ds}{s}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Les équations differentielles fractionnaires fournissent des modèles ajustés pour d'ecrire des problèmes du monde réel, qui ne peuvent pas etre décrits à l'aide d'équations différentielles classiques d'ordre entier. la théories des équations différentielles fractionnaires a fait l'objet d'une grande attention au cours des dernières années et elle est devenue un important champ d'inverstigation en raison de ses applications étendues dans de nombreuses branches de science de l'ingenieurs [2, 5].Certaines contributions récentes à ce sujet ( dans [1, 6, 20] )et les réferences qui y sont citées.

ce qu'on peut remarquer est que la plupart des travaux sur ce sujet sont basés sur le modèle de Riemann-liouville et Caputo. un autre type de dérive fractionnaire qui apparait à coté des dérives de Riemann-liouville et Caputo dans la littérature est la derive fractionnaire du a Hadamard introduite en 1892 [21], qui diffèrent des resultats précédents en ce sens que le noyau de l'intégral (dans la définition de la dérive de Hadamard)contient une fonction logarithmique d'exposant arbitraire. Les détails et les propriétés de la dérive fractionnaire et de l'intégrale de Hadamard sont cités dans [2, 22, 26]. pour des résultats récents sur les problèmes de valeurs limitées de Hadamard, nous réferons à [27, 28].

Nous établissons une variété de résultats concernat le problème $(3.1 - 3.2)$ en utilisant les théorèmes classiques des points fixes. le premier résultat, Théorème 12, s'appuie sur le principe de la cartographie de contraction de Banach et concerne un résultat d'existence et d'unicite pour les solutions du problème $(3.1 - 3.2)$. Une seconde existence est démontrée dans le théorème 15, via les contractions non linéaires et un théorème de point fixe du a Boyd Wong. des résultats d'existences sont prouvés dans le théorème 17, en utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii, et dans le quatrième résultat, le théorème 20, en employant une alternative non linéaire de type Leray-Schauder.

Notre travail est organisé comme suit:

Dans la dexième section , nous rappelons quelques concepts préliminaires dont nous aurons besoin dans la suite de l'étude , ainsi nous prouvons un lemme préliminaire. La troisième section contient les résultats principaux pour le problème $(3.1 - 3.2)$.Dans la quatrième section, nous illustrons par quelques exemples déjà discutés.

## 3.2 Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons quelques définitions du calcul fractionnaire (3.2) et nous présentons des résultats préliminaires nécessaires pour nos preuves ultèrieures.

**Définition 9** . *La dérivée d'Hadamard d'ordre fractionnaire $q$ pour une fonction $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ est définie comme suit:*

$$\begin{aligned} D^q f(t) &= \frac{1}{\Gamma n - q}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{\eta}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{n-q-1}\frac{f(s)}{s}ds, \\ n-1 &< q < n,\ n = [q]+1, \end{aligned} \tag{3.4}$$

*ou $[q]$ désigne la partie entière du nombre réel $q$, $\log(.) = \log_e(.)$, et $\Gamma$ est la fonction Gamma.*

**Définition 10** . *L'intégrale fractionnaire de Hadmard d'ordre $q$ pour une fonction $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ est définie par:*

$$J^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_1^t \left(\log\frac{t}{s}\right)^{q-1}\frac{f(s)}{s}ds, \quad q > 0, \tag{3.5}$$

à condition que l'intégrale existe par commodité, nous fixons

$$\begin{aligned} \Lambda = &\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+\alpha_i)}(\log\eta_i)^{q+\alpha_i+1} \\ &-\sum_{j=1}^{n}\mu_j\frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+\beta_j)}\left(1-\left(\log\xi_j\right)^{q+\beta_j+1}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

**Lemme 11** . *Soit $\Lambda \neq 0$, $1 < q \leq 2$, $\alpha_i, \beta_j > 0$, et $\eta_i, \xi_j \in (1, e)$ pour $i = 1, 2...m$, $j = 1, 2...n$, et $h \in \mathbb{C}([1, e], \mathbb{R})$. La solution unique de l'équation différentielle fractionnaire suivante,*

$$D^q x(t) = h(t),\ t \in (1, e), \tag{3.7}$$

sous réserve de la condition aux limites

$$x(0) = 0,\ \sum_{i=1}^{m}\lambda_i J^{\alpha_i}x(\eta_i) = \sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(J^{\beta_i}x(e) - J^{\beta_j}x\left(\xi_j\right)\right), \tag{3.8}$$

est donnée par l'équation intégrale

$$x(t) = \frac{(\log t)^{q-1}}{\Lambda} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left( J^{q+\beta_j} h(e) - J^{q+\beta_j} h(\xi_j) \right) \tag{3.9}$$
$$- \frac{(\log t)^{q-1}}{\Lambda} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \left( J^{q+\alpha_i} h(\eta_i) + J^q h(t) \right)$$

**Proof.** En appliquant l'intégrale fractionnaire de hadamard d'order $q$ aux deux cotés de (7), nous avons :

$$x(t) = z_1 (\log t)^{q-1} + z_2 (\log t)^{q-2} + J^q h(t), \tag{3.10}$$

ou $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, La condition de $x(1) = 0$ implique $z_2 = 0$, par conséquent

$$x(t) = z_1 (\log t)^{q-1} + J^q h(t), \tag{3.11}$$

pour tout $p > 0$, par la définition 10, il s'ensuite que:

$$J^q x(t) = z_1 \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+p)} (\log t)^{q+p+1} + J^{p+p} h(t), \tag{3.12}$$

la deuxième condition de (8) avec (12) conduit à:

$$Z_1 = \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \mu_j (J^{q+\beta_j} h(e) - J^{q+\beta j} h(\xi_j)) - \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{q+p} h(\eta_i). \tag{3.13}$$

en substituant la valeur d'une constante $z_1$ dans (3.11), on oblient (3.9) comme requis l'épreuve est terminée. ■

## 3.3 Résultats principaux

Soit $\mathbb{C} = \mathbb{C}([1,e], \mathbb{R})$ l'espèce de banach de toutes les fonctions continues de $[1,e]$ a $\mathbb{R}$ de la norme définie par $\|x\| = \sup_{t\in[1,e]} |x(t)|$.

Comme dans le Lemme 16, nous définissons un opérateur $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par:

$$(Fx)(t) = J^q f(s, x(s))(t) \tag{3.14}$$
$$- \frac{(\log t)^{q-1}}{\Lambda} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i J^{\alpha_i+q} f(s, x(s))(\eta_i)$$
$$+ \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} \mu_j \left( J^{\beta_j+q} f(s, x(s))(e) \right.$$
$$\left. - J^{\beta_j+q} f(s, x(s))(\xi_j) \right),$$

avec $\Lambda \neq 0$. il faut signaler que le problème $(3.1-3.2)$ a des solutions seulement si l'opérateur $F$ a des points fixes. Pour des raisons de commoditée, nous mettons

$$\Phi = \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)} + \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|\frac{1+(\log\xi_i)^{\beta_j+q}}{\Gamma(\beta_j+q+1)}. \tag{3.15}$$

le premier resultat d'existence et d'unicite est basé sur le principe de contraction de banach.

**Théorème 12** . *Soit* $f : [1,e] * \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue satisfaisant l'hypothese suivante.*

$(H_1)$ il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L\,|x-y|\,,\ \text{pour chaque } t \in (1,e)\ \text{ et } x,y \in \mathbb{R},$$

si

$$L\Phi < 1, \tag{3.16}$$

ou $\Phi$ est donné par [15], alors le problème de valeur aux limite $(3.1-3.2)$ a une solution unique sur $[1,e]$.

**Proof.** Nous transformons ainsi le problème $(3.1-3.2)$ à un problème de point fixe, $x = Fx$ ou l'opérateur $F$ est défini par [14]. En utilisant le principe du maping de contraction de banach, nous allons montrer que $F$ a un point fixe qui est une solution unique du problème $(3.1-3.2)$.

Nous fixons $\sup_{t\in(1,e)}|f(t,0)| = M < \infty$ et nous choisissons.

$$r \geq \frac{M\Phi}{1-L\Phi}. \tag{3.17}$$

Maintenant,on révèle que $FB_r \subset B_r$, ou $Br = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| \leq r\}$ pour tout $x \in B_r$, on a

$$
\begin{aligned}
&\|\digamma x\| \qquad (3.18)\\
&\leq \sup \{J^{q} |f (s, x (s))| (t)\\
&+ \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| J^{\alpha_i + q} |f (s, x (s))| (\eta_i)\\
&+ \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} \left|\mu_j\right| J^{\beta_{j+q}} |f (s, x (s))| (e)\\
&+ J^{\beta_{j+q}} |f (s, x (s))| \left(\xi_j\right)\}\\
&\leq J^{q} (|f(s, x (s)) - f (s, 0)| + |f (s, 0)|) (e)\\
&+ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| J^{\alpha_i + q} (|f(s, x (s) - f (s, 0)| + |f (s, 0)|) (\eta_i)\\
&+ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| J^{\beta_j + q} (|f(s, x (s) - f (s, 0)| + |f (s, 0)|) (e)\\
&J^{\beta_j + q} \left((|f(s, x (s) - f (s, 0)| + |f (s, 0)|) \left(\xi_j\right)\right)\\
&\leq (Lr + M) \left\{ \frac{1}{\Gamma (q+1)} + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_i| \frac{(\log \eta_i)^{\alpha_i + q}}{\Gamma (\alpha_i + q + 1)} \right.\\
&\left. + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\mu_i| \frac{(\log \xi_i)^{\beta j + q}}{\Gamma \left(\beta_j + q + 1\right)} \right\}\\
&= (Lr + M) \Phi \leq r
\end{aligned}
$$

il s'ensuit que $FB_r \subset B_r$. pour $x, y \in \mathbb{C}$ et pour chaque $t \in [1, e]$, on a:

$$
\begin{aligned}
& |\digamma x (t) - \digamma y (t)| \qquad (3.19)\\
\leq \quad & J^{q} (|f (s, x (s)) - f (s, y (s))|) (t)\\
& + \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| J^{\alpha_i + q} (|(f (s, x (s)) - f (s, y (s)))| (\eta_i))\\
& + \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} \left|\mu_j\right| \left(J^{\beta_j + q} |(f (s, x (s)) - f (s, y (s)))|\right) (e)\\
& + \left(J^{\beta_j + q} (|(f (s, x (s)) - f (s, y (s)))|)\right) * (\xi_i)\\
\leq \quad & L \|x - y\| \left\{ \frac{1}{\Gamma (q+1)} + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \frac{(\log \eta_i)^{\alpha_i + q}}{\Gamma (\alpha_{i+} q + 1)} \right.\\
& \left. * \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\mu_i| \frac{\left(\log \xi_j\right)^{\beta j + q}}{\Gamma \left(\beta_j + q + 1\right)} \right\}\\
= \quad & L\Phi \|x - y\| .
\end{aligned}
$$

Le resultat ci-desus implique que $\|F_X - F_y\| \leq L\Phi \|x-y\|$. comme $L\Phi < 1$, donc $F$ est une contraction, par conséquent, par principe de contraction de banach, nous déduisons que $F$ a un point fixe qui est la solution unique du problème $(3.1 - 3.2)$. ensuite, nous donnons le deuxième résultat d'existence et d'unicite en utilisant des contactions non linèaires.

**Définition 13** *Soit $E$ un espèce de banach et soit $F : E \to E$ une application cartographique, on dit que $F$ est une contraction non linéaire s'il existe une fonction continue non décroissante $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\Psi(0) = 0$ et $\Psi(\theta) < \theta$, pour tout $\theta > 0$, avec la propriété*

■

$$\|F_x - F_y\| \leq \Psi(\|x-y\|), \ \forall x, \ y \in E. \tag{3.20}$$

**Lemme 14** *.voir [29] Soit $E$ un espèce de banach et soit $F : E \to E$ est une contraction non linéaire. Alors $F$ a un unique point dans $E$*

***Théorème 15*** *. Soit $f : [1,e] * \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfait l'hypothèse*

$(H_2)$ $|f(t,x) - f(t,y)| \leq h(x)(|x-y| / (H^* + |x-y|))$, $t \in [1,e]$, $x, y \geq 0$ ou $h : [1,e] \to \mathbb{R}^+$ est continue, et une constante $\Delta$ définie par

$$\begin{aligned} \Delta = J^q h(e) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| J^{\alpha_i + q} h(\eta_i) \\ + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \left(J^{\beta_j + q} h(e) + J^{\beta_j + q} h(\xi_i)\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

alors le problème de valeur limitée $(3.1 - 3.2)$ a une solution unique .

Nous définissons l'opérateur $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ comme [14] et une fonction continue non décroissante $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par :

$$\Psi(\theta) = \frac{\Delta\theta}{\Delta + \theta}, \ \forall \theta \geq 0. \tag{3.22}$$

tout en notant que la fonction $\Psi$ satisfait $\Psi(0) = 0$ et $\Psi(\theta) < \theta$ pour tout

$\theta > 0$pour tout $x, y \in \mathbb{C}$ et pour tout $t \in [1,e]$, on a

$$\begin{aligned}
& |Fx(t) - Fy(t)| \\
& \leq J^q \left(|f(s,x(s) - f(s,y(s))|\right)(t) \\
& + \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \left(J^{\alpha_i+q} \left(|f(s,x(s) - f(s,y(s))|\right)(\eta_i)\right. \\
& + \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \left(J^{\beta_j+q}(|f(s,x(s) - f(s,y(s))|(e)\right. \\
& + J^{\beta_j+q} \left(|f(s,x(s) - f(s,y(s))|\right) * (\xi_j)) \\
& \leq J^q \left(h(s) \frac{|x(s) - y(s)|}{\Delta + |x(s) - y(s)|}\right)(e) \\
& + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| J^{\alpha_i+q} \left(h(s) \frac{|x(s) - y(s)|}{\Delta + |x(s) - y(s)|}\right)(\eta_i) \\
& + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| \left\{J^{\beta_j+q} \left(h(s) \frac{|x(s) - y(s)|}{H^* + |x(s) - y(s)|}\right)(e)\right. \\
& \left. + J^{\beta_j+q} \left(h(s) \frac{|x(s) - y(s)|}{H^* + |x(s) - y(s)|}\right)(\xi_j)\right\} \\
& \leq \frac{\Psi(\|x-y\|)}{H^*} \left(J^q h(e) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| J^{\alpha_i+q} h(\eta_i)\right. \\
& \left. + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} |\mu_j| J^{\beta_j+q} h(e) + J^{\beta_j+q} h(\xi_j)\right) \\
& = \Psi(\|x-y\|).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Celà implique que $\|Fx(t) - Fy(t)\| \leq \Psi(\|x-y\|)$ .donc $F$ une contraction non linéaire. Donc, par le Lemme 14, l'opérateur $F$ a un point fixe qui est la solution unique du problème $(3.1 - 3.2)$. ensuite, nous montrons un résultat d'existence en utilisant le théorème du point fixe de KrasnoselsKii.

**Lemme 16** [*30*]. (*le theoreme du point fixe de KrasnoselsKii .*). *soit $M$ est un sous-ensemble fermé, borne, convexe et nous vide d'un espece $X$ de banach. soit $A$, $B$ des opérateurs tel que* $(a)$ *$A_X + B_Y \in$à chaque fois que $x$, $y \in M$;* $(b)$ *$A$ est compact et continu;* $(c)$ *$B$ est un mapping de contraction. une cartographie. alors il existe $z \in M$ tel que $z = A_z + B_z$.*

**Théorème 17** *Supposons que $f : [1,e] * \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue satisfait l'hypothèse $(H_1)$. de plus, nous supposons que:*

$(H_3)$ $|f(t,x)| \leq K(t)$, $\forall (t,x) \in [1,e] * \mathbb{R}$ et $K \in \mathbb{C}([1,e], \mathbb{R}_+)$.

$$\frac{L}{\Gamma(q+1)} < 1, \tag{3.24}$$

alors le problème aux limites $(3.1-3.2)$ à en moins une solution sur $[1,e]$.
**Proof.** Nous définissons $\sup_{t\in[1,e]}|K(t)| = \|K(t)\|$ et nous choisissons une constante $\overline{r}$ appropriée comme: ■

$$\overline{r} \geq \|k\| \Phi, \tag{3.25}$$

ou $\Phi$ est définei par (3.15). De plus, nous définissons les opérateurs $P$ et $Q$ sur $B_{\overline{r}} = \{x \in \mathbb{C} : \|x\| \leq \overline{r}\}$ comme étant

$$\begin{aligned}
(Px)(t) = {} & \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\mu_j\left(J^{\beta_j+q}f(s,x(s))(e)\right. \\
& \left. - J^{\beta_j+q}f(s,x(s))\left(\xi_j\right)\right) \\
& - \frac{(\log t)^{q-1}}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i J^{\alpha_i+q}f(s,x(s))(\eta_i), \\
& t\in[1,e], \\
(Qx)(t) = {} & J^q f(s,x(s))(t), t\in[1,e].
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour $(x,y) \in B_{\overline{r}}$, on a

$$\begin{aligned}
\|px+Qy\| \leq {} & \|K\|\left(\frac{1}{\Gamma(q+1)}+\frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)}\right. \\
& \left. + \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|\frac{1+(\log\xi_j)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)}\right) \\
= {} & \|K\|\Phi \leq \overline{r}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Cela montre que $Px + Qy \in B_{\overline{r}}$ Il découle de l'hypothèse $(H1)$ avec (3.24) que $Q$ est une cartographie de contraction. Depuis la fonction $f$ est continue, on a que l'opérateur $P$ est continu. Il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned}
\|Px\| \leq {} & \|k\|\left(\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)}\right. \\
& \left. + \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}|\mu_j|\frac{1+(\log\xi_j)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)}\right)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Par conséquent, $P$ est uniformément borné sur $B_{\overline{r}}$. Ensuite, nous prouvons la compacité de l'opérateur $\sup_{(t,x)\in[1,e]*B_{\overline{r}}}|f(t,x)| = \overline{f} < \infty$; par conséquent on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left|(Px)(t_1)-(Px)(t_2)\right| \qquad (3.29)\\
= & \left| \frac{(\log t_1)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\mu_j \left(J^{B_j+q}f(s,x(s))(e)\right.\right.\\
& \left. - J^{B_j+q}f(s,x(s))\left(\xi_j\right)\right)\\
& - \frac{(\log t_1)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i J^{\alpha_i+q}f(s,x(s))(\eta_i)\\
& -\frac{(\log t_2)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\mu_j \left(J^{\beta_j+q}f(s,x(s))(e)\right.\\
& \left. - J^{\beta_j+q}f(s,x(s))\left(\xi_j\right)\right)\\
& \left. + \frac{(\log t_2)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i J^{\alpha_i+q}f(s,x(s))(\eta_i)\right|\\
\leq & \overline{f}\frac{\left|(\log t_2)^{q-1}-(\log t_1)^{q-1}\right|}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\frac{(\log \eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)}\\
& +\overline{f}\frac{\left|(\log t_2)^{q-1}-(\log t_1)^{q-1}\right|}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\frac{1-\left(\log \xi_j\right)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)},
\end{aligned}
$$

qui est indépendant de x et tend vers zéro lorsque $t_2 \to t_1$. Ainsi, $P$ est une équation continue. Donc $P$ est relativement compact sur $B_{\overline{r}}$. D'où par le théorème d'Arzel´a-Ascoli,$P$ est compact sur $B_{\overline{r}}$. Ainsi, toutes les hypothèses du lemme 16 sont satisfaites. Donc la frontière problème de valeur $(1)-(2)$a au moins une solution sur $[1,e]$. l'épreuve est terminée.

**Remark 18** *Dans le théorème ci-dessus, nous pouvons changer le rôle des*

*opérateurs $P$ et $Q$ pour obtenir un second résultat en remplaçant* (3.24) *par la condition suivante:*

$$
\frac{L}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_j|\frac{\left(\log \eta_j\right)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)}+\frac{L}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\frac{1+\left(\log \xi_j\right)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)}<1. \qquad (3.30)
$$

Maintenant, notre dernier résultat d'existence est basé sur l'alternative non linéaire de **Leray-Schauder**.

**Théorème 19** [*31*]. *(Alternative non linéaire pour les cartes à valeur unique ). Soit un espace de Banach, $C$ un sous-ensemble fermé et convexe de $E$, $U$ un sous-ensemble ouvert de $C$, et $0 \in U$. Supposer que $F : \overline{U} \to C$ est une carte continue et compacte (autrement dit $\left(i.e., F\left(\overline{U}\right)\right.$ est un sous-ensemble relativement compact de $\left.C\right)$. Alors soit:*

$(i)$ F a un point fixe dans $\overline{U}$ ou
$(ii)$ il y a un $u \in \partial U$ (la frontière de $U$ en $C$) et $\lambda$ avec $(0,1)$,avec $u = \lambda F(u)$.

**Théorème 20** . *Supposons que* $f : [1,e] * \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*est une fonction continue. De plus on suppose que*

$(H_4)$ il existe une fonction continue non décroissante $\psi$: $[0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$ et une fonction $p \in C\left([1,e], \mathbb{R}^{+}\right)$
tel que

$$|f(t,x)| \leq p(t)\,\psi(|x|), \text{ pour chaque, } (t,x) \in [1,e] * \mathbb{R}; \qquad (3.31)$$

$(H5)$ il existe une constante $N > 0$ telle que

$$\frac{N}{\|P\|\,\Psi(N)\,\Phi} > 1, \qquad (3.32)$$

où $\Phi$ est défini par (3.15).

Alors le problème de la valeur limitée $(3.1 - 3.2)$ a au moins une solution sur $[1,e]$.

**Proof.** Tout d'abord, nous montrons que l'opérateur $F$, défini par (3.14), transforme les ensembles bornés (boules) en ensembles bornés en $C$. $R$ nombre positif, soit $B_R = \{x \in C : \|x\| \leq R\}$ être une boule bornée en $C$. Alors pour $t \in [1,e]$, on a ∎

$$
\begin{aligned}
|Fx(t)| &\leq J^{q}\left|f(s,x(s))\right|(e) \\
&+\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\,J^{\alpha_i+q}\left|f(s,x(s))\right|(\eta_i) \\
&+\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\left(\begin{array}{c} J^{\beta_j+q}\left|f(s,x(s))\right|(e) \\ J^{\beta_j+q}\left|f(s,x(s))\right|(\xi_j) \end{array}\right) \\
&\leq \|P\|\,\Psi(\|x\|)\,\frac{1}{\Gamma(q+1)} \\
&+\|P\|\,\Psi(\|x\|)\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\,\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)} \\
&+\|P\|\,\Psi(\|x\|)\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\frac{\left(1+\log\xi_j\right)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)} \\
&\leq \|P\|\,\Psi(R)\,\frac{1}{\Gamma(q+1)} \\
&+\|P\|\,\Psi(R)\,\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\,\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)} \\
&+\|P\|\,\Psi(R)\,\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\frac{\left(\log\xi_j\right)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)} \\
&= K.
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

Par conséquent, nous concluons que$\|Fx\| \leq K.$, nous montrons que $F$ transforme les ensembles bornés en ensembles équicontinus de $C$. Laisser $\sup_{(t,x)\in[1,e]*B_R}|f(t,x)| = f^* < \infty$, $v_1,v_2 \in [1,e]$avec $v_1 < v_2$ et $x \in B_R$. Ensuite nous avons

$$
\begin{aligned}
& \left|(Fx)(v_2)-(Fx)(v_1)\right| && (3.34)\\
= \;& \left|J^q f(s,x(s))(v_2)\right. \\
& -\frac{(\log v_2)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\; J^{\alpha_i+q}f(s,x(s))(\eta_i) \\
& +\frac{(\log v_2)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\big(\mu_j J^{\beta_j+q}f(s,x(s))(e) \\
& -\; J^{\beta_j+q}f(s,x(s))\big(\xi_j\big)\big) \\
& -J^q f(s,x(s))(v_1) \\
& +\frac{(\log v_1)^{q-1}}{\Lambda}\lambda_i\sum_{i=1}^{m}\lambda_i J^{\alpha_i+q}f(s,x(s))(\eta_i) \\
& +\frac{(\log v_1)^{q-1}}{\Lambda}\sum_{j=1}^{n}\mu_j J^{\beta_i+q}f(s,x(s))(e) \\
& -J^{\beta_j+q}f(s,x(s))\big(\xi_j\big) \\
\leq \;& f^*\frac{\left|(\log v_2)^q-(\log v_1)^q\right|}{\Gamma(q+1)} \\
& +f^*\frac{\left|(\log v_2)^{q-1}-(\log v_1)^{q-1}\right|}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q-1)} \\
& +f^*\frac{\left|(\log v_2)^{q-1}-(\log v_1)^{q-1}\right|}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\frac{1-\big(\log\xi_j\big)^{\beta_j+q}}{\Gamma\big(\beta_j+q-1\big)}.
\end{aligned}
$$

De toute évidence, le côté droit de l'inégalité ci-dessus tend à zéro indépendamment de $x \in B_R$ et $v_2 \in v_1$. par conséquent, il découle du théorème d'Arzela-Ascoli que $F : C \to C$ est complètement continue.

Soit $x$ une solution. Puis, pour $t \in [1, e]$, en suivant les calculs similaires à ceux de la première étape, nous avons

$$
\begin{aligned}
\|x\| \;\leq\; & \|P\|\,\Psi(\|x\|)\frac{1}{\Gamma(q+1)} && (3.35)\\
& +\|P\|\,\Psi(\|x\|)\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{i=1}^{m}|\lambda_i|\frac{(\log\eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(\alpha_i+q+1)} \\
& +\|P\|\,\Psi(\|x\|)\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{j=1}^{n}\left|\mu_j\right|\frac{\big(\log\xi_j\big)^{\beta_j+q}}{\Gamma\big(\beta_j+q+1\big)} \\
= \;& \|P\|\,\Psi(\|x\|)\,\Phi
\end{aligned}
$$

Par conséquent, nous avons

$$\frac{\|x\|}{\|P\| \Psi(\|x\|) \Phi} \leq 1. \tag{3.36}$$

Au vu de $(H_5)$, il existe $N$ tel que $\|x\| \neq N$.Nous définissons:

$$U = \{x \in C : \|x\| < N\}. \tag{3.37}$$

En notant que l'opérateur $F : \overline{U} \to C$ est continu et complètement continu. à partir du choix de $U$, il n'y a pas $x \in \partial U$ tel que $x = \theta F x$ pour certains $\theta \in (0,1)$. par conséquent, par alternative non linéaire de type Leray-Schauder théorème 17 on déduit que $F$ a un point fixe dans $\overline{U}$, qui est une solution du problème des valeurs aux limites $(3.1 - 3.2)$ ceci complète l'épreuve.

## 3.4 Examples

**Exemple 21** . *Considérer le problème de valeur limite suivant pour l'équation différentielle fractionnaire d'Hadamard*

$$\begin{aligned}
D^{3/2}x(t) &= \frac{\log t^5}{e^t (t+2)^2} \frac{|x(t)|}{(3 + |x(t)|)}, t \in j = [1, e] \qquad (3.38)\\
x(1) &= 0,\\
&\quad 2J^{1/4}x\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{5}J^{3/2}x\left(\frac{9}{5}\right) + 3J^2 x\left(\frac{15}{7}\right)\\
&= J^{2/3}x(e) - J^{2/3}x\left(\frac{10}{7}\right) + 5\left(J^{9/7}x(e) - J^{9/7}x(2)\right)\\
&\quad -2\left(J^{11/4}x(e) - J^{11/4}x\left(\frac{9}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

ici $q = 3/2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1/5$, $\lambda_3 = 3$, $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 3/2$, $\alpha_3 = 2$, $\eta_1 = 5/4$, $\eta_2 = 9/5$, $\eta_3 = 15/7$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 5$, $\mu_3 = -2$, $\beta_1 = 2/3$, $\beta_2 = 9/7$, $\beta_3 = 11/4$, $\xi_1 = 10/7$, $\xi_2 = 2$, $\xi_3 = 9/4$, et $f(x,y) = \left(\log t^5 |x|\right) / \left(e^t (t+2)^2 (3 + |x|)\right)$.

Depuis,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq \left(\frac{5}{27e}\right)|x - y|, \tag{3.39}$$

alors $(H1)$ est satisfait de $L = 5/27e$. Nous pouvons montrer que

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+\alpha_i)} (\log \eta_i)^{q+\alpha_i-1} \qquad (3.40)\\
&- \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q+\beta_j\right)} \left(1-\left(\log \xi_j\right)^{q+\beta_j-1}\right)\\
&\approx -0.6895040549,\\
\Phi &= \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \frac{(\log \eta_i)^{q+\alpha_i}}{\Gamma(q+\alpha_i+1)}\\
&+ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} \left|\mu_j\right| \frac{1+\left(\log \xi_j\right)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(q+\beta_j+1\right)}\\
&\approx 3.975680952,\\
L\Phi &= \frac{5}{27e}(3.975680952) \approx 0.2708465347 < 1.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, d'après le théorème (12), le problème des valeurs aux limites 3.38 a une solution unique sur $[1, e]$

**Exemple 22** . *Considérez le problème des valeurs limites suivant pour l'équation différentielle fractionnaire d'Hadamard*

$$
\begin{aligned}
D^{7/4}x(t) &= \frac{e^t}{(t+1)^2} \frac{|x(t)|}{(2+|x(t)|)}, \quad t \in j = [1, e], \qquad (3.41)\\
x(1) &= 0,\\
&\frac{1}{4} J^{6/7} x\left(\frac{7}{3}\right) - \frac{2}{3} J^3 x\left(\frac{7}{5}\right) - 2J^{2/5} x(2)\\
&= 4\left(J^5 x(e) - J^5 x\left(\frac{11}{5}\right)\right)\\
&+ \frac{11}{4}\left(J^{3/4} x(e) - J^{3/4} x\left(\frac{16}{13}\right)\right).
\end{aligned}
$$

ici $q = 7/4$, $\lambda_1 = 1/4$, $\lambda_2 = -2/3$, $\lambda_3 = -2$, $\alpha_1 = 6/7$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 5/2$, $\eta_1 = 7/3$, $\eta_2 = 5/7$, $\eta_3 = 2$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 11/4$, $\beta_1 = 5$, $\beta_2 = 3/4$, $\xi_1 = 11/5$, $\xi_2 = 16/13$ et $f(x,t) = (e^t|x|) / \left((t+1)^2(2+|x|)\right)$.

nous choisissons $h(t) = e^t/4$, et cela

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+\alpha_i)} (\log \eta_i)^{q+\alpha_i-1} \\
&- \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q+\beta_j\right)} \left(1-\left(\log \xi_j\right)^{q+\beta_j-1}\right) \\
&\approx -1.67292140 \\
H^* &= J^q h(e) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \, J^{\alpha_i+q} h(\eta_i) \\
&+ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} \left|\mu_j\right| J^{\beta_j+q} h\left(\xi_j\right) \\
&\approx 1.295076743.
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

Clairement,

$$
\begin{aligned}
|f(t,x) - f(t,y)| &= \frac{e^t}{(1+t)^2} \left( \frac{2|x| - 2|y|}{4 + 2|x| - 2|y| + |x||y|} \right) \\
&\leq \frac{e^t}{4} \left( \frac{|x-y|}{1.295076743 + |x-y|} \right).
\end{aligned} \tag{3.43}
$$

Par conséquent, d'après le théorème 15, le problème aux limites (3.41) à une solution unique sur $[1, e]$.

**Exemple 23** *. en concidérant le problème des valeurs aux limites suivant pour l'équation différentielle fractionnaire de Hadamard:*

$$
\begin{aligned}
D^{6/5} x(t) &= \frac{2\sin(\pi/4)}{5\pi + (e^x+1)^2} + \frac{2+\cos(\pi t)}{10\pi+3}, \; t \in j = [1.e], \\
x(1) &= 0, \\
& J^4 x\left(\frac{3}{2}\right) - 3J^{9/4} x(2) - 10 J^{1/5} x\left(\frac{7}{3}\right) + 6 J^{7/2} x\left(\frac{5}{2}\right) \\
& + \frac{14}{3} j^5 x\left(\frac{11}{9}\right) \\
& = 3\left(J^{3/2} x(e) - J^{3/2} x\left(\frac{11}{7}\right)\right) - 7\left(J^3 x(e) - J^3 x\left(\frac{17}{13}\right)\right) \\
& + \frac{4}{3}\left(J^{5/3} x(e) - J^{5/3} x(2)\right).
\end{aligned} \tag{3.44}
$$

ici $q = 6/5$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -10$, $\lambda_4 = 6$, $\lambda_5 = 14/3$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 9/4$, $\alpha_3 = 1/5$, $\alpha_4 = 7/2$, $\alpha_5 = 5$,

$\eta_1 = 3/2$, $\eta_2 = 2$, $\eta_3 = 7/4$, $\eta_4 = 5/2$, $\eta_5 = 11/9$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = -7$, $\mu_3 = 4/3$, $\beta_1 = 3/2$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 5/3$, $\xi_1 = 11/7$, $\xi_2 = 17/13$, $\xi_3 = 2$ et $|f(x,t)| = (2\sin(x/4)) / \left(5\pi + (e^x+1)^2\right) + (2+\cos(\pi t)) / (10\pi + 3)$.

Clairement,

$$\begin{aligned} |f(x,t)| &= \left| \frac{2\sin(x/4)}{5\pi + (e^x+1)^2} + \frac{2+\cos(\pi t)}{10\pi+3} \right| \\ &\leq (2+\cos(\pi t)) \left( \frac{|x|+1}{10\pi} \right). \end{aligned} \tag{3.45}$$

Choisir $P(t) = 2 + \cos(\pi t)$ et $\Psi(|x|) = (|x|+1)/(10\pi)$, nous pouvons montrer que:

$$\begin{aligned} \Lambda = & \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(q+\alpha_i)} (\log \eta_i)^{q+\alpha_i-1} \\ & - \sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(q+\beta_j\right)} \left(1 - \left(\log \xi_j\right)^{q+\beta_j-1}\right) \\ & \approx -9.148087406. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{\Gamma(q+1)} + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \frac{(\log \eta_i)^{\alpha_i+q}}{\Gamma(q+\alpha_i+1)} \\ & + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{j=1}^{n} \left|\mu_j\right| \frac{1 + \left(\log \xi_j\right)^{\beta_j+q}}{\Gamma\left(\beta_j+q+1\right)} \\ & \approx 1.462649525, \\ & \frac{N}{(3)\left((N+1)/10\pi\right)(1.462649525)} > 1, \end{aligned} \tag{3.46}$$

ce qui implique que $N > 0,1623483851$. Par conséquent, d'après le théorème20, le problème aux limites (3.44) à au moins une solution sur $[1,e]$.

# Bibliography


[1] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, and A. Alsaedi, “A study of nonlinear fractional differential equations of arbitrary order with Riemann-Liouville type multistrip boundary conditions,” Mathematical Problems in Engineering, vol. 2013, Article ID 320415, 9 pages, 2013.

[2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.

[3] V. Lakshmikantham, S. Leela, and J.Vasundhara Devi, Theory of Fractional Dynamic Systems, Cambridge Academic Publishers, Cambridge, UK, 2009.

[4] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[5] S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach, Yverdon, Switzerland, 1993.

[6] M. Benchohra, S. Hamani, and S. K. Ntouyas, “Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions,” Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, vol. 71, no. 7-8, pp. 2391–2396, 2009.

[7] B. Ahmad and S. K. Ntouyas, “Some existence results for boundary value problems of fractional differential inclusions with non-separated boundary conditions,” Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, vol. 71, pp. 1–17, 2010.

[8] Z. Bai, “On positive solutions of a nonlocal fractional boundary value problem,” Nonlinear Analysis :Theory, Methods & Applications, vol. 72, no. 2, pp. 916–924, 2010.

[9] K. Balachandran and J. J. Trujillo, “The nonlocal Cauchy problemfor nonlinear fractional integrodifferential equations in Banach spaces,” Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications, vol. 72, no. 12, pp. 4587–4593, 2010.

[10] D. Băleanu and O. G.Mustafa, “On the global existence of solutions to a class of fractional differential equations,” Computers & Mathematics with Applications, vol. 59, no. 5, pp. 1835–1841, 2010.

[11] N. J. Ford and M. L. Morgado, “Fractional boundary value problems : analysis and numericalmethods,” Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 14, no. 4, pp. 554–567, 2011.

[12] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, and A. Alsaedi, “New existence results for non-linear fractional differential equationswith three point integral boundary conditions,” Advances in Difference Equations, vol. 2011, Article ID 107384, 11 pages, 2011.

[13] D.O’Regan and S. Staněk, “Fractional boundary value problems with singularities in space variables,” Nonlinear Dynamics, vol. 71, no. 4, pp. 641–652, 2013.

[14] A. Debbouche, D. Baleanu, and R. P. Agarwal, “Nonlocal nonlinear integrodifferential equations of fractional orders,” Boundary Value Problems, vol. 2012, article 78, 2012.

[15] Y. Chen, X. Tang, and X. He, “Positive solutions of fractional differential inclusions at resonance,” Mediterranean Journal of Mathematics, vol. 10, no. 3, pp. 1207–1220, 2013.

[16] D. Băleanu, O. G. Mustafa, and R. P. Agarwal, “On the solution set for a class of sequential fractional differential equations,” Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, vol. 43, no. 38, Article ID 385209, 2010.

[17] S. D. Purohit and S. L. Kalla, “On fractional partial differential equations related to quantum mechanics,” Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical, vol. 44, no. 4, Article ID045202, 2011.

[18] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo, Fractional Calculus Models and Numerical Methods, vol. 3 of Complexity, Nonlinearity and Chaos,World Scien-ti. . . c, 2012.

[19] S. D. Purohit,“ Solutions of fractional partial differential equations of quantum me-chanics,” Advances in Applied Mathematics and Mechanics, vol. 5, no. 5, pp. 639–651, 2013.

[20] D. Baleanu, R. P. Agarwal, H. Mohammadi, and S. Rezapour, “Some existence results for a nonlinear fractional differential equation on partially ordered Banach spaces,” Boundary Value Problems, vol. 2013, article 112, 8 pages, 2013.

[21] J. Hadamard, “Essai sur l’étude des fonctions données par leur développement de Taylor,” Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 4e Série, vol. 8, pp. 101–186, 1892.

[22] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 269, no. 2, pp. 387–400, 2002.

[23] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Fractional calculus in the Mellinsetting and Hadamard-type fractional integrals,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 269, no. 1, pp. 1–27, 2002.

[24] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, and J. J. Trujillo, “Mellin transform analysis and integration by parts for Hadamard-type fractional integrals,” Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 270, no. 1, pp. 1–15, 2002.

[25] A. A.Kilbas, “Hadamard-type fractional calculus,” Journal of the Korean Mathematical Society, vol. 38, no. 6, pp. 1191–1204, 2001.

[26] A. A. Kilbas and J. J. Trujillo, “Hadamard-type integrals as G-transforms,” Integral Transforms and Special Functions, vol. 14, no. 5, pp. 413–427, 2003.

[27] B. Ahmad and S. K. Ntouyas, “On Hadamard fractional integrodifferential boundary value problems,” Journal of Applied Mathematics and Computing, 2014.

[28] B. Ahmad and S. K. Ntouyas, “A fully Hadamard type integral boundary value problem of a coupled system of fractional differential equations,” Fractional Calculus and Applied Analysis, vol. 17, no. 2, pp. 348–360, 2014.

[29] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, “On nonlinear contractions,” Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 20, pp. 458–464, 1969.

[30] M. A. Krasnosel'skii, “Two remarks on themethod of successive approximations,” Uspekhi Matematicheskikh Nauk, vol. 10, no. 1, pp. 123–127, 1955.

[31] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer, New York, NY, USA, 2003.

[32] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional di¤erential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[33] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Yverdon : Gordon and Breach, Amsterdam, 1993

[34] H. Medjekal,Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans une space de Banach, Thèse de Doctorat Univ.Badji Mokhtar Annaba, (2015).

[35] I. N'doye,Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires, Thèse de Doctorat Univ. Henri Poincaré-Nancy let Univ Hassan II Ain Chock-Casablanca (2011).

[36] I. Podlubny,Fractional Differential Equation, Academic Press, 198 (1999).

[37] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[38] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications, Yverdon : Gordon and Breach, Amsterdam, 1993.

[39] PhollakritThiramanus, SotirisK.Ntouyas, andJessadaTariboon, Existence and Uniqueness Results for Hadamard-Type Fractional Differential Equations with Nonlocal Fractional Integral Boundary Conditions, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2014, Article ID 902054, 9 pages.