République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

جامعة 8 ماي 1945 قالمة
UNIVERSITE 8 MAI 1945 GUELMA

Faculté Mathématique et informatique et science de la matiére

Département Mathématique

Mémoire de fin d'étude

Présenté EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE Master

Spécialité : EDP ET ANALYSE NUMERIQUE

Présentée par

GUEMIHI SAFA

Intitulée

Un C_0 semi-groupe lemme et ses applications

Soutenue le : 12\07\2021 Devant le Jury composé de :

Nom et Prénom	**Grade**	
Mr Badraoui Salah	Professeur	Président
Mme Laribi naima	MCB	Encadreur
Mme Mellale Roumaissa	MCB	Examinateur

Année Universitaire :2020\.2021

Dedicace

Le plus grqnd merci revient à mon dieu qui a seul le pouvoir pour réussir dans ma vie et mes études

A: ma très chére Mama la lumiére de ma vie, source d'amour et de tendresse

A:mon très cher Papa qui ma toujours aider et encourager tout au long de ma vie

Je dédie chaleureusement a mon trés cher petit frére Yakin

A:mes sœurs:Marwa,yousra,manar ,Chahd et Baylassan et mes niéces

A:mes collegues; Chaima et Faten

Et specialement Khadidja

Remerciement

A l'occasion de l'achèvement de ce modeste travail, je tiens à remercier vivement :

Notre dieu de m'avoir donné la force de mener bien mes études et d'avoir terminé ce petit travail dans les meilleures conditions possibles

Le grand remerciement :à ma directrice de mémoire Mme* Laribi Naima *, dont ses conseils m'ont permis de bien mener ce travail.

J'adresse ma profonde remerciemnet à Mr* Badraoui Salah *de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire et à Mme* Mellale Roumaissa *d'avoir accepter d'examiner ce mémoire et de participer à ce jury

***Je tiens à adresser un remerciement a tous les proffeseurs du département mathématique; le chef éépartement Mr* Chiheb Tarek *, Mr* Dida Rida*,Mr* Boustila Nadjib *et Mr* Debbouche Amar**

Un spécial remerciement à Mr* Chaoui Abderrazake *et ses doctorants pour leurs grand aide

Table des matières

Résumé

Dans ce travail nous caractérisons une large classe des C_0 semi-groupes qui peut être appliquée pour prouver l'existence et l'unicité des solutions de beaucoup systémes des équations différencielles partielles. En effet, nous appliquons notre resultat sur l'equation d'onde fortement amortie, vibration d'une corde et le système de diffusion.

Abstract

In this work we characterize a large class of C_0 semi-groups which can be applied to prove the existence and the uniqueness of the solutions of many systemsof partial differential equations. In fact, we apply our result to a strongly damped wave equation, damped vibration of a string equation and reaction diffusion systems.

Intoduction

L'objectif de ce mémoire est de présenter une caractérisation d'une large classe des C_0 semi-groupe, et appliquer deux lemmes pour demontrer l'existence et l'unicité de solution aux certains problémes .

Dans le premier chapitre, on va donner quelques définitions et rappels sur les opérateurs et les semi-groupes.

Dans le deuxième chapitre, on va présenter deux lemmes de générations

des C_0 semi-groupes

Enfin on démontre l'existence et l'unicité de la solution des problémes : pour système d'équation d'onde fortement amortie :

$$\begin{cases} u_{tt} + \eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_t + \gamma(-\Delta)u = 0,\ t \geq 0,\ x \in \Omega \\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = v_0(x),\ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0,\ t \geq 0,\ x \in \partial\Omega \end{cases},$$

avec les conditions aux limite de Dirichlet homogène,
et pour l'équation non linéaire de vibration d'une corde ou une pourte :

$$u_{tt} - 2\beta\Delta u_t - f(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx) + \Delta^2 u = 0,\ sur\ \mathbb{R}_+ \times \Omega,$$

avec la condition aux limites :

$$u = \triangle u = 0,\ dans \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega,$$

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Opérateurs linéaires

1.1.1 Un opérateur linéaire

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, une application linéaire A de X dans Y définit d'un sous-espace vectoriel $D(A) \subset X$ et à valeurs dans Y est appelé un opérateur linéaire si pour tout $x, y \in D(A)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ on a :

- $A(x+y) = A(x) + A(y)$.
- $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

$D(A)$ est appelé le domaine de A.

On dit que A est à domaine dense si $\overline{D(A)} = X$, c-à-d si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'élléments de $D(A)$ telle que :

$$x = \lim x_n.$$

1.1.2 Un opérateur linéaire borné

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est borné s'il existe $M > 0$, pour tout x dans X :

$$\|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X .$$

1.1.3 Un opérateur linéaire fermé

On dit que l'opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \to Y$ est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $D(A)$ telle que :

$$\begin{cases} x_n \to x, \\ Ax_n \to y. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in D(A) \\ Ax = y \end{cases}$$

1.1.4 Ensemble résolvant

Définition 1.1.1 *Soit A un opérateur linéaire fermé sur X, l'ensemble résolvant $\rho(A)$ est définit par :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ (\lambda I - A) \ est \ inversible \ et \ d'inverse \ continue\},$$

si $\lambda \in \rho(A)$, on définit la résolvante :

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}.$$

1.2 C$_0$ semi-groupe

Définition 1.2.1 *Une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Banach Z est appelé un C_0 semi-groupe si elle vérifie les trois conditions suivantes :*

i/ $T(t+s) = T(t)T(s) \qquad t, s \geq 0.$
ii/ $T(0) = I$ (l'opérateur d'identité dans Z).
iii/ pour chaque $z \in Z$, on a : $\lim_{h\to 0^+} \|T(h)z - z\| = 0.$

Définition 1.2.2 *Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe en Z, alors l'opérateur $A : D(A) \subset Z \to Z$ défini par :*

$$Az = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)z - z}{h}, \quad z \in D(A),$$

où

$$D(A) = \{z \in Z, \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)z - z}{h} \ existe\},$$

s'appelle le générateur infinitésimal ou le générateur du semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Définition 1.2.3 *Un C_0 semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur Z est dit analytique si pour tout $z \in Z$, la fonction réelle $t \to T(t)z \in D(A)$ est analytique sur $0 < t < \infty$, et :*

$$\frac{d}{dt}T(t)z = AT(t)z = T(t)Az, \ t \geq 0.$$

Par conséquent : $T(t)z \in D(A)$, pour $t > 0$, et $z \in Z$.

Définition 1.2.4 *Soit L un opérateur linéaire fermé à domaine dense dans l'espace de Banach Z, On dit que L est un opérateur sectoriel si $\forall \phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ et $M \geq 1$ le secteur :*

$$S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C}, \phi \leq |\arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\},$$

est dans l'ensemble résolvant de L et :

$$\left\|(\lambda - L)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda - a|}, \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

Le théorème suivant se trouve dans [1] .

Théorème 1.2.1 *Si L est opérateur sectoriel, alors $-L$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique.*

Théorème 1.2.2 *(Les propriétés fondamentales du générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe)*

Soit $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0 semi-groupe et A son générateur infinitésimal avec domaine $D(A)$, on a :

a) $D(A)$ est un sous-espace linéaire dans Z, et A est un opérateur linéaire sur $D(A)$.

b) Si $z \in D(A)$, alors $T(t)z \in D(A)$, $t \geq 0$ est différentiable en t, et :

$$\frac{dT(t)}{dt}z = AT(t)z = T(t)Az.$$

c) Si $z \in D(A)$, alors

$$T(t)z - T(s)z = \int_s^t T(u)Azdu, \ t, s \geq 0.$$

d) Si $f(t)$ est une fonction continue à valeur réelle pour $t \geq 0$ alors :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(u)T(u)zdu = f(t)T(t)z, \ z \in Z, \ t \geq 0.$$

e)

$$\int_0^t T(s)zds \in D(A) \text{ et } T(t)z = z + A \int_0^t T(s)zds, \ z \in Z, \ t \geq 0.$$

f) Le sous-espace linéaire $D(A)$ est dense dans Z, et A est un opérateur fermé sur $D(A)$.

Théorème 1.2.3 *Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 semi-groupe dans Z, et A son générateur infinitésimal dans $D(A)$, le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), & t \succ 0 \\ z(0) = z_0, \ z_0 \in D(A) \end{cases},$$

admet l'unique solution :

$$z(t) = T(t)z_0.$$

Définition 1.2.5 *On dit que la famille $\{P_n\}$ est complète si :*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x.$$

Chapitre 2

Lemmes de génération d'un C_0 semi-groupe

Dans ce chapitre, on va présenter deux lemmes de génération d'un C_0 semi-groupe.

2.1 Premier lemme de génération d'un semi-groupe

Lemme 2.1.1 *Soit Z un espace de Hilbert séparable et $\{A_n\}_{n\geq 1}$, $\{P_n\}_{n\geq 1}$ deux familles d'opérateurs linéaires bornés en Z, avec $\{P_n\}$ est une famille complète de projections orthogonales, tel que :*

$$A_n P_n = P_n A_n, \ n = 1, 2, 3....$$

On définit la famille d'opérateurs linéaires :

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp^{A_n t} P_n z, \ t \geq 0,$$

alors :

(a) $T(t)$ est un opérateur linéaire borné si :

$$\left\| \exp^{A_n t} \right\| \leq g(t), n = 1, 2, 3.... \tag{2.1}$$

pour une fonction à valeur réelle continue $g(t)$.

(b) Si la condition (2.1) est vérifiée, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe dans l'espace de Hilbert Z dont le générateur infinitésimal A est donné par :

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z, \;\; z \in D(A), \tag{2.2}$$

avec :

$$D(A) = \left\{ z \in Z, \; \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 \prec \infty \right\}.$$

(c) Le spectre de A, ($\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$) est donnée par :

$$\sigma(A) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n)},$$

où :

$$\bar{A}_n = A_n P_n : R(Pn) \to R(P_n).$$

Preuve. (a) puisque $A_n P_n = P_n A_n$, alors pour tout $z \in Z$, $\{\exp(A_n t) P_n z\}_{n=1}^{\infty}$ est une famille orthogonal de vecteurs dans Z, par conséquent :

$$\|T(t)z\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\exp(A_n t) P_n z\|^2 \leq (g(t)\,\|z\|)^2$$

alors

$$\|T(t)z\| \leq g(t)\,\|z\|\,.$$

(b) Vérifions la condition i/ de définition (1.2.1)

$$\begin{aligned} T(t)T(s)z &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(A_n t) P_n T(s) z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(A_n t) P_n (\sum_{m=1}^{\infty} \exp(A_m s) P_m z) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(A_n (t+s)) P_n z = T(t+s)z. \end{aligned}$$

la condition ii/ de définition (1.2.1) découle de la complétude de la famille $\{P_n\}_{n\geq 1}$, c'est-à-dire :

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n z, \ \ z \in Z.$$

Vérifions la condition iii/ de définition (1.2.1)

$$\|T(t)z - z\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\exp(A_n t) - I\|^2 \|P_n z\|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \|\exp(A_n t) - I\|^2 \|P_n z\|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\exp(A_n t) - I\|^2 \|P_n z\|^2 .$$

D'après (2.1), il existe une fonction continue $K(t)$ tel que :

$$\|T(t)z - z\|^2 \leq \sup_{n=1,2\ldots,N} \|\exp(A_n t) - I\|^2 \sum_{n=1}^{N} \|P_n z\|^2 + K(t) \sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2 ,$$

donner $\epsilon > 0$ pour trouver N suffisament grand tel que

$$K(t) \sum_{n=N+1}^{\infty} \|P_n z\|^2 < \epsilon,$$

pour $t \in [0, \delta]$, $\delta > 0$; d'autre part,

$$\lim_{t \to 0^+} \sup_{n=1,2\ldots,N} \|\exp(A_n t) - I\| = 0$$

alors,

$$\lim_{t \to 0^+} \|T(t)z - z\| = 0.$$

Soit A le générateur infinitésimal de ce semi-groupe, on a pour tout $z \in Z$

$$Az = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} = \lim_{t \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\exp(A_n t) - I) P_n z}{t},$$

alors :

$$\begin{aligned} P_m A z &= P_m (\lim_{t \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(A_n t) - I)}{t} P_n z) \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{(\exp(A_n t) - I)}{t} P_m z = A_m P_m z. \end{aligned}$$

On a :

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} P_n A z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z,$$

et

$$D(A) \subset \left\{ z \in Z \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n P_n z\|^2 < \infty \right\}.$$

Maintenant, supposons que $z \in \left\{ z \in Z \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k P_k z\|^2 < \infty \right\}$ alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k P_k z\|^2 < \infty \quad et \quad y = \sum_{k=1}^{\infty} A_k P_k z \in Z.$$

Puis, si on pose

$$z_n = \sum_{n=1}^{n} P_k z,$$

tel que $z_n \in D(A)$ et

$$Az_n = \sum_{k=1}^{n} A_k P_k z.$$

Alors : $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ et $\lim_{n\to\infty} Az = y$, et puisque A est un opérateur linéaire fermé, on trouve $z \in D(A)$ et $Az = y$

(c) Il suffit de prouver que :

$$\cup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A) \ et \ \sigma(A) \subset \overline{\cup_{n=1}^{\infty} \sigma(\bar{A}_n)}.$$

On prouve la première partie : $\rho(A) \subset \cap_{n=1}^{\infty} \rho(\bar{A}_n)$, soit λ dans $\rho(A)$, donc : $(\lambda - A)^{-1} : z \to D(A)$ est un opérateur linéaire borné, prouvons que :

$$(\lambda - \bar{A}_m)^{-1} : R(P_m) \to R(P_m)$$

existe et borné pour $m \geq 1$, supposons que $(\lambda - \bar{A}_m)^{-1} P_m z = 0$ alors :

$$\begin{aligned} (\lambda - A) P_m z &= \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - A_n) P_n P_m z \\ &= (\lambda - A_m) P_m z = (\lambda - \bar{A}_m) P_m z = 0, \end{aligned}$$

ce qui implique que $P_m z = 0$ alors $(\lambda - \bar{A}_m)$ est un à un .

Puis donner y dans $R(P_m)$ pour résoudre $(\lambda - \bar{A}_m)w = y$, pour $\lambda \in \rho(A)$, il existe $z \in Z$ tel que :

$$(\lambda - A)z = \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda - A_n)P_n z = y.$$

Multipliant l'équation par P_m on obtient :

$$P_m(\lambda - A)z = (\lambda - A_m)P_m z = (\lambda - \bar{A}_m)P_m z = P_m y = y.$$

Comme $(\lambda - \bar{A}_m) : R(P_m) \to R(P_m)$ est une bijection, et $R(P_m)$ est fermé, donc est espace de Banach, alors d'après le théorème de graphe ouvert on a : $(\lambda - \bar{A}_m) : R(P_m) \to R(P_m)$ existe et est un opérateur linéaire borné, D'où

$$\rho(A) \subset \cap_{n=1}^{\infty}\rho(\bar{A}_n) \Leftrightarrow \cup_{n=1}^{\infty}\sigma(\bar{A}_n) \subset \sigma(A),$$

pour $\lambda \in \rho(\bar{A}_m)$ pour tout $m \geq 1$. ■

2.2 Deuxième lemme de génération d'un semi-groupe

Lemme 2.2.1 *Supposons que les conditions précédentes soient vérifiées, et soit S un sous-ensemble borné de $\mathbb{C}$, avec $Re(S) > 0$, on a :*

$$\frac{-1}{\lambda_n}\sigma(A_n) \subset S, \ \lambda_n > 0, \ pour \ \ n = 1, 2...,$$

alors l'opérateur A donné par (2.1) est un générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe analytique

Preuve. Si on pose $D_n = \frac{-1}{\lambda_n}A_n$, alors $A_n = -\lambda_n D_n$, $\sigma(D_n) \subset S$, et l'opérateur A s'écrit comme suite :

$$-Az = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n D_n P_n z, \ z \in D(A).$$

D'aprés théorème (1.2.1), il suffit de prouver que l'opérateur $-A$ est sectoriel.

Soit $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ tel que $\lambda \in \sigma(S)$, on a :$|\arg\lambda| < \theta$. Il est claire que le secteur :

$$S = \{\lambda \in C, \theta \leq |\arg\lambda| \leq \pi\}$$

est dans l'ensemble résolvant de $-A$, donc prouvons l'existance de constante $M > 0$ tel que :

$$\left\|(\lambda + A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|},\ \lambda \in S_\theta,$$

puisque $\lambda \in S_\theta$, $\frac{\lambda}{\lambda_n}$ n'est pas dans $\sigma(D_n)$ pour tout $n \geq 1$ et l'opérateur $\lambda - \lambda_n D_n$ est inversible, prouvons l'existance de constante $M > 0$ tel que

$$\left\|(\lambda - \lambda_n D_n)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|},\ n = 1, 2...,$$

pour tout λ, on a :

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, D_n)\| &= \left\|(\lambda - D_n)^{-1}\right\| = \left\|(\lambda - I)^{-1}\{I - (D_n - I)(\lambda - I)^{-1}\}^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda - 1|}\left\|\{I - (D_n - I)(\lambda - I)^{-1}\}^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda - 1|}\{1 - \frac{\|D_n - I\|}{\lambda - 1}\}^{-1} \\ &\leq C(\frac{\|D_n\|}{|\lambda|}), \end{aligned}$$

si $|\lambda|$ est suffisamment grand,
d'autre part, on a :

$$\|D_n\| = \sqrt{r(D_n D_n^*)} = \sqrt{\sup\{\lambda : \lambda \in \sigma(D_n D_n^*)\}} \leq k,\ n = 1, 2...,$$

où : $r(D_n D_n^*)$ est le rayon spectral de $D_n D_n^*$, donc on obtient l'existance de constante M_1 et R tel que :

$$\left\|(\lambda - D_n)^{-1}\right\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|},\quad \lambda \in S_\theta \ et\ |\lambda| > R,\ n \geq 1, \tag{2.3}$$

puisque la fonction résolvante $\lambda \to R(\lambda, -A)$ est une fonction holomorphe sur $\rho(-A)$, il existe M_2 tel que :

$$\|\lambda R(\lambda, -A)\| \leq M_2,\quad \lambda \in S_\theta \cap B_R,$$

c'est-à-dire :

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \frac{M_2}{|\lambda|},\ \lambda \in S_\theta \cap B_R,$$

où B_R la boule fermée de centre zéro et de rayon R en $\mathbb{C}$.

pour $\lambda \in S_\theta \cap B_R$, considérons l'équation :

$$\lambda z + Az = y,\ z \in D(A),\ y \in z.$$

Si $y = \sum_{n=1}^{\infty} P_n y$ alors l'équation devient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n D_n) P_n z = \sum_{n=1}^{\infty} P_n y,$$

c-à-d :

$$(\lambda - \lambda_n D_n) P_n z = P_n y \Longleftrightarrow P_n z = (\lambda - \lambda_n D_n)^{-1} P_n y,\ n = 1, 2...,$$

par conséquent, $z = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n D_n)^{-1} P_n y$ et :

$$R(\lambda, -A) y = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_n D_n)^{-1} P_n y, \tag{2.4}$$

ce qui implique que :

$$\left\| (\lambda - \lambda_n D_n)^{-1} \right\| \leq \frac{M_2}{|\lambda|},\ \lambda \in S_\theta \cap B_R,\ n \geq 1, \tag{2.5}$$

utilisons (2.3) et (2.5) on obtient pour tout $\lambda \in S_\theta$:

$$\begin{aligned} \left\| (\lambda - \lambda_n D_n)^{-1} \right\| &= \frac{1}{\lambda_n} \left\| \left(\frac{\lambda}{\lambda_n} - D_n\right)^{-1} \right\| \\ &\leq \begin{cases} \frac{M_1}{|\lambda|}, \text{ si } \frac{|\lambda|}{\lambda_n} > R \\ \frac{M_2}{|\lambda|}, \text{ si } \frac{|\lambda|}{\lambda_n} \leq R \end{cases}. \end{aligned}$$

Donc $\exists\ M > 0$ tel que :

$$\left\| (\lambda - \lambda_n D_n)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{|\lambda|},\ \lambda \in S_\theta,\ n \geq 1,$$

utilisons (2.4) on obtient :

$$\left\| (\lambda + A)^{-1} \right\| \leq \frac{M}{|\lambda|},\ \lambda \in S_\theta.$$

■

Chapitre 3

Applications du lemme de génération d'un C_0 semi-groupe aux E.D.P

Dans ce chapitre, on va donner l'application du lemme de chapitre précédent aux E.D.P.

3.1 Une équation d'onde fortement amortie

Appliquant le lemme (2.1.1) pour étudier l'existance et la stabilité des solutions pour l'équation d'onde linéaire fortement amortie avec des condition aux limites de Dirichlet homogène

$$\left\{ \begin{array}{c} u_{tt} + \eta(-\Delta)^{\frac{1}{2}} u_t + \gamma(-\Delta)u = 0,\ t \geq 0,\ x \in \Omega \\ u(0,x) = u_0(x),\ u_t(0,x) = v_0(x),\ x \in \Omega \\ u(t,x) = 0,\ t \geq 0,\ x \in \partial\Omega \end{array} \right. , \tag{3.1}$$

où Ω est un domaine borné suffisamment régulier dans $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$,Dans le travail [6] S. Chen et R. Triggian ont démontre que la partie linéaire de (3.1) est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique, ici ils prouvent facillement que le semi-groupe est analytique et décroit exponentiellement vers zéro, en outre :

$$\|T(t)\| \leq M(\eta, \gamma) \exp(-\beta t),\ t \geq 0,$$

où $M(\eta,\gamma)$ est une constante dépendent de η et γ,

On choisit l'espace dans lequel ce problème sera posé comme un équation différentielle ordinaire abstraite du second ordre.

Soit : $X = L^2(\Omega) = L^2(\Omega,\mathbb{R})$, considérons l'opérateur linéaire non borné : $A : D(A) \subset X \to X$ définit par : $A\phi = -\triangle\phi$, où :

$$D(A) = H^2(\Omega,\mathbb{R}) \cap H_0^1(\Omega,\mathbb{R}),$$

l'opérateur A a les propriétés : le spectre de A se compose uniquement des valeurs propres $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ..... < \lambda_n \to \infty$, chaque valeur propre est de multiplicité finie γ_n égale à la dimension de l'espace vectoriel correspondant au vecteur propre,

Par conséquent :

a) Il existe un ensemble complet orthonormé $\{\phi_{n,k}\}$ de vecteur propre de A.

b) Pour tout $x \in D(A)$ on a :

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\gamma_n} \left\langle x, \phi_{n,k} \right\rangle \phi_{n,k} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n x,$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire de X et :

$$E_n x = \sum_{k=1}^{\gamma_n} \left\langle x, \phi_{n,k} \right\rangle \phi_{n,k}.$$

Ainsi, $\{E_n\}$ est une famille complète de projections orthogonales en X et : $x = \sum_{n=1}^{\infty} E_n x,\ x \in X$.

c) $-A$ est un générateur d'un semi-groupe analytique $\{\exp(-At)\}$ donné par :

$$\exp(-At)x = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t) E_n x. \tag{3.2}$$

d) L'espace de puissance fractionnaire est donné par :

$$X^\alpha = D(A^\alpha) = \{x \in X : \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\alpha} \left\| E_n x \right\|^2 < \infty\},\ \alpha \geq 0,$$

avec la norme

$$\|x\|_{\alpha} = \|A^{\alpha}x\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\alpha} \|E_n x\|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \ x \in X^{\alpha},$$

et

$$A^{\alpha}x = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{\alpha} E_n x,$$

par conséquent, l'équation (3.1) peut être écrite comme un équation différentielle ordinaire abstraite du second ordre en X, comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} u'' + \eta A^{\frac{1}{2}}u' + \gamma A u = 0, \ t \geq 0 \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = v_0 \end{array} \right. . \tag{3.3}$$

Prenons le changement de variable : $u\prime = v$, on peut ecrire l'équation du second ordre (3.3) comme système des équations différentielles ordinaires du premier ordre dans l'espace : $Z = X^{\frac{1}{2}} \times X = D(A^{\frac{1}{2}}) \times X$ comme suit :

$$z' = \mathcal{A}z, \ z \in Z, \ t \geq 0,$$

où :

$$z = \left(\begin{array}{c} u \\ v \end{array} \right) \ \ et \ \ \mathcal{A} = \left(\begin{array}{cc} 0 & I_x \\ -\gamma A & -\eta A^{\frac{1}{2}} \end{array} \right) \tag{3.4}$$

est un opérateur linéaire non borné avec le domaine naturel : $D(\mathcal{A}) = D(A) \times D(A^{\frac{1}{2}})$.

Théorème 3.1.1 *L'opérateur $\mathcal{A}$ donné par (3.4) est le générateur infinitésimal d'un semigroupe analytique $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ donné par :*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(A_n t) P_n z, \ z \in Z, \ t \geq 0,$$

où $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est une famille complète des projections orthogonales dans l'espace de Hilbert Z donné par :

$$P_n = diag(E_n, E_n), \ n \geq 1,$$

et

$$A_n = B_n P_n,\ B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma\lambda_n & -\eta\lambda_n^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},\ n \geq 1.$$

De plus , ce semi-groupe décroit exponentiellement vers zéro, donc :

$$\|T(t)\| \leq M(\eta,\gamma)\exp(-\beta t),\ t \geq 0,$$

où :

$$\beta = \lambda_1^{\frac{1}{2}} \min\{\mathrm{Re}(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}{2})\},$$

et :

$$\frac{M(\eta,\gamma)}{2} = \max\{\left|\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2-4\gamma}}{2\sqrt{\eta^2-4\gamma}}\right|, \left|\frac{1}{\sqrt{\eta^2-4\gamma}}\right|\}.$$

Preuve. Calculons Az :

$$\begin{aligned}
Az &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\gamma A & -\eta A^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} v \\ -\gamma Au - \eta A^{\frac{1}{2}} v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} E_n v \\ -\gamma \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n E_n u - \eta \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{\frac{1}{2}} E_n v \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} E_n v \\ -\gamma\lambda_n E_n u - \eta\lambda_n^{\frac{1}{2}} E_n v \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma\lambda_n & -\eta\lambda^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n z.
\end{aligned}$$

Il est claire que $A_n P_n = P_n A_n$, vérifions la condition (2.1) du lemme (2.1.1), calculons le spectre de la matrice B_n,

En effet, l'equation caractéristique est donnée par :

$$\lambda^2 + \eta\lambda_n^{\frac{1}{2}}\lambda + \gamma\lambda_n = 0$$

et ses racines sont données par :

$$\lambda = -\lambda_n^{\frac{1}{2}}(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}{2}),\ n = 1, 2.....$$

d'autre part, $\exp(A_nt) = \exp(B_nt)P_n$ avec $\exp(B_nt)$ donné par : $\begin{pmatrix} \frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t) + \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\exp(- \\ \frac{-\gamma\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\rho_2-\rho_1}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t) - \frac{\gamma\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\rho_1-\rho_2}\exp(- \end{pmatrix}$

où :

$$\rho_1 = \frac{\eta + \sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{\eta - \sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}{2}.$$

Considérons $z = (z_1, z_2)^t \in z$ tel que : $\|z\|_Z = 1$
alors ,

$$\|z_1\|^2_{\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|E_j z_1\|^2 \leq 1 \quad , et \quad \|z_2\|^2_X = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_2\|^2 \leq 1.$$

Par conséquent, $\sqrt{\lambda_j}\,\|E_j z_1\| \leq 1, \ \|E_j z_2\| \leq 1, \ j = 1, 2...,$
Alors

$$\begin{aligned}
\|\exp(A_nt)z\|^2_Z &= \left\| \begin{pmatrix} \frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t)E_n z_1 + \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2 t)E_n z_1 \\ \frac{-\gamma\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\rho_2-\rho_1}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t)E_n z_1 - \frac{\gamma\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\rho_1-\rho_2}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2 t)E_n z_1 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}(\rho_2-\rho_1)}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t)E_n z_2 + \frac{1}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}(\rho_1-\rho_2)}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2 t)E_n z_2 \\ \frac{\rho_{1-\eta}}{\rho_2-\rho_1}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t)E_n z_2 + \frac{\rho_2-\eta}{\rho_1-\rho_2}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2 t)E_n z_2 \end{pmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{pmatrix} a(n)E_n z_1 + \frac{b(n)}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}E_n z_2 \\ c(n)\lambda_n^{\frac{1}{2}}E_n z_1 + d(n)E_n z_2 \end{pmatrix} \right\|^2_Z \\
&= \left\| a(n)E_n z_1 + \frac{b(n)}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}E_n z_2 \right\|^2_{\frac{1}{2}} + \left\| c(n)\lambda_n^{\frac{1}{2}}E_n z_1 + d(n)E_n z_2 \right\|^2_X \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \left\| E_j(a(n)E_n z_1 + \frac{b(n)}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}E_n z_2) \right\|^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \left\| E_j(c(n)\lambda_n^{\frac{1}{2}}E_n z_1 + d(n)E_n z_2) \right\|^2 \\
&= \lambda_n \left\| a(n)E_n z_1 + \frac{b(n)}{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}E_n z_2 \right\|^2 + \left\| c(n)\lambda_n^{\frac{1}{2}}E_n z_1 + d(n)E_n z_2 \right\|^2 \\
&\leq (|a(n)| + |b(n)|)^2 + (|c(n)| + |d(n)|)^2,
\end{aligned}$$

où

$$a(n) = \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_1}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1 t) + \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}\exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2 t).$$

$$b(n) = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1} \exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_1 t) + \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_2 t).$$

$$c(n) = \frac{-\gamma}{\rho_2 - \rho_1} \exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_1 t) - \frac{\gamma}{\rho_1 - \rho_2} \exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_2 t).$$

$$d(n) = \frac{\rho_1 - \eta}{\rho_2 - \rho_1} \exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_1 t) + \frac{\rho_2 - \eta}{\rho_1 - \rho_2} \exp(-\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_2 t).$$

On pose :

$$\beta = \lambda_1^{\frac{1}{2}} \min\{\mathrm{Re}(\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}{2}),$$

$$\frac{M(\eta,\gamma)}{2} = \max\{\left|\frac{\eta \pm \sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}{2\sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}\right|, \left|\frac{1}{\sqrt{\eta^2 - 4\gamma}}\right|\},$$

on obtient :

$$\|\exp(A_n t)\| \leq M(\eta,\gamma) \exp(-\beta t), \ t \geq 0, \ n = 1, 2....$$

Alors A est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe donné par (3.2), Ensuite montrons que ce C_0 semi-groupe est exponentiellement décroissant vers 0.

En effet,

$$\begin{aligned}
\|T(t)z\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\exp(A_n t) P_n z\|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|\exp(A_n t)\|^2 \|P_n z\|^2 \\
&\leq M^2(\eta,\gamma) \exp(-2\beta t) \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n z\|^2 \\
&= M^2(\eta,\gamma) \exp(-2\beta t) \|z\|^2,
\end{aligned}$$

donc :

$$\|T(t)\| \leq M(\eta,\gamma) \exp(-\beta t), \ t \geq 0,$$

l'analycité de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ sur $X^{\frac{1}{2}} \times X$ est découle directement du lemme (2.2.1).

Maintenant, on va donner une deuxième méthode pour montrer le résultat précédent qui peut être utiliser dans d'autre problème.

Considérons les matrices 2×2 :

$$\bar{K}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sigma_1(n) & \sigma_2(n) \end{bmatrix}, \quad \bar{K}_n^{-1} = \frac{1}{\sigma_2(n) - \sigma_1(n)} \begin{bmatrix} \sigma_2(n) & -1 \\ -\sigma_1(n) & 1 \end{bmatrix},$$

Où :

$$\sigma_1(n) = -\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_1, \ et \quad \sigma_2(n) = -\lambda_n^{\frac{1}{2}} \rho_2, \ n = 1, 2...,$$

alors

$$-B_n = \bar{K}_n^{-1} \bar{J}_n \bar{K}_n, \ n = 1, 2...,$$

avec

$$\bar{J}_n = \begin{bmatrix} -\sigma_1(n) & 0 \\ 0 & -\sigma_2(n) \end{bmatrix}.$$

On définit les deux opérateures linéaires bornés :

$$K_n : X \times X \to X^{\frac{1}{2}} \times X \quad , \quad K_n^{-1} : X^{\frac{1}{2}} \times X \to X \times X$$

comme suit :

$$K_n = \bar{K}_n P_n \ \ et \ K_n^{-1} = \bar{K}_n^{-1} P_n,$$

on va majorer les deux normes $\|K_n\|$ et $\|K_n^{-1}\|$, considérons : $z = (z_1, z_2)^t \in Z = X^{\frac{1}{2}} \times X$, tel que $\|z\|_Z = 1$, Alors :

$$\|z_1\|_\alpha^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \|E_j z_1\|^2 \leq 1 \ \ et \quad \|z_2\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|E_j z_2\|^2 \leq 1,$$

par conséquent,

$$\lambda_j^{\frac{1}{2}} \|E_j z_1\| \leq 1, \ \|E_j z_2\| \leq 1, \ j = 1, 2...,$$

alors,

$$\begin{aligned}
\left\|K_n^{-1}z\right\|_{X\times X}^2 &= \frac{1}{\lambda_n\left|\rho_2-\rho_1\right|^2}\left\|\begin{bmatrix}\sigma_2(n)E_nz_1-E_nz_2\\ \sigma_1(n)E_nz_1+E_nz_2\end{bmatrix}\right\|_{X\times X}^2\\
&= \frac{1}{\lambda_n\left|\rho_2-\rho_1\right|^2}\{\|\sigma_2(n)E_nz_1-E_nz_2\|^2+\|\sigma_1(n)E_nz_1+E_nz_2\|^2\}\\
&\leq \frac{1}{\lambda_n\left|\rho_2-\rho_1\right|^2}\{(|\rho_2|\left\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}E_nz_1\right\|+\|E_nz_2\|)^2\}\\
&\quad +\frac{1}{\lambda_n\left|\rho_2-\rho_1\right|^2}\{(|\rho_1|\left\|\lambda_n^{\frac{1}{2}}E_nz_1\right\|+\|E_nz_2\|)^2\}\\
&\leq \frac{1}{\lambda_n}\frac{(|\rho_2|+1)^2+(|\rho_1|+1)^2}{\left|\rho_2-\rho_1\right|^2}\\
&\leq \frac{\Gamma_1^2(\eta,\gamma)}{\lambda_n},
\end{aligned}$$

alors,

$$\left\|K_n^{-1}\right\|_{L(X^{\frac{1}{2}}\times X,X\times X)}\leq\frac{\Gamma_1(\eta,\gamma)}{\lambda_n^{\alpha}},$$

Pour $\|K_n\|_{L(X\times X,X^{\frac{1}{2}}\times X)}$, considérons $z=(z_1,z_2)^t\in Z=X\times X$ tel que : $\|z\|_Z=1$,

$$\|z_1\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\left\|E_jz_1\right\|^2\leq 1 \ \ et \ \ \|z_2\|_X^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left\|E_jz_2\right\|^2\leq 1.$$

Par conséquent, $\|E_jz_1\|\leq 1$, $\|E_jz_2\|\leq 1 \quad j=1,2....$
Alors,

$$\begin{aligned}
\|K_nz\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X}^2 &= \left\|\begin{bmatrix}E_nz_1+E_nz_2\\ \sigma_1(n)E_nz_1+\sigma_2(n)E_nz_2\end{bmatrix}\right\|_{X^{\frac{1}{2}}\times X}^2\\
&= \lambda_n\left\|E_nz_1+E_nZ_2\right\|^2+\left\|\sigma_1(n)E_nz_1+\sigma_2(n)E_nz_2\right\|^2\\
&\leq \lambda_n\{4+(|\rho_1|+|\rho_2|)^2\}\\
&\leq \Gamma_2^2(\eta,\gamma)\lambda_n,
\end{aligned}$$

alors,

$$\|K_n\|_{L(X\times X,X^{\frac{1}{2}}\times X)}\leq\Gamma_2(\eta,\gamma)\lambda_n^{\alpha}.$$

On prouve maintenant que A est sectoriel, on écrit la matrice $\bar{J}_n$ comme suit :

$$\begin{aligned} \bar{J}_n &= diag\left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1, \lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2\right] \\ &= (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1)q_1 + (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2)q_2, \end{aligned}$$

et l'opérateur $J_n = \bar{J}_n P_n : Z \to Z$, soit le secteur :

$$S_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \theta \leq |\arg(\lambda)| \leq \pi,\ \lambda \neq 0\},$$

où :

$$|\arg(\rho_1)| < \theta < \frac{\pi}{2},$$

Si $\lambda \in S_\theta$, alors λ est différent de $\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_i(n),\ \ i = 1, 2...$

$$\left\|(\lambda - \bar{J}_n)^{-1}y\right\|^2 = \frac{1}{(\lambda - (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_1))^2}\left\|q_1 y\right\|^2 + \frac{1}{(\lambda - (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_2))^2}\left\|q_2 y\right\|^2.$$

On pose :

$$N = \sup\{\frac{|\lambda|}{\left|\lambda - (\lambda_n^{\frac{1}{2}}\rho_i(n))\right|};\ n \geq 1,\ i = 1, 2.....\}.$$

On obtient :

$$\left\|(\lambda - \bar{J}_n)^{-1}y\right\|^2 \leq (\frac{N}{|\lambda|})^2\left[\left\|q_1 y\right\|^2 + \left\|q_2 y\right\|^2\right]$$

$$\left\|(\lambda - \bar{J}_n)^{-1}\right\| \leq \frac{N}{|\lambda|},\ \lambda \in S.$$

Si $\lambda \in S_\theta$, alors

$$\begin{aligned} R(\lambda, -A)z &= \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda + A_n)^{-1}P_n z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}K_n(\lambda + J_n)^{-1}K_n^{-1}P_n z \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}K_n(\lambda - J_n)^{-1}K_n^{-1}P_n z. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,-A)z\|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|K_n\|^2 \left\|K_n^{-1}\right\|^2 \left\|(\lambda - J_n)^{-1}\right\|^2 \|P_n z\|^2 \\ &\leq (\frac{\Gamma_1(\eta,\gamma)}{\Gamma_2(\eta,\gamma)})^2 (\frac{N}{|\lambda|})^2 \|z\|^2 ,\end{aligned}$$

$$\|R(\lambda,-A)\| \leq \frac{R}{|\lambda|},\ \lambda \in S_\theta.$$

■

3.2 Vibration amortie d'une corde

L'équation non linéaire suivante représente une corde de vibration non linéaire amortie ou une pourte :

$$u_{tt} - 2\beta\triangle u_t - f(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx) + \triangle^2 u = 0,\ \ dans \mathbb{R}_+ \times \Omega, \tag{3.5}$$

avec la condition aux limite :

$$u = \triangle u = 0,\ \ dans \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \tag{3.6}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de C^1 et $\beta > 0$, appliquant lemme (2.1.1) on prouve que la partie linéaire de l'équation génére un semi-groupe exponentielle stable dans $Z = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, utilisons le changement de variable : $v = u_t$, donc la partie linéaire de (3.5) peut être écrite comme suit :

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = 2\beta\triangle v - \triangle^2 u \end{cases}, \tag{3.7}$$

avec la condition (3.6), pour résoudre le système (3.7) dans [5] Luiz A.F. de Oliveira, utilise encore une changement de variable : $w = \triangle u$, et le lemme (2.1.1) pour prouver que le système génère un semi-groupe qui se décroit exponentiellement vers zéro, et l'analycité de cet semi-groupe découle d'après lemme (2.2.1), Considérons l'espace de Hilbert $H = L^2(\Omega)$ et l'opérateur linéaire non borné $A : D(A) \subset H \to H$ définit par : $A\phi = -\triangle\phi$ avec le domaine $D(A)$ donné par les conditions aux limites de Dirichlet, c–à-d : $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, donc $-A$ génère un semi-groupe analytique $\{\exp(-At)\}_{t\geq 0}$ donné par :

$$\exp(-At)\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda t) E_n \xi.$$

Donc le système (3.7) devient sous la forme :

$$\begin{cases} z' = Az, \ t > 0 \\ z(0) = z_0 \in Z \end{cases},$$

où $z = (u, v)^t$ et l'opérateur linéaire non borné A est donné par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2\beta A \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

avec :

$$D(A) = \{u \in H^4(\Omega) = u = \triangle u = 0 \ sur \ \partial\Omega\} \times H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega).$$

Théorème 3.2.1 *L'opérateur A de domaine $D(A)$ donné par (3.8) est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ donné par :*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(A_n t) P_n z, \ z \in Z, \ t \geq 0,$$

où $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est un système complet de projections orthogonales dans l'espace de Hilbert Z donné par :

$$P_n = diag(E_n, E_n), \ n \geq 1,$$

et

$$A_n = B_n P_n, \ B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 & -2\beta\lambda_n \end{pmatrix}, \ n \geq 1.$$

Ce semi-groupe décroit exponentiellement vers zéro, autrement dit : $\exists r > 0$ et $M(\beta)$ tel que :

$$\|T(t)\| \leq M(\beta) \exp(-rt), \ t \geq 0.$$

Preuve. La première partie découle du théorème (1.2.1). pour appliquer le lemme (2.1.1), nous étudions l'équation caractéristique de B_n qui est donnée par : ■

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda_n\lambda + \lambda_n^2 = 0. \tag{3.9}$$

L'équation caractéristique (3.9) de A_n devient :

$$(\frac{\lambda}{\lambda_n})^2 + 2\beta(\frac{\lambda}{\lambda_n}) + 1 = 0.$$

On pose $z = \frac{\lambda}{\lambda_n}$, on obtient :

$$z^2 + 2\beta z + 1 = 0. \tag{3.10}$$

Les racines de (3.10) sont simple et elles ont des parties reélles négatives, De plus, elles sont données par :

$$-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t = -aAu - bAv, \ t > 0 \\ v_t = -cAu - dAv \end{array} \right. . \tag{3.11}$$

Le système (3.11) est écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{c} z\prime = Az, \ t > 0 \\ z(0) = z_0 \in z \end{array} \right. ,$$

où $z = (u, v)^t$ et l'opérateur linéaire non borné A donné par :

$$A = (\begin{array}{cc} -aA & -bA \\ -cA & -dA \end{array})$$

de domaine $D(A) = D(A) \times D(A)$.

Bibliographie

[1] D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Springer, New York, 1981.

[2] ...., Existence of Bounded Solutions of a Second Order System with Dissipation, *J. Math. Analysis and Appl. 237 (1999), 288-302.*

[3] H. Leiva, Stability of a Periodic Solution for a System of Parabolic Equations, *J. Applicable Analysis 60 (1996), 277-300.*

[4] L. Garcia et H. Leiva, Center Manifold and Exponentially Bounded Solutions of a Forced Newtonian System with Dissipation, *E. Journal of Differential Equations 5 (2000), 69-7.*

[5] Luiz A.F. de Oliveira, On Reaction-Diffusion Systems, *E. Journal of Differential Equations 24 (1998), 1-10.*

[6] S. Chen and R. Triggiani, Proof of Extension of two Conjectures on Structural Damping for Elastic Systems : The case $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 2$, *Pacific J. Math. 136 (1989), 15-55.*