République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par : **MESSIOUD FATEN**

Intitulé

Solutions anti-périodiques des problèmes fractionnaires

Dirigé par : REBIAI Ghania

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. EZZEBSA Abdelali	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. REBIAI Ghania	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. SELLAMI Nabil	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2021

Dédicace :

- *Je dédie ce modeste travail :*

Chers parents ***MESSIOUD TAHAR*** *et* ***BOUCENNA RATIBA*** *qui ont tout sacrifie pour moi et qui m'ont poussé à aller de l'avant, qui m'ont soutenu tout au long de mon travail et qui m'ont éclairé ma voie par leur compréhension et leur patience et leur amour.*

A mon marié ***HOUSSEM EL DIN*** *qui m'a appuyé et aidé pour mener mon travail à bien.*

A mes sœur ***MANEL et CHOUROUK.***

A ma deuxième famille ***HOURIA SALEH SARRA et SOUHAIB.***

A mes chères amies ***YOUSSRA KHADIJA CHAIMA et SAFA.***

Puisse dieu tout puissant vous garder et vous procurer santé et bonheur.

A Toute ma famille ***MESSIOUD***

A mes tendres amis

A tous mes camarades de promotions

A tous ceux que j'aime, et tous ceux qui m'ont aidé de près

Ou de loin à réaliser ce travail.

<u>ملخص</u>

الهدف من هذه المذكرة هو دراسة وجود حلول للمشاكل الحدية اللادورية ذات مشتقة من رتبة كسرية بالاعتماد على نظرية الدرجة الطوبولوجية لليري شودار ولتوضيح ذلك قمنا بتدعيم عملنا بأمثلة.

<u>الكلمات المفتاحية:</u> الحساب الكسري، الدرجة الطوبولوجية لليري شودار، وجود حلول اللادورية.

Table des matières

Résumé

L'objectif de ce memoire est d'étudier l'existence des solutions pour un problème aux limites anti-périodique d'ordre fractionnaire en utilisant la théorie de degré topologique de Leray Schauder et on illustre notre travail par des exemples.

Mots clés: Calcul fractionaire, Degré topologique de Leray-Schauder, Existence des solutions anti- périodique.

Chapitre 1

Introduction

La dérivation fractionnaire est un concept de généralisation de la dérivation **(classique)** à un ordre non entier. Si cet ordre est négatif, on parle d'une intégration non entière et s'il est positif, il s'agit d'une dérivation non entière.

La dérivation fractionnaire fournit plusieurs outils potentiellement utiles pour la résolution des équations intégrales. Elle s'introduit aussi naturellement dans la modélisation mécanique des matériaux qui conservent la mémoire des transformations passées (voir [10]). D'où l'intérêt particulier porté sur le calcul et l'analyse fractionnaire pondent ces dernières décennies.

Bien que le calcul différentiel classique fournit des outils puissants pour la modélisation d'un bon nombre de phénomènes étudiés par les sciences appliquées, ces outils ne permettent pas de tenir compte de la dynamique anormale que présentent certains. Systèmes complexes rencontrés dans la nature ou dans les interactions de la société. Les résultats expérimentaux montrent que plusieurs processus liés aux systèmes complexes ont une dynamique non-locale impliquant des effets à long terme. Les opérateurs de dérivations et d'intégrations fractionnaires présentent des similitudes avec certaines de ces caractéristiques, ce qui en fait un outil plus adapté pour la modélisation de ces phénomènes.

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ^{ème} siècle jusqu'à nos jours. les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695 quand L'Hospital a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeantsur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et à écrit à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe à partir duquel, un jour, on aura tirer des conséquences utiles". Il a fallu attendre les années

1990 pour voir apparaître les premières "conséquences utiles". la première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est dû à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est depuis qu'elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitio comme celle de Grunwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo (voir [10, 17]). A cette époque il n'y avait presque pas d'applications pratiques de cette théorie, et c'est pour cette raison qu'elle a été considéré comme une abstraite ne contenant que des manipulations mathématiques peu utiles. Le passage des formulations mathématiques pures à des applications, a commencé à voir le jour depuis les années 1990, où les équations différentielles fractionnaires sont apparues dans plusieurs domaines tels que la physique, l'ingénierie, la biologie, la mécanique....

Notre mémoire est subdivisé en trois chapitres

Chapitre 1: Nous présentons dans ce chapitre les différents notions de bases concernant la théorie de calculs fractionnaires.

Chapitre 2: On indique la notions de dgré topologique et on distingue deux types de ce dernier et on montre leur avantage dans la résolutions des équations differentilles d'ordre fractionnaie en appliquant la théorie du point fixe dans un espace du banach.

Chapitre 3: On va résoudre un système périodique d'ordre fractionnaire en utilisant le degré topologique de Leray.Schauder.

Chapitre 2

Outils de bases

Dans ce chapitre on va présenter quelques notions de bases concernant le calculs fractionnaire, voir [10] et [14] .

2.1 Fonctions spéciales

2.1.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est en mathématiques, une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe.

Définition 2.1 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) \succ 0$, on définit la fonction suivante*

$$\Gamma : \alpha \rightarrow \int_{0}^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Quelques propriétés de la fanction Gamma

Une propriété importante de la fonction $\Gamma(\alpha)$ est la relation de récurrence suivante:

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \mathrm{Re}(\alpha) \succ 0.$$

En particulier

$$\Gamma(n+1) = n!; \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.1.2 La fonction Bêta

Définition 2.2 *La fonction Bêta (qui est un type d'intégrale d'Euler, au même titre que la fonction Gamma) est une fonction définie par:*

$$B(p,q)=\int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}\,d\tau,\quad \mathrm{Re}(p)\succ 0, \mathrm{Re}(q)\succ 0, \tag{1.2}$$

et de plus on a

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad \mathrm{Re}(p)\succ 0,\quad \mathrm{Re}(q)\succ 0.$$

Définition 2.3 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle intégrale de Riemann-Liouville de f l'intégrale suivante:*

$$(I_a^{\alpha}f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt, \tag{1.3}$$

où α est un réel (ou même complexe) convenablement choisi.

Exemple 2.1 *Considérons la fonction $f(x)=(x-a)^{\beta}$: Alors*

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta}\,dt.$$

Pour évaluer cette intégrale on pose le changement $t=a+(x-a)\tau$, d'où

$$I_a^{\alpha}(x-a)^{\beta}=\frac{(x-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)}(x-a)^{\beta+\alpha},$$

aprés utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction bêta d'Euler). On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha=1$ où on a

$$I_a^{1}(x-a)^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)}(x-a)^{\beta+1}=\frac{1}{\beta+1}(x-a)^{\beta+1},$$

à cause de la relation bien connue $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

Définition 2.4 *si* $f \in C[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ *l'intégrale*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\, dt, \tag{1.4}$$

telle que $a \in]-\infty, +\infty[$ *est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre* α*, et l'intégrale*

$$I_{b^-}^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)\, dt \quad \text{telle que} \quad b \in]-\infty, +\infty[, \tag{1.5}$$

est appelée intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α

Théorème 2.1 *Pour* $f \in C[a,b]$*, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété suivante:*

$$I_{a^+}^{(\alpha)} \left[I_{a^+}^{(\beta)} f(x) \right] = I_{a^+}^{(\alpha+\beta)} f(x) \quad \text{pour} \;\; \alpha \succ 0, \;\; \beta \succ 0. \tag{1.6}$$

2.2 Dérivées fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons siter les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

2.2.1 Approche de Riemann-Liouville

Définition 2.5 *Soit* $\alpha \in]m-1, m[$ *avec* $m \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$*. On appelle dérivée d'ordre* α *au sens de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$\left({}^{R}D_a^\alpha f \right)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^m \left[\left(I_a^{m-\alpha} f \right)(x) \right]. \tag{1.7}$$

Lemme 2.1 *Soit* $\alpha \in]m-1, m[$*et* f *une fonction vérifiant* ${}^{R}D_a^\alpha f = 0$ *(appartenant au noyau de l'opérateur* ${}^{R}D_a^\alpha$*). Alors*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1+\alpha-m)} (x-a)^{j+\alpha-m}, \tag{1.8}$$

où les c_j sont des constantes quelconques.

Proposition 2.2 *L'opérateur de dérivation de Riemann-Liouville ${}^{R}D_a^{\alpha}$ possède les propriétés suivantes:*

1. c'est un opérateur linéaire.

2. En général ${}^{R}D_a^{\alpha} \circ^{R} D_a^{\beta} \neq^{R} D^{\beta} \circ^{R} D_a^{\alpha}$ et aussi ${}^{R}D_a^{\alpha} \circ^{R} D_a^{\beta} \neq^{R} D_a^{\alpha+\beta}$,

3. $\lim\limits_{\substack{\alpha \longrightarrow m-1 \\ \succ}} {}^{R}D_a^{\alpha} f = f^{(m-1)}$ *et* $\lim\limits_{\substack{\alpha \longrightarrow m \\ \prec}} {}^{R}D_a^{\alpha} f = f^{(m)}$,

4. ${}^{R}D_a^{\alpha} \circ I_a^{\alpha} = id$,

5. $[(I_a^{\alpha} \circ^{R} D_a^{\alpha}) f](x) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^{j-m+\alpha}}{\Gamma(j-m+\alpha+1)} \{ \lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ \succ}} [(\frac{d}{dx})^{j} I_a^{m-\alpha} f](x) \}$.

2.2.2 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires, donc on peut exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif) d'une fonction f par la formule suivante:

$$D^{p} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{p}{k} f(t-kh), \tag{1.9}$$

avec

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}.$$

La généralisation de cette formule pour p non entier (avec $0 \leq n-1 \prec p \prec n$) et comme

$$\begin{aligned} (-1)^{k} \binom{p}{k} &= \frac{-p(1-p)\ldots(k-p-1)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)}, \end{aligned}$$

nous obtenons

$${}_{a}^{G}D^{p} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-p)} f(t-kh), \tag{1.10}$$

et

$${}_{a}^{G}D^{-p} f(t) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{p} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k+1)\Gamma(p)} f(t-kh). \tag{1.11}$$

Si f est de classe C^m, alors en utilisant l'intégration par partie on obtient:

$$ {}_a^G D^{-p} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k+p}}{\Gamma(k+p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+p)} \int_a^t (t-\tau)^{(n+p-1)} f^{(n)}(\tau) \, d\tau, \tag{1.12} $$

2.2.3 Approche de Caputo

Nous avons vu plus haut que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ s'obtient par une régularisation (application de $I_a^{m-\alpha}$) suivie d'une dérivation classique d'ordre m. La dérivée de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Définition 2.6 *Soit $\alpha \in]m-1, m[$ et $f \in C^m([a,b])$. On appelle dérivée de f au sens de Caputo la fonction définie par:*

$$ \left({}^C D_a^\alpha f\right)(x) = \left(I_a^{m-\alpha} f^{(m)}\right)(x). \tag{1.13} $$

Remarque 2.1 *La dérivée de Caputo permet de rattraper certaines "anomalies" que nous recontrées dans le cas de Riemann-Liouville. En voici la première:*

$$ {}^C D_a^\alpha 1 = 0, \tag{1.14} $$

i.e, la dérivée de Caputo d'une constante est nulle.

Proposition 2.3 *On a*

1. ${}^C D_a^\alpha \left[I_a^\alpha f\right] = f$,
2. *Si* ${}^C D_a^\alpha f = 0$ *alors* $f(x) = \sum\limits_{j=0}^{m-1} c_j (x-a)^j$,
3. $I_a^\alpha \left[{}^C D_a^\alpha f\right](x) = f(x) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{(x-a)^j}{j!} f^{(j)}(a)$.

Remarque 2.2 *Un des "défauts" de la dérivée de Caputo est qu'elle ne constitue pas une bonne interpolation entre les dérivées entières comme ce fut le cas pour Riemann-Liouville. En effet on a*

$$ \lim_{\substack{\alpha \longrightarrow m \\ \prec}} \left({}^C D_a^\alpha f\right)(x) = f^{(m)}(x) \tag{1.15} $$

mais par contre

$$\lim_{\substack{\alpha \longrightarrow m-1 \\ \succ}} \left({}^{C}D_{a}^{\alpha} f \right)(x) \neq f^{(m-1)}(x)$$

Lemme 2.4 *Soit f continue sur $[a, b]$ et $\alpha \succ 0$, alors*

$$\lim_{x \longrightarrow a^{+}} \left(I_{a}^{\alpha} f \right)(x) = 0 \tag{1.16}$$

Corollaire 2.5 *Si $0 \prec \alpha \prec 1$ et f de classe C^{1} alors*

$$\left(I_{a}^{\alpha} \circ^{R} D_{a}^{\alpha} \right) f = f \text{ et } \left({}^{C}D_{a}^{\alpha} \circ I_{a}^{\alpha} \right) f = f$$

C'est-à-dire que les dérivations au sens de Riemann-Liouville et de Caputo respectivement constituent l'inverse à droite et à gauche de l'opérateur de Riemann-Liouville (au moins sur les fonctions de classe C^{1})

Chapitre 3

Degré topoligique

3.0.4 Introduction

Ces dernières années, le degré topologique s'est révélé un outil très puissant pour la résolution de certains problèmes associés à des équations différentielles ordinaires et fonctionelles. Pour cela on va présenter, dans ce travail, la théorie du degré topologique en dimension finie et infinie.

En 1869 Kronecker [8] a introduit la notion du degré pour les applications de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Poincaré [4], Böhler [11] et Hadamard [5] l'ont ensuite développé au début des années 1890 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer [7] le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (en $1883, 1884$). Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applicationsC^0 ont été dtéveloppées par Nagumo [9] et Heinz [9]. Cependant, les théorèmes du point fixe restérent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.

Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application au moins continue, et considérons l'équation $f(x) = b$

On se pose cette question comment peut-on de manière pratique affirmer qu'il existe au moins une solution x à notre équation ?. Il y a une réponse simple dans le cas où $n = 1$; par exemple si $\Omega =]-1, 1[$ et $f \in C(]-1, 1[; \mathbb{R})$; s'il existe deux nombres réels $x_1, x_2 \in]-1, 1[$ tels que $f(x_1)f(x_2) \preceq 0$; alors notre équation admet au moins une solution, comme conséquence directe du théorème des valeurs intermédiaires. Alors que serait-ce pour une dimension plus grande $n > 1$; certains se diront dans le cas où f est **linéaire** et si le déterminant de f est non nul, alors **il existe une solution** et même **une unique solution** à notre équation, et ce pour tout $b \in \mathbb{R}^n$; bien entendu cela n'est valable que si le déterminant de l'application linéaire f est non nul, que faire si ce n'est pas le cas ?!!!

C'est pour répondre à cette dernière question, qu'a été développé un outil intervenant pour les applications non-linéaires, où la notion de déterminant pour les applications linéaires, sera remplacée par la notion de **"degré"**, ce dernier est **un réel qui indique par sa non nullité que notre équation admet au moins une solution**. Dans le cas de la **dimension une**, cette notion de degré peut être introduite de la manière suivante

$$deg(f, \Omega, b) = \frac{1}{2}(sgn((f(1) - b) - sgn(f(-1) - b));$$

de telle sorte que si $deg(f, b) = 0$; on a $(f(1) - b)(f(-1) - b) < 0$ d'où l'existence des solutions, nous constatons en premier lieu que si ce degré est non nul, notre équation possède bien une solution ou peut être même plusieurs. On observera aussi qu'il dépend de f et de y.

Une première idée pour définir le degré de f en b sur un ensemble Ω consisterait à le faire coincider avec **"le nombre de solutions de l'équation dans Ω".** C'est cette notion que l'on va introduire dans ce mémoire.

3.0.5 Le degré topologique de dimension fini

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$ (noté $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$), et $y_0 \in \mathbb{R}^n$. L'idée du degré topologique est d'associer à la fonct ion f en y_0 relativement à Ω un entier qui est non nul pour avoir l'existence de solution de l'équationde la forme: $x \in \Omega,\ f(x) = y_0$.

Le degré topologique de Brouwer

Définition 3.1 *Soit f une application de classe $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Notons $J_f(x_0)$ le déterminant de la matrice Jacobienne de f en un point x_0 de. Le point x_0 est dit point singulier si*

$J_f(x_0) = 0$. *On désigne par* $S_f(\Omega)$ *l'ensemble des points singuliers, c'est à dire :*

$$S_f(\Omega) = \{x \in \Omega,\ J_f(x) = 0.\} \tag{2.1}$$

Définition 3.2 *Un élément* $x_0 \in \Omega$ *est dit point régulier si .*

$$J_f(x_0) \neq 0 \tag{2.2}$$

dans le cas contraire, y_0 *est dite une valeur singulière.*

Définition 3.3 [16]***(Degré topologique de Brouwer)****: Soient* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application de* $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *tel que* $y_0 \notin f(\partial\Omega) \cup Sf(\Omega)$. *On définit le degré topologique de* f *en* y_0 *relativement à* Ω *par:*

$$deg(f, \Omega, y_0) = \begin{cases} \sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\})} sgn J_f(x) & si\ \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\}) \neq \emptyset \\ 0 & si\ \ \Omega \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset \end{cases} \tag{2.3}$$

Remarque 3.1 *si* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *est une valeur singulière, on pose:* $deg(f, \Omega, y_0) = deg(f, \Omega, y_1)$*,où* y_1 *une valeur régulière proche de* y_0.

Proposition 3.1 *Soient* Ω *un ouvert borné,* $f_1,\ f_2 \in C^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ *et* $y_0 \in \mathbb{R}^n$. *On suppose que* f_1,f_2: $\overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *sont deux fonctions continues telles que* $y_0 \notin f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega)$. *Alors pour* $\varepsilon > 0$ *tel que :* $\|f_1 - f_2\|_\infty \leq \frac{1}{4}\ dist(y_0,\ f_1(\partial\Omega) \cup f_2(\partial\Omega))$*,on a*

$$deg(f_1, \Omega, y_0) = deg(f_2, \Omega, y_0)$$

Propiétés principals du degré topologique de Brouwer

Nous présentons les propriétés les plus importantes du degré topologique de Brouwer. Dans la suite, I désigne l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 3.1 [8] *Soit* $\mathbb{R}^n$ *un ouvert borné et* $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *une application continue, si* $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ *, alors il existe un entier* $deg(f, \Omega, y_0)$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

(1) *i)* $deg(I, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1 & si & y_0 \in \Omega \\ 0 & & y_0 \notin \overline{\Omega} \end{cases}$

$ii)\ deg(-I,\Omega,y_0)=\begin{cases}(-1)^n & si \quad y_0\in\Omega\\ 0 & si \quad y_0\notin\overline{\Omega}\end{cases}$

(2) ***Additivité*** *Supposons que* $\Omega_{1,}\Omega_2$ *sont deux sous-ensembles ouverts disjoints de* Ω *et* $y_0\notin f_1(\partial\Omega)\cup f_2(\partial\Omega)$ *alors :*

$$deg(f,\Omega,y_0)=deg(f,\Omega_1,y_0)+deg(f,\Omega_2,y_0).$$

(3) ***Invariance par homotopie***

Si $f_t(x):[0,1]\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *est continue et* $y_0\notin f(\partial\Omega\times[0,1])$*, alors* $deg(f_t,\Omega,y_0)$ *est constant pour tout* $t\in[0,1]$.

(4) ***Invariance sur le bord*** *Soient* Ω *un ouvert borné de* R^n *et deux fonctions* $f;g\in(\overline{\Omega},R^n)$*, on suppose que* $f=g$ *sur* $\partial\Omega$ *et que.*$y_0\notin f(\partial\Omega)$ *Alors, on a*

$$deg(f,\Omega,y_0)=deg(g,\Omega,y_0).$$

(5) ***Propriété d'excision:*** *Soit* f*:* $\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *une fonction continue sur un ouvert borné* Ω*, alors pour tout ensemble fermé* $K\subset\overline{\Omega}$ *tel que* $y_0\notin f(k)\cup f(\partial\Omega)$ *on a*

$$deg(f,\Omega,y_0)=deg(f,\Omega-K,y_0).$$

(6) ***Existence***

Si $deg(f,\Omega,y_0)\neq 0$*, alors* $f(x)=y_0$ *a une solution dans* Ω*.*

Preuve.

1)

i) • Si $y_0\in\Omega$, on a $deg(I,\Omega,y_0)$ est bien défini et $\Omega\cap I^{-1}(\{y_0\})\neq\emptyset$ donc :

$$deg(I,\Omega,y_0)=sgnJ_i(y_0)=1$$

• Si $y_0\notin\overline{\Omega}$, on a $deg(I,\Omega,y_0)$ est bien défini et $\Omega\cap(-I)^{-1}(y_0)\neq\emptyset$ donc:

$$deg(I,\Omega,y_0)=0.$$

ii) • Si$y_0 \in \Omega$, on a $deg(-I,\Omega,y_0)$ est bien défini et $\Omega \cap (-I)^{-1}(y_0) \neq \emptyset$ donc :

$$\begin{aligned} deg(-I,\Omega,y_0) &= signJ_{-I}(x), \\ &= sign(-1)^n \\ &= (-1)^n \end{aligned}$$

• S i$y_0 \in \overline{\Omega}$ on a $deg(-I,\Omega,y_0)$ est bien défini et $\Omega \cap (-I)^{-1}(y_0) = \emptyset$ donc :

$$deg(-I,\Omega,y_0) = 0$$

(2) Soit f_k une suite de fonctions de $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tel que :

$$lim_{k \longrightarrow +\infty} \|f_k - f\|_{\Omega\iota} = 0.$$

Alors, on a :

$$\begin{aligned} deg(f,\Omega,y_0) &= lim_{k \longrightarrow +\infty} deg(f_k,\Omega,y_0) \\ &= lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{fk}(x)dx, \\ &= lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{fk}(x)dx, \\ &= lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega_1} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{fk}(x)dx \\ &\quad + lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_{\Omega_2} \varphi(\|f_k(x) - y_0\|_2) J_{fk}(x)dx \\ &= deg(f,\Omega_1,y_0) + deg(f,\Omega_2,y_0) \end{aligned}$$

(3) Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{4} dist(y_{0,} f_t(\partial\Omega \times [0{,}1]))$; d'après la continuité uniforme de f_t sur $\overline{\Omega}\times$ [0,1], il existe $\delta > 0$ tel que si $\mid t_1 - t_2 \mid \leq \delta$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$ on ait :

$$\mid f(x,t_1) - f(x,t_2) \mid < \epsilon.$$

Par conséquent d'après la proposition (1.3.1) on a

$$deg(f(.,t_1),\Omega,y_0) = deg(f(.,t_2),\Omega,y_0)$$

pour tout $t_1, t_2 \in [0,1]$ tel que $\mid t_1 - t_2 \mid \leq \delta$. Puisque [0,1] est un compact, on peut trouver un recouvrement d'intervalles finis $]t_i;t_{i+1}[$ de longueur δ, donc $\forall]t_i;t_{i+1}[\in [0;1]$, on a :

$$deg(f(x,t_i),\Omega,y_0) = deg(f(x,t_{i+1}),\Omega,y_0)$$

alors : $deg(f_t,\Omega_1,y_0)$ est constant pour tout $t \in [0,1]$.
(4) Considérons l'homotopie suivante: $t \in [0,1]$

$$H(x;t) = tf(x) + (1-t)g(x); \forall t \in [0,1].$$

On a: $H_t(x) \neq y_0$, c'est à dire: $y_0 \notin H_t(\partial\Omega)$, donc $deg(H_t,\Omega,y_0)$ est bien défini. Par homotopie, on a $deg(H_t,\Omega,y_0)$ est constant $\forall t \in [0,1]$, c'est à dire :

$$deg(H_0,\Omega,y_0) = deg(H_1,\Omega,y_0),$$

donc

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(g,\Omega,y_0).$$

(5) On a: $\Omega = K \cup (\Omega - k)$, alors :

$$deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,k,y_0) + deg(f,\Omega-k,y_0).$$

Comme $deg(f,k,y_0)$ est bien défini et $k \cap f^{-1}(\{y_0\}) = \emptyset$ donc:

$$deg(f,k,y_0) = 0.$$

Ainsi $deg(f,\Omega,y_0) = deg(f,\Omega-k,y_0)$.
(6) Supposons que $f(x) = y_0$ n'admet pas une solution dans Ω, donc $y_0 \notin f(\overline{\Omega})$. D'après la propriété (5), on a :

$$deg(f,\Omega,y_0) = 0.$$

Ce qui est absurde. ■

Théorème fondamentaux du degré toplogique de Brouwer

Théorème 3.2 *(Théorème de point fixe de Brouwer)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous ensemble convexe, fermé, borné, non vide $f : \Omega \to \Omega$ une fonction continue, alors f admet un point fixe.

Preuve.

Etape 1

Considérons Ω comme une boule $B(0;r) = \{x, \| x \|_2 \leq r\}$

$a)$ S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$, le résultat est prouvé.

$b)$ Sinon, introduisons l'homotopie suivante: $f_t(x) = (I - tf)(x)$ pour tout t $\in [0, 1]$.

On a: $0 \notin f_t(\partial\Omega)$ c'est à dire: $deg(f_t, \Omega, 0)$ est bien défini. D'après la propriété (3) $deg(f_t, \Omega, 0)$ est constant pour tout $t \in [0; 1]$, c'est à dire :

$$deg(f_0, \Omega, 0) = deg(f_1, \Omega, 0) = 1.$$

Donc,$deg(f_1, \Omega, 0) = deg(I - f, \Omega, 0)$.

Ainsi, $deg(I - f, \Omega, 0) \neq 0$. D'après la propriété (6), on a : $\exists x_0 \in \Omega$, tel que$(I - f)(x_0) = 0$, c'est à dire, $f(x_0) = x_0$:

Etape 2

Soit Ω un convexe, compact, non-vide. Soit $B(0;r)$ tel que $\Omega \subset B(0,r)$ et soit $R : \mathbb{R}^n \longrightarrow \Omega$ une rétraction. L'application$f \circ R$ est continue, d'après l'étape (1) :

$\exists x_0 \in B(0;r)$ tel que$(f \circ R)(x_0) = x_0$. Puisque$f(\Omega) \subset \Omega$ et $R(x_0) \in \Omega$; donc $x_0 \in \Omega$. Comme $R(x_0) = x_0$; alors: $(f \circ R)(x_0) = f(x_0) = x_0$, ainsi $\exists x_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$. ■

Théorème 3.3 [16] *(Théorème de Borsuk)*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné, symétrique par rapport à l'origine et $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue, impaire telle que $0 \notin f(\partial\Omega)$. Alors :

$a)$ Si $0 \notin \overline{\Omega}$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est pair,

$b)$ si $0 \in \Omega$, le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est impair.

Preuve.

Dans le cas où $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, et 0 est une valeur régulière.

a) Si $0 \notin \overline{\Omega}$, il ya deux possibilités :

i) $f^{-1}(0) = \emptyset$, donc $deg(f, \Omega, 0) = 0$,

ii) $f^{-1}(0) \neq \emptyset$, f étant impaire, on a : $x \in f^{-1}(0) \Longrightarrow -x \in f^{-1}(0)$, et donc

$$f^{-1}(0) = \{x_1, x_2, ...x_N; -x_1, -x_2, , ... - x_N\}$$

D'autre part, $Df(-x) = Df(x); \forall x \in \Omega$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} deg(f, \Omega, 0) &= \sum_{x \in \Omega \cap f^{-1}(0)} sgnJf(x); \\ &= \sum_{i=1}^{N} sgnJf(x_i) + \sum_{i=1}^{N} sgnJf(-x_i) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{N} sgnJf(x_i). \end{aligned}$$

Donc le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est pair.

b) $0 \in \overline{\Omega}$. Comme f est impaire, $f(0) = 0$, alors on a :

i) $f^{-1}(0) = \{0\}$ donc $deg(f, \Omega, 0) = sgnJf(0) = 1$,

ii) $f^{-1}(0) = \{0\} \cup \{x_1, x_2, ...x_N; -x_1, -x_2, ... - x_N\}$, et alors

$$deg(f, \Omega, 0) = sgnJf(0) + 2 \sum_{i=1}^{N} sgnJf(xi),$$

donc le degré $deg(f, \Omega, 0)$ est impair. ■

3.0.6 Le degré topologique en dimension infinie

Le degré topologique de Leray-Schauder

Définition 3.4 *Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de $X, T : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact tel que $0 \notin T(\partial\Omega)$. Soient $\varepsilon > 0; E_\varepsilon \subset X$ et $T_\varepsilon : \overline{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$; on considère F un sous-espace vectoriel de dimension fnie contenant $E_\varepsilon$et tel que $\Omega_F := F \cap \Omega \neq \emptyset$;. On définit le degré topologique de Leray-Schauder par :*

$$deg(I - T, \Omega, 0) := deg_F(I_F - T_\varepsilon, F, 0_F).$$

Propriétés du degré topologique de Leray Schauder [8]

Dans toute la suite, supposons que$X$ est un espace de Banach, Ω un ouvert borné de X et $T : \Omega \longrightarrow X$ un opérateur compact. La démonstration de ces résultats découle de la définition du degré de Leray-Schauder, ainsi que des propriétés analogues du degré de Brouwer.

Proposition 3.2 ***1. Normalisation***

$$deg(I, \Omega, y_0) = \begin{cases} 1 & si \quad y_0 \in \Omega \\ 0 & si \quad y_0 \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

2. Additivté

Si Ω_1 $\Omega_2$sont deux ouverts bornés disjoints et $T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \longrightarrow X$ est un opérateur compact tel que $0 \notin T(\partial\Omega_1 \cup \Omega_2)$, alors :

$$deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = deg(I - T, \Omega_1, 0) + deg(I - T, \Omega_2, 0).$$

3. *Si $y_0 \in X$ tel que pour tout $u \in \overline{\Omega}$ on a : $u - Tu \neq y_0$, alors:*

$$deg(I - T.\Omega.y_0) = 0.$$

4. ***Existence***

Si $y_0 \in X$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a : $u - Tu \neq y_0$ et $deg(I - T, \Omega, y_0) \neq 0$, alors :il existe $u \in \Omega$ tel que $u - Tu = y_0$.

5. Invariance du degré par translation

Si $y_0 \in X$ tel que $y_0 \neq (I - T)(\partial\Omega)$, alors : $deg(I - T, \Omega, y_0) = deg(I - T - y_0, \Omega, 0)$.

6. Invariance par homotopie [8]

Soient $y_0 \in X$ et $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow X$ une application compacte telle que pour tout $(u, t) \in \partial\Omega \times [0; 1]$ ait : $u - H(u, t) \neq y_0$, alors $deg(I - H(., t), \Omega, y_0)$ est constant pour tout $t \in [0, 1]$:

$$deg(I - H(., t), \Omega, y_0) = deg(I - H(., 0), \Omega, y_0).$$

Théorème fondamentaux du degré topologique de Leray Schauder

Théorème 3.4 ***(Théorème de point fixe de Schauder)***
Soient Ω un sous-ensemble convexe, fermé, borné non-vide d'un espace de Banach X et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application compacte, alors T admet au moins un point fixe.

Preuve.Etape 1 Considérons $\Omega = \overline{B}(0, R) = \{x, \| x \|_2 \leq R\}$.
$i)$ S'il existe $x_0 \in \partial\Omega$, tel que $T(x_0) = x_0$ alors le résultat est prouvé.
$ii)$ Sinon, considérons l'homotopie suivante : $T_t(x) = (I - tT)(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a, $0 \notin T(\partial\Omega)$, donc $deg(T_t, \Omega, 0)$ est bien défini. D'après la propriété de **l'invariance par homotpie** on a: $deg(T_t, \Omega, 0)$ est constant pour tout $t \in [0, 1]$,
c'est à dire :

$$\begin{aligned} deg(T_1, \Omega, 0) &= deg(I - T, \Omega, 0); \\ &= deg(T_0, \Omega, 0); \\ &= deg(I, \Omega, 0); \\ &= 1 \end{aligned}$$

Alors, d'après, **la propriéte 6** on a :

$$\exists x_0 \in \Omega \text{ tel que : } (I - T)(x_0) = 0,$$

c'est à dire:

$$T(x_0) = x_0.$$

Etape 2 Soit Ω un convexe, fermé, borné, non-vide. On considère l'application continue $r : X \longrightarrow \Omega$ et $B(0, R)$ une boule. L'application $T \circ r$ est compacte,
d'après l'étape (1), on a :

$$\exists x_0 \in B(0, R) \text{ tel que : } (T \circ r)(x_0) = x_0,$$

c'est à dire:

$$\exists x_0 \in B(0, R) \text{ tel que : } T[r(x_0)] = x_0.$$

Or, $r(x_0) \in \Omega$ et par hypothèse $T(\Omega) \subset \Omega$, alors $x_0 \in \Omega$ et donc $T(x_0) \in \Omega$ Par conséquent, $\exists x_0 \in \Omega$ tel que: $T(x_0) = x_0$. ■

Théorème 3.5 ***(Théorème de Borsuk)***
Soient Ω un ouvert borné de X contenant l'origine et symétrique par rapport à celui-ci, on considère une application compacte T définie sur Ω est impaire alors, si $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$le degré $deg(I-T, \Omega, 0)$ est impair.

Théorème 3.6 ***(Alternative on linéaire de Leray Schauder)*** *Soient, Ω un ouvert borné d'un espace de Banach X et $f : \Omega \longrightarrow X$ une application compacte, alors l'une des propriétés est satisfaite :*
(1) f admet un point fixe dans Ω,
(2) $\exists x \in \partial\Omega; \exists t \in [0,1]$ tel que: $x = tf(x)$.

Preuve.
Supposons que (2) n'est pas satisfaite,
c'est à dire :

$$\forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0,1], (I - tf)(x) \neq 0,$$

donc: $deg(I - tf, \Omega, 0)$ est bien défini, d'après la propriété d'homotopie , on a :

$$deg(I, \Omega, 0) = deg(I - f, \Omega, 0) = 1.$$

Par la propriété d'existence, on a: $\exists x \in \Omega$ tel que: $f(x) = x$, donc : f admet un point fixe dans Ω., on a :$deg(I, \Omega, 0) = deg(I - f, \Omega, 0) = 1$.Par la propriété d'existence, on a :

$$\exists x \in \Omega \text{ tel que : } f(x) = x,$$

donc : f admet un point fixe dans Ω.

■

Chapitre 4

Existence des solutions pour un problème anti-périodique

Dans ce chapitre on aura appliqué la théorie de degré de Leary schauder pour démonter queques résultats d'existence pour le problème fractionnire aux limites anti-périodique suivant:

$$(S)\begin{cases} {}^{c}D^{q}u\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right) & \text{pur } t\in\left[0,T\right], \quad 1\prec q\leq 2, \\ u\left(0\right)=-u\left(T\right), & \acute{u}\left(0\right)=-\acute{u}\left(T\right), \end{cases}$$

où ${}^{c}D^{q}$ notée la dérivée fracionnaire de Caputo d'ordre q , $f:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et T est une constante positive fixée

4.1 Préliminaires

Premièrement on rappelle quelques définitions de base [10] et [14], on calcul différentielle.

Définition 4.1 *Pour une fonction* $g:[0,1]\to\mathbb{R}$. *La dérivée de Caputo fractionnaire d'ordre* $q\succ 0$ *est défini comme suit:*

$${}^{c}D^{q}g\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(n-q\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{n-q-1}g^{n}\left(s\right)ds;\ n-1\prec q\prec n,\ n=[q]+1,$$

où $[q]$ *dénote la partie entière du nombre réel* q.

Définition 4.2 *L'intégrle fractionnaire de Riemann-Liouvlle d'ordre* q *de la fonction* g *est* *défini par:*

$$I^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds, \ q \succ 0$$

à condition que l'intégrale existe.

Définition 4.3 *La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouvlle d'ordre q de la fonction g est défini par:*

$$D^q u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_0^t (t-s)^{n-q-1} g(s)\, ds, \ n = [q]+1,$$

à condition que le côté droit soit défini ponctuel sur $(0, \infty)$.

Lemme 4.1 ([16]) *Pour $q \succ 0$ la solution générale de l'équation différentielle fractionnaire ${}^cD^q u(t) = 0$ est donnée par*

$$u(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_{n-1} t^{n-1},$$

où $b_i \in \mathbb{R}, i = 0, ..., n-1$ $(n = [q]+1)$.

D'après Lemma 3.1 on obtient

$$I^q D^q u(t) = u(t) + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_{n-1} t^{n-1}, \tag{3.1}$$

pour certains $b_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, ..., n-1$ $(n = [q]+1)$.Pour une fonction donnée σ , l'équation différentielle la plus simple impliquant une fraction ordre $1 < q \leq 2$ est

$$D^q u(t) = \sigma(t), \ t \in [0, \ T].$$

En posant les conditions aux limites anti-périodique, on trouve le résultat suivant

$$\begin{cases} D^q u(t) = \sigma(t) \text{ pour } t \in [0, T], \ 1 \prec q \leq 2 \\ u(0) = -u(T), \ \acute{u}(0) = -\acute{u}(T). \end{cases} \tag{3.2}$$

Lemme 4.2 *Pour tout $\sigma \in C[0, T]$, il existe exactement une seule solution u pour le problème (3.2). De plus, la fonction u est une solution du problème (3.2) si et seulement si*

$$u(t) = \int_0^t G(t,s)\, u(s)\, ds$$

où $G(t,s)$ est la fonction de green est donnée par

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{(T-s)^{q-1}}{2\Gamma(q)}+\dfrac{(T-2t)(T-s)^{q-2}}{4\Gamma(q-1)} & si\ 0\leq t\prec s\leq T \\ \dfrac{(t-s)^{q-1}-\frac{(T-s)^{q-2}}{2}}{\Gamma(q)}+\dfrac{(T-2t)(T-s)^{q-2}}{4\Gamma(q-1)} & si\ 0\leq s\prec t\leq T \end{cases} \tag{3.3}$$

Preuve. En utilisant 3.1 on trouve que

$$u(t)=I^q\sigma(t)-b_0-b_1t=\int_0^t\frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}\sigma(t)\,ds-b_0-b_1t;$$

pour b_0, b_1 sont des constantes arbtraires. D'après la relation

$$D^qu(t)=D^qI^qu(t)=u(t),$$

et $I^q\ I^pu(t)=I^{q+p}u(t)$ pour $p,\ q,\in C[0,T]$, on obtient

$$\acute{u}(t)=\int_0^t\frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\sigma(s)\,ds-b_1$$

Appliqantnt les conditions aux limites $u(0)=-u(T),\acute{u}(0)=-\acute{u}(T)$, on trouve que

$$\begin{cases} b_0=\dfrac{1}{2\Gamma(q)}\int_0^T(T-s)^{q-1}\sigma(s)\,ds- \\ \dfrac{1}{4\Gamma(q-1)}\int_0^T(T-s)^{q-1}\sigma(s)\,ds \\ b_1=\dfrac{1}{2\Gamma(q-1)}\int_0^T(T-s)^{q-1}\sigma(s)\,ds; \end{cases}$$

c'est-à-dire la solution de (3.2) est

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t\frac{(t-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\sigma(s)\,ds-\frac{1}{2}\int_0^t\frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)}\sigma(s)\,ds+\frac{1}{4}(T-2t)\int_0^T\frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}\sigma(s)\,ds \\ &= \int_0^t G(t,s)\,u(s)\,ds \end{aligned}$$

■

On va utiliser le théorème du point fixe suivant pour démonter l'existence de la solution pour un problème non-linéaire.

Théorème 4.1 *Soit un sous ensemble borné dans espace de Banack E avec $0 \in \Omega$ et β : $\overline{\Omega} \to E$ est un opérateur compact. Alors β a un point fixe dans $\overline{\Omega}$ à condition*

$$\|\beta u - u\|^2 \geq \|\beta u\|^2 - \|u\|^2, u \in \Omega$$

4.2 Résultats d'existence [18]

Théorème 4.2 *On suppose qu'ils existes des constantes $0 \leq K \prec 4\Gamma(q+1)/(6+q)$ et $M > 0$ tel que $|f(t,u)| \leq \dfrac{K}{T^q}|u| + M$ pour tous $t \in [0,T]$, $u \in C[0,T]$. Alors le problème anti-périodique (3.1) a au moins une solution.*

Preuve.D'après le Lemme 3.2 u est la solution du problème (3.1) si et seulement si $\Gamma : [0,T] \to [0,T]$ vérifié les conditions suivantes

$$u = \Gamma(u), \tag{3.4}$$

où Γ est donné par:

$$\begin{aligned}(\Gamma u)(t) &= \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,u(s))ds - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)} f(s,u(s))ds \\ &+ \frac{1}{4}(T-2t)\int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)} f(s,u(s))ds,\end{aligned}$$

pour $t \in [0,T]$.Il suffit de montrer l'existence aux moins d'une solution $u \in C[0,T]$ satisfaite (3.1). On définit une boule convenable $B_R \subset C[0,T]$
avec un rayon $R > 0$ comme $B_R = \left\{ u \in C[0,T] : \underset{t\in[0,T]}{max}|u(t)| < R \right\}$, où R est fixé après. Alors il est suffisant de montrer que Γ: $\overline{B_R} \longrightarrow C[0,T]$ satisfait

$$u \neq \lambda \Gamma u, \text{ pour tout } u \in \partial B_R \text{ et pour tout } \lambda \in [0,1]. \tag{3.5}$$

Laissant poser $H(\lambda, u) = \lambda \Gamma u$, $u \in C(R)$, $\lambda \in [0,1]$. Alors d'après le théorème Arzela–Ascoli, $h_\lambda(u) = u - H(\lambda,u) = u - \lambda\Gamma u$ est complètement continu Si (3.5) est vraie, alors les degrés de Leray-Schauder sont bien définies et par invariance par homotopie de degrée topplogique, il suit que

$$\begin{aligned} deg(h_\lambda, B_R, 0) &= deg(I-\lambda\Gamma, B_R, 0) \\ &= deg(h_1, B_R, 0) \\ &= deg(h_0, B_R, 0) = deg(I, B_R, 0) = 1 \neq 0, \end{aligned}$$

pour $0 \in B_r$, ou I noté l'opérateur identique. Par la propriété de non-zéro de degré de Leray-Shauder, $h_1(t) = u - \lambda\Gamma u = 0$ pour aux moins un $u \in B_R$. pour démontrer (3.5), on suppose que $u = \lambda\Gamma u$ pour certain $\lambda \in [0,1]$ et pour tout $t \in [0,T]$ alors

$$|u(t)| = |\lambda\Gamma u(t)| \leq \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,u(s))|ds +$$
$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}|f(s,u(s))|ds +$$
$$\frac{1}{4}|T-2t| \int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q)}|f(s,u(s))|ds \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds$$
$$\leq \left(\frac{K}{T^q} \parallel u \parallel + M\right)\left[\begin{array}{c} \int_0^t \frac{(t-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds \\ +\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(T-s)^{q-1}}{\Gamma(q)}ds + \frac{1}{4}|T-2t|\int_0^T \frac{(T-s)^{q-2}}{\Gamma(q-1)}ds \end{array}\right]$$
$$\leq \left(\frac{K}{T^q} \parallel u \parallel + M\right)\left[\frac{t^q}{\Gamma(q+1)} + \frac{T^q}{2\Gamma(q+1)} + \frac{|T-2t|T^{q-1}}{4\Gamma(q)}\right]$$
$$\leq \left(\frac{K}{T^q} \parallel u \parallel + M\right)\left[\frac{3T^q}{2\Gamma(q+1)} + \frac{T^q}{4\Gamma(q)}\right] = \left(\frac{K}{T^q} \parallel u \parallel + M\right)\left[\frac{T^q(6+q)}{4\Gamma(q+1)}\right],$$

on prend la norme et on obtient

$$\parallel u \parallel \leq \frac{MT^q(6+q)}{4\Gamma(q+1) - k(6+q)}.$$

On pose $R = MT^q(6+q)/(4\Gamma(q+1) - (6+q) + 1)$, (3.5) est satisfaite ∎

Exemple 4.1 *Nous considérons le problème aux limites anti- périodique suivant*

$$\begin{cases} {}^cD^q u(t) = \frac{1}{(4\pi)} \sin\left(\frac{2\pi u}{T^q}\right) + \frac{|u|}{1+|u|} \text{ for } t \in [0,T],\ 1 < q \leq 2 \\ u(0) = -u(T), \quad \grave{u}(0) = -\grave{u}(T). \end{cases} \tag{3.6}$$

Il est claire

$$|f(t,u)| = \left|\frac{1}{(4\pi)}\sin\left(\frac{2\pi u}{T^q}\right) + \frac{|u|}{1+|u|}\right| \leq \frac{1}{2T^q} \parallel u \parallel + 1,$$

avec $k = 1/2 < 4\Gamma(q+1)/(6+q)$ *pour* $1 < q \leq 2$ *et* $M = 1$. *Ce ci la conclusion du théorème* 3.1 *implique au problème* (3.6) .

4.3 Conclusion

Dans ce mémoire on a étudié l'existance de la solution des problèmes aux limites anti-périodiques en utilisant la théorie de degré topologique de Leray-Schauder pour des systèmes fractionnaire non-linéaire.

D'autre part il ya plusieures approches pour étudier l'existance des solutions et notre but au futur c'est étudier la stabilité des solutions.

4.4 Bibliographie

[1] H. Amman, Ordinary Differential Equations, An Introduction to nonlinear Analysis, Studies in Mathematics, 13, Walter de Gryter, 1991.

[2] Bashir Ahmad — Juan J. Nieto, Existenceo of solutions for anyi-periodique boundary value promlems involving fractional differential equations via Leary-Schauder degree topologique, Topological Methods in Nonlinear Analysis Journal of the Juliusz Schauder Center Volume 35, 2010, 295–304.

[3] P. Böhl, (1904) Uber die bewegung eines machaniscsches systems in der nähe eine Gleichge-wichtslage. J.Reine Angew. Math. 127, 176, 179.

[3] L.E.J.Brouwer, (1912) Uber abbildung von Mannigfaltigkeitein. Math. Ann 71 ; pp. 97-115.

[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, (1983).

[5] G. Christol, C.M. Marle, Calcul Différentiel, ellipses,Paris 1997.

[7] J. Hadamard, (1910) Sur quelques applications de l'indice de Klonceker ; dans Sintroduction à la théorie des fonctions d'une variableT, par J. Tannery, Vol. II,Hermann, aris, pp. 875-915.

[8] Kavian, O. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, vol. 13. Springer, 1993.

[9] L. Krocker, (1869) Uber systeme von funktionen mehrer variabel n, Monatsberichte. Acad. wiss. Berlin, pp. 159-193, 688-698.

[10] A.A.A Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo Theory and applications of fractional differential Equations, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdam, (2006).

[11] Lévy-Bruhl, P. Introduction à la théorie spectrale - Cours et exercices corrigés. 2003.

[12] J.M. Ortega, and W.G. Rheinboldt, Iterative Solution Of Nonlinear Equations In Several

Variables, Academic press, New York, London. 1970.

[13] H. Poincaré, (1892,1899) Méthodes nouvelles de la mécanique céleste (3 volumes).

[14] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[15] E. Ramis, C. Deschamps,J. Odoux, Cours de mathématiques, Dunod, Paris,1998.

[16] Ma, T., and Wang, S. Bifurcation theory and applications, vol. 53. World Scienti c, 2005.

[17] Samko S.G., Klbas A.A. and Marichev O.I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, New York.

[18] S. Zhang, Positive solutions for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations, Electronic J. Differential Equations 2006 (2006), 1–12.