République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **Analyse mathématiques appliquées**

Par :

Melle Kouadria Nesrin et Melle Tolba Feriel

Intitulé

Existence de la Solution d'une équation intégro-différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire

Dirigée par : Frioui Assia

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr. K. Benarioua**	**MCA**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr. Assia Frioui**	**MCA**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Pr. A. Chaoui**	**Pr**	**Univ-Guelma**

Session Juillet 2021

Table des matières

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier Allah le tout puissant de m'avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience.

Nous adressons toute notre gratitude et nos remerciements les plus sincères à notre encadreure Madame "Frioui Assia", Maitre de conférence à l'université de Guelma pour tout le support qu'elle nous a apportée tout au long de la conception et la rédaction de ce mémoire. Nous tenons également à remercier vivement les membres de jury, Monsieur Benarioua Khadir Maitre de conférence à l'université de Guelma pour l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider cette soutenance et Monsieur le professeur Chaoui Abderrazek de la même université d'avoir examiner notre travail.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance à toute ma famille pour leur soutien et leur affection.

Merci à tous et que Dieu vous bénisse.

Dédicaces

Je dédie ce travail

A mes très chers parents, pour leur patience illimitée, leur encouragement contenu, leur aide, pour leurs grands sacrifices.

A mes frères Zine Eddine, Badre Eddine et mes chères soeurs pour leurs grands amours et leurs soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

Aux chères filles de ma soeur Zahra, Amani.

A toute ma famille.

A toutes mes amies.

Nesrine

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents, pour leurs patiences, leurs amours, les leurs soutiens et leurs encouragements, leurs confiance.

A mes soeurs Abir, Achouak, Khaouthar, et mon frère Habib Chawki.

A mes proches, mes neveux, Abddul Jalil, Jaida Tallinn.

Feriel

Résumé

L'objectif de ce mémoire s'inscrit dans l'étude de l'existence de la solution d'un problème aux limites associés à une équation et intégro-différentielles non linéaire d'ordre fractionnaire à conditions aux limites locales.

Mots clés : Dérivée fractionnaire, Problème aux limites, Théorème de Guo-Krasnoselskii.

Abstract

The objective of this memory, is devoted to the study of the existence of solution for boundary value problem generated by nonlinear integro-differential equations of fractional order with local boundary conditions.

Keywords : Fractional Derivative, Boundary value Problems, Guo-Krasnoselskii fixed point theorem.

0.1 Introduction

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques qui étudie la généralisation de la dérivation et l'intégration d'ordre entier n à un ordre non entier disons fractionnaire. Le concept de ces opérateurs différentiels d'ordre non entier est devenu une question essentielle que de nombreux mathématiciens ont rapidement développée. Cette question fondamentale datée du 30 septembre 1695 et considérée comme l'origine du calcul fractionnaire a été abordée dans une lettre de L'Hôpital adressée à Leibniz concernant la signification de la dérivée d'ordre un demi ($n = 1/2$). Leibniz a répondu « Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles ».

Pendant ces trois dernières décennies, ce concept a montré son énorme potentiel et un bon nombre de méthodes pour l'approximation de la dérivée et de l'intégrale fractionnaire ont été proposées. On peut citer les derivées fractionnaires de type Riemann-Liouville, Caputo, Grunwald-Letnikow, Weyl, Marchaud, Hadamard, Riesz, Kilbas, Podlubny,Samko, Katugampola ect...Pour plus de détails historiques voir $[5, 6, 7, 8, 9]$.

Récemment un intérêt considérable a été porté au calcul fractionnaire et les champs d'applications se sont diversifiés. Par exemple un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié à la modélisation mécanique des caoutchouc et des gommes, en général toutes sortes de matériaux qui conservent la mémoire des déformations. Les dérivées fractionnaires ont été également utilisées en économie, en biologie, dans le traitement d'image, le traitement du signal, la commande automatique et robotique ect.

L'étude des problèmes fractionnaires est d'actualité et plusieurs méthodes sont appliquées pour la résolution de ces problèmes. Néanmoins les méthodes basées sur le principe du point fixe se sont avérées très importantes.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Nous présentons dans ce chapitre quelques définitions fondamentales concernant les espaces fonctionnels, on définit ensuite les fonctions auxiliaires Gamma et Beta, puis on présentra les deux plus importantes approches de dérivation et d'intégration fractionnaire on évoquera plus particulierement celles de Riemann-Liouville et de Caputo.

On termine ce chapitre par un rappel de quelques théorèmes du point fixe utilisés dans ce travail.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence de la solution du problème integro-differentielle fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}u\right)(t) = f\left(t, u(t), \varphi u(t), \psi u(t)\right) \quad (0 < t < 1) \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$ et ${}^cD^{\alpha}\left({}^cD^{\beta}\right)$ désigne les dérivées fractionnaires au sens de Caputo et $f \in C\left([0,1] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}\right)$.

L'existence de la solution est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identifiée à un point fixe qui est somme d'un opérateur contractant et un opérateur compact sous certaines hypothèses suffisantes sur la fonction f . On termine ce chapitre avec deux exemples illustratifs.

Chapitre 1

Rappels et notions fondamentales

Dans ce chapitre nous allons présenter un préliminaire dans lequel on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui constitue le fondement de la théorie du calcul fractionnaire ainsi quelques théorèmes du point fixe notamment le principe de contraction de Banach, le théorème de Schauder, et le théorème bien connu de Krasnoselskii hybride.

1.1 Espaces fonctionnels

On rappelle quelques définitions d'analyse fonctionnelle qui sont utilisées dans les définitions des intégrales et dérivées fractionnaires.

1.1.1 Espaces des fonctions intégrales

Définition 1.1 [7] *Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.*

1. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable et

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

2. Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque *partout (p.p) sur* Ω

$$L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \quad , \quad \exists C > 0 \quad , \quad |f(x)| \leq C \quad p.p \ sur \ \Omega\}$$

Théorème 1.1 *Soit* $\Omega = [a, b]$ *un intervalle fini de* $\mathbb{R}$.

1. *Pour* $1 \leq p < +\infty$, *l'espace* $L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

2. *L'espace* $L^{\infty}(\Omega)$*est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_{\infty} = \inf \{M \geq 0 \ ; \ |f(x)| \leq M \quad p.p \ sur \ \Omega\}$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.2 *Soit* $\Omega = [a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N}$

On désigne par $C^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *qui ont leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n *continues sur* Ω, *muni de la norme :*

$$\|f\|_{C^n(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \left\|f^{(k)}\right\|_{C(\Omega)} = \sum_{k=0}^{n} \max_{x \in \Omega} \left|f^{(k)}(x)\right| \quad , \ n \in \mathbb{N}$$

En particulier si $n = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *continues sur* Ω *muni de la norme :*

$$\|f\|_{C(\Omega)} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

Définition 1.3 *La fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *est dite absolument continue sur* I *si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition finie d'intervalles disjoints* $[a_k, b_k]_{k=1}^{n}$

de Ω, on a la relation :

$$\sum_{k=0}^{n}(b_k-a_k)<\delta\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

Définition 1.4 *Soit $\Omega=[a,b]$ $(-\infty<a<b<\infty)$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$.*

On note par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions primitives des fonctions intégrables c'est à dire :

$$f\in AC(\Omega)\Longleftrightarrow\exists\varphi\in L^1([a,b])\ \text{telle que}\ f=c+\int_a^x\varphi(t)dt.$$

et on appelle $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω.

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels positifs (et même aux nombres complexe à parties réelles positives).

Définition 1.5 [3] *Soit $z\in\mathbb{C}$, la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z)=\int_0^{+\infty}t^{z-1}e^{-t}dt\quad,\quad Re(z)>0\tag{1.1}$$

(cette intégrale est convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$ et $Re(z)>0$)

Propriétés.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ et $Re(z)>0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a :

1.

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)\tag{1.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties de (1.1) :

$$\Gamma(z+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^z dt=\left[-e^{-t}t^z\right]_0^{+\infty}+z\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt=z\Gamma(z)$$

donc

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

2.

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

En particulier, on a :

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-z}z^{1-1}dz=1$$

et en utilisant (1.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1)=1! \\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2)=2.1!=2! \\
\Gamma(4) &= 3\Gamma(3)=3.2!=3! \\
&\vdots \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n)=n(n-1)!=n!
\end{aligned}$$

1.2.2 La fonction Beta

Elle fait partie des fonctions de base du calcul fractionnaire. Cette fonction fournit un outil fondamental quand elle est combinée avec la fonction Gamma.

Définition 1.6 [3] *La fonction Bêta est définie par l'intégrale suivant :*

$$\beta(z,\omega)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{\omega-1}dt \quad ,Re(z)>0 \quad ,Re(\omega)>0 \tag{1.3}$$

Propriétés.

La fonction Bêta est reliée aux fonctions Gamma par la relation suivante :

$$\beta(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)} \quad , Re(z) > 0, Re(\omega) > 0. \tag{1.4}$$

il s'ensuit que :

$$\forall\ z,\omega > 0\ ;\ \beta(z,\omega) = \beta(\omega,z) \qquad , Re(z) > 0, Re(\omega) > 0.$$

1.3 Intégrales et dérivées fractionnaires

Le but de cette partie est d'introduire les deux plus importantes approches du calcul fractionnaire à savoir celle de Riemann-Liouville et de Caputo, y compris quelques unes de leurs propriétés ainsi que la relation entre ces deux approches.

1.3.1 Calcul fractionnaire

Intégrale fractionnaire sur l'intervalle $[a,b]$

soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. On considere l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} I_a^1 f(x) &= \int_a^x f(t)dt \\ I_a^2 f(x) &= \int_a^x I^1 f(u)du \\ &= \int_a^x \left(\int_a^u f(t)dt\right) du \\ &= \int_a^x \left(\int_t^x du\right) f(t)dt \\ &= \int_a^x (x-t)f(t)dt, \end{aligned}$$

plus généralement le n^{ieme} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$\begin{aligned} I_\alpha^n f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy. En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction $f(x)$ peut être définie en utilisant la fonction Gamma $\Gamma(n) = (n-1)!$ donc, on peut définir l'intégration fractionnaire comme suit :

1.3.2 Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule d'intégrale répété n fois :

$$\begin{aligned} (I^n f)(s) &= \int_0^t ds_1 \int_0^{t_1} ds_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds \qquad (n \in \mathbb{N}^*) \end{aligned}$$

Définition 1.7 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha > 0$, on appelle intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre α notée $I^\alpha f$ est définie par :*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds.$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma .

Exemple 1.1 *Soient $\alpha > 0$, $\beta > -1$ et $f(t) = t^\beta$, alors :*

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^\beta ds$$

En effectuant le changement de variable

$$s = ty$$

où $y = 0$ *quand* $s = 0$ *et* $y = 1$ *quand* $s = t$ *et* $ds = tdy$, *alors*

$$\begin{aligned}
I^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (t - ty)^{\alpha - 1} (ty)^{\beta} t dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 [t(1-y)]^{\alpha-1} t^{\beta+1} y^{\beta} dy \\
&= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta} dy \\
&= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{(\beta+1)-1} dy
\end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction Bêta (1.3) *puis la relation entre la fonction Bêta et Gamma* (1.4), *on arrive à :*

$$\begin{aligned}
I^{\alpha} f(t) &= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \beta(\alpha, \beta + 1) \\
&= \frac{t^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\beta+\alpha}
\end{aligned}$$

Donc l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^{\beta}$ *est donnée par :*

$$I^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\beta+\alpha}$$

En particulier, cette relation montre que l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α *d'une constante est donnée par :*

$$I^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} t^{\beta+\alpha}$$

Propriétés.

Soit $f \in C[a,b]$. Pour α et β des nombres complexes où $Re(\alpha) > 0$ et $Re(\beta) > 0$ alors l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède les propriétés suivantes

$$I_a^\alpha \left[I_a^\beta f(x)\right] = I_a^{\alpha+\beta} f(x)$$

et pour $Re(\alpha) > 1$ on a

$$\frac{d}{dx} I_a^\alpha f(x) = I_a^{\alpha-1} f(x)$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Soit $f \in L^1([0,T]), T > 0$ une fonction intégrable sur $[0,T]$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction f d'ordre $\alpha > 0$ notée $D^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= D^n I^{n-\alpha} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds \quad ,t > 0 \end{aligned}$$

En particulier, si $\alpha = 0$, alors :

$$D^0 f(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \frac{d}{dt} \int_0^t f(s)ds = f(t)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\begin{aligned} D^n f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n+1} \int_0^t f(s)ds \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha \in \mathbb{N}$.

Si de plus $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$, d'où :

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \ , \ t > 0$$

Exemple 1.2 *Calculons la dérivée de $f(t) = t^{\beta}$ au sens de Riemann-Liouville.*

Soit $\alpha > 0$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $\beta > -1$,alors :

$$D^{\alpha} t^{\beta} = D^n I^{n-\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} D^n t^{\beta+n-\alpha} \tag{1.6}$$

En tenant compte

$$\begin{aligned} D^n t^{\beta+n-\alpha} &= (\beta+n-\alpha)(\beta+n-\alpha-1) \ldots\ldots. (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

On substitue ce resultat, dans la formule (1.6), *pour obtenir :*

$$\begin{aligned} D^{\alpha} t^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de la fonction $f(t) = t^{\beta}$ est donnée par :

$$D^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha}$$

En particulier, si $\beta = 0$ et $\alpha > 0$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante $f(t) = C$ est non nulle, sa valeur est :

$$D^{\alpha} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

Propriétés.

Pour $n-1 < \alpha \leq n$, $m-1 < \beta \leq m$, on a :

1. L'opérateur de Riemann-Liouville est linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f+g)(t)=\lambda(D^{\alpha}f)(t)+(D^{\alpha}g)(t),\lambda\in R$$

2. En général

$$D^{\alpha}(D^{\beta}f(t))\neq D^{\beta}(D^{\alpha}f(t))$$

Preuve. Soit $f,g\in L\in([0,T])$, $\lambda\in R$,on a :

$$\begin{aligned}D^{\alpha}(\lambda f+g)(t) &= D^{n}I^{n-\alpha}(\lambda f(t)+g(t))\\ &= \lambda D^{n}I^{n-\alpha}((f+g)(t))\end{aligned}$$

Comme la dérivée n^{ième} et l'intégrale sont linéaires alors :

$$\begin{aligned}D^{\alpha}(\lambda f+g)(t) &= \lambda D^{n}I^{n-\alpha}f(t)+D^{n}I^{n-\alpha}g(t)\\ &= \lambda(D^{\alpha}f)(t)+(D^{\alpha}g)(t)\end{aligned}$$

2) On a :

$$D^{\alpha}(D^{\beta}f(t))=D^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{k=0}^{m-1}D^{\beta-k}f(0)\frac{t^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)}$$

et

$$D^{\beta}(D^{\alpha}f(t))=D^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}D^{\alpha-k}f(0)\frac{t^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)}$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\alpha=\beta$ et $D^{\alpha-k}f(0)=0$, pour tout $k=1,2,...,n$ et $D^{\beta-k}f(0)=0$, pour tout $k=1,2,...,m$.

Ce qui complète la preuve. ■

1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, plusieurs auteurs y compris Caputo (1967-1969) ont rendu compte que cette définition doit être révisée, car les problèmes appliqués en visco-élasticité, mécanique des solides et en rhéologie exigent des conditions initiales physiquement interprétables par des dérivées classiques ce qui n'est pas le cas dans la modélisation par l'approche de Riemann-Liouville qui exige la connaissance des conditions initiales des dérivées fractionnaires.

Définition 1.8 [7] *Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n-1 < \alpha < n$ et $f \in C^n([0,T]), T > 0$.*

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^cD^\alpha f$ est définie par :

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha f(t) &= I^{(n-\alpha)}D^{(n)}f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}f^{(n)}(s)ds \end{aligned}$$

Exemple 1.3 *Calculons la dérivée de $f(t) = t^\beta$ au sens de Caputo*

Soit n un entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors on a :

$$f^{(n)}(s) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-n+\beta+1)}s^{\beta-n}$$

d'où

$${}^cD^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(-n+\beta+1)}\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds$$

En faisant le changement de variable

$$s = ty$$

où $t = 0$ *quand* $s = 0$ *et* $y = 1$ *quand* $s = t$ *et* $ds = tdy$*, alors :*

$$\begin{aligned} {}^cD^\alpha t^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(-n+\beta+1)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(-n+\beta+1)\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Donc la dérivée fractionnaie au sens de Caputo de la fonction $f(t) = t^\beta$ *est donnée par :*

$${}^cD^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} t^{\beta-\alpha}$$

En particulier, la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre $\alpha > 0$ *d'une constante* $C \in R$ *exprime que cette dérivée est nulle c'est-à-dire :*

$${}^cD^\alpha C = 0$$

Remarque 1.1 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha \in]m-1, m[$ *s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre* $m - \alpha$ *suivit d'une dérivation classique d'ordre* m*, alors que la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations. La dérivée fractionnaire au sens de caputo d'une fonction constante* $f(t) = C$ *est nulle autrement dit* ${}^cD_a^\alpha C = 0$.

1.3.5 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.2 *Soit* $\alpha > 0$*,avec* $n - 1 < \alpha < n$ *,*$(n \in \mathbb{N}^*)$*, et soit* f *une fonction telle* *que les dérivées fractionnaires* ${}^{c}D^{\alpha}f(t)$ *et* $D^{\alpha}f(t)$ *existent alors :*

$$ {}^{c}D^{\alpha}f(t) = D^{\alpha}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(k-\alpha+1)} t^{k-\alpha} $$

Remarque 1.2 *Le résultat du théorème signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction* f *est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de* f *.*

1.4 Quelques théoreme du point fixe

Dans cette partie nous allons présenter quelques théorèmes du point fixe. A savoir le théorème du point fixe de Banach, celui de Schauder et de Krasnoselskii.

Le développement de la théorie du point fixe a été un des plus important outil d'existence dans l'étude des problèmes aux limites, cette théorie consiste à transformer le problème donné en un problème de point fixe en construisant un opérateur. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles et intégro-différentielles.

Définition 1.9 ***(Point fixe)*** *Soit* T *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle point fixe tout point* $x \in X$ *tel que* $T(x) = x$.

1.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Théorème 1.3 *(Principe de contraction de Banach). Soit* (M, d) *un espace métrique complet et soit* $T : M \to M$ *une application contractante i.e qu'il existe* $0 < k < 1$ *telle* *que* $d(T(x), T(y)) \leq k\ d(x, y)$ *;* $\forall\ x, y \in M$*, alors* T *admet un unique point fixe* $x^* \in M$*, de plus pour tout* $x \in M$ *on a :* $\lim\limits_{n \to \infty} T^n(x) = x^*$ *et,*

$$d(T^n(x), x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x)).$$

Preuve. La preuve est bien connue. Elle établit que toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie inductivement par $x_{n+1} = T(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers $x^* = T(x^*)$. En ce qui concerne l'unicité en effet, nous obtenons la contradiction suivante en supposant l'existence de deux points fixes distincts x_1^* et x_2^* pour une contraction T

$d(x_1^*, x_2^*) = d(T(x_1^*), T(x_2^*)) \leq k\ d(x_1^*, x_2^*) < d(x_1^*, x_2^*)$, c'est à dire, $k \geq 1$ d'où la contradiction. ■

1.4.2 Théorème du point fixe de schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est l'un des résultats les plus célèbres de la théorie du point fixe et il affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe qui n'est pas nécessairement unique.

Théorème 1.4 [10] *(Théorème du point fixe de Schauder). Soit* K *un sous ensemble non vide, compact, convexe dans un espace de Banach* E *et supposons* $T : K \to K$ *une application continue. Alors* T *admet un point fixe.*

Théorème 1.5 [10] *(Théorème du point fixe de Schauder généralisé) Soit* F *un ensemble fermé convexe sur un espace de Banach* X *et soit* $T : F \to F$ *une application continue telle que* $T(F)$ *soit un sous-ensemble relativement compact de* F*. Alors* T *admet un point fixe.*

1.4.3 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Nous donnons un théorème d'existence du point fixe concernant les applications de la forme T = A + B ; où A est continue et compacte et B une contraction.

Théorème 1.6 [1] *Soit K un convexe fermé et non vide d'un espace de Banach X. Supposons que A et B sont deux applications de K dans X telles que*

i. $Ax + By \in K, \forall x, y \in K$.

ii. A est continue et compacte

iii. B est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors, il existe $x \in K$, avec $Ax + Bx = x$

Lemme 1.1 *Soient $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et K un sous ensemble non vide de X. Soit $B : K \to X$ une contraction. Alors $(I - B) : K \to (I - B)(K)$ est un homéomorphisme où I désigne l'identité.*

Notons, que si $A = 0$, le théorème se résume au théorème de **Banach**. Si $B = 0$, alors le théorème n'est autre que le théorème de **Schauder**.

Preuve. soient A, B deux applications vérifiant l'hypothese , on a B est contractant alors $\exists\ \alpha$ telque $0 < \alpha < 1$ et

$$\| B(x) - B(y) \| \leq \alpha \| x - y \|, \forall x, y \in K.$$

D'aprés le lemme $(I - B)$ est un homeomorphisme alors $(I - B)^{-1}$existe et continue. D'autre part, pour tous $y \in K$ l'application $\varphi : K \to K$ définie par : $\varphi(x) = B(x) + A(y)$ admet unique solution $x \in K$ puisque l'application $x \to Bx + Ay$ définit une contraction de K dans lui meme grace a théoreme de banach. Ainisi $A(y) \in (I - B)K$ pour tout $y \in K$ et $(I - B)^{-1}A : K \to K$ est aussi compact car : si A est compact alors $AK \subset K$ avec K compact de X.$(I - B)^{-1}(AK) \subset (I - B)^{-1}(K)$ avec $(I - B)^{-1}(K)$ compact car $(I - B)^{-1}$est continue donc $(I - B)^{-1}A : K \to K$ est compact. D'aprés le théoreme de Schauder,$(I - B)^{-1}A$ possede un point fixe dans M. ∎

1.4.4 Notion sur les opérateurs

Définition 1.10 *Soient X, Y deux espaces de Banach et A un opérateur défini de X dans Y .*

1) A est dit compact si l'image de X par A i.e. l'ensemble $A(X)$ est relativement compact dans Y.

2) A est dit complètement continu s'il est continu et l'image de tout borné de X est relativement compact dans Y .

1.4.5 Théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 1.7 ***(Théorème d'Ascoli-Arzela)*** *Soit $X = C([a, b])$ muni de la norme $\|u\| = \max_{a\leq t\leq b} |u(t)|$, avec $-\infty < a < b < +\infty$. Si M est un sous ensemble de X tel que :*

(i) M est uniformément borné, i.e. $\exists r > 0$, $\|u\| < r$, $\forall u \in M$.

(ii) M est équicontinu, i.e. $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ tel que $|t_1 - t_2| < \delta$ et

$u \in M \Rightarrow |u(t_1) - u(t_2)| < \epsilon$. Alors M est relativement compact.

Chapitre 2

Existence de solution pour un problème aux limites aux dérivées fractionnaires

2.1 Introduction

Durant ces dernières années les équations inégro-différentielles fractionnaires ont connu un essor considérable et sont devenues un important sujet de recherche. Cependant, et à cause de leur grande importance dans les applications, notamment dans la modélisation de nombreux phénomènes dans divers domaines tels que la physique, la biophysique, la chimie, la biologie, la théorie du contrôle, l'économie ect..., l'étude de ce type d'équations a fait alors l'objet de plusieurs travaux et de nombreux resultats ont été obtenus.

Dans ce contexte, nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre moyennant le théorème de Krasnoselskii l'existence de la solution du problème fractionnaire suivant :

$$(P)\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}\left({}^{c}D^{\beta}u\right)(t) = f\left(t, u\left(t\right), \varphi u\left(t\right), \psi u\left(t\right)\right) \quad (0 < t < 1) \\ u\left(1\right) = u\left(0\right) = u'\left(1\right) = 0 \end{cases}$$

où ${}^{c}D^{\alpha}\left({}^{c}D^{\beta}\right)$ désigne une suite de dérivées fractionnaires d'ordre α et β de Caputo, $1 < \alpha \leq 2$, $0 < \beta \leq 1$ et f $[0,1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue avec

$$\varphi u(t) = \int_0^t \gamma(t,s)\, u(s)\, ds \ and\ \psi u(t) = \int_0^t \lambda(t,s)\, u(s)\, ds.$$

où γ, λ : $[0,1] \times [0,1] \to [0,+\infty)$ sont telles que

$$\sup_{t\in[0,1]} \left(\int_0^1 \lambda(t,s)\, ds \right) < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{t\in[0,1]} \left(\int_0^1 \gamma(t,s)\, ds \right) < \infty.$$

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques lemmes que nous utiliserons pour la preuve du résultat principal.

Lemme 2.1 [3] *Si $\alpha > 0$ alors l'équation différentielle*

$${}^{c}D^{\alpha}u(t) = 0$$

admet une solution

$$u(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1},$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, (n est le plus petit entier tel que $n \geq \alpha$).

Lemme 2.2 [3] *Pour $\alpha > 0$ et $u \in C^n[0,1]$, alors*

$$I^{\alpha}\left({}^{c}Du\right)(t) = u(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1} t^{n-1}.$$

où $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ (n est le plus petit entier tel que $n \geq \alpha$).

Soit $X = C(I)$ l'espace des fonctions continues à valeurs réelles sur $I = [0,1]$ muni de la norme $\|u\| = \max_{t\in I} |u(t)|$.

Pour commencer étudions un problème auxilliaire donné par le lemme préliminaire suivant :

Lemme 2.3 *Pour $y \in C[0,1]$ alors le problème aux limites*

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha \left({}^cD^\beta u\right)(t) = y(t)\,,\ 0 < t < 1, 1 < \alpha \leq 2 \ \text{et}\ 0 < \beta \leq 1 \\ u(1) = u(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

admet une solution unique donnée par

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s)\,ds \\ &\quad + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta)} (-\beta - 1 + \beta t) \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s)\,ds \\ &\quad + \frac{t^\beta}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} (1-t) \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s)\,ds \end{aligned} \tag{2.2}$$

Preuve. Par application du lemme 2.2, le problème (2.1) est équivalent à l'équation intégrale suivante :

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} y(s)\,ds + \frac{t^\beta}{\beta\Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^{\beta+1}}{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)} c_1 + c_2. \tag{2.3}$$

Par dérivation des deux membres de (2.3) on obtient

$$u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \int_0^t (t-s)^{\alpha+\beta-2} y(s)\,ds + \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} c_0 + \frac{t^\beta}{\beta\Gamma(\beta)} c_1.$$

En utilisant les condtions $u(1) = u(0) = u'(1) = 0$, on trouve

$$c_0 = -\left(\frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right)\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s)\,ds + \frac{\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s)\,ds,$$

$$c_1 = \frac{\beta^2(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} y(s)\,ds - \frac{\beta(\beta+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} y(s)\,ds,$$

$$c_2 = 0.$$

En Substituant les valeurs c_0, c_1 et c_2 dans (3.3) on obtient (3.2). Ce qui achève la démonstration. ■

2.3 Existence de la solution

Nous donnons à présent le théorème principal de ce chapitre, soit celui d'existence de la solution du problème (P) basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii hybride.

Théorème 2.1 *Supposons que $\alpha + \beta - 2 \geq 0$ et qu'il existe une fonction positive $\theta(t) \in L^1(0,1)$ telle que*

$$|f(t,x,y,z) - f(t,x',y',z')| \leq \theta(t)\left(|x-x'| + |y-y'| + |z-z'|\right) \tag{2.4}$$

pour tout $t \in [0,1]$ et $t, x, y, z, t', y', z' \in \mathbb{R}$. Alors le problème (P) admet au moins une solution dans X quand

$$\frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)(\alpha+2\beta+1)\,\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)} < 1. \tag{2.5}$$

où $\gamma_0 = \sup_{t\in I}\left|\int_0^t \gamma(t,s)\,ds\right|$, $\lambda_0 = \sup_{t\in I}\left|\int_0^t \lambda(t,s)\,ds\right|$ et $\theta^* = \int_0^1 \theta(s)\,ds$.

Preuve. Choisissons

$$R \geq \frac{\varpi\left(\alpha+2\beta+1\right)}{1-\theta^{*}\left(1+\lambda_{0}+\gamma_{0}\right)\left(\alpha+2\beta+1\right)},$$

et soit $\varpi = \max\left\{f\left(t,0,0,0\right): \ t \in I\right\}$. Considérons l'ensemble $B_R = \{u \in X : \|u\| \leq R\}$, alors B_R est un ensemble fermé , borné et convexe de X. Définissons deux opérateurs A and B sur X comme suit :

$$\begin{aligned}
Au\left(t\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\beta+\alpha-1} f\left(s,u\left(s\right),\varphi u\left(s\right),\psi u\left(s\right)\right)ds. \\
Bu\left(t\right) &= \frac{t^{\beta}}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\left(-\beta-1+\beta t\right)\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\beta+\alpha-1} f\left(s,u\left(s\right),\varphi u\left(s\right),\psi u\left(s\right)\right)ds \\
&\quad + \frac{t^{\beta}\left(\alpha+\beta-1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\left(1-t\right)\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{\alpha+\beta-2} f\left(s,u\left(s\right),\varphi u\left(s\right),\psi u\left(s\right)\right)ds.
\end{aligned}$$

Pour tout $u \in B_R$ et $t \in I$, en utilisant l'inégalité (2.4) on obtient

$$\left|Au\left(t\right)\right| = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha+\beta\right)}\int_{0}^{t}\left(t-s\right)^{\beta+\alpha-1}\left|f\left(s,u\left(s\right),\varphi u\left(s\right),\psi u\left(s\right)\right)\right|ds$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} \left| f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) - f(s,0,0,0) \right| ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} \left| f(s,0,0,0) \right| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} \theta(s) \left(|u(s)| + |\varphi u(s)| + |\psi u(s)| \right) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} \left| f(s,0,0,0) \right| ds \\
&\leq \frac{(1+\lambda_0+\gamma_0)\|u\|}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 \theta(s)\, ds + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta+\alpha-1} ds \\
&\leq \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)}
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\|Au\| \leq \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{2.6}
$$

De manière analogue, estimons $\|Bv\|$, soit $v \in B_R$ et $t \in I$, alors

$$\begin{aligned}
|Bv(t)| &\leq \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\beta+1-\beta t)\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}|f(s,v(s),\varphi v(s),\psi v(s))|\,ds \\
&\quad +\frac{t^{\beta}(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(1-t)\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2}|f(s,v(s),\varphi v(s),\psi v(s))|\,ds \\
&\leq \frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}\theta(s)(|v(s)|+|\varphi v(s)|+|\psi v(s)|)\,ds \\
&\quad +\frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1}|f(t,0,0,0)|\,ds \\
&\quad +\frac{(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2}\theta(s)(|v(s)|+|\varphi v(s)|+|\psi v(s)|)\,ds \\
&\quad +\frac{(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2}|f(t,0,0,0)|\,ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)\frac{(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|v\|+\frac{\varpi(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&\quad +\frac{(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)\|v\|+\frac{\varpi(\alpha+\beta-1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|v\|+\frac{\varpi(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= \frac{(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)\|v\|+\varpi)
\end{aligned}$$

dés lors

$$\|Bv\| \leq \frac{(\alpha+2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)\|v\|+\varpi). \tag{2.7}$$

En tenant compte des quantités (2.6) et (2.7) on obtient pour tout u, $v \in B_R$ et $t \in I$:

$$\begin{aligned}
\|Au + Bv\| &\leq \|Au\| + \|Bv\| \\
&\leq \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \|u\| + \frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&\quad + \frac{(\alpha + 2\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0) \|v\| + \varpi) \\
&\leq R \frac{\theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&\quad + \frac{\varpi (\alpha + 2\beta + 1)}{\Gamma(\alpha+\beta)},
\end{aligned}$$

comme

$$R \geq \frac{\varpi (\alpha + 2\beta + 1)}{1 - \theta^* (1 + \lambda_0 + \gamma_0)(\alpha + 2\beta + 1)}$$

alors $\|Au + Bv\| \leq R$, donc $Au + Bv \in B_R$.

Prouvons maintenant que B est une contraction. Soient $v, u \in B_R$ et $t \in I$, en vue de la condition (2.4) il en suit que

$$\begin{aligned}
|Bu(t) - Bv(t)| &\leq \frac{t^\beta (\beta + 1 - \beta t)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \times \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) \\
&\quad - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| \, ds \\
&\quad + \frac{t^\beta (1-t)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} \times \int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s)) \\
&\quad - f(s, v(s), \varphi v(s), \psi v(s))| \, ds \\
&\leq \frac{\beta+1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 (1-s)^{\beta+\alpha-1} \theta(s) (|u(s) - v(s)| \\
&\quad + |\varphi u(s) - \varphi v(s)| + |\psi u(s) - \psi v(s)|) \, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\int_0^1 (1-s)^{\alpha+\beta-2}\,\theta(s)\,(|u(s)-v(s)| \\
&+|\varphi u(s)-\varphi v(s)|+|\psi u(s)-\psi v(s)|)\,ds \\
\leq\;& \frac{(\beta+1)(1+\gamma_0+\lambda_0)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 \theta(s)\,ds \\
&+\frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)(\alpha+\beta-1)\|u-v\|}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 \theta(s)\,ds \\
\leq\;& \frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)(\alpha+2\beta)\,\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|u-v\|
\end{aligned}
$$

dés lors

$$\|Bu-Bv\|\leq\frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)(\alpha+2\beta)\,\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|u-v\|,$$

En vertu de la condition (2.5),on en que déduit que B est une contraction.

Prouvons à présent que A est compact et continu. D'après la définition de l'opérateur A, on déduit que la continuité de f implique celle de A. De plus et en vertu de (2.6) on a

$$
\begin{aligned}
\|Au\| \;&\leq\; \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\|u\|+\frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&\leq\; \frac{\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)}{\Gamma(\alpha+\beta)}R+\frac{\varpi}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
\end{aligned}
$$

ce qui implique que A est uniformément borné sur B_R .

Soit $L=\max_{0\leq s\leq 1}\{|f(s,u(s),\varphi u(s),\psi u(s))|, u\in B_R\}$. Soient t_1, $t_2\in I$, $t_1\leq t_2$ et $u\in B_R$. On a

$$
\begin{aligned}
|Au(t_2)-Au(t_1)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\Bigg|&\int_0^{t_2}(t_2-s)^{\beta+\alpha-1} f(s,u(s),\varphi u(s),\psi u(s))\,ds \\
&-\int_0^{t_1}(t_1-s)^{\beta+\alpha-1} f(s,u(s),\varphi u(s),\psi u(s))\,ds\Bigg|
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left((t_2 - s)^{\beta+\alpha-1} - (t_1 - s)^{\beta+\alpha-1} \right) |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| \, ds$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta+\alpha-1} |f(s, u(s), \varphi u(s), \psi u(s))| \, ds$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^{t_1} \left((t_2 - s)^{\beta+\alpha-1} - (t_1 - s)^{\beta+\alpha-1} \right) ds + \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\beta+\alpha-1} \, ds \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} \left(t_2^{\beta+\alpha} - t_1^{\beta+\alpha} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent si $t_2 \to t_1$, alors $|Au(t_2) - Au(t_1)| \to 0$. Alors A est équicontinu. En vue du théorème d'Ascoli-Arzela on déduit que A est compact dans B_R et donc l'opérateur A est complètement continu. Ainsi toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Krasnoselskii sont satisfaites, par conséquent le problème (P) possède au moins une solution dans X. ■

2.4 Exemples

Comme applications et illustration des résultats considérons les deux exemples suivants :

Exemple 2.1 *Considérons le problème aux limites fractionnaire* (P) *avec* $f(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{4} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{1+x_i^2(t)}$, $\alpha = \frac{9}{5}$, $\beta = \frac{3}{5}$. *Nous avons* $f(t, 0, 0, 0) = \frac{3t^{\frac{1}{2}} e^{-t}}{4}$ *donc* $\varpi = 0.31$.*Posons* $\lambda(t, s) = \gamma(t, s) = ts$, *alors on a* $\gamma_0 = \lambda_0 = \frac{1}{2}$.

De plus, nous pouvons vérifier que les conditions (2.4) *et* (2.5) *sont bien satisfaites.*

En effet,

$$\begin{aligned}
& |f(t,x_1,x_2,x_3)-f(t,y_1,y_2,y_3)| \\
\leq\ & \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4}\sum_{i=1}^{3}\left(\left|\frac{1}{1+x_i^2}-\frac{1}{1+y_i^2}\right|\right) \\
\leq\ & \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4}\sum_{i=1}^{3}\frac{|x_i-y_i|\,|x_i+y_i|}{(1+x_i^2)(1+y_i^2)} \\
\leq\ & \frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4}\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i|
\end{aligned}$$

donc $\theta(t)=\frac{t^{\frac{1}{2}}e^{-t}}{4}$ *et* $\theta^*=\frac{0.378\,94}{4}$ *et*

$$\frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)(\alpha+2\beta+1)\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)}=0.610\,13<1.$$

Par conséquent, et en vertu du théorème 2.1*, nous concluons que le problème a au moins une solution dans* B_R *avec*

$$R\geq\frac{\varpi(\alpha+2\beta+1)}{1-\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta+1)}=5.\,121\,4$$

Exemple 2.2 *Considérons le problème aux limites fractionnaire* (P) *avec*

$$f(t,x,y,z)=10^{-2}\left(t\sin x+e^t\sin 2y+\frac{1+t^2}{1+z^2}\right),$$

$\alpha=1.3,\ \beta=0.4.$ *Alors* $f(t,0,0,0)=10^{-2}(1+t^2)$, *donc* $\varpi=0.02$. *Soit* $\lambda(t,s)=e^{t+s}$, $\gamma(t,s)=(t-s)^{\beta}$, *donc* $\gamma_0=1.7183,\ \lambda_0=0.71429$. *La condition* (2.4) *est satisfaite, en effet*

$$|f(t,x_1,x_2,x_3)-f(t,y_1,y_2,y_3)|\leq 0.02e^t\sum_{i=1}^{3}|x_i-y_i|$$

Prenons $\theta(t) = 0.02e^t$ *donc* $\theta^* = 3.4366 \times 10^{-2}$. *La condition* (2.5) *est vérifiée, en effet*

$$\frac{(1+\gamma_0+\lambda_0)(\alpha+2\beta+1)\,\theta^*}{\Gamma(\alpha+\beta)} = 0.40246 < 1.$$

Par conséquent, nous concluons via le théorème 2.1*, que le problème a au moins une solution dans* B_R *avec*

$$R \geq \frac{\varpi(\alpha+2\beta+1)}{1-\theta^*(1+\lambda_0+\gamma_0)(\alpha+2\beta+1)} = 9.7744 \times 10^{-2}.$$

Conclusion

Dans ce mémoire on a appliqué la dérivation fractionnaire à l'étude d'un problème aux limites fractionnaire non linéaire avec des conditions aux limites locales.

Tout d'abord on a rappelé dans le premier chapitre quelques notions des dérivées fractionnaires comme la dérivée fractionnaire au sens de au sens de Riemann-Liouville et de Caputo et quelques outils de base du calcul fractionnaire avec quelques propriétés. Ensuite et à travers le chapitre deux on a présenté via le théorème de Kranoselskii le résultat d'existence de la solution d'un problème aux limites associé à une équation intégro-différentielle non linéaire impliquant des dérivées succéssives α et β fractionnaire prise au sens de Caputo où $\alpha \in]1,2]$ et $\beta \in]0,1]$. Enfin nous avons terminé ce chapitre avec quelques exemples numériques illustrant les résultats obtenus.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, Y. Zhou and Y. He : Existence of fractional neutral functional differential équations,

Comput.Math. Appl. 59 (3) (2010), 1095-1100.

[2] Bragdi, A., Frioui, A. & Guezane Lakoud, A. Existence of solutions for nonlinear fractional integro-differential equations. Adv Differ Equ 2020, 418 (2020)

[3] Kilbas, AA, Srivastava, HM, Trujillo, JJ :Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Boston, 2006.

[4] Leibniz GW, L'Hopital G. Leibniz ensgesammelteWerke, Lebinizens mathematische Schriften, Erste Abtheilung, Band II. Pertz G. H. et Gerhardt C. J. ; 1849.

[5] Miller, KS, Ross, B : An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. Wiley, New York (1993).

[6] K. B. Oldam, J. Spanier : The fractional calculus, Academic Press. Inc (1974).

[7] Podlubny, I : Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, San Diego (1999)

[8] B. Ross : Fractional Calculus and its Applications, Lecture Notes in Mathematics, chapter A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus, vol 457 ; pp. 1 - 36. Springer-Verlag, New York, (1975).

[9] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Maritchev : Intégrals and Derivatives of the Fractional Order and Some of Their application, Nouka,Technika, Minsk, (1987).

[10] E. Zeidler : Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.