République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

FRIHI Nour EL Houda

Intitulé

Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions exponentiellement convexes via des intégrales fractionnaires

Dirigé par : **Dr.LAKHAL Fahim**

Devant le jury

PRESIDENT :	Dr. BOUSSETILA Nadjib	Prof	Univ-Guelma
RAPPORTEUR :	Dr.LAKHAL Fahim	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR :	Dr. BOULARES Hamid	MCB	Univ-Guelma

Session Juillet 2021

REMERCIEMENTS

*Mes remerciements vont en premier lieu , à <<**ALLAH**>> Dieu le Tout puissant , qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce Modeste travail.*

En second lieu, Je voudrais exprimer ma profonde gratitude envers mon Encadreur Dr. ***Lakhal Fahim*** *directeur de ce mémoire De fin d'étude master 2 en mathématique , pour sa disponibilité la Confiance qu'il m'a accordé , et pécieux conseils qui m'ont permis de mener à bien ce travail . Merci énormément .*

Je tiens à remercier Pro. ***Boussetila Nadjib*** *, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thése .*

*J'adresse mes remerciements à Dr.****Boulares Hamid*** *, d'avoir accepté d'examiner , évaluer et juger mon travail.*

Veuillez accepter ce travail, en gage de mon grand respect et ma Profonde reconnaissance.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A mes parents en guise de remerciement et de reconnaissance

Pour tout la confiance , le soutien et l'aide qu'ils m'ont rappoté

Tout en m'encourageant pour empreinter la voie de la réussite.

*A toutes mon frère <<**Adem** et **koussai**>> qui étaient toujours*

à mes cotés pour me soutenir et m'aider dans les moments

difficiles,

A tous mes professeurs qui ont eu la générosité de partager leur

Savoir et de nous l'inculquer sans relache.

A tous mes amis

A Tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon

cœur , je dis grand merci

De la part de Nour el Houda

الملخص:

في هذه الاطروحة، سوف نركز على دراسة المتراجحات من نوع هرميت-هادامار للتوابع التي تحقق أنواعا معينة من التحدب: محدبة أسيا، (p,h)-محدبة بشكل أسي، m- محدبة وكذلك (s,m)-محدبة وهذا عبر تكاملات ريمان-ليوفيل الكسرية.

الكلمات المفتاحية: تابع محدب ، تابع محدب أسيًا ، متراجحة هولدار، تكامل ريمان-ليوفيل الكسري، تابع جاما، تابع بيتا ، تابع غاوس للهندسة المفرطة

Résumé

Dans ce mémoire, nous concentrerons à l'étude des inégalités de type Hermite-Hadamard pour des fonctions vérifiant certains types de convexité : exponentiellement convexe, (p,h)-exponentiellement convexe ainsi que m-convexe et (s,m)-convexes via les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville.

Mots clés: fonction convexe, fonction exponentiellement convexe, inégalité de Hölder, intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, fonction gamma, fonction bêta, fonction hypergéométrique de Gauss

Abstract

In this thesis, we will focus on the study of Hermite-Hadamard-type inequalities for functions satisfying certain types of convexity: exponentially convex, (p, h) - exponentially convex as well as m-convex and (s, m) -convex via Riemann-Liouville fractional integrals.

Keywords: convex function, exponentially convex function, Hölder's inequality, Riemann-Liouville fractional integral, gamma function, beta function, Gauss hypergeometric function.

Table des matières

Introduction

Les inégalités intégrales jouent un rôle important dans le développement de toutes les branches mathématiques modernes telle que la théorie des probalilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, et l'analyse numérique. Une inégalité très intéressante qui est largement étudiée dans la littérature est due à Hermite et Hadamard qui l'ont découverte indépendamment (découverte par Charles Hermite en 1883 et prouvée par Jaques Hadamard en 1893), voir [[9] , [11]] . Maintenant elle est connue comme l'inégalité d'Hermite-Hadamard, on peut dire qu'elle est le premier résultat fondamental pour les fonctions convexes avec une interprétation géométrique naturelle et de nombreuses applications. Elle nous génère une estimation de la valeur moyenne de la fonction convexe sur un intervalle borné. Ce célèbre résultat est donné comme suit :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Ces dernières années, de nombreux chercheurs ont accordé beaucoup d'attention à la théorie de la convexité en raison de sa grande utilité dans divers domaines des sciences pures et appliquées. La

théorie des fonctions convexes et les inégalités sont étroitement liées. Le concept des fonctions convexes à effectivement trouvé une place importante dans les mathématiques modernes, comme on peut le voir dans de grand nombre d'articles de recherche et des livres consacrés au domaine de nos jours.

Beaucoup de mathématiciens ont consacré leurs efforts à généraliser et raffiner cette inégalité et l'étendre à différentes classes de fonctions : fonctions s-convexes, fonctions p-convexes, etc. et l'appliquer à des moyennes spéciales (la moyenne arithmétique, la moyenne géométrique , etc.).

L'objectif de ce travail est d'étudier et généraliser quelques inégalités intégrales pour certains type de convexités en utilisant l'approche fractionnaire au sens de Riemann-Liouville en passant par une introduction et trois chapitres. Le premier chapitre est consacré aux inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions exponentiellement convexes et exponentiellement (p, h)-convexes. Dans le deuxième chapitre nous présentons certains Théorèmes concernant les inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes de type exponentielle. Dans le troisième chapitre on donne certains Théorèmes concernant les fonctions exponentiellement m-convexes et (s, m)-convexes dans le cas fractionnaire, et on termine notre mémoire par quelques applications.

Chapitre 1

Inégalités pour Certains types de convexité

La convexité joue un rôle très important dans la théorie classique de l'optimisation. Elle est un outil indispensable pour la recherche des conditions à la fois nécessaires et suffisantes d'optimalité.

L'objectif de ce chapitre est de donner quelques résultats concernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour Certains types de convexité.

1.1 Inégalité de type Hermite-Hadamard pour les fonctions exponentiellement convexes

Définition 1.1 [1] *La fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y), \tag{1.1}$$

pour tout $x,\, y \in I$ et $t \in [0,1]$. On dit que f est concave si (-f) est convexe.

Exemple 1.1 1) *$f(x) = x^2$ est une fonction convexe dans $\mathbb{R}$.*

2) *$f(x) = e^x$ est une fonction convexe dans $\mathbb{R}$*

3) *$f(x) = |x|$ est convexe dans $\mathbb{R}$.*

Définition 1.2 [1] *On dit que $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction exponentiellement convexe si pour tout x, $y \in I$, $t \in [0,1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a :*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)\frac{f(x)}{e^{\alpha x}} + t\frac{f(y)}{e^{\alpha y}}. \tag{1.2}$$

Lemme 1.1 [1] *Soit $f : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° où I° est l'intérieur de I. Si $f' \in L_1[a,b]$ alors :*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du - \frac{f(a)+f(b)}{2} = \frac{b-a}{2}\left[\int_0^1 (1-2t)f'((1-t)a+tb)dt\right]. \tag{1.3}$$

Théorème 1.1 [1] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable et exponontiellement convexe alors :*

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du \leq \frac{e^{-\alpha a}f(a) + e^{-\alpha b}f(b)}{2}.$$

Preuve. Soit f une fonction exponontiellement convexe alors :

$$2f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)}{e^{\alpha x}} + \frac{f(y)}{e^{\alpha y}}.$$

soit $x = (1-t)a + tb$ et $y = ta + (1-t)b$ on a :

$$2f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{f((1-t)a+tb)}{e^{\alpha((1-t)a+tb)}} + \frac{f(ta+(1-t)b)}{e^{\alpha(ta+(1-t)b)}}$$

En intégrant par rapport à t sur l'intrevalle $[0,1]$ et en utilisant le changement de variable on a :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du. \tag{1.4}$$

Utilisons encore le fait que f est une fonction exponontiellement convexe on a :

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t)\frac{f(a)}{e^{\alpha a}} + t\frac{f(b)}{e^{\alpha b}}$$

Intégrons par rapport à t sur l'intrevalle $[0,1]$ on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du \leq \frac{e^{-\alpha a}f(a) + e^{-\alpha b}f(b)}{2} \tag{1.5}$$

En ajoutant les inégalités (1.4) et (1.5) nous obtenons :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)}{e^{\alpha u}}du \leq \frac{e^{-\alpha a}f(a) + e^{-\alpha b}f(b)}{2}.$$

■

Théorème 1.2 [1] *Soient f, $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables et exponontiellement convexes alors :*

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{(b-a)}\int_a^b \frac{f(u)g(u)}{e^{2\alpha u}}du + \frac{1}{e^{\alpha(a+b)}}\left[\frac{1}{6}M(a,b;e) + \frac{1}{3}N(a,b;e)\right] \\ &\leq \frac{1}{3}M(a,b;e) + \frac{1}{6}N(a,b;e) \end{aligned}$$

où

$$M(a,b;e) = \frac{f(a)g(a)}{e^{2\alpha a}} + \frac{f(b)g(b)}{e^{2\alpha b}}$$

et

$$N(a,b;e) = \frac{1}{e^{\alpha(a+b)}}[f(b)g(a) + f(a)g(b)].$$

Preuve. Soient f et g deux fonctions exponontiellement convexes, on a :

$$4f\left(\frac{x+y}{2}\right)g\left(\frac{(x+y)}{2}\right) \leq \left\{\left(\frac{f(x)}{e^{\alpha x}} + \frac{f(y)}{e^{\alpha y}}\right)\right\}\left\{\left(\frac{g(x)}{e^{\alpha x}} + \frac{g(y)}{e^{\alpha y}}\right)\right\}.$$

Posons $x = (1-t)a + tb$ et $y = ta + (1-t)$ alors on obtient

$$\begin{aligned} 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \left\{\left(\frac{f((1-t)a+tb)}{e^{\alpha((1-t)a+tb)}}\right) + \frac{f(ta+(1-t)b)}{e^{\alpha(ta+(1-t)b)}}\right\} \\ &\quad \times \left\{\left(\frac{g((1-t)a+tb)}{e^{\alpha((1-t)a+tb)}}\right) + \frac{g(ta+(1-t)b)}{e^{\alpha(ta+(1-t)b)}}\right\} \end{aligned}$$

En intégrant par rapport à t sur l'intervalle $[0,1]$ on a :

$$\begin{aligned} 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)g(u)}{e^{2\alpha u}}du \\ &\quad + \frac{1}{e^{\alpha(a+b)}}\int_0^1 \left[\left\{(1-t)\frac{f(a)}{e^{\alpha a}} + t\frac{f(b)}{e^{\alpha b}}\right\} \times \left\{t\frac{g(a)}{e^{\alpha a}} + (1-t)\frac{g(b)}{e^{\alpha b}}\right\}\right. \\ &\quad \left. + \left\{t\frac{f(a)}{e^{\alpha a}} + (1-t)\frac{f(b)}{e^{\alpha b}}\right\} \times \left\{(1-t)\frac{g(a)}{e^{\alpha a}} + t\frac{g(b)}{e^{\alpha b}}\right\}\right] dt \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} 4f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)g(u)}{e^{2\alpha u}}du \\ &\quad + \frac{1}{e^{\alpha(a+b)}}\int_0^1 \left[2t(1-t)\left\{\frac{f(a)g(b)}{e^{2\alpha a}} + \frac{f(b)g(a)}{e^{2\alpha b}}\right\}\right. \\ &\quad \left. \times \frac{[t^2+(1-t)^2]}{e^{\alpha(a+b)}}\{f(b)g(a) + f(a)g(b)\}\right] dt \end{aligned}$$

D'où

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)g(u)}{e^{2\alpha u}}du + \frac{1}{e^{\alpha(a+b)}}\left[\frac{1}{6}M(a,b;e) + \frac{1}{3}N(a,b;e)\right]. \quad (1.6)$$

Nous prouvons maintenant l'inégalité du second membre. Puisque f et g sont des fonctions exponentiellement convexes nous avons :

$$f((1-t)a+tb)g((1-t)a+tb) \leq \left[(1-t)\frac{f(a)}{e^{\alpha a}} + t\frac{f(b)}{e^{\alpha b}}\right]\left[(1-t)\frac{g(a)}{e^{\alpha a}} + t\frac{g(b)}{e^{\alpha b}}\right].$$

Intégrons par rapport à t sur $[0,1]$ on a :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)g(u)}{e^{2\alpha u}}du \leq \frac{1}{3}M(a,b;e) + \frac{1}{6}N(a,b,e) \quad (1.7)$$

En ajoutant les inégalités (1.6) et (1.7) nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b \frac{f(u)g(u)}{e^{2\alpha u}}du + \frac{1}{e^{\alpha(a+b)}}\left[\frac{1}{6}M(a,b;e) + \frac{1}{3}N(a,b,e)\right] \\ &\leq \frac{1}{3}M(a,b;e) + \frac{1}{6}N(a,b;e). \end{aligned}$$

■

Théorème 1.3 [1] *Soit* $f : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *où* I° *est l'intérieur de* I. *Si* $|f'|$ *est une fonction exponentiellement convexe alors :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{8}\left[\left|\frac{f'(a)}{e^{\alpha a}}\right| + \left|\frac{f'(b)}{e^{\alpha b}}\right|\right].$$

Preuve. En utilisant le Lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &= \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'((1-t)a+tb)dt\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t||f'((1-t)a+bt)|dt. \end{aligned}$$

Puisque $|f'|$ est une fonction exponetiellement convexe alors :

$$\begin{aligned} \left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\left[(1-t)\left|\frac{f'(a)}{e^{\alpha a}}\right| + t\left|\frac{f'(b)}{e^{\alpha b}}\right|\right]dt \\ &= \frac{b-a}{8}\left[\left|\frac{f'(a)}{e^{\alpha a}}\right| + \left|\frac{f'(b)}{e^{\alpha b}}\right|\right]. \end{aligned}$$

■

Théorème 1.4 [1] *Soit* $f : I = [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* I° *où* I° *est l'intérieur de* I*. Si* $|f'|^q$ *est une fonction exponentiellement convexe, où* $q \geq 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *alors :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{1}{2}\left\{\left|\frac{f'(a)}{e^{\alpha a}}\right|^{\frac{p}{p-1}} + \left|\frac{f'(b)}{e^{\alpha b}}\right|^{\frac{p}{p-1}}\right\}\right]^{\frac{p-1}{p}}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.1 on a :

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right| &= \left|\frac{b-a}{2}\int_0^1 (1-2t)f'((1-t)a+tb)dt\right| \\ &\leq \frac{b-a}{2}\int_0^1 |1-2t|\,|f'((1-t)a+tb)|\,dt.\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Hölder on obtient

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left(\int_0^1 |1-2t|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^1 |f'((1-t)a+tb)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.8}$$

où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Maintenant en utilisant le fait que $|f'|^q$ est une fonction exponentiellement convexe on aura

$$\int_0^1 |f'((1-t)a+tb)|^q\,dt \leq \int_0^1 \left[(1-t)\left|\frac{f'(a)}{e^{\alpha a}}\right|^q + t\left|\frac{f'(b)}{e^{\alpha b}}\right|^q\right]dt = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{f'(a)}{e^{\alpha a}}\right|^q + \left|\frac{f'(b)}{e^{\alpha b}}\right|^q\right] \tag{1.9}$$

avec

$$\int_0^1 |1-2t|^p\,dt = \frac{1}{p+1} \tag{1.10}$$

En utilisant (1.8) , (1.9) et (1.10) nous avons le résultat recherché . ■

1.2 Inégalité de type Hermite-Hadamard pour les fonctions exponentiellement (p, h)-convexes

Définition 1.3 [5] *Soit* $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction positive. Considérons un intervalle* $J \subset (0, \infty)$*, alors, une fonction* $f : J \to \mathbb{R}$ *est appellée* h*-convexe si elle est non-négative et*

$$f(kx_1 + (1-k)x_2) \leq h(k)f(x_1) + h(1-k)f(x_2) \tag{1.11}$$

pour tout $x_1,\ x_2 \in J$ et $k \in [0,1]$. Si (1.11) est inversée (f est appellée h-concave).

Définition 1.4 [5] *Consdérons un intervalle $J \subset (0, \infty)$ et $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Une fonction $f : J \to \mathbb{R}$ est appellée p-convexe si :*

$$f([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}}) \leq kf(x_1) + (1-k)f(x_2) \tag{1.12}$$

pour tout $x_1, x_2 \in J$ et $k \in [0,1]$. Si (1.12) est inversée (f est appellée p-concave).

Exemple 1.2 *Une fonction $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^p$ pour $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, est p-convexe aussi bien que p-concave.*

Remarque 1.1 *Un intervalle I est un ensemble p-convexe si $kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}} \in I$ pour tout x, $y \in I$ et $k \in [0,1]$, où $p = 2t+1$ or $p = \dfrac{n}{m}$, $n = 2r+1$, $m = 2s+1$ et $t, s, r \in \mathbb{N}$*

Définition 1.5 [5] *Soit $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, soit $J \subset (0,\infty)$ un intervalle et $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Une fonction $f : J \to \mathbb{R}$ est appellée (p,h)-convexe si f est non-négative et*

$$f([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}}) \leq h(k)f(x_1) + h(1-k)f(x_2), \tag{1.13}$$

pour tout $x_1,\ x_2 \in J$ et $k \in [0,1]$. Si (1.13) est inversée (f est appellée (p,h)-concave).

Définition 1.6 [5] *Soit $h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive. Considérons un intervalle $J \subset (0,\infty) = \mathbb{R}_+$ et $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Une fonction $f : J \to \mathbb{R}$ est appellée exponentiellement (p,h)-convexe si :*

$$f([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}}) \leq h(k)\frac{f(x_1)}{e^{\alpha x_1}} + h(1-k)\frac{f(x_2)}{e^{\alpha x_2}} \tag{1.14}$$

pour tout $x_1,\ x_2 \in J$ et $k \in [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si l'inégalité (1.14) est dans la direction opposée alors f est appelée exponentiellement (p,h)-concave.

Lemme 1.2 [5] *Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction différentaible sur J° l'intérieur de J et $x_1,\ x_2 \in J$, $x_1 \leq x_2$, et $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $f' \in L_1[x_1, x_2]$ alors :*

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{p}{x_1^p - x_2^p}\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(w)}{w^{1-p}}dw = \frac{x_2^p - x_1^p}{2p}\int_0^1 \frac{1-2k}{[kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{1-\frac{1}{p}}} \times f'([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}})dk. \tag{1.15}$$

Théorème 1.5 [5] *Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable , exponontiellement (p,h)-convexe et soit $x_1,\ x_2 \in J$ avec $x_1 < x_2$ alors pour $\alpha \in \mathbb{R}$ on a*

$$\frac{1}{2h(\frac{1}{2})} f\left(\left[\frac{x_1^P + x_2^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{p}{x_2^P + x_1^P}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(w)}{w^{1-p}e^{\alpha w}}dw \leq S_1\frac{f(x_1)}{e^{\alpha x_1}} + S_2\frac{f(x_2)}{e^{\alpha x_2}}, \tag{1.16}$$

où

$$S_1 = \int\limits_0^1 \frac{h(k)dk}{e^{\alpha(xj_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}}, \quad S_2 = \int\limits_0^1 \frac{h(1-k)dk}{e^{\alpha(kx_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}}.$$

Preuve. *Puisque f est une fonction exponentiellement (p,h)-convexe on a :*

$$\frac{1}{h(\frac{1}{2})} f\left(\left[\frac{v_1^P + v_2^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{f(v_1)}{e^{\alpha v_1}} + \frac{f(v_2)}{e^{\alpha v_2}}.$$

Soit $v_1^p = kx_1^p + (1-k)x_2^p$ et $v_2^p = (1-k)x_1^p + kx_2^p$ alors on obtient

$$\frac{1}{h(\frac{1}{2})} f\left(\left[\frac{x_1^P + x_2^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{f([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}})}{e^{\alpha(kx_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}} + \frac{f([(1-k)x_1^p + kx_2^p]^{\frac{1}{p}})}{e^{\alpha((1-k)x_1^p + kx_2^p)^{\frac{1}{p}}}}. \tag{1.17}$$

Intégrons (1.17) *par rapport à $k \in [0,1]$ et utilisons encore une fois le changement de variable, on a :*

$$\frac{1}{h(\frac{1}{2})} f\left(\left[\frac{x_1^P + x_2^p}{2}\right]^{\frac{1}{p}}\right) \leq \frac{2p}{x_2^P - x_1^p}\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{f(w)}{w^{1-p}e^{\alpha w}}dw. \tag{1.18}$$

La première inégalité de (1.16) *est donc prouvée. Pour la seconde inégalité, utilisons le fait que f est exponentiellement (p,h)-convexe, nous trouvons*

$$\frac{f([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}})}{e^{\alpha(kx_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}} \leq \frac{h(k)\frac{f(x_1)}{e^{\alpha x_1}} + h(1-k)\frac{f(x_2)}{e^{\alpha x_2}}}{e^{\alpha(kx_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}}.$$

Une intégration par rapport à $k \in [0,1]$ donne :

$$\frac{p}{x_2^P - x_1^p}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(w)}{w^{1-p}e^{\alpha w}}dw \leq \frac{f(x_1)}{e^{\alpha x_1}}\int\limits_0^1 \frac{h(k)dk}{e^{\alpha(kx_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}} + \frac{f(x_2)}{e^{\alpha x_2}}\int\limits_0^1 \frac{h(1-k)dk}{e^{\alpha(kx_1^p + (1-k)x_2^p)^{\frac{1}{p}}}} \tag{1.19}$$

De (1.18) *et* (1.19) *on obtient* (1.16) *.* ■

Théorème 1.6 [5] *Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur J° et $x_1,\, x_2 \in J$ avec $x_1 < x_2$ et $f' \in L_1[x_1, x_2]$. Si $|f'|^q$ est exponentiellement (p,h)-convexe sur $[x_1, x_2]$ pour $q \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :*

$$\left|\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{p}{x_2^p - x_1^p}\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(w)}{w^{1-p}}dw\right| \leq \frac{x_2^p - x_1^p}{2p} T_1^{1-\frac{1}{q}} \left[T_2 \left|\frac{f'(x_1)}{e^{\alpha x_1}}\right|^q + T_3 \left|\frac{f'(x_2)}{e^{\alpha x 2}}\right|^q\right],$$

où

$$T_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{x_1^p + x_2^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}-1}\left[{}_2F_1\left(1-\frac{1}{p}, 2, 3; \frac{x_1^p - x_2^p}{x_1^p + x_2^p}\right) +{}_2 F_1\left(1-\frac{1}{p}, 2, 3; \frac{x_2^p - x_1^p}{x_1^p + x_2^p}\right)\right],$$

$$T_2 = \int_0^1 \frac{|1-2k|\, h(k)}{[kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{1-\frac{1}{p}}}dk \quad et \quad T_3 = \int_0^1 \frac{|1-2k|\, h(1-k)}{[kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{1-\frac{1}{p}}}dk.$$

et

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{1}{B(\beta, \gamma-\beta)}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-xt)^{-\alpha}\, dt, \qquad \mathrm{Re}(\gamma) > \mathrm{Re}(\beta) > 0, \quad |x| < 1$$

est la fonction hypergéométrique de Gauss.

Preuve. Utilisons le Lemme 1.2 nous trouvons :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - \frac{p}{x_2^p - x_1^p}\int_{x_1}^{x_2} \frac{f(w)}{w^{1-p}}dw\right| &\leq \frac{x_2^p - x_1^p}{2p}\int_0^1 \left|\frac{1-2k}{[kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{1-\frac{1}{p}}}\right| \\
&\quad \times \left|f'([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}})\right| dk \\
&\leq \frac{x_2^p - x_1^p}{2p}\left(\int_0^1 \frac{|1-2k|}{[kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{1-\frac{1}{p}}}dk\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \frac{|1-2k|}{[kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{1-\frac{1}{p}}} \times \left|f'([kx_1^p + (1-k)x_2^p]^{\frac{1}{p}})\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est exponentiellement (p,h)-convexe sur $[x_1, x_2]$ nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-\frac{p}{x_2^p-x_1^p}\int_{x_1}^{x_2}\frac{f(w)}{w^{1-p}}dw\right| \\
\leq \quad & \frac{x_2^p-x_1^p}{2p}\left(\int_0^1\frac{|1-2k|}{\left[kx_1^p+(1-k)x_2^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dk\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \times\left(\int_0^1\frac{|1-2k|\left[h(k)\left|\frac{f'(x_1)}{e^{\alpha x_1}}\right|^q+h(1-k)\left|\frac{f'(x_2)}{e^{\alpha x2}}\right|^q\right]}{\left[kx_1^p+(1-k)x_2^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dk\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq \quad & \frac{x_2^p-x_1^p}{2p}T_1^{1-\frac{1}{q}}\left[T_2\left|\frac{f'(x_1)}{e^{\alpha x_1}}\right|^q+T_3\left|\frac{f'(x_2)}{e^{\alpha x2}}\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}
$$

Observons que

$$
\begin{aligned}
& \int_0^1\frac{|1-2k|}{\left[kx_1^p+(1-k)x_2^p\right]^{1-\frac{1}{p}}}dk \\
= \quad & \frac{1}{4}\left(\frac{x_1^p+x_2^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}-1}\left[F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{x_1^p-x_2^p}{x_1^p+x_2^p}\right)+F_1\left(1-\frac{1}{p},2;3;\frac{x_2^p-x_1^p}{x_1^p+x_2^p}\right)\right].
\end{aligned}
$$

et le Théorème est prové. ∎

Chapitre 2

Convexité de type exponentielle et quelques inégalités associées

Dans ce chapitre on s'intéresse à une classe de fonctions de type exponentielle notée $EXPC(I)$. Nous allons présenter certaines propriétés et quelques nouvelles inégalités associées.

2.1 Certaines propriétés

Définition 2.1 [4] *Une fonction non négative $f : I \to \mathbb{R}$ est appelée fonction convexe de type exponentielle. Si pour tout x, $y \in I$ et $k \in [0,1]$:*

$$f\left(kx + (1-k)\, y\right) \leq \left(e^{k} - 1\right) f(x) + \left(e^{1-k} - 1\right) f(y). \tag{2.1}$$

Les fonctions convexes de type exponentielle sur l'intervalle I sont indiquées par $EXPC(I)$.

Remarque 2.1 *Le domaine des fonctions convexes de type exponentielle est $[0, \infty)$.*

Preuve. Soit $x \in I$ est arbitraire. En utilisant la définition de la fonction convexe de type exponentielle pour $k = 1$. On a :

$$f(x) \leq (e-1)f(x) \Longrightarrow 0 \leq (e-2)f(x) \Longrightarrow f(x) \geq 0.$$

■

Lemme 2.1 [4] *Pour tout* $k \in [0,1]$. *Les inégalités* $e^{k} - 1 \geq k$ *et* $e^{1-k} - 1 \geq 1 - k$ *sont valables.*

Proposition 2.1 [4] *Toute fonction convexe non négative est une fonction convexe de type exponentielle.*

Preuve. D'après le Lemme 2.1, puisque $k \leq e^{k} - 1$ et $1 - k \leq e^{1-k} - 1$ pour tout $k \in [0,1]$, on obtient :

$$f\left(kx + (1-k)\,y\right) \leq kf(x) + (1-k)\,f(y) \leq \left(e^{k} - 1\right) f(x) + \left(e^{1-k} - 1\right) f(y).$$

■

Proposition 2.2 [4] *Toute fonction convexe de type exponentielle est une fonction* h*-convexe avec* $h(k) = e^{k} - 1$.

Preuve. Si on substitue $e^{k} - 1 = h(k)$ et $e^{1-k} - 1 = h(1-k)$ dans l'inégalité (1.11), une fonction h-convexe est facilement obtenue . ■

Théorème 2.1 [4] *Soit* $y > 0$ *et* $f_{\alpha} : [x,y] \to \mathbb{R}$ *une famille arbitraire de fonctions convexes de type exponentielle. Et soit* $f(z) = \sup\limits_{\alpha} f_{\alpha}(z)$. *Si* $J = \{u \in [x,y] : f(u) < \infty\}$ *est non vide alors* J *est un intervalle et* f *est une fonction convexe de type exponentielle sur* J .

Preuve. Soit $k \in [0,1]$ et x, $y \in J$ est arbitraire. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(kx + (1-k)\,y\right) &= \sup_{\alpha} f_{\alpha}\left(kx + (1-k)\,y\right) \\ &\leq \sup_{\alpha} \left[\left(e^{k} - 1\right) f_{\alpha}(x) + \left(e^{1-k} - 1\right) f_{\alpha}(y)\right] \\ &\leq \left(e^{k} - 1\right) \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x) + \left(e^{1-k} - 1\right) \sup_{\alpha} f_{\alpha}(y) \\ &= \left(e^{k} - 1\right) f(x) + \left(e^{1-k} - 1\right) f(y) < \infty. \end{aligned}$$

Cela montre simultanément que J est un intervalle, car il contient tout point entre deux de ses points et que f est une fonction convexe de type exponentielle sur J. ■

Théorème 2.2 [4] *Si la fonction* $f : [x,y] \to \mathbb{R}$ *est convexe de type exponentielle. Alors* f *est bornée sur* $[x,y]$.

Preuve. Soit $k = \max\{f(x), f(y)\}$ et $z \in [x, y]$ un point arbitraire. Alors il existe $k \in [0, 1]$ tel que $z = kx + (1-k)y$. Ainsi, puisque $e^k \leq e$ et $e^{1-k} \leq e$ donc

$$\begin{aligned} f(z) &\leq f(kx + (1-k)y) \\ &\leq \left(e^k - 1\right) f(x) + \left(e^{1-k} - 1\right) f(y) \\ &\leq \left(e^k + e^{1-k} - 2\right).k \\ &\leq 2(e-1).k = M. \end{aligned}$$

Aussi, pour tout $z \in [x, y]$ il existe un $\lambda \in \left[0, \frac{y-x}{2}\right]$ tel que $z = \dfrac{x+y}{2} + \lambda$ ou $z = \dfrac{x+y}{2} - \lambda$. Sans perte de généralité, on suppose $z = \dfrac{x+y}{2} + \lambda$ donc nous avons :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{2} + \lambda\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{2} - \lambda\right]\right) \\ &\leq (\sqrt{e} - 1)\left(f(z) + f\left(\frac{x+y}{2} - \lambda\right)\right). \end{aligned}$$

En utilisant M comme borne supérieure, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f(z) &\geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{e}-1} - f\left(\frac{x+y}{2} - \lambda\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{e}-1} f\left(\frac{x+y}{2}\right) - M = m. \end{aligned}$$

■

2.2 Inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes de type exponentielle

Théorème 2.3 [4] *Soit $f : [x, y] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de type exponentielle. Si $x < y$ et $f \in L_1[x, y]$, alors les inégalités de type Hermite-Hadamard suivantes sont valables :*

$$\frac{1}{2(\sqrt{e}-1)} f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz \leq (e-2)\left[f(x) + f(y)\right]. \tag{2.2}$$

Preuve. Premièrement, à partir de la propriété de la fonction convexe de type exponentielle de f, nous obtenons :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &= f\left(\frac{[kx+(1-k)\,y]+[(1-k)\,x+ky]}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{1}{2}[kx+(1-k)\,y]+\frac{1}{2}[(1-k)\,x+ky]\right) \\ &\leq \left(e^{\frac{1}{2}}-1\right) f\left(kx+(1-k)\,y\right)+\left(e^{1-\frac{1}{2}}-1\right) f\left((1-k)\,x+ky\right). \end{aligned}$$

Maintenant, si nous prenons l'intégrale dans la dernière inégalité par rapport à $k \in [0,1]$ nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \leq & \left[\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)\int_0^1 f\left(kx+(1-k)\,y\right)dk+\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)\int_0^1 f\left((1-k)\,x+ky\right)dk\right] \\ = & \frac{2(\sqrt{e}-1)}{y-x}\int_x^y f(z)dz. \end{aligned}$$

Deuxièmement, en utilisant la propriété de la fonction convexe de type exponentielle f, si la variable est modifiée comme $u = kx+(1-k)\,y$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y-x}\int_x^y f(u)du &= \int_0^1 f\left(kx+(1-k)\,y\right)dk \\ &\leq \int_0^1 \left\{\left(e^k-1\right) f(x)+\left(e^{1-k}-1\right) f(y)\right\} dk \\ &= (e-2)\left[f(x)+f(y)\right]. \end{aligned}$$

■

Lemme 2.2 [4] *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, x, $y \in I^\circ$ avec $x < y$. Si $f' \in L_1[x,y]$ alors l'identité suivante est vraie :*

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz = \frac{y-x}{2}\int_0^1 (1-2k)\,f'\left(kx+(1-k)\,y\right)dk. \tag{2.3}$$

Théorème 2.4 [4] *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, x, $y \in I^\circ$ avec $x < y$, et $f' \in L_1[x,y]$. Si $|f'|$ est une fonction convexe de type exponentielle sur $[x,y]$ alors l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz\right| \leq (y-x)\left(4\sqrt{e}-e-\frac{7}{2}\right) A\left(\left|f'(x)\right|,\left|f'(y)\right|\right) \tag{2.4}$$

pour $k \in [0,1]$ où $A(u,v)$ est la moyenne arithmétique de u et v.

Preuve. A partir du Lemme 2.2 et la convexité de type exponentielle de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz\right| \\
&\leq \frac{y-x}{2}\int_0^1 |1-2k|\,|f'(kx+(1-k)y)|\,dk \\
&\leq \frac{y-x}{2}\int_0^1 |1-2k|\left[\left(e^k-1\right)|f'(x)|+\left(e^{1-k}-1\right)|f'(y)|\right]dk \\
&= \frac{y-x}{2}\left[|f'(x)|\int_0^1 |(1-2k)|\left(e^k-1\right)dk+|f'(y)|\int_0^1 |(1-2k)|\left(e^{1-k}-1\right)dk\right] \\
&= (y-x)\left(4\sqrt{e}-e-\frac{7}{2}\right)A\left(|f'(x)|,|f'(y)|\right),
\end{aligned}$$

où

$$\int_0^1 |(1-2k)|\left(e^k-1\right)dk=\int_0^1 |(1-2k)|\left(e^{1-k}-1\right)dk=4\sqrt{e}-e-\frac{7}{2}.$$

■

Théorème 2.5 [4] *Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $x, y\in I^\circ$ avec $x<y$, $q>1$ et $f'\in L_1[x,y]$. Si $|f'|^q$ est une fonction convexe de type exponentielle sur $[x,y]$ alors l'inégalité suivante est vraie :*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz\right| \\
&\leq \frac{y-x}{2}\left[2(e-2)\right]^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q,|f'(y)|^q\right).
\end{aligned}$$

Pour $k\in[0,1]$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et A est la moyenne arithmétique .

Preuve. A partir du Lemme 2.2, l'inégalité de Hölder et la convexité de type exponentielle de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz\right| \\
&\leq \frac{y-x}{2}\int_0^1 |(1-2k)|\,|f'(kx+(1-k)y)|\,dk \\
&\leq \frac{y-x}{2}\left(\int_0^1 |(1-2k)|^p dk\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1 |f'(kx+(1-k)y)|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\frac{y-x}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[\left(e^k-1\right)|f'(x)|^q+\left(e^{1-k}-1\right)|f'(y)|^q\right]dk\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{y-x}{2}\left[2\left(e-2\right)\right]^{\frac{1}{q}}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}A^{\frac{1}{p}}\left(|f'(x)|^q,|f'(y)|^q\right).$$

■

Théorème 2.6 [4] *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, x, $y \in I^\circ$ avec $x < y$, $q \geq 1$ et $f' \in L_1[x,y]$. Si $|f'|^q$ est une fonction convexe de type exponentielle sur $[x,y]$ alors on a l'inégalité suivante*

$$\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz\right|$$

$$\leq \frac{y-x}{2^{2-\frac{1}{q}}}\left[2\left(4\sqrt{e}-e-\frac{7}{2}\right)\right]^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q,|f'(y)|^q\right).$$

Pour $k \in [0,1]$.

Preuve. Supposons d'abord que $q > 1$. En utilisant le Lemme 2.2, l'inégalité de Hölder et la propriété de la fonction convexe de type exponentielle de $|f'|^q$, on obtient :

$$\left|\frac{f(x)+f(y)}{2}-\frac{1}{y-x}\int_x^y f(z)dz\right|$$

$$\leq \frac{y-x}{2}\int_0^1 |(1-2k)|\left|f'\left(kx+(1-k)y\right)\right|dk$$

$$\leq \frac{y-x}{2}\left(\int_0^1 |(1-2k)|\,dk\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |(1-2k)|\left|f'\left(kx+(1-k)y\right)\right|^q dk\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{y-x}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |(1-2k)|\left[\left(e^k-1\right)|f'(x)|^q+\left(e^{1-k}-1\right)|f'(y)|^q\right]dk\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \frac{y-x}{2^{2-\frac{1}{q}}}\left[2\left(4\sqrt{e}-e-\frac{7}{2}\right)\right]^{\frac{1}{q}}A^{\frac{1}{q}}\left(|f'(x)|^q,|f'(y)|^q\right).$$

Pour $q = 1$, nous considérons les estimations de la preuve du Théorème 2.4 qui suit également pas à pas les estimations ci-dessus. ■

Remarque 2.2 *Sous les hypothèses du Théorème* 2.6 *avec $q = 1$, nous obtenons la conclusion du Théorème* 2.4.

2.3 Convexité de type exponentielle pour le cas fractionnaire

Définition 2.2 [8] *La fonction bêta de deux variables x et y est définie comme suit :*

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

pour $\mathrm{Re}(x)>0$, $\mathrm{Re}(y)>0$.

Définition 2.3 [8] *Soit $f\in L_1[a,b]$ alors les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville $J_{a^+}^{\alpha}f$ et $J_{b^-}^{\alpha}f$ d'ordre $\alpha\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ de f sont définies par :*

$$J_{a^+}^{\alpha}f(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-r)^{\alpha-1}f(r)dr,\quad x>a,$$

$$J_{b^-}^{\alpha}f(x):=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (r-x)^{\alpha-1}f(r)dr,\quad x<b,$$

respectivement. Ici $\Gamma(\alpha)$ est la fonction gamma d'Euler : $\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}e^{-t}r^{\alpha-1}dr$ et $J_{a^+}^{0}f(x)=J_{b^-}^{0}f(x)=f(x)$.

Lemme 2.3 [10] *Soit $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I°, $a,\ b\in I$, $a<b$ et $t\in[0,1]$. Si $f''\in L_1[a,b]$, alors pour tout $a<b$ et $\alpha-1>0$, on a :*

$$\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha-1}f(b)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^{\alpha-1}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
$$=\frac{(b-a)^2}{\alpha 2^{2-\alpha}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha}f''(ta+(1-t)b)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)^{\alpha}f''(ta+(1-t)b)\,dt\right].$$

Le résultat suivant est une généralisation du Lemme 1 de [3] quand $\alpha>n-1$ et $n\in\mathbb{N}$.

Théorème 2.7 [10] *Soit $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I° où I° est l'intérieur de I et $f''\in L_1[a,b]$ avec $a,\ b\in I^{\circ}$, $0<a<b$ et $t\in[0,1]$ .Si $|f''|^q$ est une fonction convexe de type exponentielle sur $[a,b]\subset I$ et $\alpha-1>0$, alors pour certain $q>1$ fixe où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ on a :*

$$\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left[J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha-1}f(b)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^{\alpha-1}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|$$
$$\leq\frac{(b-a)^2}{\alpha 2^{1+\frac{1}{p}}}\frac{1}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{A^{\frac{1}{q}}\left(\left(e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\right)|f''(a)|^q,\left(e-e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)|f''(b)|^q\right)\right.$$
$$\left.+A^{\frac{1}{q}}\left(\left(e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\right)|f''(b)|^q,\left(e-e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)|f''(a)|^q\right)\right\},$$

où $A(u,v)$ est la moyenne arithmétique de u et v.

Preuve. Nous utilisons maintenant le Lemme 2.3, les propriétés du module puis l'inégalité de Hölder on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left[J^{\alpha-1}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)+J^{\alpha-1}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{\alpha 2^{2-\alpha}}\left[\int_0^{\frac{1}{2}}t^\alpha\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^\alpha\left|f''(ta+(1-t)b)\right|dt\right] \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{\alpha 2^{2-\alpha}}\left\{\left(\int_0^{\frac{1}{2}}t^{\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\frac{1}{2}}|f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\right. \\
&\left.\left(\int_{\frac{1}{2}}^1(1-t)^{\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1|f''(ta+(1-t)b)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right\}.
\end{aligned}$$

Appliquons maintenant la définition de la fonction convexe de type exponentielle pour $\left|f^{(n)}\right|^q$ et par calcul on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{2^{\alpha-2}\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha-1}}\left[J^{\alpha-1}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)+J^{\alpha-1}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ &\frac{(b-a)^2}{\alpha 2^{2+\frac{1}{p}}}\frac{1}{(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}}\left\{\left[\left(e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\right)|f''(a)|^q+\left(e-e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\left.+\left[\left(e-e^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)|f''(a)|^q+\left(e^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}\right)|f''(b)|^q\right]^{\frac{1}{p}}\right\}.
\end{aligned}$$

■

Chapitre 3

Fonctions exponentiellement m-convexes et (s,m)-convexes dans le cas fractionnaire

Dans ce chapitre on donne certains résultats concernant l'inégalité d'Hermite-Hadamard pour d'autres types de convexité en utilisant l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

3.1 Inégalités fractionnaires pour les fonctions m-convexes

Définition 3.1 [7] *Une fonction $f : \mathbb{k} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite une fonction m-convexe où $m \in [0,1]$ si :*

$$f((1-t)a + mtb) \leq (1-t)f(a) + mtf(b), \quad a,\ b \in \mathbb{k},\ t \in [0,1]. \tag{3.1}$$

Exemple 3.1 *Soit $f : [0,b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}, \quad m \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

est m-convexe sur $[0,2]$.

Remarque 3.1 *Clairement, une fonction 1-convexe est une fonction convexe au sens ordinaire. La fonction 0-convexe est la fonction en forme d'étoile. Si nous prenons $t=1$ alors :*

$$f(mb) \leq mf(b), \qquad m \in [0,1]\,,\ b \in \mathbb{k}$$

cela montre que la fonction f est sous-homogène.

Définition 3.2 [7] *Une fonction $f : \mathbb{k} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positive est dite exponentiellement convexe si :*

$$e^{f((1-t)a+tb)} \leq \left[(1-t)e^{f(a)} + te^{f(b)}\right] \qquad a,\ b \in \mathbb{k},\ t \in [0,1]\,, \tag{3.2}$$

Définition 3.3 [7] *Une fonction $f : \mathbb{k} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite exponentiellement m-convexe où $m \in (0,1]$ si*

$$e^{f((1-t)a+mtb)} \leq \left[(1-t)e^{f(a)} + mte^{f(b)}\right], \quad a,\ b \in \mathbb{k},\ t \in [0,1]\,, \tag{3.3}$$

quand $t = \frac{1}{2}$ nous avons

$$e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} \leq \frac{e^{f(a)} + me^{f(b)}}{2}, \qquad a,\ b \in \mathbb{k}, \tag{3.4}$$

la fonction f est appelée exponentiellement m-convexe de Jensen.

Théorème 3.1 [7] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction exponentiellement m-convexe où $m \in (0,1]$. Si $f \in L_1[a,mb]$, alors :*

$$e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(mb-a)^{\alpha}} \left\{J^{\alpha}_{(a)_+} e^{f(mb)} + m^{\alpha+1} J^{\alpha}_{(b)_-} e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right\}$$

$$\leq \frac{\alpha\left[e^{f(a)} + m^2 e^{f\left(\frac{b}{m}\right)}\right] + \left[me^{f(b)} + me^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]}{\alpha(\alpha+1)}. \tag{3.5}$$

Preuve. Soit f une fonction exponentiellement m-convexe, à partir de l'inégalité (3.4), nous avons :

$$e^{f\left(\frac{x+my}{2}\right)} \leq \frac{e^{f(x)} + me^{f(y)}}{2}, \qquad x,\ y \in [a,mb]\,.$$

Posons $x = at + m(1-t)b$ et $y = (1-t)\dfrac{a}{m} + mt\dfrac{b}{m}$ pour $t \in [0,1]$ on a

$$2e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} \leq \left[e^{f(at+m(1-t)b)} + me^{f\left((1-t)\frac{a}{m}+mt\frac{b}{m}\right)}\right].$$

Multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $t^{\alpha-1}$ et intégrant par rapport à t sur $[0,1]$,nous avons :

$$\frac{2}{\alpha}e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} \leq \int_0^1 t^{\alpha-1}\left[e^{f(at+m(1-t)b)} + me^{f((1-t)\frac{a}{m}+mt\frac{b}{m})}\right]dt$$

$$= \frac{1}{(mb-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^{mb}(mb-u)^{\alpha-1}e^{f(u)}du + m^{\alpha+1}\int_{\frac{a}{m}}^{b}\left(v-\frac{a}{m}\right)^{\alpha-1}e^{f(v)}dv\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{(mb-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a)_+}e^{f(mb)} + m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{(b)_-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right\},$$

i.e.

$$e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\,(mb-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a)_+}e^{f(mb)} + m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{(b)_-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right\}. \tag{3.6}$$

Par contre la m-convexité exponentielle de f donne

$$e^{f(at+m(1-t)b)} + me^{f((1-t)\frac{a}{m}+mt\frac{b}{m})} \leq t\left[e^{f(a)} + m^2e^{f\left(\frac{b}{m}\right)}\right] + (1-t)\left[me^{f(b)} + me^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]$$

Multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $t^{\alpha-1}$ et intégrant par rapport à t sur $[0,1]$ on obtient

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{f(at+m(1-t)b)}dt + m\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{f((1-t)\frac{a}{m}+mt\frac{b}{m})}dt$$

$$\leq \int_0^1 t^{\alpha}\left[e^{f(a)} + m^2e^{f\left(\frac{b}{m}\right)}\right]dt + \int_0^1\left(t^{\alpha-1}-t^{\alpha}\right)\left[me^{f(b)} + me^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]dt.$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(mb-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a)_+}e^{f(mb)} + m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{(b)_-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right\}$$

$$\leq \frac{e^{f(a)} + m^2e^{f\left(\frac{b}{m}\right)}}{\alpha+1} + \frac{me^{f(b)} + me^{f\left(\frac{a}{m}\right)}}{\alpha(\alpha+1)}$$

i.e.

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\,(mb-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a)_+}e^{f(mb)} + m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{(b)_-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right\}$$

$$\leq \frac{\alpha\left[e^{f(a)} + m^2e^{f\left(\frac{b}{m}\right)}\right] + \left[me^{f(b)} + me^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]}{\alpha(\alpha+1)}. \tag{3.7}$$

En combinant les inégalités (3.6) et (3.7) , on obtient (3.5). ■

Corollaire 3.1 *Si nous choisissons* $m=1$ *dans le Théorème* 3.1 *,alors nous avons le résultat suivant*

$$e^{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\left(b-a\right)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{(a)+}e^{f(b)}+J^{\alpha}_{(b)-}e^{f(a)}\right\}$$
$$\leq \frac{\left[e^{f(a)}+e^{f(b)}\right]}{\alpha}.$$

Corollaire 3.2 *Si nous choisissons* $m=1$ *et* $\alpha=1$ *dans le Théorème* 3.1, *alors nous avons le résultat suivant*

$$2e^{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}dx \leq 2\left[e^{f(a)}+e^{f(b)}\right].$$

Théorème 3.2 [7] *Soient* $f,\ g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *deux fonctions exponentiellement* m*-convexes où* $m\in(0,1]$. *Si* $f,\ g\in L_1[a,mb]$, *alors :*

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(mb-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{mb_-}e^{f(a)}+J^{\alpha}_{a_+}e^{g(mb)}\right\} \leq \frac{e^{f(a)}+me^{g(b)}+\alpha\left(me^{f(b)}+e^{g(a)}\right)}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Preuve. Soient $f,\ g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fonctions exponentiellement m-convexes, alors :

$$e^{f(a(1-t)+mtb)} \leq (1-t)\,e^{f(a)}+tme^{f(b)},\quad a,\ b\in[a,mb],\ t\in[0,1]$$

$$e^{g(at+m(1-t)b)} \leq te^{g(a)}+m\,(1-t)\,e^{g(b)},\quad a,\ b\in[a,mb],\ t\in[0,1]$$

En ajoutant les deux côtés des inégalités ci-dessus membre à membre nous avons :

$$e^{f(a(1-t)+mtb)}+e^{g(at+m(1-t)b)} \leq (1-t)\left[e^{f(a)}+me^{g(b)}\right]+t\left[me^{f(b)}+e^{g(a)}\right].$$

Multipliant les deux côtés des inégalités ci-dessus par $t^{\alpha-1}$ et intégrant par rapport à t sur $[0,1]$, nous avons

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\left[e^{f(a(1-t)+mtb)}+e^{g(at+m(1-t)b)}\right]dt$$
$$\leq \int_0^1\left(t^{\alpha-1}-t^{\alpha}\right)\left[e^{f(a)}+me^{g(b)}\right]dt+\int_0^1 t^{\alpha}\left[me^{f(b)}+e^{g(a)}\right]dt.$$
$$\frac{1}{(mb-a)^{\alpha}}\left\{\int_a^{mb}(u-a)^{\alpha-1}e^{f(u)}du+\int_a^{mb}(mb-v)^{\alpha-1}e^{g(v)}dv\right\}$$
$$\leq \frac{e^{f(a)}+me^{g(b)}}{\alpha\,(\alpha+1)}+\frac{\alpha\left(me^{f(b)}+e^{g(a)}\right)}{\alpha\,(\alpha+1)}$$

i.e.

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(mb-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{mb_-}e^{f(a)}+J^{\alpha}_{a_+}e^{g(mb)}\right\}$$
$$\leq \frac{e^{f(a)}+me^{g(b)}+\alpha\left(me^{f(b)}+e^{g(a)}\right)}{\alpha(\alpha+1)}.$$

qui est le résultat recherché. ∎

Corollaire 3.3 *Si nous choisissons $m=1$ dans le Théorème 3.2, alors nous avons un nouveau résultat suivant*

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{(b-a)^{\alpha}}\left\{J^{\alpha}_{b_-}e^{f(a)}+J^{\alpha}_{a_+}e^{g(b)}\right\}\leq \frac{e^{f(a)}+e^{g(b)}+\alpha\left(e^{f(b)}+e^{g(a)}\right)}{\alpha(\alpha+1)}.$$

Corollaire 3.4 *Si nous choisissons $m=1$, $\alpha=1$ dans le Théorème 3.2, alors nous avons un autre nouveau résultat suivant*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b\left[e^{g(x)}+e^{f(x)}\right]dx\leq \frac{e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{g(a)}+e^{g(b)}}{2}.$$

Nous dérivons maintenant des inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions m-convexes en utilisant l'intégrale fractionnaire de Reimann-Liouville.

Théorème 3.3 [7] *Soit $\alpha>0$ et $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction exponentiellement m-convexe où $m\in(0,1]$. Si $f\in L_1[a,mb]$, alors :*

$$e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}\leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]$$
$$\leq \frac{\alpha}{4(\alpha+1)}\left[e^{f(a)}-m^2e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}\right]+\frac{m}{2}\left[e^{f(b)}+me^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}\right].$$

Preuve. Soit f une fonction exponentiellement m-convexe, de l'inégalité (3.4), nous avons

$$e^{f\left(\frac{x+my}{2}\right)}\leq \frac{e^{f(x)}+me^{f(y)}}{2},\qquad x,\ y\in I.$$

Substituons $x=\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b$, $y=\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b$ pour $t\in[0,1]$, alors

$$2e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}\leq e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}+me^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}.$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus par $t^{\alpha-1}$ et intégrant par rapport à t sur $[0,1]$, on a :

$$\frac{2}{\alpha}e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}\leq\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}dt+m\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}dt$$

$$= \frac{2}{a-mb}\int_{mb}^{\frac{a+mb}{2}}\left(\frac{2\left(mb-u\right)}{mb-a}\right)^{\alpha-1}e^{f(u)}du+\frac{2m^2}{mb-a}\int_{\frac{a}{m}}^{\frac{a+mb}{2m}}\left(\frac{2\left(v-\frac{a}{m}\right)}{b-\frac{a}{m}}\right)^{\alpha-1}e^{f(v)}dv$$

$$= \frac{2^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}{\left(mb-a\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^{+}}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^{-}}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right].$$

Ainsi

$$e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} \leq \frac{2^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(mb-a\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^{+}}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^{-}}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}\left\{e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}+me^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}\right\}dt$$

$$\leq \frac{\alpha}{2}\int_0^1 t^{\alpha-1}\left\{\left[\frac{t}{2}e^{f(a)}+\frac{m\left(2-t\right)}{2}e^{f(b)}\right]+m\left[m\frac{2-t}{2}e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}+\frac{t}{2}e^{f(b)}\right]\right\}dt$$

$$= \frac{\alpha}{4}\left[e^{f(a)}-m^2e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}\right]\int_0^1 t^{\alpha}dt+\frac{m\alpha}{2}\left[e^{f(b)}-me^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}\int_0^1 t^{\alpha-1}dt\right]$$

$$= \frac{\alpha}{4\left(\alpha+1\right)}\left[e^{f(a)}-m^2e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}\right]+\frac{m}{2}\left[e^{f(b)}+me^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}\right],$$

qui est le résultat recherché. ■

Lemme 3.1 [7] *Soit $\alpha>0$ et $f:I\subset\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ une fonction différentiable et exponentiellement m-convexe sur I° l'intérieur de I où $m\in(0,1]$. Si $|f'|\in L_1[a,mb]$, est une fonction m-convexe, alors :*

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(mb-a\right)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^{+}}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^{-}}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]$$

$$= \frac{mb-a}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha}e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)dt\right.$$

$$\left.-\int_0^1 t^{\alpha}e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)dt\right]. \tag{3.8}$$

Preuve. Il suffit de noter que

$$\frac{mb-a}{4}\left[\int_0^1 t^{\alpha}e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)dt\right]$$

$$= \frac{mb-a}{4}\left[\frac{2}{mb-a}e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}-\frac{2\alpha}{\left(a-mb\right)}\int_{mb}^{\frac{a+mb}{2}}\left(\frac{2\left(mb-x\right)}{mb-a}\right)^{\alpha-1}\frac{2e^{f(x)dx}}{a-mb}\right]$$

$$= \frac{mb-a}{4}\left[-\frac{2}{mb-a}e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+\frac{2^{\alpha+1}\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\left(mb-a\right)^{\alpha+1}}J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^{+}}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]. \tag{3.9}$$

De même on peut avoir

$$-\frac{mb-a}{4}\left[\int_0^1 t^\alpha e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)} f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)dt\right]$$

$$=-\frac{mb-a}{4}\left[\frac{2m}{mb-a}e^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}-\frac{(2m)^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^{\alpha+1}}J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]. \tag{3.10}$$

De (3.9) et (3.10) on obtient (3.8) . ∎

Théorème 3.4 [7] *Soit $\alpha>0$ et $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° l'intérieur de I et exponentiellement m-convexe où $m\in(0,1]$. Si $|f'|\in L_1[a,mb]$ est une fonction m-convexe alors :*

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]$$

$$\leq\frac{mb-a}{4}\left\{\frac{1}{4(\alpha+3)}\left\{\left|e^{f(a)}f'(a)\right|+\left|e^{f(b)}f'(b)\right|\right\}+\frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\right.$$

$$\left.\left\{\left|e^{f(b)}f'(b)\right|+\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|\right\}+\frac{m(\alpha+4)}{((\alpha+2)(\alpha+3))}\left\{\Delta_1(a,b)+\Delta_2\left(\frac{a}{m^2},b\right)\right\}\right\}$$

où

$$\Delta_1(a,b)=\left|e^{f(a)}f'(b)\right|+\left|e^{f(b)}f'(a)\right|$$

et

$$\Delta_2\left(\frac{a}{m^2},b\right)=\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'(b)\right|+\left|e^{f(b)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1 et la m-convexité exponentielle de f nous avons :

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]$$

$$\leq\frac{mb-a}{4}\left[\int_0^1 t^\alpha\left\{\left|e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)\right|\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)\right|\right\}dt\right].$$

En utilisant la m-convexité de $\left|f'\right|$, nous avons :

$$\left|e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)\right|+\left|e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)\right|$$

$$\leq \left\{ \left[\frac{t}{2} \left| e^{f(a)} \right| + \frac{m(2-t)}{2} \left| e^{f(b)} \right| \right] \left[\frac{t}{2} \left| f'(a) \right| + \frac{m(2-t)}{2} \left| f'(b) \right| \right] \right\}$$
$$+ \left\{ \left[\frac{m(2-t)}{2} \left| e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)} \right| + \frac{t}{2} \left| e^{f(b)} \right| \right] \left[\frac{m(2-t)}{2} \left| f'\left(\frac{a}{m^2}\right) \right| + \frac{t}{2} \left| f'(b) \right| \right] \right\}$$
$$= \frac{t^2}{4} \left| e^{f(a)} f'(a) \right| + \frac{m^2(2-t)^2}{4} \left| e^{f(b)} f'(b) \right| + \frac{m(2-t)t}{4} \left[\left| e^{f(a)} f'(b) \right| + \left| e^{f(b)} f'(a) \right| \right]$$
$$+ \frac{m^2(2-t)^2}{4} \left| e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)} f'\left(\frac{a}{m^2}\right) \right| + \frac{t^2}{4} \left| e^{f(b)} f'(b) \right| + \frac{m(2-t)t}{4} \left[\left| e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)} f'(b) \right| + \left| f(b) \right| f'\left(\frac{a}{m^2}\right) \right]$$
$$= \frac{t^2}{4} \left\{ \left| e^{f(a)} f'(a) \right| + \left| e^{f(b)} f'(b) \right| \right\} + \frac{m^2(2-t)^2}{4} \left\{ \left| e^{f(b)} f'(b) \right| + \left| e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)} f'\left(\frac{a}{m^2}\right) \right| \right\}$$
$$+ \frac{m(2-t)t}{4} \left\{ \Delta_1(a,b) + \Delta_2\left(\frac{a}{m^2}, b\right) \right\}.$$

donc

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^{\alpha}} \left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^{+}} e^{f(mb)} + m^{\alpha+1} J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^{-}} e^{f\left(\frac{a}{m}\right)} \right] - \frac{1}{2} \left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} + m e^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)} \right]$$

$$\leq \frac{mb-a}{4} \left[\int_0^1 t^{\alpha} \left\{ \frac{t^2}{4} \left\{ \left| e^{f(a)} f'(a) \right| + \left| e^{f(b)} f'(b) \right| \right\} + \frac{m^2(2-t)^2}{4} \left\{ \left| e^{f(b)} f'(b) \right| + \left| e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)} f'\left(\frac{a}{m^2}\right) \right| \right\} \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{m(2-t)t}{4} \left\{ \Delta_1(a,b) + \Delta_2\left(\frac{a}{m^2}, b\right) \right\} \right\} dt \right]$$
$$= \frac{mb-a}{4} \left\{ \frac{1}{4(\alpha+3)} \left\{ \left| e^{f(a)} f'(a) \right| + \left| e^{f(b)} f'(b) \right| \right\} + \frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} \right.$$
$$\left. \left\{ \left| e^{f(b)} f'(b) \right| + \left| e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)} f'\left(\frac{a}{m^2}\right) \right| \right\} + \frac{m(\alpha+4)}{(\alpha+2)(\alpha+3)} \left\{ \Delta_1(a,b) + \Delta_2\left(\frac{a}{m^2}, b\right) \right\} \right\}.$$

qui est le résultat recherché. ■

Corollaire 3.5 *Si nous choisissons $m = 1$ et $\alpha = 1$ dans le Théorème 3.4 on obtient*

$$\left| e^{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} - \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{f(x)} dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{7 \left\{ \left| e^{f(a)} f'(a) \right| + \left| e^{f(b)} f'(b) \right| \right\} + 10 \left[\Delta_1(a,b) + \Delta_2(a,b) \right]}{24} \right].$$

Théorème 3.5 [7] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I° l'intérieur de I et exponentiellement m-convexe où $m \in (0,1]$. Si $|f'|^q \in L_1[a,mb]$ est une fonction m-convexe sur I et $p^{-1}+q^{-1}=1$ où $q>1$ alors on a*

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]\right|$$

$$\le\frac{mb-a}{4(\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\frac{1}{4(\alpha+3)}\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+\frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q\right.\right.$$

$$\left.+\frac{m(\alpha+4)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\Delta_3(a,b)\right\}^{\frac{1}{q}}+\left\{\frac{m^2(\alpha^2+7\alpha+14)}{4(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{4(\alpha+3)}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+\frac{m(\alpha+4)}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\right],$$

où

$$\Delta_3(a,b)=\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q,$$

et

$$\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)=\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q+\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1 et l'inégalité des puissances moyennes nous avons

$$\left|\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]\right|$$

$$\le\frac{mb-a}{4}\left[\int_0^1 t^\alpha\left\{\left|e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)\right|\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)\right|\right\}dt\right]$$

$$=\frac{mb-a}{4}\left(\frac{1}{(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1 t^\alpha\left\{\left|e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$

$$\left.\left\{\int_0^1 t^\alpha\left|e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{mb-a}{4}\left(\frac{1}{(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left\{\int_0^1 t^\alpha\left[\frac{t^2}{4}\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+\frac{m^2(2-t)^2}{4}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{mt(2-t)}{4}\Delta_3(a,b)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}+\left\{\int_0^1 t^\alpha\left[\frac{t^2}{4}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+\frac{m^2(2-t)^2}{4}\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q\right.\right.$$

$$
\left.\left.\left. + \frac{mt\,(2-t)}{4}\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{mb-a}{4\,(\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\frac{1}{4\,(\alpha+3)}\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q + \frac{m^2\left(\alpha^2+7\alpha+14\right)}{4\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q\right.\right.\\
&\left. + \frac{m\,(\alpha+4)}{(\alpha+2)\,(\alpha+3)}\Delta_3\,(a,b)\right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{\frac{m^2\left(\alpha^2+7\alpha+14\right)}{4\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)}\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q\right.\\
&\left.\left. + \frac{1}{4\,(\alpha+3)}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q + \frac{m\,(\alpha+4)}{(\alpha+2)\,(\alpha+3)}\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)\right\}^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

■

Corollaire 3.6 *Si nous choisissons $m=1$ et $\alpha=1$ dans le Théorème 3.5 on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|e^{f\left(\frac{a+b}{2}\right)} - \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}dx\right|\\
&\leq \frac{b-a}{4\,(2)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\frac{3\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q + 11\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q + 20\Delta_3\,(a,b)}{48}\right\}^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left. + \left\{\frac{11\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q + 3\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q + 20\Delta_4\,(a,b)}{48}\right\}^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

Théorème 3.6 [7] *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction exponentiellement m-convexe différentiable sur I° l'intérieur de I où $m \in (0,1]$. Si $|f'|^q \in L_1\,[a,mb]$ est une fonction m-convexe sur I et $p^{-1}+q^{-1}=1$ où $q \geq 1$ alors on a :*

$$
\begin{aligned}
&\frac{2^{\alpha-1}\Gamma\,(\alpha+1)}{(mb-a)^\alpha}\left[J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)} + m^{\alpha+1}J^\alpha_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right] - \frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)} + me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]\\
&\leq \frac{mb-a}{4\,(p\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\frac{\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q + 7m^2\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q + 2m\Delta_3\,(a,b)}{12}\right\}^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left. + \left\{\frac{7m^2\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q + \left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q + 2m\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)}{12}\right\}^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}
$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.1 et l'inégalité de Hölder nous avons

$$\frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(mb-a)^{\alpha}}\left[J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2}\right)^+}e^{f(mb)}+m^{\alpha+1}J^{\alpha}_{\left(\frac{a+mb}{2m}\right)^-}e^{f\left(\frac{a}{m}\right)}\right]-\frac{1}{2}\left[e^{f\left(\frac{a+mb}{2}\right)}+me^{f\left(\frac{a+mb}{2m}\right)}\right]$$

$$\leq\frac{mb-a}{4}\left[\left(\int_0^1 t^{p\alpha}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\int_0^1\left|e^{f\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)}f'\left(\frac{t}{2}a+m\frac{2-t}{2}b\right)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 t^{p\alpha}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left|e^{f\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)}f'\left(\frac{2-t}{2m}a+\frac{t}{2}b\right)\right|^q dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$\leq\frac{mb-a}{4(p\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\int_0^1\left[\frac{t^2}{4}\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+\frac{m^2(2-t)^2}{4}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+\frac{mt(2-t)}{4}\Delta_3(a,b)\right]dt\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.+\left\{\left[\frac{m^2(2-t)^2}{4}\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q+\frac{t^2}{4}\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+\frac{mt(2-t)}{4}\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)\right]\right\}^{\frac{1}{q}}\right]$$

$$=\frac{mb-a}{4(p\alpha+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\frac{\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+7m^2\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+2m\Delta_3(a,b)}{12}\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.\left\{\frac{7m^2\left|e^{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}f'\left(\frac{a}{m^2}\right)\right|^q+\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+2m\Delta_4\left(\frac{a}{m^2},b\right)}{12}\right\}^{\frac{1}{q}}\right].$$

■

Corollaire 3.7 *Si nous choisissons $m=1$ et $\alpha=1$ dans le Théorème 3.6 on obtient*

$$\left|e^{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}-\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{f(x)}dx\right|\leq\frac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left[\left\{\frac{\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+7\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+2\Delta_3(a,b)}{12}\right\}^{\frac{1}{q}}\right.$$
$$\left.\left\{\frac{7\left|e^{f(a)}f'(a)\right|^q+\left|e^{f(b)}f'(b)\right|^q+2\Delta_4(a,b)}{12}\right\}^{\frac{1}{q}}\right].$$

3.2 Inégalités k-fractionnaires pour les fonctions (s,m)-convexes

Définition 3.4 [8] *Soit $s\in[0,1]$ et $I\subseteq[0,\infty)$ un intervalle. Une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ est dite exponentiellement (s,m)-convexe si :*

$$f(rx + m(1-r)y) \leq r^s \frac{f(x)}{e^{\eta x}} + m(1-r)^s \frac{f(y)}{e^{\eta y}}, \tag{3.11}$$

est valable pour tout $m \in [0, 1]$ *et* $r \in [0, 1]$, $\eta \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.2 *En sélectionnant les valeur appropriées des paramètres* s, m *et* η *la définition ci-dessus reproduit les fonctions bien connues comme suit :*

(i) En fixant $\eta = 0$ *la fonction* (s, m)*-convexe* [2] *peut être obtenue*

(ii) En fixant $\eta = 0$ *et* $s = 1$ *la fonction* m*-convexe* [11] *peut être obtenue*

(iii) En fixant $\eta = 0$ *et* $m = 1$ *la fonction* s*-convexe* [6] *peut être obtenue*

(iv) En fixant $\eta = 0$, $s = 1$ *et* $m = 1$ *la fonction convexe* [9] *peut être obtenue*

(v) En fixant $s = 1$ *, la fonction* m*-convexe exponentiellement* [7] *peut être obtenue*

(vi) En fixant $m = 1$ *, la fonction* s*-convexe exponentiellement* [6] *peut être obtenue*

(vii) En fixant $s = 1$ *et* $m = 1$ *, la fonction convexe exponentiellement* [1] *peut être obtenue*

Définition 3.5 [8] *Soit* $f \in L_1[a, b]$ *alors les intégrales* k*-fractionnaires de Riemann-Liouville* $J_{a^+}^{\alpha,k} f$ *et* $J_{b^-}^{\alpha,k} f$ *d'ordre* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ *de* f *sont définies par :*

$$J_{a^+}^{\alpha,k} f(x) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-r)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(r) dr, \quad x > a,$$

$$J_{b^-}^{\alpha,k} f(x) := \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (r-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(r) dr, \quad x < b,$$

respectivement. Ici $\Gamma_k(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{\frac{-t^k}{k}} dt$ *et* $J_{a^+}^{0,1} f(x) = J_{b^-}^{0,1} f(x) = f(x)$.

Théorème 3.7 [8] *Soit* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *une fonction exponentiellement* (s, m)*-convexe avec* $m \in (0, 1]$, $\eta \in \mathbb{R}$ *avec* $f \in L_1[a, b]$, $0 \leq a < b$. *Si* $\frac{a}{m}, \frac{a}{m^2}, mb \in [a, b]$ *alors nous aurons :*

$$\frac{1}{h(\eta)} f\left(\frac{bm + a}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_K(\alpha + k)}{2^s (mb - a)^{\frac{\alpha}{k}}} \left[m^{\frac{\alpha}{k}+1} J_{b^-}^{\alpha,k} f\left(\frac{a}{m}\right) + J_{a^+}^{\alpha,k} f(mb)\right]$$

$$\leq \frac{\alpha}{k 2^s} \left\{ \left[m^2 \frac{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}{e^{\frac{\eta a}{m^2}}} + m \frac{f(b)}{e^{\eta b}}\right] B\left(\frac{\alpha}{k}, s+1\right) + \left[m \frac{f(b)}{e^{\eta b}} + \frac{f(a)}{e^{\eta a}}\right] \frac{k}{\alpha + ks} \right\}, \tag{3.12}$$

où $h(\eta) = \frac{1}{e^{\eta b}}$ *pour* $\eta < 0$ *et* $h(\eta) = \frac{1}{e^{\frac{\eta a}{m}}}$ *pour* $\eta \geq 0$

Preuve. Puisque f est une fonction exponentiellement (s,m)-convexe on a

$$f\left(\frac{um+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2^s}\left(\frac{mf(u)}{e^{\eta u}}+\frac{f(v)}{e^{\eta v}}\right), \quad u,\ v \in [a,b]$$

Puisque $\frac{a}{m}$, $mb \in [a,b]$ pour $r \in [0,1]$, $(1-r)\frac{a}{m}+rb \leq b$ et $(1-r)mb+ra \geq a$ en définissant $u=(1-r)\frac{a}{m}+rb \leq b$ et $v=(1-r)mb+ra \geq a$ dans l'inégalité ci-dessus,puis en intégrant sur $[0,1]$ aprés multiplication par $r^{\frac{\alpha}{k}-1}$ on a

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{bm+a}{2}\right)\int_0^1 r^{\frac{\alpha}{k}-1}dr \\ \leq\ & \frac{1}{2^s}\left[\int_0^1 r^{\frac{\alpha}{k}-1}\frac{mf\left((1-r)\frac{a}{m}+rb\right)}{e^{\eta\left((1-r)\frac{a}{m}+rb\right)}}dr+\int_0^1 r^{\frac{\alpha}{k}-1}\frac{f\left(m(1-r)b+ra\right)}{e^{\eta(m(1-r)b+ra)}}dr\right]. \end{aligned}$$

Maintenant si nous laissons $w=(1-r)\frac{a}{m}+rb$ et $z=m(1-r)b+ra$ dans le côté droit de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{bm+a}{2}\right)\frac{k}{\alpha} \\ \leq\ & \frac{1}{2^s}\left[\int_{\frac{a}{m}}^{b}\left(\frac{w-\frac{a}{m}}{b-\frac{a}{m}}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\frac{mf(w)dw}{e^{\eta w}\left(b-\frac{a}{m}\right)}+\int_a^{mb}\left(\frac{mb-z}{mb-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\frac{f(z)dz}{e^{\eta z}\left(mb-a\right)}\right]. \end{aligned}$$

De plus il donne l'inégalité suivante qui fournit la première inégalité de (3.12) :

$$f\left(\frac{bm+a}{2}\right) \leq \frac{h(\eta)\Gamma_k(\alpha+k)}{2^s(mb-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[m^{\frac{\alpha}{k}+1}J_{b^-}^{\alpha,k}f\left(\frac{a}{m}\right)+J_{a^+}^{\alpha,k}f(mb)\right].$$

D'autre part en utilisant l'exponentiellement (s,m)-convexité de f, nous avons :

$$\begin{aligned} & mf\left((1-r)\frac{a}{m}+rb\right)+f\left(m(1-r)b+ra\right) \\ \leq\ & m^2(1-r)^s\frac{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}{e^{\frac{\eta a}{m^2}}}+mr^s\frac{f(b)}{e^{\eta b}}+m(1-r)^s\frac{f(b)}{e^{\eta b}}+r^s\frac{f(a)}{e^{\eta a}}. \end{aligned}$$

En multipliant les deux côtés de l'inégalité ci-dessus avec $\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^s r^{\frac{\alpha}{k}-1}$ et en intégrant sur $[0,1]$ aprés quelques calculs, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2^s(mb-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[m^{\frac{\alpha}{k}+1}J_{b^-}^{\alpha,k}f\left(\frac{a}{m}\right)+J_{a^+}^{\alpha,k}f(mb)\right] \\ \leq\ & \frac{\alpha}{k2^s}\left\{\left[m^2\frac{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}{e^{\frac{\eta a}{m^2}}}+m\frac{f(b)}{e^{\eta b}}\right]\int_0^1 r^{\frac{\alpha}{k}-1}(1-r)^s dr+\left[m\frac{f(b)}{e^{\eta b}}+\frac{f(a)}{e^{\eta a}}\right]\int_0^1 r^{\frac{\alpha}{k}-1}r^s dr\right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la définition de la fonction bêta à partir de l'inégalité surmentionnée, la seconde inégalité de (3.12) sera obtenue. ■

Dans ce qui suit, nous donnons les conséquences du Théorème ci-dessus

Corollaire 3.8 *L'inégalité ci-dessous est vraie pour les fonctions exponentiellement (s,m)-convexes via les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville :*

$$\frac{1}{h(\eta)} f\left(\frac{bm+a}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+k)}{2^s (mb-a)^\alpha}\left[m^{\alpha+1} J_{b-}^{\alpha} f\left(\frac{a}{m}\right) + J_{a+}^{\alpha} f(mb)\right]$$
$$\leq \frac{\alpha}{2^s}\left\{\left[m^2 \frac{f\left(\frac{a}{m^2}\right)}{e^{\frac{\eta a}{m^2}}} + m\frac{f(b)}{e^{\eta b}}\right] B\left(\frac{\alpha}{k}, s+1\right) + \left[m\frac{f(b)}{e^{\eta b}} + \frac{f(a)}{e^{\eta a}}\right]\frac{1}{\alpha+s}\right\}. \tag{3.13}$$

Preuve. En posant $k=1$ dans l'inégalité (3.12) du Théorème 3.7, on obtient l'inégalité ci-dessus (3.13).

Corollaire 3.9 *Le résultat ci-dessous est valable pour les fonctions convexes via des inégalités k-fractionnaires de Riemann-Liouville .*

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{b-}^{\alpha,k} f(a) + J_{a^+}^{\alpha,k} f(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{3.14}$$

■

Preuve. En posant $\eta=0$, $s=1$ et $m=1$ dans (3.12) du Théorème 3.7 nous obtenons l'inégalité ci-dessus (3.14). ■

Corollaire 3.10 *Le résultat ci-dessous est valable pour les fonctions convexes via les inégalités fractionnaires de Riemann-Liouville .*

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^\alpha}\left[J_{b-}^{\alpha} f(a) + J_{a+}^{\alpha} f(b)\right] \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Preuve. En posant $\eta=0$, $s=1$, $m=1$ et $k=1$ dans (3.12) du Théorème 3.7 nous obtenons l'inégalité ci-dessus . ■

Lemme 3.2 [8] *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentaible sur l'intervalle (a,b). Si $f'\in L_1[a,b]$. Alors on a :*

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k} f(b) + J_{b^-}^{\alpha,k} f(a)\right]$$
$$= \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left[(1-r)^{\frac{\alpha}{k}} - r^{\frac{\alpha}{k}}\right] f'(ra+(1-r)b)\,dr. \tag{3.15}$$

Théorème 3.8 [8] *Soit* $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $[a,b]\subset[0,\infty)$ *et* $f'\in L_1[a,b]$. *Si* $|f'|$ *est une fonction exponentiellement* (s,m)*-convexe avec* $m\in(0,1]$, $\eta\in\mathbb{R}$, $q>1$ *on a l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|\\
&\leq\frac{(b-a)\left(\frac{m\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}+\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\right)}{2}\\
&\times\left\{\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}\left(\frac{\alpha}{k}+s+1\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.\\
&\left.\left.+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right\},\quad\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1.\end{aligned}\tag{3.16}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 3.2 on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|\\
&\leq\frac{b-a}{2}\int_0^1\left|(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}-r^{\frac{\alpha}{k}}\right|\left|f'(ra+(1-r)b)\right|dr.\end{aligned}$$

En utilisant l'exponentiellement (s,m)-convexité de $|f'|$ nous obtiendrons :

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|\\
&\leq\frac{b-a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}-r^{\frac{\alpha}{k}}\right]\left[r^s\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}+m(1-r)^s\frac{\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\right]dr\\
&+\int_{\frac{1}{2}}^1\left[r^{\frac{\alpha}{k}}-(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}\right]\left[r^s\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}+m(1-r)^s\frac{\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\right]dr\\
&=\frac{b-a}{2}\left\{\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}r^sdr-\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\int_0^{\frac{1}{2}}r^{\frac{\alpha}{k}}r^sdr\right.\\
&+\frac{m\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}(1-r)^sdr-\frac{m\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\int_0^{\frac{1}{2}}r^{\frac{\alpha}{k}}(1-r)^sdr\\
&-\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\int_{\frac{1}{2}}^1(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}r^sdr+\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\int_{\frac{1}{2}}^1r^{\frac{\alpha}{k}}r^sdr\end{aligned}$$

$$-\frac{m\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}(1-r)^{s}dr+\frac{m\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\int_{\frac{1}{2}}^{1}r^{\frac{\alpha}{k}}(1-r)^{s}dr\Bigg\}. \qquad (3.17)$$

Maintenant .en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}}(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}r^s dr &\le \left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}},\\
\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-r)^{\frac{\alpha}{k}}r^s dr &\le \left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}},\\
\int_0^{\frac{1}{2}}r^{\frac{\alpha}{k}}(1-r)^s dr &\le \left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}},\\
\int_{\frac{1}{2}}^{1}r^{\frac{\alpha}{k}}(1-r)^s dr &\le \left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités ci-dessus dans la partie droite de (3.17) nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|\\
\le\ &\frac{b-a}{2}\left\{\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}\left(\frac{\alpha}{k}+s+1\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.\\
&\left.+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\\
&+\frac{m\left|f'(\frac{b}{m})\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}\left(\frac{\alpha}{k}+s+1\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.\left.+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.11 *L'inégalité ci- dessous est valable pour les fonctions exponentiellement* (s,m)*-convexes via des intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a^+}^{\alpha}f(b)+J_{b^-}^{\alpha}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)\left(\frac{m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|}{e^{\frac{\eta b}{m}}}+\frac{|f'(a)|}{e^{\eta a}}\right)}{2}$$
$$\left\{\left[\frac{2^{\alpha+s+1}-2}{2^{\alpha+s+1}(\alpha+s+1)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left[\frac{2^{\alpha p+1}-1}{2^{\alpha p+1}(\alpha p+1)}\right]^{\frac{1}{P}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}. \tag{3.18}$$

Preuve. En posant $k=1$ dans l'inégalité (3.16) du Théorème 3.8 nous obtients l'inégalité ci-dessus (3.18). ■

Théorème 3.9 [7] *Soit $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ une fonction (s,m)-convexe avec $m\in(0,1]$, $f\in L_1[a,b]$, $a,\ b\in[0,\infty)$ où $\frac{a}{m},\ \frac{a}{m^2},\ mb\in[a,b]$. Alors nous aurons l'inégalité ci-dessous :*

$$f\left(\frac{bm+a}{2}\right)\leq\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2^s(mb-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[m^{\frac{\alpha}{k}+1}J_{b-}^{\alpha,k}f\left(\frac{a}{m}\right)+J_{a^+}^{\alpha,k}f(mb)\right]$$
$$\leq\left\{\frac{\alpha}{k2^s}\left[m^2f\left(\frac{a}{m^2}\right)+mf(b)\right]B\left(\frac{\alpha}{k},s+1\right)\right.$$
$$\left.+[mf(b)+f(a)]\frac{k}{\alpha+ks}\right. . \tag{3.19}$$

Preuve. Sa preuve est similaire à la preuve du Théorème 3.7 où directement (3.19) peut être obtenue à partir de (3.16) en prenant $\eta=0$ ■

Corollaire 3.12 *L'inégalité ci-dessous est valable pour les fonctions m-convexes via Riemann-Liouville K-intégrales fractionnaires*

$$f\left(\frac{bm+a}{2}\right)\leq\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(mb-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[m^{\frac{\alpha}{k}+1}J_{b-}^{\alpha,k}f\left(\frac{a}{m}\right)+J_{a^+}^{\alpha,k}f(mb)\right]$$
$$\leq\frac{\alpha}{k2}\left\{\frac{k[mf(b)+f(a)]}{\alpha+k}+\left[m^2f\left(\frac{a}{m^2}\right)+mf(b)\right]B\left(\frac{\alpha}{k},2\right)\right\}. \tag{3.20}$$

Preuve. En posant $s=1$ dans l'inégalité (3.19) du Théorème 3.9 nous obtenons l'inégalité ci-dessus (3.20) ■

Corollaire 3.13 *L'inégalité ci-dessous est valable pour les fonctions s-convexes via Riemann-Liouville K-intégrales fractionnaires*

$$f\left(\frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2^s(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{b-}^{\alpha,k}f(a)+J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)\right]$$

$$\leq \frac{\alpha}{k2^s}\left[f(a)+f(b)\right]\left\{\frac{k}{\alpha+ks}+B\left(\frac{\alpha}{k},s+1\right)\right\}. \tag{3.21}$$

Preuve. En posant $m=1$ dans l'inégalité (3.19) du Théorème 3.9 nous obtenons l'inégalité ci-dessus (3.21). ■

Théorème 3.10 [7] *Soit $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ et $[a,b]\subset[0,\infty)$ avec $f\in L_1[a,b]$. Si $|f'|$ est une fonction (s,m)-convexe avec $m\in(0,1]$ et $q>1$. Alors pour Riemann-Liouville K-intégrales fractionnaires nous avons :*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)\left(m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|-|f'(a)|\right)}{2}$$

$$\left\{\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}\left(\frac{\alpha}{k}+s+1\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}. \tag{3.22}$$

où $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1.$

Preuve. Sa preuve est semblable à la preuve du Théorème 3.8 ou directement (3.22) peut être obtenue à partir de (3.16) en prenant $\eta=0$. ■

Corollaire 3.14 *L'inégalité ci-dessous est valable pour les fonctions m-convexes via Riemann-Liouville K-intégrales fractionnaires*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)\left(m\left|f'\left(\frac{b}{m}\right)\right|-|f'(a)|\right)}{2}$$

$$\left\{\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+2}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+2}\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2^{q+1}-1}{2^{q+1}(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2^{q+1}(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}. \tag{3.23}$$

Preuve. En posant $s=1$ dans l'inégalité (3.22) du Théorème 3.10 nous obtenons l'inégalité ci-dessus (3.23) ■

Corollaire 3.15 *L'inégalité ci-dessous est valable pour les fonctions s-convexes via Riemann-Liouville K-intégrales fractionnaires*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)\left(|f'(b)|-|f'(a)|\right)}{2}$$

$$\left\{\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+s+1}\left(\frac{\alpha}{k}+s+1\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2^{qs+1}-1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2^{qs+1}(qs+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right]\right\}. \tag{3.24}$$

Preuve. En posant $m=1$ dans l'inégalité (3.23) du Théorème 3.10 nous obtenons l'inégalité ci-dessus (3.24) . ■

Corollaire 3.16 *L'inégalité ci-dessous est valable pour les fonctions convexes via Riemann-Liouville K-intégrales fractionnaires*

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}}\left[J_{a^+}^{\alpha,k}f(b)+J_{b^-}^{\alpha,k}f(a)\right]\right|$$

$$\leq \frac{(b-a)\left(|f'(b)|-|f'(a)|\right)}{2}$$

$$\left\{\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}+2}-2}{2^{\frac{\alpha}{k}+2}\left(\frac{\alpha}{k}+2\right)}-\left[\frac{1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{2^{q+1}-1}{2^{q+1}(q+1)}\right]^{\frac{1}{q}}\right.\right.$$

$$+\left[\frac{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}-1}{2^{\frac{\alpha}{k}p+1}\left(\frac{\alpha}{k}p+1\right)}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\frac{1}{2^{q+1}\left(q+1\right)}\right]^{\frac{1}{q}}\Bigg]\Bigg\}. \tag{3.25}$$

Preuve. En posant $s=1$ et $m=1$ dans (3.23) du Théorème 3.10 nous obtenons l'inégalité ci-dessus (3.25) . ■

Chapitre 4

Application

Tout au long de cette section par souci de simplicité, les notations suivantes sont utilisées pour les moyennes spéciales de deux nombres non négatifs x, y :

La moyenne arithmétique

$$A := A(x, y) = \frac{x+y}{2}, \quad x,\ y \geq 0.$$

La moyenne géométrique

$$G := G(x, y) = \sqrt{xy}, \quad x,\ y \geq 0.$$

La moyenne harmonique

$$H := H(x, y) = \frac{2xy}{x+y}, \quad x,\ y > 0.$$

La moyenne logarithmique

$$L := L(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y-x}{\ln y - \ln x}, & x \neq y \\ x, & x = y \end{cases}, \quad x,\ y > 0.$$

La moyenne p-logarithmique

$$L_p := L_p(x, y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y^{p+1} - x^{p+1}}{(p+1)(y-x)} \right)^{\frac{1}{p}}, & x \neq y, \quad p \in \mathbb{R} \backslash \{-1, 0\} \\ x, & x = y \end{cases}, \quad x,\ y > 0.$$

La moyenne identrique

$$I := I(x,y) = \frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{\frac{1}{y-x}}, \qquad x, y > 0.$$

Il est bien connu que L_p est strictement croissante pour $p \in \mathbb{R}$. De plus $L_0 = I$, $L_{-1} = L$.

Proposition 4.1 *Soit $x,\ y \in [0,\infty)$ avec $x < y$ et $p \in (-\infty,0) \cup [1,\infty) \setminus \{-1\}$ .Alors on a les inégalités suivantes*

$$\frac{A^p(x,y)}{2(\sqrt{e}-1)} \leq L_p^p(x,y) \leq 2(e-2)\,A(x^p,y^p)$$

Preuve. On le voit facilement à partir des inégalités (2.2) pour la fonction

$$f(x) = x^p, \qquad x \in [0,\infty)$$

■

Proposition 4.2 *Soit $x,\ y \in [0,\infty)$ avec $x < y$ et $p > 1$ .Alors on a les inégalités suivantes :*

$$\left|A(x^p,y^p) - L_p^p(x,y)\right| \leq p(y-x)\left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2}\right)A\left(x^{p-1},y^{p-1}\right)$$

Preuve. On le voit facilement à partir des inégalités (2.4) pour la fonction

$$f(x) = x^p, \qquad x \in [0,\infty)$$

■

Proposition 4.3 *Soit $x, y \in (0,\infty)$ avec $x < y$. Alors on a les estimations suivantes*

$$\frac{A^{-1}(x,y)}{2(\sqrt{e}-1)} \leq L^{-1}(x,y) \leq 2(e-2)\,H^{-1}(x,y)$$

Preuve. On obtient le résultat facilement à partir des inégalités (2.2) pour la fonction

$$f(x) = x^{-1} \qquad , \qquad x \in (0,\infty).$$

■

Proposition 4.4 *Soit $x, y \in (0,\infty)$ avec $x < y$. Alors on a la majoration suivante*

$$\left|H^{-1}(x,y) - L^{-1}(x,y)\right| \leq (y-x)\left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2}\right)\left|H^{-1}\left(x^2,y^2\right)\right|$$

Preuve. On le voit facilement à partir des inégalités (2.4) pour la fonction

$$f(x) = x^{-1} \qquad , \qquad x \in (0, \infty) \, .$$

■

Proposition 4.5 *Soit* $x, y \in (0, 1]$ *avec* $x < y$*. Alors on a les inégalités suivantes*

$$2\,(e-2)\ln G\,(x,y) \leq \ln I\,(x,y) \leq \frac{\ln A\,(x,y)}{2\,(\sqrt{e}-1)}.$$

Preuve. On obtient le résultat en appliquant l'inégalité (2.2) à la fonction

$$f(x) = -\ln x \quad , \qquad x \in (0, 1] \, .$$

■

Proposition 4.6 *Soit* $x, y \in (0, 1]$ *avec* $x < y$ *. Alors on a l'estimation suivante*

$$|\ln I - \ln G(x,y)| \leq (y-x)\left(4\sqrt{e} - e - \frac{7}{2}\right)\left|H^{-1}(x,y)\right|$$

Preuve. On le voit facilement à partir des inégalités (2.4) pour la fonction

$$f(x) = -\ln x \quad , \qquad x \in (0, 1] \, .$$

■

conclusion

La problématique de ce mémoire était d'une part l'étude de certaines inégalités de type Hermite-Hadamard plus précisement pour les fonctions exponentiellement convexes via l'intégrale fractionnaire , et de se familiarise avec certaines outils nécessaires utilisé dans les démonstrations dans ce genre de problème .

L'objectif de ce travail est d'étudier et généraliser quelques inégalités intégrales pour certains type de convexités en utilisant l'approche fractionnaire au sens de Riemann-Liouville en passant par une introduction et trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré aux inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions exponentiellement convexes et exponentiellement (p, h)-convexes.

Dans le deuxième chapitre nous présentons certains Théorèmes concernant les inégalités de type Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes de type exponentielle.

Dans le troisième chapitre on donne certains Théorèmes concernant les fonctions exponentiellement m-convexes et (s, m)-convexes dans le cas fractionnaire , et on termine notre mémoire par quelques applications.

Bibliographie

[1] M. U. Awan, M. A. Noor, K. I. Noor, Hermite-Hadamard Inequalities for Exponentially Convex Functions, Appl. Math. Inf. Sci.12, No, 2 ,405-409 (2018).

[2] G. A. Anastassiou,GENERALISED FRACTIONAL HERMITE-HADAMARD INEQUALITIES INVOLVING m-CONVEXITY AND (s, m)-CONVEXITY. FACTA UNIVERSITATIS (NIS) Ser. Math. Inform. Vol. 28, No 2 (2013), 107–126

[3] L. Ciurdariu, A Note Concerning Several Hermite-Hadamard Inequalities for Different Types of Convex Functions. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, 2012, no. 33, 1623 - 1639

[4] M. Kadakal, I. Işcan, Exponential type convexity and some related inequalities, J. Ineq. Appl 2020 :82. https ://doi.org/10.1186/s13660-020-02349-1

[5] N. Mehreen, M. Anwar, Hermite-Hadamard Type Inequalities via Exponentially (p, h)-Convex Functions, IEEE Access. 2020.2975628

[6] N. Mehreen, M .Anwar, Hermite–Hadamard type inequalities for exponentially p-convex functions and exponentially s-convex functions in the second sense with applications J. Ineq. Appl 2019 : 92. https ://doi.org/10.1186/s13660-019-2047-1

[7] S. Rashid, M. A. Noor, K. I. Noor, FRACTIONAL EXPONENTIALLY m-CONVEX FUNCTIONS AND INEQUALITIES, Int. J. Anal. Appl. 17(3) (2019)

[8] A. U. Rehman, G. Fari, S. Bibi, C. Y. Juny, S. M. Kang, K-fractional integral inequalities of Hadamard type for exponentially (s, m)-convex functions, Aims. Math 6 (1) : 882-892

[9] A. W. Roberts, D. E. Varberg, Convex Functions, New York and London :Academic Press, 1973.

[10] L. Tirtirau, Some Hermite-Hadamard Type Inequalities for Exponential Convex Functions, Appl. Math. Sci. Vol. 14, 2020, no.7, 337-348

[11] G. H. Toader, Some generalizations of the convexity, Proc. Colloq. Environ. Optim, Univ. Cluj-Napoca, 1985, 329-338.