

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par:

Ghellab Malak et Zitouni Nedjla

Intitulé

**Sur les cycles limites de certaines classes de
systèmes différentiels en dimension trois**

Dirigé par : Dr.MENACEUR Amor

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Badi Sabrina
Menaceur Amor
Bouattia Yassine

Prof Univ-Guelma
MCB Univ-Guelma
MCB Univ-Guelma

Session Juillet 2021



Dédi cace

Je dédie ce mémoire, le fruit de longues années d'étude.

A mes très chers parents :

*A Ma mère, symbole d'espoir et de volonté, et qui su
comment me pousser à meilleure de moi-même.*

*Au meilleur des pères, qui m'a toujours soutenue et
motivée dans mes études*

*A Mes frères Heythem et Abd el moumen pour leurs
présence et leurs soutien.*

*A Mon cher mari Wassim qui m'a soutenu et
encouragée. Qu'il trouve ici le témoignage de ma
profonde reconnaissance*

Merci pour ta compréhension et ta présence.

*A tous mes professeurs et enseignements de département
de mathématiques.*

*A mes meilleures amies : Hanna, Djihane, Nada,
Bouthaina, bessma, sara.*

A ma binôme : Malak.

A toute ma famille

NEDJLA



Dédi cace

Je dédie ce travail.

A mes très chers parents :

A toi maman, la fleur de ma vie, symbole de tendresse et de persévérance

A toi papa, qui m'a toujours encouragée et poussée à terminer mes études,

A Ma grande sœur Bouchra et son mari Halim pour leur soutien,

A ma princesse Razan, et mon prince Nidhal.

A mon seul frère Samir et sa femme Amna qui m'ont toujours soutenue et motivée

A ma chère et tendre sœur Amina que Dieu la préserve

A tous les enseignements de mathématiques.

A mes meilleures amies : Hanna, Djihane, Nada, Bouthaina .

A ma binôme : Nedjla.

A toute ma famille grande et petite

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

MALAK

REMERCIEMENT

Tout d'abord nous tenons à remercier ALLAH le tout puissant de nous avoir donné la santé, la volonté, le courage et la patience pour mener à terme nous formation et pourvoir réaliser ce travail de recherche.

*Nous tenons à exprimer notre profond respect à notre promoteur Monsieur **MENACEUR AMOR** pour avoir accepté de nous encadrer et nous soutenir tout au long de ce travail par: ses conseils, ses orientations, surtout pour sa gentillesse et sa disponibilité*

*Nous tenons à remercier madame **Badi Sabrina** Professeur à l'université 8 Mai 1945-Guelma pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de cette mémoire.*

*Nous exprimons ici toute nous considération à l'examineur monsieur **Bouattia Yasine**, Maître de conférences B à l'université 8 Mai 1945 Guelma, qui ont eu la gentillesse de faire partie du jury et pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail.*

Nous remercions aussi nos familles, qui durant nos études, nous ont toujours donné la possibilité de faire ce que nous voulions et qui ont toujours cru en nous.

Toutes les personnes qui nous ont aidé et soutenu de près ou de loin tout le long de ce travail.

Merci à tous ...



Table des matières

1	Notions préliminaires	3
1.1	Système d'équations différentielles et système dynamique	3
1.1.1	Equation différentielle	3
1.1.2	Système différentiel	4
1.2	Le point critique et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'une point d'équilibre	5
1.3	Portrait de phase :	5
1.4	Cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire	6
1.5	Système Hamiltonien	7
1.6	Théorème de Bezout	8
1.7	Exemple de système d'équations différentielles en dimension trois L'attracteur de Lorentz (effet papillon)	8
1.7.1	Point d'équilibre	9
1.7.2	Stabilité des points d'équilibre	9
1.7.3	Stabilité des équilibres pour $r > 1$	11
2	Méthode de moyennisation	14
2.1	Introduction	14
2.2	Méthode de moyennisation du premier ordre	15
2.3	Méthode de moyennisation du deuxième ordre	18
3	Cycles limites de certaines classe de système différentiels polynomiaux en dimension 3 via le théorème de la moyennisation	22
3.1	Introduction	22
3.2	Sur les cycles limites pour une classe de systèmes en dimension 2 (dans \mathbb{R}^2).	23

3.2.1	Présentation du problème	23
3.2.2	Preuve du Théorème 3.2.1	24
3.2.3	Application	26
3.3	Sur les cycles limites pour une classe de systèmes en dimension 3 (dans \mathbb{R}^3)	28
3.3.1	Présentation du problème	28
3.3.2	Preuve du Théorème 3.3.2	29
3.3.3	Application	32
3.4	Perturbation et cycles limites d'une famille de systèmes différentiels en dimension 3 (dans \mathbb{R}^3)	34
3.4.1	Présentation du problème	34
3.4.2	Preuve du Théorème 3.4.3	35
3.4.3	Application	37

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions premièrement le nombre de cycles limites d'une classe des systèmes différentiels en dimension 3 dépendant d'un petit paramètre ε de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(ax + P(x, y, z)), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(ay + Q(x, y, z)), \\ \dot{z} = \varepsilon(cz + R(x, y, z)), \end{cases}$$

où $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ et $R(x, y, z)$ sont des polynômes de degré n commençons par des termes de degré 2, $a, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires, en utilisant la méthode de la moyennisation. La second partie de ce travail est l'étude du nombre maximum des cycles limites d'une classe des systèmes différentiels en dimension 3 de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_1} a_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}, \\ \dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_2} b_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}, \\ \dot{z} = \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_3} c_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}. \end{cases}$$

Mots clé : Cycle limite ; Théorie de moyennisation ; Centre linéaire.

Abstract

In this work, first we study the number of limit cycles for a class of 3-dimensional systems depending on a small parameter ε of the forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(ax + P(x, y, z)), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(ay + Q(x, y, z)), \\ \dot{z} = \varepsilon(cz + R(x, y, z)), \end{cases}$$

where $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ and $R(x, y, z)$ are arbitrary polynomials of degree n starting with terms of degree 2, by using the averaging method. The second part of this work is the study of the maximum number limit cycles for a class of 3-dimensional differential systems of the forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_1} a_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}, \\ \dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_2} b_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}, \\ \dot{z} = \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_3} c_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}. \end{cases}$$

Keywords : Limit cycles ; Averaging theory ; Linear center.

Introduction

La résolution directe d'un système différentiels et en général difficile ou impossible. Les méthodes numériques permettent seulement de calculer sur un intervalle de temps fini une solution approchée correspondante à des conditions initiales donnée en discrétisant l'intervalle. Cependant, une autre issue est possible. C'est l'étude qualitative des systèmes différentiels. Cette étude permet de fournir des informations sur le comportement des solutions d'un système différentiel sans la nécessité de le résoudre explicitement, et elle consiste à examiner les propriétés et les caractéristiques des solutions de ce système, et de justifier, parmet ces solutions, l'existence ou la non existence d'une forme de courbe fermée isolée appelée cycle limite.

Le 16-problème de **Hilbert** [4], mise à parts l'hypothèse de **Riemann** que nous démontrons dans [8], il semble que ce soit le plus insaisissable des problèmes de **Hilbert** :

Il comporte de partie : La première concerne le nombre de branches réelles (ovales) d'une courbes algébrique, et leur disposition ; de nombreux résultats modernes (**Petrovskii**) apportent des informations à leur sujet. La seconde partie du problème pose la question du nombre maximal et de la position mutuelle des cycles limites de **Poincaré** (orbites périodiques isolées) pour une équation différentielle polynomiale plane de degré donnée ; cette question est encore ouverte. La première partie de 16-problème **d'Hilbert** est étudié par les chercheurs dans le domaine de la géométrie algébrique quand à la seconde partie elle intéresse sur tous les chercheurs dans les domaines de la système dynamique et des équations différentielles. **Hilbert** a constaté qu'il ya un possible lien entre les deux parties du problème. D'autres connexions entres les deux partie ont été décrits par **Jibin Li**, [6].

Il s'en suit que lorsqu'on parle dans la suite du 16-problème **d'Hilbert**, en sous entend la deuxième partie du problème : quel est le nombre maximal $H(n)$ de cycles limites possibles pour le système polynomial planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases}$$

de degré n , $n = \max(\deg P; \deg Q)$ et quel est leur disposition dans le plan des variables x et y ?

Dans ce travail, on considère les problèmes de recherche des cycles limites pour un système différentiel en dimension trois (\mathbb{R}^3) dont le second membre dépend d'un petit paramètre ε , une réponse à ce problème peut être donnée en utilisant la méthode de moyennisation.

Ce mémoire est structuré comme suite :

Le chapitre 1 présente quelque rappel et des notions préliminaires des systèmes différentiels.

Dans le chapitre 2 nous présentons les théorèmes importants de la méthode de moyennisation du premier et second ordre avec des exemples.

Le chapitre 3 s'intéresse aux cycles limites des systèmes différentiels en dimension 3. On détermine le nombre maximum des cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$, $z = 0$, perturbé par une certaine classe des systèmes différentiels en dimensions trois et ceci en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre. Cette étude a fait l'objet deux articles publiés dans les revues *Applicable Analysis* [3] et *Bulletin des Sciences Mathématiques* [4].

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre contient quelques notions générales et principales pour l'étude qualitative des systèmes dynamiques. On commence par définir les systèmes différentiels, on examinera les notions de : les points critiques et le système linéarisé d'une système non linéaire au voisinage d'un points d'équilibre, nature des points d'équilibre, le portrait de phase, orbite périodique.

Ensuite, nous introduisons la notion d'un cycle limite et systèmes d'équation différentielle de dimension trois. Enfin, nous donnons un exemple de système d'équations différentielles en dimension trois (attracteur de Lorentz).

1.1 Système d'équations différentielles et système dynamique

1.1.1 Equation différentielle

Définition 1.1.1 : Soit E un espace vectoriel normé, une équation différentielle ordinaire (*EDO*) est un relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $t \rightarrow y(t)$ et ses dérivées $(t, y, y', \dots, y^{(n)})$ au point t définie par

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.1)$$

Soit y une fonction de t définie d'un intervalle I dans l'espace vectoriel normé E , n fois dérivable en tout point de I et $y', y'', \dots, y^{(n)}$ ses dérivées successives.

1.2. LE POINT CRITIQUE ET LE SYSTÈME LINÉARISÉ D'UN
SYSTÈME NON LINÉAIRE AU VOISINAGE D'UNE POINT
D'ÉQUILIBRE

Le système (1.3) engendré un système dynamique, car l'application

$$U : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

qui à tout $t \in \mathbb{R}^+$; $x \in \mathbb{R}^n$ associe :

$$U(t, x) = e^{tA}x_0,$$

vérifie les quatre propriétés précédentes.

1.2 Le point critique et le système linéarisé d'un système non linéaire au voisinage d'une point d'équilibre

Définition 1.2.1 : soit le système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n). \quad (1.4)$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système (1.4), le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(x_0) = 0.$$

Définition 1.2.2 : Considérons le système (1.4), le système :

$$\dot{x} = Ax,$$

où

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right) = Df(x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

est une matrice $(n \times n)$, est appelé Linéarisation de (1.4) en x_0 .

1.3 Portrait de phase :

Définition 1.3.1 : Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.5)$$

où P, Q sont des polynômes en x et y . Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.5) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelés orbites.

Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentés dans le plan (x, y) s'appelle portrait de phase, et le plan (x, y) est appelé plan de phase.

1.4 Cycle limite et l'amplitude d'un cycle limite d'un système planaire

Définition 1.5.1 : On dit que $(x(t), y(t))$ est une solution de système (1.5) si le champs de vecteur $X = (P, Q)$ est toujours tangent à la trajectoire représentant cette solution dans le plans de phase. Autrement dit,

$$\forall t \in I : P(x(t), y(t))x + Q(x(t), y(t))y = 0.$$

Définition 1.5.2 : Une solution périodique du système (1.5) tout solution $(x(t), y(t))$ pour laquelle il existe un réelle $T > 0$ telle que

$$\forall t \in [0, T[: (x(t + T), y(t + T)) = (x(t), y(t)) , \text{ pour } T > 0.$$

Le plus petite nombre T qui convient s'appelle alors période de cette solution .

Nous avons présentons d'abord la définition d'un cycle limite par :

Définition 1.5.3 : On appelle cycle limite de système (1.5), toute solution périodique isolée dans l'ensemble de toutes les solutions périodiques de ce système.

Exemple 1.5.1 : Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(4 - x^2 - y^2), \\ \dot{y} = x + y(4 - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (1.6)$$

Après passage en coordonnées polaire (r, θ) , ce système se découple en

$$\begin{cases} \dot{r} = r(4 - r^2), \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases}$$

Ce qui donne visiblement une seule solution périodique

$$r(t) = \sqrt{4} = 2, \quad \theta(t) = \theta_0 + t.$$

Dans le plan de phase, c'est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$ et c'est un cycle limite unique les autres solutions s'obtiennent par integration du système. Lorsque $t \rightarrow \infty$, toutes ces solutions s'approchent du cycle limite.

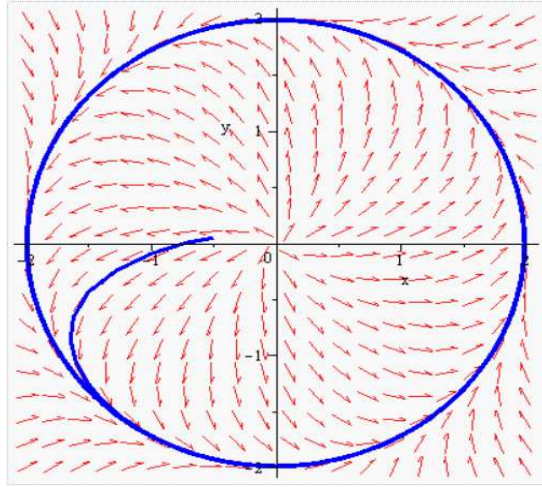


FIG.1.1-Cycle limite du systme (1.6)

1.5 Système Hamiltonien

Un système Hamiltonien est un système d'équation différentielle du type

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = D_q H(p(t), q(t)), \\ \dot{q}(t) = D_p H(p(t), q(t)), \end{cases} \quad (1.7)$$

où $H \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$. La fonction H est appelé Hamiltonien du système.

Si (p, q) est un solution du système Hamiltonien (1.7), alors on calcule

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = D_p H(p(t), q(t))\dot{p}(t) + D_q H(p(t), q(t))\dot{q}(t) = 0.$$

Lemme 1.11 :

Pour $n, m \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_{m, n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m(\theta) \sin^n(\theta) d\theta,$$

alors

$$I_{m, n} = \frac{m-1}{m+n} I_{m-2, n},$$

et

$$I_{m, n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m, n-2},$$

ces intégrales sont utilisées jusqu'à ce qu'on arrive à $I_{0, 0} = 2\pi$ ou

$I_{0, 1} = I_{1, 0} = I_{1, 1} = 0$, notons que $I_{m, n} \neq 0$ si et seulement si m et n sont paires.

1.6 Théorème de Bezout

Soit $p_j, j = 1 \dots n$ des polynômes en ces variables (x_1, x_2, \dots, x_d) de degré $d_j; j = 1 \dots n$.

Considérons le système polynomial suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ p_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ p_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \end{array} \right.$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, si le nombre de solution de ce système est fini, alors s'il est borné par $d_1 \times d_2 \dots \times d_n$.

Pour la démonstration voir [9].

1.7 Exemple de système d'équations différentielles en dimension trois L'attracteur de Lorentz (effet papillon)

Le système d'équations suivante décrit le transfert thermique dans l'atmosphère, avec de la conduction et parfois de la convection.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f_1(x, y, z) = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = f_2(x, y, z) = rx - y - xz, \\ \dot{z} = f_3(x, y, z) = xy - bz, \end{array} \right.$$

1.7. EXEMPLE DE SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN
DIMENSION TROIS L'ATTRACTEUR DE LORENTZ (EFFET
PAPILLON)

où x représente la vitesse, y la différence locale de température (dT), z la distorsion des profils de température (par rapport au cas linéaire conducteur). σ est proportionnel au nombre de Prandtl et b à l'élongation de la boîte et r le paramètre de contrôle (proportionnel au gradient thermique vertical imposé au fluide ($\Delta T/L$)). Ici, on prend $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$.

1.7.1 Point d'équilibre

Cherchons les points d'équilibres de ce système dynamique qui prend la forme $\dot{X} = f(x)$ où $X = (x, y, z)^t$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = x \\ (r - 1 - z).x & = 0 \\ x^2 & = bz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} y & = x, \\ r - 1 & = z, \\ x^2 & = bz, \end{cases}$$

Le deuxième point d'équilibre obéit à :

$$\begin{cases} x^2 & = b(r - 1), \\ y & = x, \\ z & = r - 1. \end{cases}$$

Premier cas : $r \leq 1$, Dans ce cas, il n'y a qu'un seul point d'équilibre :

$$p_0 = (0, 0, 0).$$

Deuxième cas : $r > 1$, Il y a trois points d'équilibre :

$$p_0 = (0, 0, 0), p_1 = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1 \right) ;$$

$$p_2 = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1 \right).$$

1.7.2 Stabilité des points d'équilibre

On linéarise le système. On obtient :

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = A(x, y, z),$$

avec

$$A \equiv \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r - z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}$$

La stabilité dépend du signe de la partie réelle des valeurs propres de A qui sont les solutions de l'équation :

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 \cdot \text{tr}(A) + \frac{\lambda}{2} \cdot [\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A^2)] - \det(A) = 0.$$

Stabilité de point d'équilibre p_0 : Dans ce cas, la matrice A s'exprime :

$$A_{\setminus(0,0,0)} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on a :

$$\text{tr}(A) = -(\sigma + 1 + b) \quad \text{et} \quad \det(A) = \sigma b(r - 1),$$

d'où

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (\sigma + 1 + b) \cdot \lambda^2 + \lambda \cdot (\sigma(1 - r) + b(1 + \sigma)) - \sigma b(r - 1) &= 0, \\ \Leftrightarrow (\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + \sigma(1 - r)) &= 0. \end{aligned}$$

Le terme de droite est un polynôme de degré 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = (1 + \sigma)^2 - 4\sigma(1 - r).$$

La nature des solutions du polynôme caractéristique dépend du signe de Δ :

$$\begin{aligned} \Delta > 0 &\Leftrightarrow (1 + \sigma)^2 > 4\sigma(1 - r) \\ &\Leftrightarrow 1 - r < \frac{(1 + \sigma)^2}{4\sigma} \end{aligned}$$

Ici, $\sigma = 10$. Par conséquent, le discriminant sera positif si et seulement si $r > \frac{81}{40}$. C'est toujours le cas car $r > 0$. Nous avons donc 3 racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -b < 0, \\ \lambda_2 = \frac{-(1+\sigma) + \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2}, \\ \lambda_3 = \frac{-(1+\sigma) - \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2} < 0. \end{cases}$$

On voit que λ_2 est négatif pour $0 < r < 1$ et positif pour $r > 1$. Par conséquent, le point d'équilibre $(0, 0, 0)$ est stable pour $0 < r < 1$ et instable pour $r > 1$.

1.7. EXEMPLE DE SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN
DIMENSION TROIS L'ATTRACTEUR DE LORENTZ (EFFET
PAPILLON)

1.7.3 Stabilité des équilibres pour $r > 1$

Pour les deux autres points d'équilibre, les valeurs propres de la jacobienne sont solutions de l'équation en λ :

$$\lambda^3 + (\sigma + 1 + b)\lambda^2 + \lambda(\sigma + r)b + 2b\sigma(r - 1) = 0.$$

Selon les valeurs du paramètre r , ce polynôme de degré trois peut avoir trois racines réelles négatives (les équilibres sont donc stables) ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées.

On peut chercher s'il existe une valeur critique de r pour laquelle les équilibres deviennent instables. La déstabilisation de ces équilibres par changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si $\lambda = 0$ on a forcément $r = 1$. On peut donc rechercher pour quelles valeurs de r on peut obtenir deux racines iw et $-iw$ de partie réelle nulle. En reportant la valeur $\lambda = iw$ dans l'équation, on obtient les deux conditions :

$$\begin{aligned} -w^2(\sigma + b + 1) + 2b(r - 1)\sigma &= 0, \\ -iw^3 + iw b(\sigma + r) &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de w^2 entre les deux équations permet d'obtenir la valeur r_c critique :

$$r_c = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{(\sigma - b - 1)},$$

Pour les valeurs $\sigma = 10$ et $b = \frac{8}{3}$, la valeur critique est $r_c = 470/19 \simeq 24,73$.

Deux valeurs propres complexes conjuguées traversent l'axe des imaginaires lorsque le paramètre r franchit la valeur critique r_c .

Lorsque $r > r_c$, le système transite vers un régime chaotique. La trajectoire tourne autour d'un des deux équilibres instables comme si elle y convergerait avant de basculer aléatoirement vers l'autre équilibre pour y répéter le même type de comportement toutes les trajectoires convergent vers une trajectoire chaotique : l'attracteur étrange. On montre que la distance entre deux conditions initiales très proches s'amplifie très rapidement. Cette sensibilité aux conditions initiales, ainsi que le chaos déterministe observé avec ce système dynamique simple, on servi de base à ce que l'on appelle

"l'effet papillon".

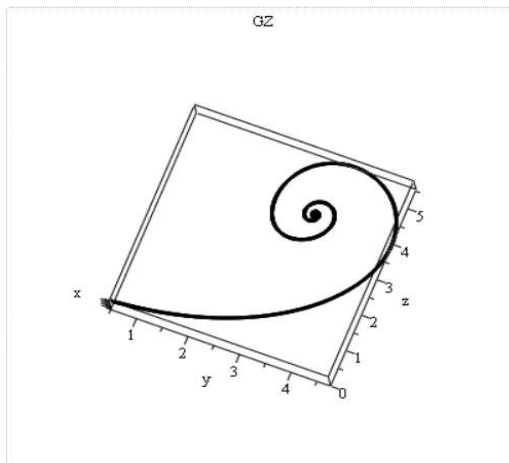


FIG.1.2-Modle de Lorenz- $r=5$

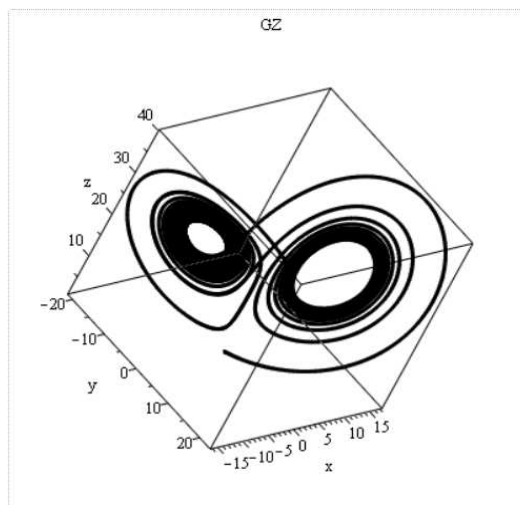


FIG.1.3-Modle de Lorenz- $r=24$

1.7. EXEMPLE DE SYSTÈME D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES EN
DIMENSION TROIS L'ATTRACTEUR DE LORENTZ (EFFET
PAPILLON)

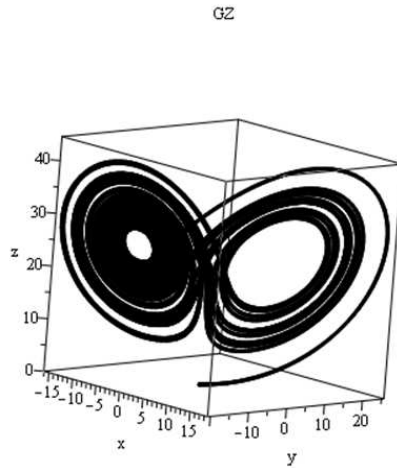


FIG.1.4-Modle de Lorenz- $r=26$

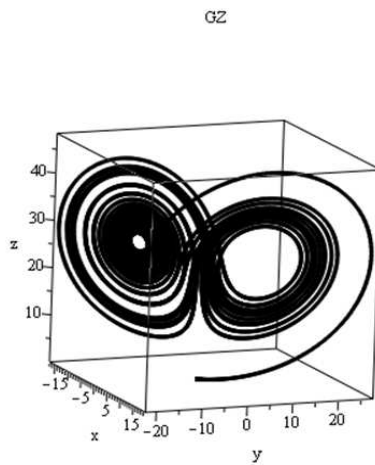


FIG.1.5-Modle de Lorenz- $r=28$

Chapitre 2

Méthode de moyennisation

2.1 Introduction

La théorie de moyennisation est l'une des plus importantes théories perturbatives utilisée actuellement dans l'étude des cycles limites des systèmes dynamiques. Cette théorie est une théorie classique qui donne des conditions pour lesquelles les points singuliers du système moyenné fournissent des cycles limites pour des systèmes différentiels ayant un centre. Elle s'applique aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon),$$

où ε est suffisamment petit, et $f(t, x, \varepsilon)$ est T-périodique en t.

La méthode de moyennisation a une longue histoire qui commence avec les oures classiques de Lagrange et Laplace qui ont fourni une justification intuitive du processus. la première formalisation de cette procédure à été donnée par Fatou en 1928. Des contribution pratiques et théoriques très importantes dans la théorie de moyennisation ont été faites par Krylor et Bogoluibor en 1930 et Bogoluibor en 1945. Le principe de cette méthode a été étendue dans plusieurs directions pour les deux types des systèmes différentiels.

Définition 2.1.1 : Soit D un ouvert de \mathbb{R}^n et soit $g \in C^1(D)$, V un ouvert de \mathbb{R}^n tel que

$$V \subset D \text{ et } Z_g = \{z \in V : g(z) = 0\},$$

supposons aussi $J_g(z) \neq 0$ ($J_g(z)$ désigne le déterminant de la matrice jacobienne de g en z), $\forall z \in Z_g$, alors le degré de Brouwer de la fonction g par

2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

rapport à l'ensemble V et le point 0 , noté $d_B(g, V, 0)$, est définie par :

$$d_B(g, V, 0) = \sum_{z \in Z_g} \text{sign}(J_g(z)).$$

Remarque 2.1 : Soit $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec

$$g(a) = 0,$$

où D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Si $J_g(a) \neq 0$, il existe un voisinage V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ alors $d_B(g, V, 0) \in \{-1, 1\}$.

2.2 Méthode de moyennisation du premier ordre

Théorème 2.2.1 Soit le système différentiel

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodique par rapport à t , D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n on définit $F_{10} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suite

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds, \quad (2.2)$$

supposons que

(i) F_1 et R sont localement Liphitzienne par rapport à x .

(ii) Pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $F_{10}(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(F_{10}, V, 0) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution $\Phi(., \varepsilon)$ du système (2.1) T -périodique isolée telle que $\Phi(., \varepsilon) \rightarrow a$ quant $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour la démonstration. (Voir [2])

Remarque

Les hypothèses de ce théorème sont plus faibles que celles du théorème (2.2.1), où à la place de **(i)**, il suppose que **(j)** $F_1, R, D_x F_1, D_x^2 F_1$ et $D_x R$ sont définies, continues et bornées par une constante M (indépendante de

ε). A la place de (ii), il suppose que (jj) pour $a \in D$ avec $F_{10}(a) = 0$, on a $J_{F_{10}(a)} \neq 0$, où $D_x F$ désigne la matrice jacobienne de F par rapport à x , $D_x^2 F$ la matrice hessienne de F et $J_{F_{10}}(a)$ désigne le déterminant de la jacobienne de F_{10} en a .

Exemple 2.2.1

Soit le système perturbé suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x + xz + z^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(y + yz), \\ \dot{z} = \varepsilon(4x^2 + 4y^2 + z). \end{cases} \quad (2.3)$$

En coordonnées cylindriques $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, le système (2.3) dans la région $r > 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(r + rz + z^2 \cos(\theta)), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(-z^2 \sin(\theta)), \\ \dot{z} = \varepsilon(4r^2 + z). \end{cases} \quad (2.4)$$

Le système (2.4) est équivalent à

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(r + rz + z^2 \cos(\theta)) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(4r^2 + z) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (2.5)$$

Pour appliquer la théorème de la moyenne du premier ordre sur le système (2.5) il faut calculer les fonctions moyennées

$$F_{10}(s) = (F_{10}^1(s), F_{10}^2(s)),$$

où $s = (r, z)$, on a

$$\begin{aligned} F_{10}^1(s) &= \frac{1}{2\pi} [(r + rz)I_{0,0} + z^2 I_{1,0}] \\ &= r(1 + z). \\ F_{10}^2(s) &= \frac{1}{2\pi} [(4r^2 + z)I_{0,0}] \\ &= 4r^2 + z. \end{aligned} \quad (2.6)$$

où

$$I_{n,m} = \int_0^{2\pi} \cos^n(\theta) \sin^m(\theta) d\theta.$$

2.2. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE

On résout le système (2.6), on obtient les points critique suivantes :

$$(r_0, z_0) = \left(\frac{1}{2}, -1\right).$$

Comme $r > 0$, la solution $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ est la seule qui fournisse un cycle limite. On vérifie maintenant que le déterminant calculé en cette racine est non nul.

la jacobienne est

$$JF_{10}(s) = \det \begin{pmatrix} \frac{dF_{10}^1}{dr} & \frac{dF_{10}^1}{dz} \\ \frac{dF_{10}^2}{dr} & \frac{dF_{10}^2}{dz} \end{pmatrix} \Big|_{(r_0, z_0)} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -4$$

Selon le théorème de la moyenne du premier ordre le système (2.3) exactement un cycle limite stable d'amplitude $r = \frac{1}{2}$. Voir la figure (2.1).

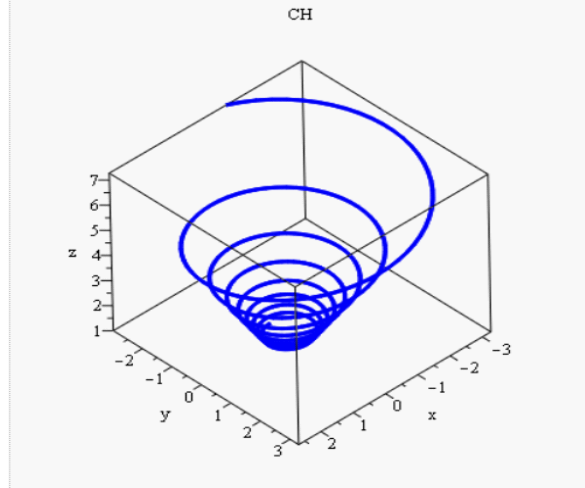


FIG.2.1-Cycle limite du système (2.3) pour $\varepsilon = 0.01$

2.3 Méthode de moyennisation du deuxième ordre

Théorème 2.3.1

Considérons le système différentiel

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 F_2(t, x) + O(\varepsilon^3), \quad (2.7)$$

où F_1 et $F_2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodique par rapport à t , D un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n .

On définit

$$F_{10}, F_{20} : D \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

tel que

$$F_{10}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(s, z) ds,$$

et

$$F_{20}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T [D_z F_1(s, z) \int_0^s F_1(t, z) dt + F_2(s, z)] ds. \quad (2.8)$$

On suppose que

(i) $F_1(t, \cdot) \in C^1(D)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, F_1 , F_2 , R et $D_x F_1$ sont localement lipschitziennes par rapport à x , R est différentiable par rapport à ε .

(ii) pour $V \subset D$ un sous ensemble ouvert bornée et pour tout $\varepsilon \in]-\varepsilon_f, \varepsilon_f[\setminus \{0\}$, il existe $a_\varepsilon \in V$ tel que

$$(F_{10} + \varepsilon F_{20})(a_\varepsilon) = 0 \text{ et } d_B(F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon), V, a_\varepsilon) \neq 0,$$

(i.e le degré de Brouwer de $F_{10}(a_\varepsilon) + \varepsilon F_{20}(a_\varepsilon) \setminus a_\varepsilon$ est non nul).

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $\Phi(\cdot, \varepsilon)$ de l'équation (2.7) telle que $\Phi(0, \varepsilon) = a_\varepsilon$.

Pour la démonstration voir [1, 7, 10]

Exemple 2.3.1

Soit le système perturbé suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(2x + 2z) + \varepsilon^2(2x + 2z), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(-2y + 2z) + \varepsilon^2 2x^2, \\ \dot{z} = \varepsilon(2x + 2yx^2) + \varepsilon^2(2z^2 + 2yz). \end{cases} \quad (2.9)$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

En coordonnées cylindrique $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, on a :

$$\begin{cases} \dot{r} = (2z \sin(\theta) + 2z \cos(\theta) + 4r \cos^2(\theta) - 2r)\varepsilon \\ \quad + (2r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 2z \cos(\theta) + 2r \cos^2(\theta))\varepsilon^2, \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon(-4r \cos(\theta) \sin(\theta) - 2\frac{(z \sin(\theta) + z \cos(\theta))}{r}) \\ \quad + \varepsilon^2(\frac{-2z \sin(\theta)}{r} + 2r \cos^3(\theta) - 2 \cos(\theta) \sin(\theta)). \\ \dot{z} = \varepsilon(2r \cos(\theta) + 2r^3 \sin(\theta) \cos(\theta)^2) + \varepsilon^2(2z^2 + 2r \sin(\theta)z) \end{cases} \quad (2.10)$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1^1(\theta, r, z) + \varepsilon^2 F_2^1(\theta, r, z) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_1^2(\theta, r, z) + \varepsilon^2 F_2^2(\theta, r, z) + O(\varepsilon^3), \end{cases} \quad (2.11)$$

où

$$\begin{aligned} F_1^1(\theta, r, z) &= 2z \sin(\theta) + 2z \cos(\theta) + 4r \cos^2(\theta) - 2r, \\ F_2^1(\theta, r, z) &= 16r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta) + 2r^2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + 8z \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad + 8r^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + 2r \cos^2(\theta) + \frac{4z}{r} + 8rz \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ &\quad + z \cos^3(\theta) + \cos(\theta) \sin(\theta) z^2 (1 + \frac{4}{r}) + 8rz \cos^2(\theta) \sin(\theta) \\ &\quad - 2 \cos(\theta) - 4 \sin(\theta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_1^2(\theta, r, z) &= 2r \cos(\theta) + 2r^3 \cos^2(\theta) \sin(\theta), \\ F_2^2(\theta, r, z) &= 2z^2 + 8r^2 \cos^2(\theta) \sin(\theta) + 4z(\sin(\theta) \cos(\theta) + \cos^2(\theta)) \\ &\quad + 2rz \sin(\theta) + 4r^2 z(\sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + \cos^3(\theta) \sin(\theta)) \\ &\quad + 8r^4 \cos^3(\theta) \sin^2(\theta). \end{aligned}$$

Maintenant on applique la méthode de moyennisation de deuxième ordre pour

$$\begin{aligned} F_{10}(r, z) &= (F_{10}^1(r, z), F_{10}^2(r, z)), \\ &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1^1(\theta, r, z) d\theta, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1^2(\theta, r, z) d\theta \right), \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

On calcule les fonctions $F_{20}(r, z) = (F_{20}^1(r, z), F_{20}^2(r, z))$

avec

$$F_{20}^1(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s, r, z) ds,$$

$$F_{20}^2(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(s, r, z) ds.$$

On calcule $f_1(s, r, z)$ et $f_2(s, r, z)$

$$\begin{pmatrix} f_1(s, r, z) \\ f_2(s, r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_1^1(\theta, r, z)}{dr} & \frac{F_1^1(\theta, r, z)}{dz} \\ \frac{F_1^2(\theta, r, z)}{dr} & \frac{F_1^2(\theta, r, z)}{dz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \int_0^S F_1^1(\theta, r, z) d\theta \\ \int_0^S F_1^2(\theta, r, z) d\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_2^1(s, r, z) \\ F_2^2(s, r, z) \end{pmatrix}$$

où

$$\frac{F_1^1(\theta, r, z)}{dr} = 4 \cos^2(s) - 2,$$

$$\frac{F_1^1(\theta, r, z)}{dz} = 2 \sin(s) + 2 \cos(s).$$

$$\frac{F_1^2(\theta, r, z)}{dr} = 2 \cos(s) + 6r^2 \cos^2(s) \sin(s),$$

$$\frac{F_1^2(\theta, r, z)}{dz} = 0.$$

$$\int_0^S F_1^1(\theta, r, z) d\theta = 2z - 2z \cos(s) + 2z \sin(s) - 2r \cos(s) \sin(s),$$

$$\int_0^S F_1^2(\theta, r, z) d\theta = 2r \sin(s) - \frac{1}{6} r^3 \cos^3(s) - \frac{1}{2} r^3 \cos(s) + \frac{2}{3} r^3.$$

$$\begin{aligned} F_2^1(s, r, z) &= 16r^2 \cos^3(s) \sin(s) + 2r^2 \sin(s) \cos^2(s) + 8z \cos^2(s) \sin(s) + 8r^2 \cos(s) \sin(s) \\ &\quad + 2r \cos^2(s) + \frac{4z}{r} + 8rz \cos(s) \sin^2(s) + z \cos^3(s) + z^2 \cos(s) \sin(s) \left(1 + \frac{4}{r}\right) \\ &\quad + 8rz \cos^2(s) \sin(s) - 2 \cos(s) - 4 \sin(s), \end{aligned}$$

2.3. MÉTHODE DE MOYENNISATION DU DEUXIÈME ORDRE

et

$$F_2^2(s, r, z) = -8r^2 \cos^2(s) \sin(s) - 4z(\cos^2(s) + \cos(s) \sin(s)) - 8r^4 \cos^3(s) \sin^2(s) - 4r^2 z(\cos^2(s) \sin^2(s) + \cos^3(s) \sin(s) + 2z^2 + 2r \sin(s)z).$$

On a

$$\begin{pmatrix} F_{20}^1(r, z) \\ F_{20}^2(r, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8r}(-5r^4 + 20r^2 + 64zr + 32z) \\ z(r^2 + 2z - 4) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Le système

$$\begin{cases} F_{20}^1(r, z) = 0, \\ F_{20}^2(r, z) = 0, \end{cases}$$

possède exactement 4 solutions (r, z)

$$\left(\frac{4\sqrt{11} - 16}{5}, \frac{64\sqrt{11} - 166}{25} \right), \left(\frac{-4\sqrt{11} - 16}{5}, \frac{-64\sqrt{11} - 166}{25} \right), (-2, 0), (2, 0).$$

Selon le théorème de moyennisation de deuxième ordre, le système (2.9) possède un seul cycle limite d'amplitude $r = 2$ qui bifurque $\dot{x} = -y$, $y = x$, $z = 0$. Voir la figure (2.2).

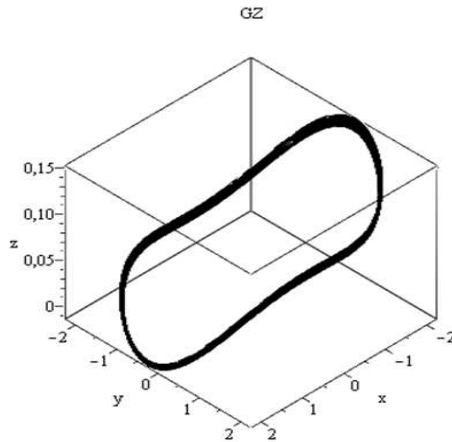


FIG.2.2-Cycle limite du systme (2.9) pour
 $\varepsilon = 0.01$

Chapitre 3

Cycles limites de certaines classe de système différentiels polynomiaux en dimension 3 via le théorème de la moyennisation

3.1 Introduction

Le 16^{ème} problème de Hilbert consiste en la recherche d'une borne uniforme $H(n)$ au nombre de cycles limites apparaissant dans la classe des systèmes

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1)$$

ainsi qu'en l'étude de leurs configurations.

Une technique usuelle pour obtenir un système différentiel avec cycles limites est de considérer un système différentiel polynômial de type (3.1), possédant une singularité de type centre, et de ce fait intégrable.

On perturbe ce système dans \mathbb{R}^3 par des polynômes f_1 , f_2 et f_3 de même degrés que P , Q et H .

Le système différentiel obtenu s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y, z) + \varepsilon f_1(x, y, z), \\ \dot{y} = Q(x, y, z) + \varepsilon f_2(x, y, z), \\ \dot{z} = H(x, y, z) + \varepsilon f_3(x, y, z), \end{cases}$$

3.2. SUR LES CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES EN DIMENSION 2 (DANS \mathbb{R}^2).

où $\varepsilon \succ 0$ est un petit paramètre.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux cycles limites de certaines classe de système différentiels en dimension 2 et 3.

On donne un résultat concernant le nombre maximum de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques d'un centre linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^2,$$

et

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \\ \dot{z} = 0 \end{cases} \text{ dans } \mathbb{R}^3,$$

perturbé par une classe de systèmes différentiels et ceci en utilisant la théorie de moyennisation.

3.2 Sur les cycles limites pour une classe de systèmes en dimension 2 (dans \mathbb{R}^2).

3.2.1 Présentation du problème

Dans cette section, en utilisant le théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ d'une classe de systèmes différentiels :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(ax + P(x, y)), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(ay + Q(x, y)), \end{cases} \quad (3.2)$$

où $P(x, y), Q(x, y)$ sont des polynômes de degré n commençons par des termes de degré 2, $a, \in \mathbb{R}$ sont des constantes et ε est un petit paramètre.

Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans *Applicable Analysis* [3].

Théorème 3.2.1

Pour $|\varepsilon| \succ 0$ suffisamment petit, le nombre maximum de cycles limites du système (3.2) qui bifurquent d'un centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est

$$\begin{aligned} a) & \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ impaire,} \\ b) & \frac{n-2}{2} \text{ si } n \text{ paire.} \end{aligned}$$

3.2.2 Preuve du Théorème 3.2.1

Dans cette preuve, on utilise la théorie de moyennisation d'ordre un.

En coordonnées polaires (r, θ) , où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, le système (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left(ar + \sum_{k=2}^n r^k p_{k+1}(\theta) \right); \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \sum_{k=2}^n r^{k+1} q_{k+1}(\theta); \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$\begin{cases} p_{k+1}(\theta) = \cos \theta P_k(\cos \theta, \sin \theta) + \sin \theta Q_k(\cos \theta, \sin \theta), \\ q_{k+1}(\theta) = \cos \theta Q_k(\cos \theta, \sin \theta) - \sin \theta P_k(\cos \theta, \sin \theta). \end{cases} \quad (3.4)$$

En remarque que le système (3.3) est défini sur le cycle $\{(r, \theta) \in \mathbb{R} \times S^1\}$, considérons maintenant θ comme nouvelle variable indépendante le système (3.3) s'écrit sous la forme standard du théorie de moyennisation d'ordre un

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon \left(ar + \sum_{k=2}^n r^k p_{k+1}(\theta) \right) + O(\varepsilon^2). \quad (3.5)$$

Maintenant, on calcule la fonction moyéné $f^0(r)$

$$\begin{aligned} f^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(ar + \sum_{k=2}^n r^k p_{k+1}(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ar d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^n r^k p_{k+1}(\theta) d\theta \\ &= ar + \sum_{k=2}^n r^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{k+1}(\theta) d\theta \\ &= ar + \sum_{k=2}^n a_k r^k \end{aligned}$$

3.2. SUR LES CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES
EN DIMENSION 2 (DANS \mathbb{R}^2).

où

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{k+1}(\theta) d\theta.$$

Soit p_{ij}^k, q_{ij}^k est défini par

$$\begin{cases} P_k(\theta) = \sum_{i+j=k} p_{i,j}^{(k)} x^i y^j, \\ Q_k(\theta) = \sum_{i+j=k} q_{i,j}^{(k)} x^i y^j. \end{cases} \quad (3.6)$$

Pour calculer l'expression exacte de p_{k+1} en utilisant le système (3.6)

$$\begin{aligned} p_{k+1}(\theta) &= \cos \theta \sum_{i+j=k} p_{i,j}^{(k)} \cos^i \theta \sin^j \theta + \sin \theta \sum_{i+j=k} q_{i,j}^{(k)} \cos^i \theta \sin^j \theta \\ &= \sum_{i+j=k} p_{i,j}^{(k)} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + \sum_{i+j=k} q_{i,j}^{(k)} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta \\ &= \sum_{i-1+j=k} p_{i-1,j}^{(k)} \cos^i \theta \sin^j \theta + p_{k,0}^{(k)} \cos^{k+1} \\ &\quad + \sum_{i+j-1=k} q_{i,j-1}^{(k)} \cos^i \theta \sin^j \theta + q_{0,k}^{(k)} \sin^{k+1} \theta \\ &= p_{k,0}^{(k)} \cos^{k+1} + \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 1}} \left(p_{i-1,j}^{(k)} + q_{i,j-1}^{(k)} \right) \cos^i \theta \sin^j \theta + q_{0,k}^{(k)} \sin^{k+1} \theta \end{aligned}$$

alors :

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(p_{k,0}^{(k)} \cos^{k+1} + \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 1}} \left(p_{i-1,j}^{(k)} + q_{i,j-1}^{(k)} \right) \cos^i \theta \sin^j \theta + q_{0,k}^{(k)} \sin^{k+1} \theta \right) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_{k,0}^{(k)} \cos^{k+1} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 1}} \left(p_{i-1,j}^{(k)} + q_{i,j-1}^{(k)} \right) \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_{0,k}^{(k)} \sin^{k+1} \theta d\theta, \end{aligned}$$

on a

$$a_k = p_{k,0}^{(k)} I_{K+1,0} + \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 1}} \left(p_{i-1,j}^{(k)} + q_{i,j-1}^{(k)} \right) I_{i,j} + q_{0,k}^{(k)} I_{0,K+1}. \quad (3.7)$$

*CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINES CLASSE DE
SYSTÈME DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 3 VIA
LE THÉORÈME DE LA MOYENNISATION*

D'après lemme (1.11)

$$f^0(r) = ar + \sum_{k=2}^n r^k a_k,$$

où

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ paire,} \\ \neq 0 & \text{si } k \text{ impaire,} \end{cases}$$

alors

$$f^0(r) = \begin{cases} ar + a_3 r^3 + \dots + a_n r^n & \text{si } n \text{ impaire,} \\ ar + a_3 r^3 + \dots + a_{n-1} r^{n-1} & \text{si } n \text{ paire.} \end{cases}$$

Donc

$$f^0(r) = \begin{cases} r(a + a_3 r^{2+} + \dots + a_n r^{n-1}) & \text{si } n \text{ impaire,} \\ r(a + a_3 r^{2+} + \dots + a_{n-1} r^{n-2}) & \text{si } n \text{ paire,} \end{cases}$$

où

$$a_k = p_{k,0}^{(k)} I_{K+1,0} + \sum_{\substack{i+j=k+1 \\ i,j \geq 2 \text{ pair}}} \left(p_{i-1,j}^{(k)} + q_{i,j-1}^{(k)} \right) I_{i,j} + q_{0,k}^{(k)} I_{0,K+1}. \quad (3.8)$$

Alors $f^0(r)$ peut avoir au plus $\frac{n-1}{2}$ racines positive si n impaire et au plus $\frac{n-2}{2}$ racines positive si n paire.

3.2.3 Application

Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \varepsilon(2 + \frac{2}{3}x - x^2)y, \end{cases} \quad (3.9)$$

on passe au coordonnées polaires, $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$, on obtient le système :

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon(2r \sin^2(\theta) + \frac{2}{3}r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon((2 \cos(\theta) \sin(\theta) + \frac{2}{3}r \sin(\theta) \cos^2(\theta) - r^2 \cos^3(\theta) \sin(\theta))). \end{cases}$$

En divisant \dot{r} par $\dot{\theta}$, on trouve

$$\frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon(2r \sin^2(\theta) + \frac{2}{3}r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)),$$

3.2. SUR LES CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES
EN DIMENSION 2 (DANS \mathbb{R}^2).

telle que

$$\frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(r, \theta) + O(\varepsilon^2). \quad (3.10)$$

On cherche maintenant la fonction moyenné $F_{10}(r)$

$$\begin{aligned} F_{10}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -(2r \sin^2(\theta) + \frac{2}{3}r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) - r^3 \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)) d\theta \\ &= \frac{-r}{8} [8 - r^2]. \end{aligned}$$

Le système moyenné

$$\dot{r} = \varepsilon F_{10}(r) = \frac{-\varepsilon r}{8} [8 - r^2]. \quad (3.11)$$

Donc, on a un seul cycle limite stable pour $r = \sqrt{8}$ parceque

$$\frac{dF_{10}}{dr}(\sqrt{8}) = -6 < 0.$$

Alors, d'après le théorème 3.1, le système (3.9) possède un seul cycle limite d'amplitude $\sqrt{8} = 2.8284$ qui bifurque des orbites périodiques du systèmes

*CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINES CLASSE DE
SYSTÈME DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 3 VIA
LE THÉORÈME DE LA MOYENNISATION*

non perturbées quand $\varepsilon = 0$.

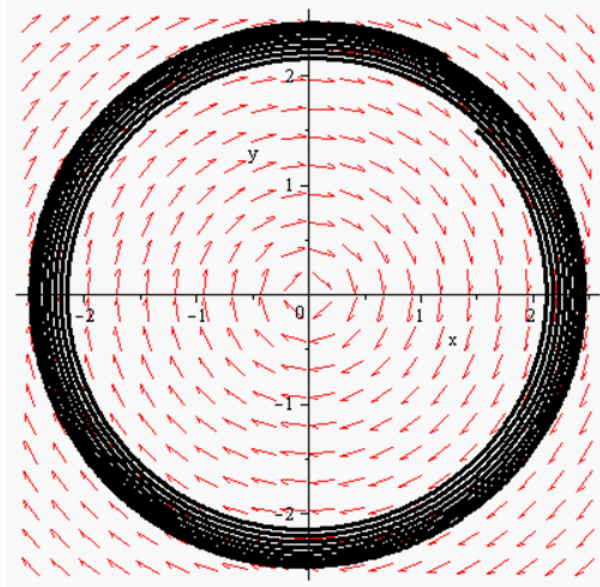


FIG.3.1-Cycle limite du systme (3.9) pour
 $\varepsilon = 0.01$

3.3 Sur les cycles limites pour une classe de systèmes en dimation 3.(dans \mathbb{R}^3)

3.3.1 Présentation du problème

Dans cette section, en utilisant le théorie de moyennisation du premier ordre, nous étudions le nombre maximal de cycles limites qui bifurquent des orbites périodiques du centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x, z = 0$ d'une classe de systèmes différentiels :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon (ax + P(x, y, z)), \\ \dot{y} = x + \varepsilon (ay + Q(x, y, z)), \\ \dot{z} = \varepsilon (cz + R(x, y, z)), \end{cases} \quad (3.12)$$

où $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ et $R(x, y, z)$ sont des polynômes de degré n commençons par des termes de degré 2, $a, c \in \mathbb{R}$ sont des constantes et ε est un petit

3.3. SUR LES CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES EN DIMENSION 3. (DANS \mathbb{R}^3)

paramètre.

Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans *Applicable Analysis* [3].

Théorème 3.3.2

Le nombre maximum de cycles limites du système (3.12) qui bifurquent d'une centre linéaire $\dot{x} = -y, \dot{y} = x, z = 0$, en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre est $\left[\frac{(n-1)n}{2} \right]$ cycles limites, avec $[.]$ est la fonction partie entière.

3.3.2 Preuve du Théorème 3.3.2

Nous allons appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre, pour cela nous écrivons le système (3.12).

En coordonnées cylindrique (r, θ, z) où $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, $z = 0$. Le système (3.12) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}, \\ \dot{z} = z. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon (ar + \cos \theta P + \sin \theta Q), \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{r} (\cos \theta Q - \sin \theta P), \\ \dot{z} = \varepsilon (cz + R), \end{cases} \quad (3.13)$$

le système (3.13) avec $r > 0$ est équivalent :

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon (ar + \cos \theta P + \sin \theta Q) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon (cz + R) + o(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.14)$$

où P, Q et R sont noté par $:P(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$, $Q(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ et $R(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$.

Pour calculer l'expression exacte $F_{10}(s) = (F_{10}^1(s), F_{10}^2(s))$, $s = (r, z)$, nous utilisons les expressions des intégrales de le lemme (1.11).

$$\begin{cases} F_{10}^1(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (ar + \cos \theta P + \sin \theta Q) d\theta, \\ F_{10}^2(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (cz + R) d\theta. \end{cases} \quad (3.15)$$

Le système (3.15) devient :

$$\begin{cases} F_{10}^1(s) = ar + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta P + \sin \theta Q) d\theta, \\ F_{10}^2(s) = cz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\theta. \end{cases}$$

CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINES CLASSE DE
 SYSTÈME DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 3 VIA
 LE THÉORÈME DE LA MOYENNISATION

Pour chaque $k = 1, 2, \dots, n$ nous écrivons :

$$\begin{cases} P_k(x, y, z) = \sum_{i+j+l=k} a_{i,j,l}^k x^i y^j z^l, \\ Q_k(x, y, z) = \sum_{i+j+l=k} b_{i,j,l}^k x^i y^j z^l, \\ R_k(x, y, z) = \sum_{i+j+l=k} c_{i,j,l}^k x^i y^j z^l. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} F_{10}^1(s) &= ar + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\sum_{i+j+l=k} a_{i,j,l}^k x^i y^j z^l \right) + \sin \theta \left(\sum_{i+j+l=k} b_{i,j,l}^k x^i y^j z^l \right) d\theta, \\ &= ar + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\sum_{i+j+l=k} a_{i,j,l}^k r^{i+j} \cos^i \theta \sin^j \theta z^l \right) \\ &\quad + \sin \theta \left(\sum_{i+j+l=k} b_{i,j,l}^k r^{i+j} \cos^i \theta \sin^j \theta z^l \right) d\theta, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} F_{10}^1(s) &= ar + \sum_{k=2}^n \sum_{i+j+l=k} (r^{i+j} z^l) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_{i,j,l}^k \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta + b_{i,j,l}^k \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta \right), \\ &= ar + \sum_{k=2}^n \sum_{i+j+l=k} (r^{i+j} z^l) \left(a_{i,j,l}^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{i+1} \theta \sin^j \theta d\theta + b_{i,j,l}^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^{j+1} \theta d\theta \right), \end{aligned}$$

en obtient

$$\begin{aligned} F_{10}^1(s) &= ar + \sum_{k=2}^n \sum_{i+j+l=k} (r^{i+j} z^l) [a_{i,j,l}^k I_{i+1,j} + b_{i,j,l}^k I_{i,j+1}] \\ &= ar + \sum_{k=2}^n f_k, \end{aligned}$$

3.3. SUR LES CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES EN DIMENSION 3. (DANS \mathbb{R}^3)

et

$$\begin{aligned}
 F_{10}^2(s) &= cz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(x, y, z) d\theta, \\
 &= cz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j+l=k} c_{i,j,l}^k x^i y^j z^l d\theta, \\
 &= cz + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i+j+l=k} c_{i,j,l}^k r^i \cos^i \theta r^j \sin^j \theta z^l d\theta,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 F_{10}^2(s) &= cz + \sum_{i+j+l=k} \sum_{k=2}^n r^{i+j} z^l c_{i,j,l}^k \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^i \theta \sin^j \theta d\theta, \\
 &= cz + \sum_{k=2}^n \sum_{i+j+l=k} r^{i+j} z^l c_{i,j,l}^k I_{i,j}, \\
 &= cz + \sum_{k=2}^n g_k.
 \end{aligned}$$

Par conséquence f et g sont des polynome dans les variable r, z de degré n

$$f_k = \sum_{l=0}^k r^{k-l} z^l F_{k,l},$$

où

$$F_{k,l} = a_{k-l,0,l}^k I_{k-l+1,0} + b_{0,k-l,l}^k I_{0,k-l+1} + \sum_{\substack{i+j=k-l+1 \\ i>0, j>0}} (a_{i-1,j,l}^k + b_{i,j-1,l}^k) I_{i,j},$$

à partir de l'expression de g et compte tenu du lemme (1.11), on voit que les seuls coefficients qui apparaissent sont les $c_{i,j,l}^k$ avec i et j pair. Donc, tous les exposants en g de r sont des nombres pairs. Par conséquent, nous pouvons écrire $g = \bar{g}(r^2, z)$.

*CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINES CLASSE DE
SYSTÈME DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 3 VIA
LE THÉORÈME DE LA MOYENNISATION*

De la même manière, à partir de l'expression de chaque f_k , $i+j = k-l+1$ doit être pair. Donc, $k-l$ est un nombre impair, et

$$f = r \left(a + \sum_{k=2}^n \sum_{l=0}^k r^{k-l-1} z^l F_{k,l} \right) = r \bar{f}(r^2, z).$$

Ainsi par le théorème de Bezout, le nombre maximal de solutions communes (r, z)

$$\begin{cases} \bar{f}(r^2, z) = 0, \\ \bar{g}(r^2, z) = 0, \end{cases}$$

est $n(n-1)$.

Alors $F_{10}(s) \setminus s = (r, z)$ peut avoir au plus $\left\lfloor \frac{(n-1)n}{2} \right\rfloor$ avec $r > 0$, alors le nombre maximum de cycles limites du système (3.12) est $\left\lfloor \frac{(n-1)n}{2} \right\rfloor$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Ceci complète la démonstration du théorème 3.2.

3.3.3 Application

Soit le système perturbé suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(x + 2xz + 2z^2), \\ \dot{y} = x + \varepsilon(3y + 2yz), \\ \dot{z} = \varepsilon((x^2 + y^2) + 4z). \end{cases} \quad (3.16)$$

En coordonnées cylindrique $(x, y, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$, le système de la région $r > 0$ s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} = (3r + 2rz + 2z^2 \cos(\theta) - 2r \cos^2(\theta))\varepsilon, \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{\varepsilon}{r}(2r \cos(\theta) \sin(\theta) - 2z^2 \sin(\theta)), \\ \dot{z} = \varepsilon(r^2 + 4z). \end{cases} \quad (3.17)$$

Le système (3.17) est équivalent

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon(3r + 2rz + 2z^2 \cos(\theta) - 2r \cos^2(\theta)) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon(r^2 + 4z) + o(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.18)$$

Pour appliquer le théorème de la moyennisation du premier ordre sur le système (3.18) il faut calculer les fonctions moyennées

$$F_{10}(s) = (F_{10}^1(s), F_{10}^2(s)),$$

3.3. SUR LES CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DE SYSTÈMES
EN DIMENSION 3. (DANS \mathbb{R}^3)

où $s = (r, z)$ on a

$$\begin{cases} F_{10}^1(s) = \frac{1}{2\pi}[(3r + 2rz)I_{0,0} + 2z^2I_{1,0} - 2rI_{2,0}], \\ \quad = 2r(1 + z), \\ F_{10}^2(s) = \frac{1}{2\pi}(r^2 + 4z)I_{0,0}, \\ \quad = r^2 + 4z. \end{cases} \quad (3.19)$$

Enfin, on obtien le système moyennée

$$\begin{aligned} F_{10}^1(s) &= 2r(1 + z), \\ F_{10}^2(s) &= r^2 + 4z. \end{aligned}$$

On résout le système, on obtien les points critiques suivantes :

$$\begin{aligned} s &= (r_0, z_0) \\ &= (2, -1). \end{aligned}$$

Jacobienne est

$$JF_{10}(s) = \det \left(\begin{array}{cc} \frac{dF_{10}^1}{dr} & \frac{dF_{10}^1}{dz} \\ \frac{dF_{10}^2}{dr} & \frac{dF_{10}^2}{dz} \end{array} \right) \Big|_{(2,-1)} = \det \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = -16.$$

Selon le théorème de la moyenne du premier ordre le système exactement

un cycle limite stable d'amplitude $r = 2$.

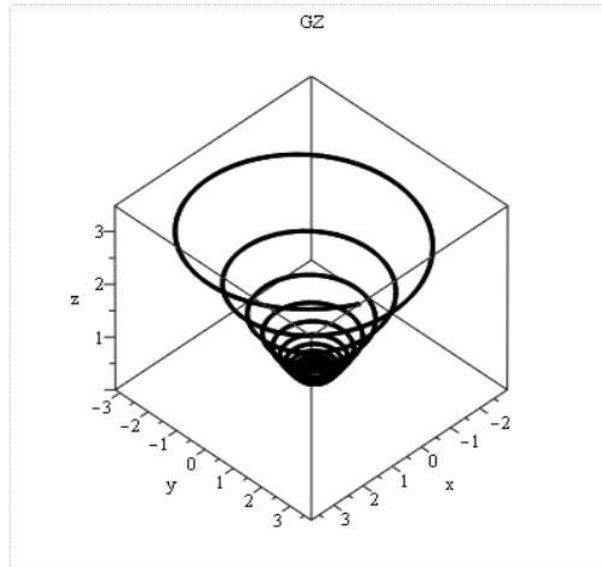


FIG.3.2-Cycle limite du système (3.16) pour
 $\varepsilon = 0.01$

3.4 Perturbation et cycles limites d'une famille de systèmes différentiels en dimension 3 (dans \mathbb{R}^3).

3.4.1 Présentation du problème

Ces dernières années, plusieurs articles ont été publiés sur les cycles limites de systèmes différentiels polynômiaux planaires. La raison principale de cette étude est le seizième problème, nous résolu, de Hilbert. En particulier, un grand nombre d'articles sont consacrés aux cycles limites qui bifurquent en orbites périodiques à partir d'un centre. De plus, de nombreux auteurs ont étudié la perturbation des orbites périodiques d'un système différentiel

3.4. PERTURBATION ET CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EN DIMENSION 3 (DANS \mathbb{R}^3).

linéaire dans \mathbb{R}^3 . On considère les systèmes différentiels polynômiaux

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_1} a_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}, \\ \dot{y} = x + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_2} b_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}, \\ \dot{z} = \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_3} c_{i_1 i_2 i_3} x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Théorème 3.4.3

Pour $\varepsilon \succ 0$ suffisamment petit, le système différentiel (3.20) au plus $\left\lceil \frac{\max\{n_1, n_2\} - 1}{2} \right\rceil n_3$ cycles limites bifurquant des orbites périodique du centre $\dot{x} = -y, \dot{y} = x, z = 0$, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre, avec $[\cdot]$ est la fonction partie entière.

Cette étude a fait l'objet d'un article publié dans Bulletin des Sciences Mathématiques [4].

En coordonnée cylindrique $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = 0$, le système (3.20) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^m r^{i_1+i_2} z^{i_3} (a_{i_1 i_2 i_3} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta + b_{i_1 i_2 i_3} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta), \\ \dot{\theta} = 1 + \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^m r^{i_1+i_2-1} z^{i_3} (b_{i_1 i_2 i_3} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta - a_{i_1 i_2 i_3} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta), \\ \dot{z} = \varepsilon \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_3} c_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta, \end{cases}$$

où $m = \max\{n_1, n_2\}$.

Considérons maintenant θ comme une variable indépendante, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1^1(\theta, r, z) + o(\varepsilon^2), \\ \frac{dz}{d\theta} = \varepsilon F_2^1(\theta, r, z) + o(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (3.21)$$

où

$$F_1^1(\theta, r, z) = \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^m r^{i_1+i_2} z^{i_3} (a_{i_1 i_2 i_3} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta + b_{i_1 i_2 i_3} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta),$$

$$F_2^1(\theta, r, z) = \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_3} c_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta..$$

3.4.2 Preuve du Théorème 3.4.3

Pour démontrer le théorème 3.4.3, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre.

*CHAPITRE 3. CYCLES LIMITES DE CERTAINES CLASSE DE
SYSTÈME DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 3 VIA
LE THÉORÈME DE LA MOYENNISATION*

De (3.21), pour calculer l'expression exact de $F_{10}(r, z) = (F_1^{10}(r, z), F_2^{10}(r, z))$, nous utilisons les expression des intégrales de lemme (1.11)

$$F_{10}(r, z) = (F_1^{10}(r, z), F_2^{10}(r, z)),$$

avec

$$\begin{aligned} F_1^{10}(r, z) &= \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^m a_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3} \int_0^{2\pi} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta d\theta \\ &+ \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^m b_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3} \int_0^{2\pi} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta d\theta, \\ F_2^{10}(r, z) &= \sum_{i_1+i_2+i_3=1}^{n_3} c_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3} \int_0^{2\pi} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta d\theta. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{cases} F_1^{10} = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=1 \\ i_1 \text{ impair, } i_2 \text{ pair}}}^m \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3} + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=1 \\ i_1 \text{ pair, } i_2 \text{ impair}}}^m \tilde{b}_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3}, \\ F_2^{10} = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=1 \\ i_1 \text{ pair, } i_2 \text{ pair}}}^m \tilde{c}_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2} z^{i_3}, \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3} = a_{i_1 i_2 i_3} \int_0^{2\pi} \cos^{i_1+1} \theta \sin^{i_2} \theta d\theta, \\ \tilde{b}_{i_1 i_2 i_3} = b_{i_1 i_2 i_3} \int_0^{2\pi} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2+1} \theta d\theta, \\ \tilde{c}_{i_1 i_2 i_3} = c_{i_1 i_2 i_3} \int_0^{2\pi} \cos^{i_1} \theta \sin^{i_2} \theta d\theta, \end{cases} \quad (3.22)$$

donc

$$\begin{cases} F_1^{10} = r S_1(r^2, z), \\ F_2^{10} = r S_2(r^2, z), \end{cases}$$

où

$$S_1(r^2, z) = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=1 \\ i_1 \text{ impair, } i_2 \text{ pair}}}^m \tilde{a}_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2-1} z^{i_3} + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=1 \\ i_1 \text{ pair, } i_2 \text{ impair}}}^m \tilde{b}_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2-1} z^{i_3},$$

et

$$S_2(r^2, z) = \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=1 \\ i_1 \text{ pair, } i_2 \text{ pair}}}^m \tilde{c}_{i_1 i_2 i_3} r^{i_1+i_2-1} z^{i_3}.$$

3.4. PERTURBATION ET CYCLES LIMITES D'UNE FAMILLE DE SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS EN DIMENSION 3 (DANS \mathbb{R}^3).

Ainsi par le théorème de bezout, le nombre maximal de solutions communes (r, z)

$$\begin{cases} S_1(r^2, z) = 0, \\ S_2(r^2, z) = 0, \end{cases}$$

est $(m - 1) n_3$.

Alors $F_{10}(s) \setminus s = (r, z)$ peut avoir au plus $\left[\frac{m-1}{2}\right] n_3$ racines avec $r > 0$, alors le nombre maximum de cycles limites du système (3.20) est $\left[\frac{m-1}{2}\right] n_3$ en utilisant la théorie de moyennisation du premier ordre. Ceci complète la démonstration du théorème 3.3.

3.4.3 Application

Considérons $n_1 = 3, n_2 = 0$ et $n_3 = 3$ donc $m = 3$. La méthode de moyennisation du seconde ordre appliquée au système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon(-x + xy^2 + \frac{1}{2}xz), \\ \dot{y} = x, \\ \dot{z} = \varepsilon(z - z^3), \end{cases} \quad (3.23)$$

nous donne $F_{10}(r, z) = (F_1^{10}(r, z), F_2^{10}(r, z))$, suivant

$$\begin{aligned} F_1^{10}(r, z) &= \frac{1}{8}r(r^2 + 2z - 4), \\ F_2^{10}(r, z) &= -(z - 1)z(z + 1). \end{aligned}$$

Ce système possède exactement trois solutions (r, z) avec $r > 0$, qui sont $(\sqrt{6}, -1), (2, 0)$ et $(\sqrt{2}, 1)$, Le système (3,23) possède $\left[\frac{m-1}{2}\right] n_3 = 3$ cycles limites bifurquant des orbites périodique du centre $\dot{x} = -y, \dot{y} = x, z = 0$.

Conclusion

De nombreuses méthodes ont été développées pour tenter de résoudre le 16^{ème} problème de Hilbert, permis les méthodes les plus célèbres et les plus importantes figure la méthode de moyennisation.

Dans le chapitre 03, nous avons étudié le nombre maximum des cycles limites des systèmes différentiels en dimension 3, en utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre.

Nous continuerons à travailler sur de problème analogue :

- On se propose d'étudier le nombre maximum des cycles limites des systèmes différentiels en dimension 4 (dans \mathbb{R}^4)

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon p(x, y, z, t) + \varepsilon^2 P(x, y, z, t), \\ \dot{y} = x + \varepsilon q(x, y, z, t) + \varepsilon^2 Q(x, y, z, t), \\ \dot{z} = \varepsilon f(x, y, z, t) + \varepsilon^2 F(x, y, z, t), \\ \dot{t} = \varepsilon g(x, y, z, t) + \varepsilon^2 G(x, y, z, t), \end{cases}$$

où p, P, q, Q, f, F, g et G sont des polynômes de degré n .

Bibliographie

- [1] Buica.A. and Llibre.J. : Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull.Sci. Math.*,**128** : 7-22, 2004.
- [2] Buica.A., Françoise.J.P. and Llibre.J. : Periodic Solutions of Nonlinear periodic Differential Systems with a Small Parameter. *Comm. On Pure and Appl. Anal.*, **6** :103-111, 2007.
- [3] Cima A. , Llibre. J and Teixeira M.A, Limit cycles of some polynomial differential systems in dimension 2, 3 and 4, via averaging theory, *Applicable Analysis*, Vol. 87, No. 2, February 2008, 149–164.
- [4] Hilbert. D, Mathematische Problem (lecture), *Seconde Internat. Congress Math. Paris, 1900*, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math-Phys.* K1.1900, pp 253-297
- [5] Llibre J and Makhlof Amar, limit cycles of polynomial systems bifurcating from the periodic orbits of a linear differential system in \mathbb{R}^d , *Bull.Sci .math.*133 (2009), 578-587.
- [6] Li. 1, Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *internat. J.Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* 13(2003), 47-106
- [7] Sanders.J.A. and Verhulst.F. : *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, vol.59 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer, NewYork, NY,USA, 1985.
- [8] Sghiar. M, Des applications génératrices des nombres premiers et cinq preuves de l’hypothèse de Riemann, *Pioneer Journal of Algebra*, number theory and its Applications, Volume 10, Numbers 1-2, 2015, Pages 1-31.
- [9] Shafarevich, I.R. : *Basic Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, German (1974).
- [10] Verhulst.F. : *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer, Berlin, Germany, 1996.