République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté de Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques

Mémoire de Master Académique en Mathématiques

Option : Equations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique

Présenté par :

ACHOURA Hamida Leila

Intitulé

Régularisation d'un problème parabolique rétrograde avec mémoire

Dirigé par: Benrabah Abderafik (M.C.A, Univ. Guelma)

Soutenu le : 13/07/2021. **Devant le Jury composé de :**

Mr. HAMLAOUI Hamid	**M.C .A**	Univ. Guelma	Président
Mr. BENRABAH Abderafik	**M.C .A**.	Univ. Guelma	Encadreur
Mr. BENARIOUA Khadir	**M.C .B**	Univ. Guelma	Examinateur

Année Universitaire 2020/2021

Mémoire de Master : Régularisation d'un problème parabolique rétrograde avec mémoire
Dirigé par : Mr BENRABAH Abderafik

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté MI-SM
Département de Mathématiques

Remerciements

Par ces quelques mots modestes je souhaite témoigner ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont aidé à lancer ce travail.

A mon enseignant encadreur Monsieur Benrabah Abderafik Docteur à l'Université, 8 mai 1945 Guelma.

Qui a accepté de m'encadrer, qui m'a donné la confiance et qui m'a rendu fière de travailler avec lui.

Pour son enseignement, sa patience et ses précieux conseils.

Aux membres du jury

Pour m'avoir fait l'honneur de juger mon travail.

A mon enseignant Boussetila Nadjib professeur à l'Université, 8 mai 1945 Guelma.

Qui m'a aidé tout au long de ma scolarité universitaire.

Pour son enseignement, sa patience et ses conseils.

Je tiens aussi, à remercier toutes les personnes qui m'ont aidées à la réalisation de ce travail.

Louange A Dieu Allah

L'éternel tout puissant.

Qui m'a donné la volonté,

la force et le courage pour réaliser ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents.

Qui ont toujours priés pour moi,

et n'ont pas cessés de m'encourager

et de me soutenir et qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui.

A mes frères Saber et Badreddine.

A mes amies Amira, Imen et Nadjah pour leur soutien moral et leurs encouragements.

A tous ceux qui me sont chers, et tous les enseignants qui ont contribués à ma formation.

À vous les lecteurs de ces lignes.

ACHOURA Hamida-Leila

Résumé

Dans ce travail on considère un problème parabolique inverse avec mémoire qui est mal posé au sens d'Hadamard. On fait une régularisation de la solution instable à l'aide d'une méthode de troncature spectrale, cela nous permet de récupérer la position correcte du problème étudié.
Finalement on montre la convergence de la méthode proposée ainsi quelques estimations d'erreurs via un choix de paramètres a priori et a posteriori.

Mots clés

Problème inverse, problème parabolique rétrograde, équation intégro-différentielle, problème mal-posé, méthode spectrale, régularisation.

Abstract

In this work we consider an inverse parabolic problem with memory, who is an ill posed problem in the sens of Hadamard. We regularize the instable solution with a spectral troncature method, which allows us to recover the correct position of the studied problem. In the end we prove the convergence and some estimations via a priori and a posteriori parameter choice rules.

Key words

Inverse problem, retrograde parabolic problem, integro-differential equation, ill posed problem, spectral method, regularization.

Table des matières

Introduction

0.1 Equations intégro-différentielles

La modélisation mathématique est le processus de construction d'objets mathématiques dont les comportements ou les propriétés correspondantes d'une manière ou d'une autre à un système particulier du monde réel. Dans cette description, un objet mathématique peut être un système d'équations, un processus stochastique, une structure géométrique ou algébrique, un algorithme ou tout autre objet mathématique.
Dans certains domaines mathématiques on trouve beaucoup de problèmes qui nécessitent de faire une considération sur les relations analytiques qui ont à la fois le terme intégral qui signifie le sens du mémoire, et le terme différentiel qui représente en général un phénomène de diffusion.
Pour évaluer les quantités d'intérêt physique, un rôle clé est joué par le mémoire du matériaux, et en conséquence le comportement de tels matériaux est caractérisé par des équations constitutives appropriées où des noyaux de type Volterra apparaissent.
Le mathématicien et physicien Italien Vito-Volterra [1] a étudié les influences héréditaires lorsqu'il examinait un modèle de croissance de la population. Les travaux de recherche ont abouti à un thème spécifique, où les opérateurs différentiels et intégraux sont apparus ensemble dans la même équation. Ce nouveau type d'équations a été appelé équations intégro-différentielles de Volterra, données sous la forme

$$\frac{d^n u}{dx^n} = f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t)u(t)dt. \tag{0.1.1}$$

1. V.Volterra : né en 1860 à Ancône et mort en 1940 à Rome, dont les travaux portent sur l'analyse mathématique et ses applications à la mécanique, la physique et la biologie, aussi il a appelé ce genre d'équation qui contient les deux termes (integral et différentiel) ; les équations intégro-différentielles.

Les équations intégro-différentielles de Volterra peuvent être observées lorsque nous convertissons un problème de valeur initiale à une équation intégrale en utilisant la règle de Leibnitz [2].
L'équation intégro-différentielle de Volterra est apparue après sa création par Volterra. Elle est ensuite apparu dans de nombreuses applications physiques telles que le processus de formation du verre [11], la nano-hydrodynamique[7], le transfert de chaleur dans des matériaux non homogène[20, 12], le processus de diffusion en général [8], la diffusion de neutrons et les espèces biologiques coexistant avec des taux de production croissants [29] et décroissants et l'ondulation du vent dans le désert [9].
La résolution de ce type d'équations (appelées équations intégro-différentielles) repose sur une combinaison des techniques d'analyse des équations différentielles et des équations intégrales.

0.1.1 Exemples :

Exemple 1 :

1. Dans les problèmes électriques de l'engineering, la représentation du courant $I(t)$ dans un circuit fermé mêne à l'équation intégro-différentielle suivante :

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(t)dt = f(t)$$
$$I(0) = I_0$$

   où L est l'inductance, R la résistance, C la capacité, et $f(t)$ la tension appliquée.

2.
$$u''(x) = f(x) + \lambda \int_0^x (x-t)u(t)dt$$
$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 1$$

2. Gottfried Wilhelm Leibniz : est un mathématicien, philosophe, scientifique et logicien Allemand né à Leipzig en 1646 et mort à Hanovre en 1716, Il est une personnalité centrale dans l'histoire des sciences (surtout dans celle des mathématiques) et dans l'histoire de la philosophie.

3.
$$u'(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 (xt)u(t)dt$$
$$u'(0) = 1.$$

Les équations dans les exemples (1) et (2) sont des équations intégro-différentielles de type Volterra alors que l'équation dans l'exemple (3) est une équation intégro-différentielle de type Fredholm [3].
Ces terminologies ont été conclues à cause de la présence d'intégrales définies et indéfinies.

Exemple 2 :

En écologie, les équations de réactions-diffusion sous-estiment la vitesse d'invasion (Clark, 1998 ; Kot et al., 1996). Une solution à cette sous-estimation des vitesses d'invasion a été donnée par l'utilisation des opérateurs intégraux à la place des opérateurs de diffusion, résultant en des équations intégro-différentielles ou intégro-différences (Kendall, 1965 ; Kot and Schaffer, 1986 ; Lee et al., 2001). Ces modèles intègrent des informations détaillées sur le contact à petite échelle et le processus de dispersion pour prédire les effets à grands échelles avec plus de précision. Comme exemple, (Aronson,1977 ; Kendall, 1965 ; Mollison, 1977) étudièrent l'équation

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta(N - I) \int_{\Omega} k(x,y)I(y,t)dy \tag{0.1.2}$$

qui modélise la propagation d'une infection par contact d'un individu sain susceptible d'être infecté, par un individu infecté d'une population de taille constante

$$N = S(x,t) + I(x,t).$$

Où,

- ▶ $S(x,t)$: représente les susceptibles au point x et au temps t.
- ▶ $I(x,t)$: représente les infectés au point x et au temps t.

3. Ivar Fredholm (7 avril 1866 à Stockholm - 17 août 1927) est un mathématicien suédois, qui a étudié les équations intégrales et la théorie spectrale.

- $K(x, y)$: est la fonction densité de probabilité exprimant que la proportion des infectés en y contacte les susceptibles en x.
- β : le taux constant de transmission de l'infection.

Exemple 3 :

Les équations qui sont utilisées dans l'étude de la propagation des populations et les épidémies sont basées sur les équations de réaction-diffusion [32], integro-différentielles [19] et intégro-différences [28, 27].

0.2 Contenu du Mémoire :

L'objectif principal de ce mémoire est la régularisation via une méthode de troncature spectrale d'un problème parabolique rétrograde avec mémoire. Ce travail contient une introduction, trois chapitres, une conclusion et quelques perspectives.
L'introduction est consacrée à un petit historique sur les équations intégro-différentielles et ses motivations physiques et applications.
Dans le chapitre 1, on rappelle certaines notions préliminaires fondamentales et on prépare les outils nécessaires dans ce travail, a savoir les notions de (problème inverse, problème mal-posé, régularisation...) .
Dans le chapitre 2, on donne la position du problème en question, la détermination de la solution sous une forme d'une série à l'aide de la méthode de Fourier. Et enfin pour montrer l'instabilité de la solution en $t = 0$ on construit un exemple illustratif.
Le dernier chapitre est consacré à la présentation de la méthode de régularisation par troncature spectrale. On propose une stratégie de régularisation via un choix a priori et a posteriori. On termine ce chapitre par des résultats de convergences et quelques estimations d'erreurs.
Ce travail est clôturé par une conclusion et quelques perspectives.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires

1.1 Rappels

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés dans le reste du travail.

1.1.1 Problèmes inverses

On dit que deux problèmes sont inverses l'un de l'autre, si la résolution de l'un met l'autre en cause. Par conséquent, quand on parle d'un problème inverse [25, 26], il est nécessaire de mentionner le problème direct, qui nécessite de déterminer les effets à partir des causes observables. Ce problème peut être schématiser comme suit :

$$\begin{array}{lcccl} \text{(entrée) input} & \rightarrow & \text{processus} & \rightarrow & \text{output (sortie);} \\ \text{cause} & \rightarrow & \text{modèle} & \rightarrow & \text{effet.} \end{array}$$

Les problèmes inverses peuvent être classés en deux catégories, ceux axés sur la détermination des conditions aux limites ou des sources inconnues, et ceux visant à déterminer les paramètres fondamentaux du système.

Ces problème ont le potentiel de créer des difficultés particulières. En effet, il est raison-

nable de supposer qu'un problème direct est bien posé (les mêmes causes produisent les mêmes effets). Cependant, il est facile d'envisager que les mêmes effets puissent résulter des causes différentes. Cela montre la difficulté d'étudier les problèmes inverses.
Les problèmes inverses jouent un rôle essentiel dans de nombreux domaines, à savoir :

* l'imagerie médicale (échographie, scanners, rayons X)[13]
* l'ingénierie pétrolière (prospection par des méthodes sismiques, magnétiques, identification des perméabilités dans un réservoir).[14]
* l'hydrogéologie (identification des perméabilités hydrauliques).
* la chimie (détermination des constantes de réaction).
* le radar et l'acoustique sous-marine (détermination de la forme d'un obstacle).[6]
* le traitement d'image (restauration d'images floues)[26].

Définition 1.1.1. Un problème inverse [1] est l'inverse de celui appelé problème direct (les causes étant connues, consistant à déterminer les effets). Il consiste à déterminer l'origine d'un phénomène, ou bien l'essai de connaître les causes qui ont conduit à ce phénomène ; à partir de là ; pour connaître les informations suffisantes sur celui ci, ou à partir d'une information partielle sur le problème qui nous permet de limiter l'ensemble des causes de ce fait.

1.1.2 Problèmes mal-posés

Définition 1.1.2. [Hadamard 1923][18]
Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens d'Hadamard si
Existence : Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$.
Unicité : Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$.
Stabilité : La solution x dépend continûment de la donnée y.

1. Pour plus de detail on cite les quatres célèbres journaux spétialisée en problèmes inverses :
JIIP (Journal of Inverse and Ill posed Problem) : www.degruyter.com/journal/key/JIIP/html.
Inverse Problem (IOP) : iopscience.iop.org/journal/0266-5611 .
IPI (Inverse Problem and Imagine) : www.aimsciences.org/journal/1930-8337.
IPSE (Inverse Problem in science and engineering) : www.tandfonline.com/toc/gipe20/current.

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Définition 1.1.3 (Orthogonalité)**.** [21]
Soit $(H, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe.

— On dit que deux vecteurs x et y de H sont orthogonaux, et écrit :

$$x \perp y \quad (\text{ou} \quad y \perp x),$$

si et seulement si :

$$\langle x|y\rangle = 0.$$

— On dit que deux sous-ensembles A et B de H sont orthogonaux, et écrit :

$$A \perp B \quad (\text{ou} \quad y \perp x),$$

si, et seulement si :

$$\forall x \in A, \quad \forall y \in B, \quad x \perp y.$$

— Soit A un sous-ensemble de H. Par définition, l'orthogonal de A dans H est le plus « large » sous-ensemble de H, que l'on note $A^{\perp}$, tel que $A^{\perp} \perp A$:

$$A^{\perp} = \{y|y \in H \quad \text{et}, \quad \forall x \in A, \quad x \perp y\}.$$

Théorème 1.1.1 (Théorème de la projection)**.** *[21]*
Soit $(H, \langle .|.\rangle)$ un espace préhilbertien réel ou complexe, M un sous-ensemble non vide de H, et $\| \,.\, \|$ la norme induite sur H par le produit scalaire $\langle .|.\rangle$.
Si M est un sous-espace complet de H (ce qui est le cas par exemple si $(H, \langle .|.\rangle)$ est un Hilbert, et M en est un sous-espace fermé), alors, $P_M(x)$ est le seul vecteur de M tel que : $[x - P_M(x)] \in M^{\perp}$.

Définition 1.1.4 (Basse hilbertiennes)**.** [21]
Soit H un espace préhilbertien. On appelle base hilbertienne de H toute famille orthonormale et totale dans H.

Proposition 1.1.1. *[21]*
Soit $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ un système unitaire dans un espace préhilbertien $(H, \langle .|. \rangle)$.

1. *Ce système est une base hilbertienne de H si, et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*
   — *Pour tout $x \in H$, la série numérique$\sum |\langle x|e_k \rangle|^2$ est convergente dans $\mathbb{R}$.*
   — *Pour tout $x \in H$, on a l'égalité suivante dite identité de Bessel-Parseval :*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x|e_k \rangle|^2 . \tag{1.1.1}$$

2. *Si ce système est une base hilbertienne de H, alors :*
   — *Pour tout $x \in H$, la série vectorielle $\sum \langle x|e_k \rangle e_k$, dite série de Fourier de x dans la base hilbertienne $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ est convergente dans H et on a :*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x|e_k \rangle e_k.$$

   Les scalaires $\langle x|e_k \rangle$, que le note x_k, sont appelés les coordonnées ou les coefficients de Fourier de x dans la base $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.
   — *Quels que soient x et y dans H, la série numérique $\sum x_k \overline{y_k}$ est convergente et*

$$\langle x|y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

Théorème 1.1.2 (Les valeurs propres des opérateurs elliptiques et symétriques)**.** *[23] Soient U un sous ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$, et L est l'opérateur laplacien, alors on a :*

(i) *chaque valeur propre de L est un réel.*

(ii) *de plus, si on répète chaque valeur propre selon sa multiplicité (finie) on a $\sum = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, où*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots, \qquad et \quad \lim_{k \to \infty} \lambda_k = +\infty.$$

(iii) *finalement il existe une base orthonormée $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $L^2(U)$, où $\omega_k \in H_0^1(U)$ est une* *fonction propre correspondant à λ_k :*

$$\begin{cases} L\omega_k &= \lambda_k \omega_k, \quad \textit{dans } U\,; \\ \omega_k &= 0, \qquad \textit{sur } \partial U. \end{cases}$$

1.1.3 Exemples de problèmes mal posés[24]

Exemple 1.1.1. Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1.2}$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \cos(x/\varepsilon),\ \varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh(y/\varepsilon) \cos(x/\varepsilon)$ est une solution du problème (1.1.2).
On remarque que $(\varphi_\varepsilon \longrightarrow 0,\ \varepsilon \longrightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \longrightarrow \infty,\ \varepsilon \longrightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.1.2) ne dépendent pas continûment des données initiales.[2]

Exemple 1.1.2. Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Trouver $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de temperature $u(x, t)$ vérifié :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in (0, \pi),\ t \in (0, T), \\ \\ u(x, T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le \pi, \\ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \end{cases} \tag{BCP}$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (BCP) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

2. Pour plus de détails, on cite les travaux : L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **22** (2006), 413-430.
L. Bourgeois, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems **21** (2005), No. 3, 1087-1104.

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \psi(x) \sin(nx)\, dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la temperature initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (BCP) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \dfrac{1}{k} \longrightarrow 0, \ k \longrightarrow +\infty$ mais

$$\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2T} \longrightarrow +\infty, \ k \longrightarrow +\infty.$$

On voit très clair que le problème (BCP) est instable donc **mal posé**. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.
La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initial $u(x, 0) = \varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (BCP) ssi φ satifait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K}\varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^{\pi} K(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où $K(x, \xi) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2T} \sin(nx) \sin(n\xi)$.
L'opérateur intégral $\mathcal{K}$ est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où $\mathcal{K}^{-1}$ n'est pas

borné. Ce qui montre le caractère **mal posé** du problème (BCP).

Exemple 1.1.3. Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \qquad (HCP)$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans H, et $A : \mathcal{D}(A) : H \longrightarrow H$ tel que $A = A^*$ et $A \geq \delta > 0$.

Si $\lambda_k = (k\pi)^2/T^2,\ k = 1, 2, \cdots$, ne sont pas des valeurs propres de A, alors l'opérateur $\left(\sin(T\sqrt{A})\right)$ est injectif, et la solution formelle du problème (HCP) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A})\ \left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1} \psi + \sin(t\sqrt{A})\ \left(\sin(T\sqrt{A})\right)^{-1} \varphi.$$

Inversement, si $\left\{\lambda_k = (k\pi)^2/T^2,\ k = 1, 2, \ldots,\right\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$, alors la solution du problème (HCP) **n'est pas unique**. Cependant, le problème (HCP) est **mal posé** au sens d'Hadamard dans les deux cas : les valeurs $\lambda_k = (k\pi/T)^2,\ k = 1, 2, \cdots$, peuvent être proches des valeurs propres de A :

$$[\delta, +\infty[\ni \lambda \longmapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► D'après les exemples précédemment donnés, on remarque :

1 La non unicité de la solution : il nous faut plus d'informations sur la solution et la nature du problème physique étudié.

2 L'instabilité de la solution : cela nous fait vraiment une problématique, surtout dans le cadre numérique, c'est à dire que le comportement de la solution numérique serait instable et non convergent ; malgré l'utilisation des méthodes performantes, et pour traiter ce caractère d'instabilité on va faire une régularisation du problème par un autre problème proche (dans certain sens) qui serait stable.

Remarque 1.1.1. Il y a plusieurs méthodes de régularisation, car chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de mal position (Pour une bonne référence sur les méthodes de régularisation, on cite le livre de H.W. Engel [15])).

1.2 Régularisation

Définition 1.2.1. [15] Soit X et Y deux espace de Hilbert, si $x \in X$ et $y \in Y$ on définie l'opérateur $T : X \to Y$, tel que $Tx = y$.
Soit $x^t = T^t y$ la meilleur approximation de la solution du $Tx = y$.
Soit $\alpha_0 \in (0, +\infty]$, pour tout $\alpha \in (0, \alpha_0)$, on a $R_\alpha : Y \to X$ un opérateur continu (n'est pas nécessairement linéaire).
La famille R_α est appelé une régularisation ou un opérateur régularisé (pour T^t) si :
pour tout $y \in \mathcal{D}(T^t)$, il existe une règle de choix des paramètres α avec $\alpha = \alpha(\delta, y^\delta)$, telle que

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \left\| R_{\alpha(\delta, y^\delta)} y^\delta - T^t y \right\| \quad | \quad y^\delta \in Y, \quad \left\| y^\delta - y \right\| \leq \delta \right\} = 0. \tag{1.2.1}$$

On prend,

$$\alpha : \mathbb{R}^+ \times Y \to (0, \alpha_0),$$

tel que

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \alpha(\delta, y^\delta) \quad | \quad y^\delta \in Y, \quad \left\| y^\delta - y \right\| \leq \delta \right\} = 0. \tag{1.2.2}$$

si les deux relations (1.2.1) et (1.2.2) sont vérifiées, et pour un spécifique $y \in \mathcal{D}(T^t)$, alors la paire (R_α, α) est appelée une méthode de régularisation.

Définition 1.2.2. [15] Soit α une règle de choix du paramètre selon la définition (1.2.1).
Si α ne dépend pas de y^δ, mais elle dépend seulement de δ , alors on appelle α un choix a-priori. Autrement dit α est appelé choix a-posteriori.

Théorème 1.2.1. *[15] Soient $T : X \to Y$ un opérateur linéaire borné; on suppose qu'il y a une régularisation $\{R_\alpha\}$ pour T^t avec une règle de choix de paramètre α qui dépend seulement de y^δ (et ne dépend pas de δ), tel que la méthode de régularisation (R_α, α) est convergente pour tout $y \in \mathcal{D}(T^t)$. Alors T^t est borné.*

Preuve. [15] Si α est independent de δ, $\alpha = \alpha(y^\delta)$, et elle vérifie (1.2.1) ; alors

$$\lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \left\| R_{\alpha(y^\delta)} y^\delta - T^t y \right\| \quad | \quad y^\delta \in Y, \quad \left\| y^\delta - y \right\| \leq \delta \right\} = 0, \tag{1.2.3}$$

avec $R_{\alpha(y)} y = T^t y$ pour tout $y \in \mathcal{D}(T^t)$. Par conséquent, de (1.2.3) et pour une suite $\{y_n\} \in \mathcal{D}(T^t)$ quelconque qui converge à $y \in \mathcal{D}(T^t)$,

$$T^t y_n = R_{\alpha(y_n)} y_n \to T^t y,$$

donc T^t est continue dans $\mathcal{D}(T^t)$. □

Définition 1.2.3. [24] Considérons un opérateur inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \to H_2$ est un opérateur compact injectif.On suppose que $h_2 \in R(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique.

Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1$, $(\alpha > 0)$ est dite "***famille régularisante***" pour l'opérateur K si

$$\forall h_1 \in H_1, \quad \lim_{\alpha \longrightarrow 0} (R_\alpha K) h_1 = h_1, \text{ i.e., } \ R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 1.2.1. [24] Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : X \longrightarrow Y$, où X est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, *i.e.*, il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.

La donnée initiale $y \in Y$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons y_δ la donnée perturbée où le nombre $\delta > 0$ est le niveau du bruit, *i.e.*, $|y - y_\delta| \leq \delta$.

Notons $x_{\alpha,\delta} = R_\alpha y_\delta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kx = y$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|x - x_{\alpha,\delta}|$ on obtient

$$|x - x_{\alpha,\delta}| = |(x - R_\alpha y) + (R_\alpha y - x_{\alpha,\delta})| \leq \delta \|R_\alpha\| + |(x - R_\alpha y)|. \tag{1.2.4}$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.2.4) représente la majoration de l'erreur dûe au niveau du bruit. Par la Remarque (1.2.1), nous avons vu que $\|R_\alpha\| \longrightarrow +\infty$ quand $\alpha \longrightarrow 0$.

Il ne faut donc pas choisir α **trop petit** sinon l'erreur peut devenir **très grande**. Par contre le second terme de droite de (1.2.4) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α. Nous allons faire tendre le niveau du bruit δ vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution x.

Définition 1.2.4. [24] Une stratégie de régularisation $\delta \longmapsto \alpha(\delta)$ est admissible si pour tout $x \in X$

$$\lim_{\delta \longrightarrow 0} \alpha(\delta) = 0 \text{ et } \lim_{\delta \longrightarrow 0} \left(\sup_{y_\delta \in Y} \left\{ |R_{\alpha(\delta)} y_\delta - x| \text{ tel que } |Kx - y_\delta| \leq \delta \right\} \right) = 0. \tag{1.2.5}$$

Plusieurs exemples de stratégies de régularisation admissibles se trouvent dans le livre [15].

CHAPITRE 2

Problème rétrograde avec mémoire : Résolution et stabilité

2.1 Position du problème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\quad n \geq 1$ un ouvert borné à frontière régulière $\partial\Omega$, et T est un réel positif.
Posons : $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$ est la frontière latérale du cylindre Q.
L'objectif de cette section est de trouver la fonction $u(x, t)$, où $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, T]$ vérifiant le problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \Delta u(x,t) = \beta \displaystyle\int_0^t u(x,s)ds, & \text{dans} \quad Q, \\ u(x,t) = 0 \qquad \text{dans} \quad \Gamma, \\ u(x,T) = \varphi(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où φ est une fonction donnée, β est un réel positif donné.
La première équation du problème (P) est appelée équation parabolique avec mémoire où le terme non local $\int_0^t u(x,s)ds$ représente l'effet commémoratif du passé au présent. Ce type d'équation et ces variations apparaissent dans divers domaines de l'ingénierie comme la modélisation de la condition thermique dans des matériaux à mémoire[20], la compression

des milieux poreux-viscoélastiques [31], l'analyse de la dynamique des réacteurs nucléaires dépendant de l'espace temps et les phénomènes épidémiques en biologie [10].
Bien qu'il ait plusieurs résultats sur le problème (P) avec une donnée initial, à notre connaissance, il n'y a pas de résultat consacré aux équations paraboliques rétrogrades avec mémoire.
Dans le cas $\beta = 0$, le problème (P) se réduit au problème rétrograde classique pour les équations paraboliques.

Remarque 2.1.1 (voir le théorème (1.1.2))**.** Soit Δ l'opérateur laplacien tel que $-\Delta : D(-\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
Comme Ω est un ouvert, les valeurs propres de l'opérateur linéaire $(-\Delta)$ noté par $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ vérifient

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \ , \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = +\infty$$

de plus il existe une base orthonormée $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de $L^2(\Omega)$ telle que

$$(3) \qquad \begin{cases} -\Delta\phi_n(x) & = \lambda_n \phi_n(x), \quad \text{dans } \Omega\,; \\ \phi_n(x) & = 0, \qquad\quad \text{dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Résolution du problème

En utilisant un changement de variable convenable, on transforme le problème intégro-différentiel (P) à un problème différentiel. L'idée est la suivante :
Posons

$$v(x,t) = \int_0^t u(x,s)ds, \tag{2.2.1}$$

et on cherche la solution sous la forme,

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\phi_n(x), \tag{2.2.2}$$

où $v_n :=< v(x,t), \phi_n(x) >$ est le coefficient de fourier de la fonction v.
Puis on inject la formule (2.2.1) dans le problème (P), on obtient

$$\begin{cases} v_{tt} - v_{xxt} - v_{ttt} = \beta v, \quad \text{dans } Q \\ v(x,t) = 0 \;\text{ sur }\; \Gamma, \\ v(0,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \\ v_t(x,T) = \varphi(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Ce qui nous donne

$$(P_v) \qquad \begin{cases} v_{tt}(x,t) - \Delta v_t(x,t) = \beta v(x,t), \quad \text{dans } Q. \\ v(x,t) = 0 \;\text{ dans }\; \Gamma \\ v(x,0) = 0; \quad t \in [0,T]. \\ v_t(x,T) = u(x,T) = \varphi(x) \;\text{ dans } \quad \Omega. \end{cases}$$

Puis on injecte (2.2.2) dans (P_v) on obtient :

$$(P_{v_n}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 v_n(t)}{dt^2} + \lambda_n \dfrac{dv_n}{dt} = \beta v_n(t), \\ v_n(0) = 0, \\ \dfrac{dv_n(T)}{dt} = \varphi_n, \end{cases}$$

où $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n \phi_n(x)$.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle du problème (P_{v_n}) est donnée par :

$$r^2 + \lambda_n r - \beta = 0.$$

Puisque $\beta > 0$ donc le discriminant $\Delta = \lambda_n^2 + 4\beta > 0$, alors l'équation caractéristique admet les deux racines suivantes :

$$\mu_n^- = \frac{-\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta}}{2} \quad \text{et} \quad -\mu_n^+ = \frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta}}{2}.$$

La solution de l'équation différentielle est donnée par :

$$v_n(t) = c_1 e^{\mu_n^- t} + c_2 e^{-\mu_n + t}. \tag{2.2.3}$$

En substituant (2.2.3) dans (P_{v_n}) on obtient : $\begin{cases} v_n(0) = c_1 + c_2 = 0 \\ \dfrac{dv_n(t)}{dt} = -c_2\mu_n^- e^{\mu_n^- t} - c_2\mu_n^+ e^{\mu_n^+ t} \\ \dfrac{dv_n(T)}{dt} = c_2[-\mu_n^- e^{\mu_n^- T} - \mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}] = \varphi_n \end{cases}$

On calcul direct on trouve :

$$c_1 = \frac{\varphi_n}{\mu_n^- e^{\mu_n^- T} + \mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T}}, \tag{2.2.4}$$

$$c_2 = \frac{-\varphi_n}{\mu_n^- e^{\mu_n^- T} + \mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T}}, \tag{2.2.5}$$

D'après (2.2.4) et (2.2.5) la relation (2.2.3) devient :

$$\begin{aligned} v_n(t) &= c_1 e^{\mu_n^- t} + c_2 e^{-\mu_n^+ t}, \\ &= \frac{e^{\mu_n^- t}\varphi_n}{\mu_n^- e^{\mu_n^- T} + \mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T}} - \frac{e^{-\mu_n^+ t}\varphi_n}{\mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T} + \mu_n^- e^{\mu_n^- T}} \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Donc

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{n\geq 1} v_n(t)\phi_n(x) \\ &= \sum_{n\geq 1} \left(\frac{e^{\mu_n^- t}}{\mu_n^- e^{\mu_n^- T} + \mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T}} - \frac{e^{-\mu_n^+ t}}{\mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T} + \mu_n^- e^{\mu_n^- T}} \right) \varphi_n \phi_n(x). \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Puisque $\quad v(x,t) = \int_0^t u(x,s)ds \Longrightarrow u(x,t) = \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$

Alors :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- t}}{\mu_n^- e^{-\mu_n^- T}+\mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T}}+\frac{\mu^+ e^{-\mu_n^+ t}}{\mu_n^+ e^{-\mu_n^+ T}+\mu_n^- e^{-\mu_n^- T}}\right)\varphi_n\phi_n(x),\\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ (T-t)}}{\mu_n^+ +\mu_n^- e^{(\mu_n^+ +\mu_n^-)T}}+\frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- (t-T)}}{\mu_n^- +\mu_n^+ e^{-(\mu_n^- +\mu_n^+)T}}\right)\varphi_n\phi_n(x). \end{aligned}$$

2.3 Etude de stabilité.

La stabilité est une condition essentielle. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir difficile à cause des erreurs de mesure ou d'arrondis. La définition d'Hadamard est assez peu pratique. Il est donc nécessaire d'assouplir la définition d'un problème bien posé.

Remarque 2.3.1. 1. Soit E_1 est un espace de Sobolev
$E_1 = H^P(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \|v\|_{H^p(\Omega)} < \infty\}$, et $\|v\|^2_{H^p(\Omega)} = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{2p} |\langle v, \varphi_n\rangle|^2$;

2. $L^p(0,T;X)$ est l'espace de Banach des fonctions $u : [0,T] \longrightarrow X$ (espace de Banach) tel que :

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{L^p(0,T;X)} &= \int_0^T \|u(.,t)\|^p_X dt < \infty \qquad 1\leq p<\infty,\\ \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} &= ess\sup_{0<t<T} \|u(.,t)\|_X dt < \infty \qquad p=\infty. \end{aligned}$$

Pour la suite du travail on a besoin de quelques lemmes techniques.

Lemme 2.3.1. *1.* **(a)** $\mu_n^- \times \mu_n^+ = \beta$,

(b) $\mu_n^+ \geq \lambda_n$; $\left(\frac{1}{\mu_n^+} \leq \frac{1}{\lambda_n}\right)$,

(c) $\mu_n^- \leq \frac{\beta}{\lambda_n}$.

2. Soit $a, x > 0$, alors : $e^{-ax} \leq \frac{m!}{a^m x^m}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3. **(a)** $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_n^- e^{(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- +\mu_n^+)T}} \leq 1$,

(b) $\sup_{n\in N} \frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ +\mu_n^-)T}} \leq \frac{e^{-\mu_n^+ t}}{2\beta t^2}$.

4. **(a)** $A = \dfrac{(\mu_n^+)^2 e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \leq \dfrac{24}{\beta t^4 \lambda_n}$,

   (b) $B = \dfrac{((\mu_n^-)^2 e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \leq \dfrac{\beta}{\lambda_n}$.

Preuve. 1. **(a)**

$$\begin{aligned}\mu^- \times \mu_n^+ &= \frac{-\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta}}{2} \times \frac{\lambda_n + \sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta}}{2}\\ &= \frac{4\beta}{4} = \beta.\end{aligned}$$

(b) $\mu_n^+ \geq \dfrac{\sqrt{\lambda_n^2} + \lambda}{2} = \dfrac{2\lambda_n}{2} = \lambda_n$.

(c) $\mu_n^- = \dfrac{\beta}{\mu_n^+}$; d'après 1.(a) du lemme (2.3.1) on obtient : $\mu_n^- \leq \dfrac{\beta}{\lambda_n}$.

2. Soit $a, x > 0$, alors : $e^{-ax} = \dfrac{1}{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{a^m x^m}} \leq \dfrac{m!}{a^m x^m}$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.

3. **(a)**

$$\begin{aligned}\sup_{n \in N} \frac{\mu_n^- e^{(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} &\leq \frac{\mu_n^-}{\mu_n^-} e^{\mu_n^-(t-T)},\\ &\leq e^{\mu_n^-(t-T)} \leq 1.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} &\leq \frac{\mu_n^+}{\mu_n^-} e^{\mu_n^+(T-t)} e^{\mu_n^+ T} e^{-\mu_n^- T},\\ &\leq \frac{\mu_n^+}{\mu_n^-} e^{-\mu_n^+ t} e^{-\mu_n^- T},\\ &\leq \frac{\mu_n^+}{\mu_n^-} e^{-\mu_n^+ t}.\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\frac{\mu_n^+}{\mu_n^-} &= \frac{\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta} + \lambda_n}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta} - \lambda_n},\\ &= \frac{(\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta} + \lambda_n)^2}{\lambda_n^2 + 4\beta - \lambda_n^2} = \frac{(\mu_n^+)^2}{4\beta}.\end{aligned}$$

En utilisant (2) du lemme (2.3.1), on obtient : (pour $m = 2$)

$$\frac{(\mu_n^+)^2}{4\beta} e^{-\mu_n^+} \leq \frac{(\mu_n^+)^2}{4\beta} \times \frac{2!}{(\mu_n^+ t)^2} = \frac{1}{2\beta t^2}.$$

Alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \leq \dfrac{e^{-\mu_n^+ t}}{2\beta t^2}$.

4. **(a)**

$$A = \frac{(\mu_n^+)^2 e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \times \frac{\mu_n^+}{\mu_n^+} \leq \frac{(\mu_n^+)^3 e^{\mu_n^+ T} e^{-\mu_n^+ t}}{\mu_n^- \mu_n^+ e^{\mu_n^+ T} e \mu_n^- T}$$
$$\leq \frac{(\mu_n^+)^3}{\beta} e^{-\mu_n^+ t} = \frac{(\mu_n^+)^2 \mu_n^+}{\beta e^{\mu_n^+ t}}$$

D'après la (2) du lemme (2.3.1) on a (pour $m = 4$) : $\dfrac{1}{e^{\mu_n^+ t}} \leq \dfrac{4!}{(\mu_n^+)^4 t^4}$.

Donc $A \leq \dfrac{(\mu_n^+)^3}{\beta} \times \dfrac{4!}{(\mu_n^+)^4 t^4} = \dfrac{4!}{\beta \mu_n^+ t^4} \leq \dfrac{24}{\beta t^4 \lambda_n}$.

(b) $B = \dfrac{(\mu_n^-)^2 e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \leq \dfrac{(\mu_n^-)^2}{\mu_n^-} = \mu_n^- \leq \dfrac{\beta}{\lambda_n}$.

□

Théorème 2.3.1. ***(stabilité)***

$$\|u(.,t)\|_{H^q(\Omega)} = \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^q \left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \varphi_n \phi_n(.) \right\|_{H^q(\Omega)},$$
$$\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^q \varphi_n \phi_n(.) \right\|_{H^q(\Omega)}$$
$$+ \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_n^- e^{(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^q \varphi_n \phi_n(.) \right\|_{H^q(\Omega)},$$
$$\leq \left(1 + \frac{1}{2\beta t^2}\right) \|\varphi\|_{H^q(\Omega)}$$

$$\left\| \frac{du(.,t)}{dt} \right\|_{H^{q+1}(\Omega)} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{q+1} \left(\frac{(-\mu_n^+)^2 e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{(\mu_n^-)^2 e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \varphi_n \phi_n(.) \right\|_{H^{q+1}(\Omega)},$$
$$\leq \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{\lambda_n^{q+1} (\mu_n^+)^2 e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \ \varphi_n \phi_n(.) \right\|_{H^{q+1}(\Omega)}$$
$$+ \left\| \sum_{n\geq 1} \frac{(\lambda_n^{q+1} \mu_n^-)^2 e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \ \varphi_n \phi_n(.) \right\|_{H^{q+1}(\Omega)}.$$

Donc d'après A et B du lemme (2.3.1) on a :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{du(.,t)}{dt}\right\|_{H^{q+1}(\Omega)} &\leq \left(\frac{24}{\beta t^4}+\beta\right)\left\|\sum_{n\geq 1}\frac{\lambda_n^{q+1}}{\lambda_n}\varphi_n\phi_n(.)\right\|_{H^{q+1}(\Omega)} \\ &\leq \left(\frac{24}{\beta t^4}+\beta\right)\|\varphi\|_{H^q(\Omega)}\end{aligned}$$

Lemme 2.3.2. *Sous la condition que* $0 < t_n, t \leq T$ *; posons :*

$$\begin{cases} A_n &= \dfrac{\mu_n^+\left(e^{\mu_n^+(T-t_n)}-e^{\mu_n^+(T-t)}\right)}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}, \\ B_n &= \dfrac{\mu_n^-\left(e^{\mu_n^-(t_n-T)}-e^{\mu_n^-(t-T)}\right)}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}}. \end{cases}$$

Mettant :

$$\begin{aligned} e_+(t_n,t) &= e^{-\mu_n^+ t_n} - e^{-\mu_n^+ t}, \\ &= e^{-\mu_n^+ t_n}\left(1-e^{-\mu_n^+(t-t_n)}\right). \\ e_-(t_n,t) &= e^{\mu_n^- t_n} - e^{\mu_n^- t}, \\ &= e^{\mu_n^- t_n}\left(1-e^{\mu_n^-(t_n-t)}\right). \end{aligned}$$

Estimation du A_n ***:***

$$\frac{\mu_n^+\left(e^{\mu_n^+(T-t_n)}-e^{\mu_n^+(T-t)}\right)}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} = \frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}\left(e^{-\mu_n^+ t_n}-e^{-\mu_n^+ t}\right)}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} = \frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T} e_+(t_n,t)}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}.$$

(i) ***Si*** $t_n \leq t$ ***:***

$$e_+(t_n,t) \leq \frac{24}{\left(\mu_n^+\right)^3 t_n^4}|t_n - t|.$$

Donc $A_n \leq \dfrac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \dfrac{24}{\left(\mu_n^+\right)^3 t_n^4}|t_n - t|.$

(ii) ***Si*** $t \leq t_n$ ***:***

$$e_+(t_n,t) \leq \frac{24}{t^4\left(\mu_n^+\right)^3}|t_n - t|.$$

par la suite $A_n \leq \dfrac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} \dfrac{24}{t^4\left(\mu_n^+\right)^3}|t_n - t|.$

Estimation du B_n ***:***

$$\frac{\mu_n^-\left(e^{\mu_n^-(t_n-T)}-e^{\mu_n^-(t-T)}\right)}{\mu_n^++\mu_n^+e^{-(\mu_n^++\mu_n^-)T}}=\frac{\mu_n^-e^{-\mu_n^-T}\left(e^{\mu_n^-t_n}-e^{\mu_n^-t}\right)}{\mu_n^-+\mu_n^+e^{-(\mu_n^++\mu_n^-)T}}=\frac{\mu_n^-e^{-\mu_n^-T}e_-(t_n,t)}{\mu_n^-+\mu_n^+e^{-(\mu_n^++\mu_n^-)T}}.$$

(i) ***Si*** $t_n \leq t$ ***:***

$$e_-(t_n,t)\leq e^{\mu_n^-T}\frac{\beta}{\lambda_n}|t_n-t|.$$

Donc $B_n \leq \dfrac{\mu_n^-e^{-\mu_n^-T}}{\mu_n^-+\mu_n^+e^{-(\mu_n^++\mu_n^-)T}}e^{\mu_n^-T}\dfrac{\beta}{\lambda_n}|t_n-t|.$

(ii) ***Si*** $t \leq t_n$ ***:***

$$e_-(t_n,t)\leq e^{\mu_n^-T}\frac{\beta}{\lambda_n}|t_n-t|.$$

Par la suite $B_n \leq \dfrac{\mu_n^-e^{-\mu_n^-T}}{\mu_n^-+\mu_n^+e^{-(\mu_n^++\mu_n^-)T}}e^{\mu_n^-T}\dfrac{\beta}{\lambda_n}|t_n-t|.$

Preuve. Estimons (e_+) et (e_-).

(i) **Si** $t_n \leq t$ **:**

$$\begin{aligned}
e_+(t_n,t) &= e^{\mu_n^+t_n}\left(1-\sum_{m\geq 0}\frac{(-\mu_n^+|t-t_n|)^m}{m!}\right),\\
&= e^{\mu_n^+t_n}\left(1-\left(1-\frac{\mu_n^+|t-t_n|}{1!}+\sum_{m\geq 2}\frac{(-\mu_n^+|t-t_n|)^m}{m!}\right)\right),\\
&\leq e^{-\mu_n^+t_n}\left(\mu_n^+|t_n-t|\right)\leq \frac{m!}{(\mu_n^+)^m t_n^m}\mu_n^+|t_n-t|,\\
&\leq \frac{24}{(\mu_n^+)^3t_n^4}|t_n-t| \qquad\qquad (\text{pour } \ m=4).
\end{aligned}$$

(ii) **Si** $t \leq t_n$ **:**

$$\begin{aligned}
e_+(t_n,t) &= e^{-\mu_n^+t}(1-e^{-\mu_n^+(t_n-t)}),\\
&\leq e^{-\mu_n^+t}\mu_n^+(t_n-t)\leq \frac{24}{t_2^4(\mu_n^+)^3}|t_n-t|.
\end{aligned}$$

(i) **Si** $t_n \leq t$ **:**

$$\begin{aligned}
e_-(t_n,t) &= e^{\mu_n^- t}\left(1-e^{\mu_n^-(t_n-t)}\right),\\
&= e^{-\mu_n^- t}\left(1-\sum_{m\geq 0}\frac{(-\mu_n^-|t-t_n|)^m}{m!}\right),\\
&= e^{-\mu_n^- t}\left(1-\left(1-\frac{\mu_n^-|t-t_n|}{1!}+\sum_{m\geq 2}\frac{(-\mu_n^-|t-t_n|)^m}{m!}\right)\right),\\
&\leq e^{-\mu_n^- T}\mu_n^-|t_n-t|,\\
&\leq e^{-\mu_n^- T}\frac{\beta}{\lambda_n}|t_n-t|.
\end{aligned}$$

(ii) **Si** $t \leq t_n$ **:**

$$\begin{aligned}
e_-(t_n,t) &= e^{\mu_n^- t_n}\left(1-e^{\mu_n^-(t_n-t)}\right)\\
&\leq e^{\mu_n^- t_n}\mu_n^-|t_n-t| \qquad \text{(d'après [1.(c)] du lemme(2.3.1))}
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.2. *Soit u une fonction telle que $u : E\times\mathbb{R}^+ \to H^q(\Omega)$, et soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite avec $(t_n) \subset]0,T]$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$, alors on a*

$$\lim_{n\to+\infty}\|u(.,t_n)-u(.,t)\|_{H^q(\Omega)} = 0.$$

Or :

$$\begin{aligned}
R_2 &= \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q\left(\frac{\mu_n^+(e^{\mu_n^+(T-t_n)}-e^{\mu_n^+(T-t)})}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^-(e^{\mu_n^-(t_n-T)}-e^{\mu_n^-(t-T)})}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}}\right)\varphi_n\phi_n(.)\right\|\\
&\leq \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q\frac{\mu_n^+\left(e^{\mu_n^+(T-t_n)}-e^{\mu_n^+(T-t)}\right)}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}\varphi_n\phi_n(.)\right\| + \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q\frac{\mu_n^-\left(e^{\mu_n^-(t_n-T)}-e^{\mu_n^-(t-T)}\right)}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}}\varphi_n\phi_n(.)\right\|.
\end{aligned}$$

Donc l'estimation de R_2 est basée sur les estimations (résultats)de A_n, B_n, e_+, et e_- du lemme (2.3.2) ; ensuite :

$$\begin{aligned}
R_2 &\leq \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q A_n\right\| + \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q B_n\right\|\\
&\leq \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}e_+}{\mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}\right\| + \left\|\sum_{n\geq 1}\lambda_n^q\frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- T}e_-}{\mu_n^-}\right\|
\end{aligned}$$

$$\leq \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^q \frac{\mu_n^+ \times 24}{\mu_n^- (\mu_n^+)^3} |t_n - t| \, max(\frac{1}{t_n^4}, \frac{1}{t^4}) \right\| + \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^q \frac{\mu_n^-}{\mu_n^-} e^{-\mu_n^- T} e^{\mu_n^- T} \frac{\beta}{\lambda_n} |t_n - t| \right\|$$
$$\leq \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{q-1} \varphi_n \psi_n(.) \right\| \left(\frac{24}{\beta} |t_n - t| \, max \left(\frac{1}{t_n^4}, \frac{1}{t^4} \right) \right) + \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{q-1} \varphi_n \psi_n(.) \right\| (\beta |t_n - t|)$$
$$\leq \left\| \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{q-1} \varphi_n \psi_n(.) \right\| \left\{ \frac{24}{\beta} max \left(\frac{1}{t_n^4}, \frac{1}{t^4} \right) + \beta \right\} |t_n - t| \, .$$

Lemme 2.3.3. *On prend :*

$$A + B = \frac{\mu_n^+ e \mu_n^+ T}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{-\mu_n^-}}{\mu_n^- + \mu_n + e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}$$

tel que, $A = \frac{\mu_n^+ e \mu_n^+ T}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}$ *et* $B = \frac{\mu_n^- e^{-\mu_n^-}}{\mu_n^- + \mu_n + e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}}$.

D'après le lemme(2.3.1) on a :

— $\mu_n^- = \frac{\beta}{\mu_n^+}$,

— $\mu_n^+ \geq \lambda_n$,

— $\mu_n^+ \leq \frac{2e^{\mu_n^+ T}}{T^2 \mu_n^+} \Leftrightarrow (\mu_n^+)^2 \leq \frac{2e^{\mu_n^+ T}}{T^2} \quad \Rightarrow \frac{1}{(\mu_n^+)^2} \geq \frac{T^2}{2e^{\mu_n^+ T}}$,

et on a $B > 0$ *donc il est claire que* $A + B \geq A$,

avec $\mu_n^- = \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta} + \lambda_n} \leq \frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\beta} + \lambda_1}$,

donc,

$$e^{\mu_n^-} = e^{\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta + \lambda_n}}} \leq e^{\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\beta + \lambda_1}}},$$

$$e^{-\mu_n^- T} = e^{-\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta} + \lambda_n}} \geq e^{-\frac{2\beta}{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\beta} + \lambda_1}}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_n^+ e\mu_n^+ T}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{-\mu_n^-}}{\mu_n^- + \mu_n + e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} &\geq \frac{\lambda_n}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} e^{\mu_n^+ T} \\
&= \frac{\lambda_n}{\mu_n^+ + \frac{\beta}{\mu_n^+} e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} e^{\mu_n^+ T} \\
&\geq \frac{\lambda_n \mu_n^+}{(\mu_n^+)^2 + \beta e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} e^{\mu_n^+ T} \\
&\geq \frac{\lambda_n^2 e^{\mu_n^+ T}}{\frac{2e^{\mu_n^+ T}}{T^2} + \beta e^{(\mu_n^+ + \mu_n -)T}} \\
&\geq \frac{\lambda_n^2 T^2}{2 + T^2 \beta e^{\mu_n^- T}} \\
&\geq \frac{T^2}{2 + T^2 \beta e^{\frac{2\beta T}{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\beta + \lambda_1}}}} \lambda_n^2 = \overline{C} \lambda_n^2.
\end{aligned}$$

2.3.1 Exemple d'instabilité (en $t = 0$) :

Construisons un exemple pour illustrer le caractère mal-posé du problème (P) en $t = 0$. Soit $(\tau_n)_{n=1}^{\infty}$ une base orthonormée de $L^2(\Omega)$ vérifiant le problème :

$$\begin{cases} -\Delta \tau_n(x) = \lambda_n \tau_n(x) & \text{, dans } \Omega, \\ \tau_n(x) = 0 & \text{, dans } \partial\Omega. \end{cases}$$

On note :

$\varphi_1 = \tau_1(x),$

$\varphi_m(x) = \tau_1(x) + \dfrac{1}{\lambda_m^{\beta}} \tau_m(x), \ \text{avec} \ \beta \in (0,2), \ \text{et} \ m \geq 2,$

et $\varphi_m(x) = \varphi_1(x) + \dfrac{1}{\lambda_m^{\beta}} \tau_m(x).$

Il est claire que $\lim\limits_{m \to +\infty} \|\varphi_m - \varphi_1\|_2 = 0.$

En effet $\|\varphi_m - \varphi_1\|_2 = \left\| \dfrac{1}{\lambda_m^{\beta}} \tau_m(x) \right\|_2 = \dfrac{1}{\lambda_m^{\beta}} \to 0 \ \text{quand} \ m \to +\infty.$

D'autre part, soit u_m la solution du problème (P) par rapport à la donnée φ_m

D'après le lemme(2.3.3) on a :

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to+\infty} \|u_m(.,0) - u_1(.,0)\|_{L^2(\Omega)} &= \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\lambda_m^{\beta}} \left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{-\mu_n^- T}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \\
&\geq \lim_{n\to+\infty} \frac{T^2}{2 + T^2 \beta e^{\frac{2\beta T}{\sqrt{\lambda_1^2 + 4\beta} + \lambda_1}}} \lambda_n^{2-\beta}, \\
&= \overline{C} \lim_{m\to+\infty} \lambda_m^{2-\beta} = +\infty.
\end{aligned}$$

Donc le problème (P) est mal posé au sens d'Hadamard.

CHAPITRE 3

Méthode de régularisation

Il est bien connu dans la théorie des problèmes inverses que le problème rétrograde classique est mal-posé au sens d'Hadamard [18] pour tout $0 \leq t < T$. En effet, la littérature sur les méthodes de régularisation est très riche. Ces méthodes incluent la méthode Quasi-Tikhonov [17], la méthode de Quasi-réversibilité [3, 4, 30], méthode des valeurs auxiliaires [1, 2], méthode spectral [5], méthode de filtrage [16]. Il est donc intéressant de savoir si le caractère mal-posé pour les équations paraboliques rétrogrades avec mémoire peut être diminué avec des techniques de régularisation. Notre objet majeur dans cet mémoire doit apporter une réponse à cette question.

3.1 Méthode spectrale

La manière standard de stabiliser un problème mal-posé est d'éliminer les hautes fréquences et de considérer la solution tronquée comme une approximation de la solution instable.

Soit δ le bruit tel que

$$\|\varphi - \varphi^{\delta}\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta, \tag{3.1.1}$$

où $\delta \in (0,1)$. Il est bien connu, que le problème rétrograde, qui consiste à trouver $u(x,0)$

en connaissance de l'observation finale $u(x,T)$ est **mal posé** au sens d'Hadamard.

Définition 3.1.1. Soit $\mathbb{P}_M$ la projection orthogonale sur l'espace des valeurs propres

$$\mathbb{E} = \{\phi_n \in L^2(\Omega) \ / \ \lambda_n \leq M\}$$

c'est-à-dire $\mathbb{P}_N(w) = \sum_{n=1}^{N} (w,\phi_n)\phi_n$ pour tout $w \in H = L^2(\Omega)$, où

$$N = N(M) := max\{n \in \mathbb{N}/ \ \lambda_n \leq M\}. \tag{3.1.2}$$

Remarque 3.1.1. Pour le choix du paramètre N, on considère par la suite deux méthodes ; la première méthode est basée sur un choix a priori et la seconde sur un choix a posteriori.

3.2 Choix a priori :

Pour surmonter l'instabilité d'un problème $Ax = y$ mal-posé au sens de la troisième condition d'Hadamard [18] nous introduisons une information a priori.

Condition(A) :

Une des conditions nécessaires dans l'étude des problèmes rétrogrades est la supposition suivante :

$$\begin{aligned} \|u(.,0)\|^2_{H^p(\Omega)} &:= \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2p}(u_n(0))^2, \\ &\leq E^2, \end{aligned}$$

où E est une constante et u_n est le coefficient de Fourier en $t = 0$.

D'après (1.2.4), le premier terme représente la majoration de l'erreur dûe au niveau de bruit, et comme $\|R_\alpha\| \to +\infty$ quand $\alpha \to 0$. Il ne faut pas donc choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (1.2.4) tend vers 0 quand $\alpha \to 0$ par définition de R_α. Le choix optimal du paramètre de régularisation α est par conséquent délicat. Nous voyons donc bien la nécessite d'adapter le paramètre de régularisation au niveau de bruit présent dans la donnée.

Une telle stratégie de régularisation peut se concevoir de deux façons :

Si l'on possède une estimation du niveau de bruit (relation 3.1.1), on peut en déduire comment il faut choisir le paramètre de régularisation pour obtenir la convergence. Une telle stratégie s'appelle la stratégie de régularisation.

On considère le problème approché suivant :

$$(P_{\mathbb{P}})\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_{\mathbb{P}}^{\delta} - \Delta u_{\mathbb{P}}^{\delta} = \beta\displaystyle\int_0^t u_{\mathbb{P}}^{\delta}(x,s)ds & \text{dans } Q \\ u_{\mathbb{P}}^{\delta} = 0 & \text{dans } \Gamma \\ u_{\mathbb{P}}^{\delta}(x,T) = \mathbb{P}_N(\varphi^{\delta}(x)). \end{cases}$$

En utilisant les mêmes techniques utilisées dans la section précédente, on peut obtenir la solution analytique du problème $(P_{\mathbb{P}})$.

$$u_{\mathbb{P}}^{\delta}(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}}\right)\varphi_n^{\delta}\phi_n(x) \tag{3.2.1}$$

où μ_n^+, μ_n^- sont donnés précédemment et φ_n^{δ} est le nième coefficient de Fourier de la donnée mesurée φ^{δ}.

Théorème 3.2.1. *Soient $u_{\mathbb{P}}$ et $u_{\mathbb{P}}^{\delta}$ les solutions du problème $(P_{\mathbb{P}})$ correspondant aux données φ et φ^{δ} respectivement. Alors on a :*

$$\left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u_{\mathbb{P}}(.,0)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C^+M^2\left\|\varphi^{\delta} - \varphi\right\|_{L^2(\Omega)} \tag{3.2.2}$$

où $C^+ = \dfrac{2}{\lambda_1^2} + \dfrac{1}{2\beta}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{4\beta}{\lambda_1^2}}\right)$.

Preuve.
$$\begin{aligned}\left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u_{\mathbb{P}}(.,0)\right\|_{L^2(\Omega)} &= \Bigg\|\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- -T}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}}\right)\varphi_n^{\delta}\phi_n(x) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- -T}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}}\right)\varphi_n\phi_n(x)\Bigg\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

$$\leq \left\| \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- - T}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \times \left(\varphi_n^\delta \phi_n(x) - \varphi_n \phi_n(x) \right) \right\|_{L^2(\Omega)},$$

$$\leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^- - T}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \times \left\| \varphi_n^\delta \phi_n(x) - \varphi_n \phi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'près le lemme (2.3.1) on obtient :

$$\begin{aligned}
\left\| u_{\mathbb{P}}^\delta(.,0) - u_{\mathbb{P}}(.,0) \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left(\frac{\mu_n^+}{\mu_n^-} + 1 \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \left(\frac{(\mu_n^+)^2}{4\beta} + 1 \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \left(\frac{2\lambda_n^2 + 4\beta + 2\lambda_n\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta}}{4\beta} + 1 \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \left(\frac{\lambda_n^2}{2\beta} + \frac{\lambda_n}{2\beta}\sqrt{\lambda_n^2 + 4\beta} + 2 \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \left(\frac{\lambda_n^2}{2\beta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\lambda_n^2}} \right) + 2 \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq \lambda_n^2 \left(\frac{2}{\lambda_1^2} + \frac{1}{2\beta} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\lambda_1^2}} \right) \right) \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}, \\
&\leq M^2 C^+ \left\| \varphi^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Estimation de convergence a priori

Théorème 3.3.1. *Soit u la solution du problème (P). Soit φ^δ la donné bruité vérifiant la condition (3.1.1) et on a supposé que la condition (A) est vérifiée pour $p > 0$.*
Soit $u_{\mathbb{P}}^\delta$ la solution régularisée donnée par (3.2.1).
si le paramètre de régularisation est choisie par $N = max\{n \in \mathbb{N}/\lambda_n \leq M\}$ où

$$M = \left(\frac{E}{\delta} \right)^{\frac{1}{2+p}}. \tag{3.3.1}$$

Alors on a l'estimation suivante :

$$\left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u(.,0)\right\| \leq \left(1 + C^{+}\right) E^{\frac{2}{2+p}} \delta^{\frac{p}{2+p}}. \tag{3.3.2}$$

Preuve. En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire ;

$\left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u(.,0)\right\| \leq \left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u_{\mathbb{P}}\right\| + \|u_{\mathbb{P}} - u(.,0)\|$.

On pose $T_1 = \|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u_{\mathbb{P}}\|$ et $T_2 = \|u_{\mathbb{P}}(.,0) - u(.,0)\|$ d'une part le premier T_1 peut être estimer comme suit :

$$\begin{aligned} \left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u_{\mathbb{P}}\right\| &= \leq C^{+}M^{2}\left\|\varphi^{\delta} - \varphi\right\|, \\ &= \leq C^{+}M^{2}\delta. \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

D'autre part le terme T_2 peut être estimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|u_{\mathbb{P}}(.,0) - u(.,0)\| = \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(0)\phi_n(.)\right\| &= \left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^p}\lambda_n^p u_n(0)\phi_n(.)\right\|, \\ &\leq \frac{1}{M^p}\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^p u_n(0)\phi_n(.)\right\|, \\ &\leq \frac{1}{M^p}E. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Combinant (3.3.3), (3.3.5) et l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left\|u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u(.,0)\right\| \leq C^{+}M^{2}\delta + \frac{1}{M^p}E.$$

Si on choisi $M = \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{2+p}}$, alors :

$$\begin{aligned}
\left\| u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u(.,0) \right\| &\leq C^{+} \frac{(E)^{\frac{2}{2+p}}}{(\delta)^{\frac{2}{2+p}}}\delta + \frac{(\delta)^{\frac{p}{2+p}}}{(E)^{\frac{p}{2+p}}}E, \\
&= C^{+}(E)^{\frac{2}{2+p}}(\delta)^{\left(1-\frac{2}{2+p}\right)} + (\delta)^{\frac{p}{2+p}}(E)^{1-\frac{p}{2+p}}, \\
&= C^{+}(E)^{\frac{2}{2+p}}\delta^{\frac{p}{2+p}} + (E)^{\frac{2}{2+p}}\delta^{\frac{p}{2+p}}.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

□

3.4 Estimation de convergence a posteriori

La stratégie de régularisation a priori suppose qu'on sache estimer le bruit présent dans les données, ce qui n'est pas forcément possible. Par contre la stratégie de régularisation a posteriori consiste à estimer au cours du calcul la valeur convenable du paramètre en utilisant uniquement les données disponibles.

Cette section est consacrée à la dérivation du taux de convergence de la solution régularisée sous le choix a posteriori du paramètre de régularisation.
Notons :

$$\Lambda(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n^2}\left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \varphi_n \phi_n(x),$$

$$\Lambda^{\delta}(x,t) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n^2}\left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+(T-t)}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{\mu_n^-(t-T)}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \varphi_n^{\delta} \phi_n(x).$$

Soit $\Lambda_n(t)$ et $\Lambda_n^{\delta}(t)$ le nième coefficient de Fourier de $\Lambda(x,t)$ et $\Lambda^{\delta}(x,t)$ respectivement. En utilisant ces notations. Nous réécrivons la solution exacte et la solution régularisée par rapport aux données mesurées comme suit :

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^2 \Lambda_n(t) \phi_n(x), \tag{3.4.1}$$

$$u_{\mathbb{P}}^{\delta}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \Lambda_n^{\delta}(t) \phi_n(x). \tag{3.4.2}$$

Là encore, le paramètre N sera choisi plus tard. Noter que le choix a posteriori du paramètre N est différent de ce qui précède. Ainsi, pour le distinguer de la solution régularisée précédente on note $u_{\mathbb{P}}^{\delta}$ la solution régularisée dans cette sous section. Motivé par [livre de Heinz.W.Engl. section 4,3. page 83-88]. Nous introduisons le principe de selection sous la forme suivante.

$$\left\|(I-\mathbb{P}_N)\Lambda^{\delta}(.,0)\right\| \leq \eta\delta < \left\|(I-\mathbb{P}_{N-1})\Lambda^{\delta}(.,0)\right\|, \tag{3.4.3}$$

où δ est le niveau de bruit, et $\eta > C^{+}$ et C^{+} est une constante positive spécifiée dans le théorème (3.2.1).
$\mathbb{P}_N$ est défini au début du chapitre 2; c'est à dire :

$$\mathbb{P}_N\left(\Lambda^{\delta}(x,0)\right) = \sum_{n=1}^{N} \Lambda_n^{\delta}(t)\phi_n(x); \qquad \mathbb{P}_0\left(\Lambda^{\delta}(x,0)\right) = 0. \tag{3.4.4}$$

D'après le lemme suivant, on sait qu'il existe un N unique pour (3.4.3) si $\left\|\Lambda^{\delta}(.,0)\right\| > \eta\delta$. En fait, on a

Lemme 3.4.1. *Soit* $S_n = \left\|(I-\mathbb{P}_{N-1})\Lambda^{\delta}(.,0)\right\|$.
Si $\left\|\Lambda^{\delta}(.,0)\right\| > \eta\delta$, *alors les résultats suivants sont vérifiés :*

- **-a-** $S_1 = \left\|\Lambda^{\delta}(.,0)\right\|$;
- **-b-** $\lim_{N\to+\infty} S_N = 0$;
- **-c-** $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ *est une suite décroissante.*

Il est facile de vérifier les points a, b, c.

Lemme 3.4.2. *Soit* φ *et* φ^{δ} *tels que* $\left\|\varphi-\varphi^{\delta}\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$. *Alors on a l'estimation suivante :*

$$\mathbb{K} = \left\|\Lambda^{\delta}(.,0) - \Lambda(.,0)\right\| \leq C^{+}\delta$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathbb{K} &= \left\| \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\lambda_n^2} \left(\frac{\mu_n^+ e^{\mu_n^+ T}}{\mu_n^+ + \mu_n^- e^{(\mu_n^+ + \mu_n^-)T}} + \frac{\mu_n^- e^{-\mu_n^T}}{\mu_n^- + \mu_n^+ e^{-(\mu_n^- + \mu_n^+)T}} \right) \left(\varphi_n^\delta - \varphi \right) \phi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C^+ \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n^\delta - \varphi \right) \phi_n(x) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C^+ \left\| \varphi_n^\delta - \varphi \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= C^+ \delta
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.4.3. *Supposons que la condition (A) est vérifiée et le paramètre N est choisi par le principe de selection a posteriori :*

$$\left\| (I - \mathbb{P}_{N-1}) \Lambda^\delta(.,0) \right\| \leq \eta\delta < \left\| (I - \mathbb{P}_N) \Lambda^\delta(.,0) \right\| .$$

Alors la borne supérieure de N est vérifie

$$\lambda_N \leq \left(\frac{E}{(\eta - C^+)\,\delta} \right)^{\frac{1}{2+p}} \tag{3.4.5}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\left\| (I - \mathbb{P}_{N-1}) \Lambda^\delta(.,0) \right\| &= \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \Lambda^\delta(.,0) - \mathbb{P}_{N-1} \left(\Lambda^\delta(.,0) \right) \right\|, \\
&= \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} u_n(0) \phi_n(.) \right\|, \\
&= \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\lambda_n^p}{\lambda_n^p} \frac{1}{\lambda_n^2} u_n(0) \phi_n(.) \right\|, \\
&\leq \frac{1}{\lambda_N^{2+p}} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^p u_n(0) \phi_n(.)) \right\|,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\lambda_N^{2+p}} \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \lambda_n^p u_n(0)\phi_n(.) \right\|, \\
&= \frac{1}{\lambda_N^{2+p}} \|u(.,0)\|_{H^p(\Omega)}, \\
&\leq \frac{1}{\lambda_N^{2+p}} E;
\end{aligned}
$$

puisque $\lambda_N \leq \left(\frac{E}{(\eta - C^+)\,\delta} \right)^{\frac{1}{2+p}}$ alors $\left\| (I - \mathbb{P}_{N-1})\, \Lambda^\delta(.,0) \right\| \leq \frac{1}{\lambda_N^{2+p}} E$.
D'autre part :

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=N}^{\infty} \Lambda_n(0)\phi_n(.) \right\| &= \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \left(\Lambda_n(0) + \Lambda_n^\delta(0) - \Lambda_n^\delta(0) \right) \phi_n(.) \right\| \\
&\geq \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \Lambda_n^\delta(0)\phi(.) \right\| - \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \left(\Lambda_n^\delta(0) - \Lambda_n(0) \right) \phi_n(.) \right\| \\
&= \left\| (I - \mathbb{P}_N)\, \Lambda_n^\delta(.,0) \right\| - \left\| \sum_{n=N}^{\infty} \left(\Lambda_n^\delta(0) - \Lambda_n(0) \right) \phi(.) \right\| \\
&\geq \eta\delta - \left\| \Lambda^\delta(.,0) - \Lambda(.,0) \right\| \\
&\geq \eta\delta - C^+\delta = \left(\eta - C^+ \right) \delta
\end{aligned}
$$

cependant $\lambda_N \leq \left(\frac{E}{(\eta - C^+)\,\delta} \right)^{\frac{1}{2+p}}$.
En utilisant les deux lemmes précédents ; on a le résultat d'estimation de converge via le choix a posteriori. □

Théorème 3.4.1. *Soit $\eta > C^+$. Supposons que $\left\| \Lambda^\delta(.,0) \right\| > \eta\delta$ et la condition (A) est vérifiée. Supposons que N est choisi via le principe (3.4.5). Alors nous obtenons l'estimation d'erreur suivante :*

$$
\left\| u_{\mathbb{P}}^{\delta}(.,0) - u(.,0) \right\| \leq \left(\frac{C^+}{(\eta - C^+)^{\frac{2}{2+p}}} + \left(C^+ + \delta \right)^{\frac{p}{2+p}} \right) E^{\frac{2}{2+p}} \delta^{\frac{p}{2+p}} \tag{3.4.6}
$$

Preuve. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left\| u^{\delta}_{\overline{\mathbb{P}}}(.,p) - u(.,0) \right\| \leq \left\| u^{\delta}_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) - u_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) \right\| + \left\| u_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) - u(.,0) \right\|. \tag{3.4.7}$$

On note : $L_1 = \left\| u^{\delta}_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) - u_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) \right\|$, $L_2 = \left\| u_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) - u(.,0) \right\|$

Commençons par L_1 :

D'après un théorème précédent (3.2.1), on a :

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\| u^{\delta}_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) - u_{\overline{\mathbb{P}}} \right\|, \\ &\leq C^+ M^2 \left\| \varphi^{\delta}_n - \varphi, \right\|, \\ &\leq \frac{C^+}{(\eta - C^+)^{\frac{2}{2+p}}} E^{\frac{2}{2+p}} \delta^{\frac{p}{2+p}}. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Ensuite le terme L_2 est estimé comme suit :

$$\begin{aligned} L_2 &= \left\| u_{\overline{\mathbb{P}}}(.,0) - u(.,0) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(0)\phi_n(.) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{u_n(0)}{\lambda_n^2} \right)^{\frac{p}{2+p}} \left(\lambda_n^p u_n(0) \right)^{\frac{2}{2+p}} \phi_n(.) \right\|, \\ &= \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} (\Lambda_n(0))^{\frac{p}{2+p}} \left(\lambda_n^p u_n(0) \right)^{\frac{2}{2+p}} \phi_n(.) \right\|, \\ &\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} (\Lambda_n(0))\phi_n(.) \right\|^{\frac{p}{2+p}} \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n^p u_n(0)\phi_n(0) \right\|^{\frac{2}{2+p}}, \\ &\leq \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left((\Lambda_n(0)) - \Lambda_n^{\delta}(0) + \Lambda_n^{\delta}(0) \right) \phi_n(.) \right\|^{\frac{p}{2+p}} \| u(.,0) \|_{H^p(\Omega)}^{\frac{2}{2+p}}, \end{aligned}$$

$$\tag{3.4.9}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \Lambda_n^{\delta}(0)\phi_n(.) \right\| + \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \Lambda_n^{\delta}(0) - \Lambda_n(0)\phi_n(.) \right\| \right)^{\frac{p}{2+p}} \|u(.,0)\|_{H^p(\Omega)}^{\frac{2}{2+p}}, \\
&= \left(\left\| (I - \mathbb{P}_N)\Lambda^{\delta}(.,0) \right\| + \left\| \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\Lambda_n^{\delta}(0) - \Lambda_n(0) \right) \phi_n(.) \right\| \right)^{\frac{p}{2+p}} \|u(.,0)\|_{H^p(\Omega)}^{\frac{2}{2+p}}, \\
&\leq (C^+ + \eta)^{\frac{p}{2+p}} E^{\frac{2}{2+p}} \delta^{\frac{p}{2+p}}. \qquad (3.4.10)
\end{aligned}
$$

En combinant (3.4.7), (3.4.8) et (3.4.10), on obtient l'estimation recherchée.

□

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans ce mémoire on a traité un problème rétrograde d'une équation parabolique avec la présence d'un terme mémoire.
On a montré pour tout $0 < t < T$ le problème en question est bien posé avec un choix particulier des espaces contrairement aux problèmes paraboliques rétrogrades classiques.
En $t = 0$ le problème est mal posé, pour surmonter la mal position du problème, on a proposé une méthode de régularisation spectrale avec un choix a priori et un choix a posteriori du paramètre de régularisation. On a obtenu des résultat de convergence et des estimation d'erreurs Höldérienne sous une condition de bornétude de la condition initiale.

Perspectives

Les futurs travaux incluent, l'extension de cette méthode a une classe de problèmes plus large à savoir :

-1- Problème parabolique rétrograde non linéaire (ce problème est très délicat)[22, 34].

-2- Pour diminuer le caractère mal-posé des problèmes non-linéaires paraboliques rétrogrades, on peut étudier le problème fractionnaire, en remplaçant u_t par une dérivée fractionnaire de type Caputo.

-3- On peut penser à combiner l'effet aléatoire avec les avantages de la dérivée fractionnaire pour étudier le phénomène de diffusion dans un milieu hétérogène avec mémoire [33].

Bibliographie

[1] A. Benrabah, N. Boussetila, Modified nonlocal boundary value problem method for an ill-posed problem for the biharmonic equation. Inverse Probmlems in Science and Engineering ; 27(3) :340-368.

[2] A. Benrabah, N. Boussetila, F. Rabbani, Modified auxilary boundary conditions method for an ill-posed problem for the homogeneous biharmonic equation. Mathematical Methods in the Applied Sciences ; 43(1) :358-383.

[3] A. Benrabah, N. Boussetila, F. Rabbani, Regularization of an abstract ill-posed Cauchy Problem via general quasi-reversibility method. Khhayam Journal of mathematics ; 1-19.

[4] A. Jana and M. Thamban Nair, Quasi-reversibility method for an ill-posed nonhomogeneous parabolic problem. Numer Funct Anal Optim ; 37(12) :1529-1550.(2016).

[5] A. Jana and M. Thamban Nair, Trancated spectral regularization for an ill-posed non-homogeneous parabolic problem. J Math Anal Appl ; 438(1) :351-372.(2016).

[6] A. Tarantola, Inverse problem theory. SIAM.(2005).

[7] BG. Pachpatte, On a nonlinear diffusion system arising in record dynamics. J Math Anal Apll ; 94(2) :501-508.(1983).

[8] C. Fabien, Quelque applications des processus de diffusion : filtrage/ statistique contrôle-homogénéisation. Habilitation à dériger des recherches. Université de Rennes 1.(2010).

[9] D. Benaouda, Simulation des emissions d'aérosols désertiques à l'échelle régionale : Analyse climatique des emissions du Nord de l'Afrique. Thède de doctorat. Univer-

sité des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed Boudiaf, Faculté de Génie Mécanique, Département de Génie Mécanique.(2014).

[10] D. G. Kendall, Mathematical models of the spread of infection. Mathematics and coputer science in biology and medicine ; 213 :213-225.(1965).

[11] E. Frédéric, Les verres.(septembre 2007).

[12] EG. Yanik, G. Fairweather, Finite element methods for parabolic and hyperbolic partial integro-differential equation. Nonlinear Anal ; 12(8) :785-809.(1988).

[13] E. Tadmor and P. Athavale, Multiscal image representation using integro-differential equations, Inverse problem and imaging ; 3 :693-710.(2009).

[14] G. Roussel, Problèmes inverses. Stic et Environnement.(2011).

[15] H. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, Regularization of Inverse Problems (Dordrecht : Kluwer).(1996).

[16] H. H. Quin, T. Wei, Some filter regularization methods for a backward heat conduction problem. Appl Math Comput ; 217(24) :10317-10327.(2011).

[17] J. Cheng, JJ. Liu, A quasi Tikhonov regularization for a tow-dimensional backward heat problem by a fundamental solution. Inverse probl ; 24(6) :065012,18.(2008).

[18] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's problem in linear PDEs, Yale University Press, New Haven.(1923).

[19] J. Medlock and M. Kot, Spreading disease : integro-differential equations old and new. Mathematical Biosciences ; 184 :201-222.(2003).

[20] J. W. Nunziato, On heat conductionin materials with memory. Quart Appl Math ; 29 :187-204.(1971).

[21] K. Benarioua, Introduction à l'analyse hilbertienne et aux opérateurs linéaires bornées. Université de Guelma.(2017-2018).

[22] K. Sakthivel, K. Balachandran, B. R. Nagaraj, On a class of non-linear parabolic controlsystems with memory effects. International Journal of Control ; 81 :764-777.(2008).

[23] L. C. Evans, Partial differntial equations. American mathematical society. Graduate Studies in Mathematics ; Volume 19.(1988).

[24] M. S. E. Meziani, Stabilisation et Approximation Numérique d'une Classe de Problèmes Inverses, PHD Thesis, U. BM Annaba.(2021).

[25] M. Bonnet, Problème inverses. Syllabus du cours à l'Ecole Centrale de Paris.(2008).

[26] M. Kern , Problème inverses. Syllabus du cours à l'Ecole supérieure d'ingénieurs Léoard de Vinci.(2002).

[27] M. kot and W. M. Schaffer, Discrete-time growth-dispersal models. Mathematical Biosciences ; 80 :109-136.(1986).

[28] N. Shigesada and K. Kawasaki, Invasion and the range expansion of species : effects of long-distance dispersal. Dispersal ecology ; 350-373.(2002).

[29] NY. Zhang, On fully discrete Galerkin approximations for partial integro-differential equations of parabolic type. Math. Comp ; 60(201) :133-166.(1993).

[30] RE. Showalter, Quasi-reversibility of first and second order parabolic evolution equations, Res Notes in Math ; no 1 ;76-84.(1975).

[31] S. Kawashima, Global solutions of the equation of viscoelasticity with fading memory. J Differ Equ ; 101 :388-420.(1993).

[32] S. V. Petrovskii and B. L. Li, Exactly solvble models of biological invasion. CRC Press.(2005).

[33] X. Liu, Controllability of some coupled stochastic parabolic systems with fractional order spatial differential operators by one control in the drift, SIAM J. Control Optim ; 52 :863-860.(2014).

[34] Y. Han, Z. Yu and Z. Jin, Global attractor for damped wave equations with nonlinear memory, J Math res Appl ; 32no.2 :2013-222.(2012).