République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l’Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l’obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : Edp et **Analyse numérique**

Par :

Melle Bouchemel Djihene

Intitulé

Inégalités intégrales pondérées de type point milieu

Dirigé par : Badreddine Meftah

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Ellaggoune Fateh	Prof.	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Meftah Badreddine	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Lakhal Fahim	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2021

Dédicace

Je dédie cette thèse

A mes parents et grands parents.

A mes beaux parents.

A mes frères Raid et Wissale.

A mes chères tantes Assia et Wassila.

A mes chères amie Yassmine, Djihene, Rima, Sabrine, Wissale et Khawla.

A la mémoire de ma belle sœur Samia.

A tous ceux qui me sont chers et proches.

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je saisie l'occasion offerte par l'achèvement de mon mémoire de master pour remercier vivement en premier lieu, Monsieur MEFTAH Badreddine, maître de conférence à l'Université de Guelma d'avoir dirigé ce travail avec beaucoup d'attention, de patience et d'intérêt, et qui m'a fait bénéficier durant cette année de ses conseils et de sa très grande compétence.

Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi à Monsieur ELLAGGOUNE Fateh, Professeur à l'Université de Guelma pour avoir accepté de juger ce travail et d'en présider le jury de soutenance. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.

Mes remerciements vont également à Monsieur LAKHAL Fahim, Professeur à l'Université de Guelma qui a accepté de juger ce travail en tant qu'examinateur.

Je remercie aussi vivement Madame Assia Frioui Maître de conférence à l`Université de Guelma pour son aide si précieuse et son soutien.

ملخص

في هذه الأطروحة، سوف نركز على دراسة المتراجحات التكاملية من نوع النقطة الوسطى.

في الفصل الأول، نذكر ببعض التعريفات للتحدب الكلاسيكي، وكذلك بعض فئات الوظائف.

في الفصل الثاني، نقتبس بعض النتائج المعروفة في الأدبيات.

بينما سنخصص الفصل الأخير بالكامل لعدم المساواة الجديدة من نوع النقطة الوسطى، نذكر أننا قدمنا ورقتين للنشر المحتمل ، ثم قبول أحدهما ونشره في المجلة الدولية

"Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems"

الكلمات المفتاحية: متراجحة هرمايت - هادامارد ، متراجحة هولدر، دوال وزن ، دوال محدبة ، دوال محدودة ، دوال هولدير.

Abstract

In this memory, we will focus on the study of midpoint type integral inequalities.
In the first chapter, we recall some definitions of classical convexity, as well as some classes of functions.
In the second chapter, we quote some results already known in the literature.
While the last chapter will be entirely devoted to new midpoint inequalities, we mention that we have submitted two papers for possible publication, one of which has been accepted and published in "Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems" (JFCNS).

Keywords: Hermite-Hadamard inequality, Hölder inequality, weight functions, s-convex functions, bounded functions, Hölderian functions.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales de type point milieu.
Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de convexité classique, ainsi que certaines classes de fonctions.
Dans le deuxième chapitre, nous citons certains résultats déjà connus dans la littérature.
Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type point milieu, nous mentionnons que nous avons soumis deux papiers pour une éventuelle publication, dont l'un a été accepté et publié dans la revue internationale :
« Journal du calcul fractionnaire et des systèmes non linéaires » (JFCNS).

Mots clés: inégalité d'Hermite-Hadamard, inégalité de Hölder, fonctions poids, fonctions s-convexes, fonctions bornées, fonctions hölderiennes.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans divers branches des mathématiques modernes telles que la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc, dont elle représente un outil puissant et indispensable.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy, Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature dans ce contexte est vaste et variées parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [13, 14, 15].

Cette théorie évolue constamment dans plusieurs directions et de différentes manières, de nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, des extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type point milieu dont les dérivées premières jouissent d'un certain type de convexité classique où appartienne à une certaine classe de fonctions, aussi d'essayer d'établir de nouvelles généralisations de ce type d'inégalités intégrales.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons certains types de convexités classiques, quelques classes de fonctions, ainsi que des identités et inégalités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le deuxième chapitre, nous traiterons quelques résultats connus dans la littérature concernant les inégalités intégrales de type point milieu.

En revanche, le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type point milieu, dont ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication. En note qu'un des papiers soumis a été accepté et publié dans la revue internationale : « Journal du calcul fractionnaire et des systèmes non linéaires ».

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons quelques types de convexité classiques, certains types de classes de fonctions et quelques identités de fonctions.

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui suit nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([11]) *Un ensemble I est dit convexe, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([17]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\,(tx + (1 - t)\, y) \leq tf\,(x) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([2]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$, si*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq t^s f(x) + (1 - t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et $t \in [0,1]$.

1.0.2 Quelques classes de fonctions

Définition 1.4 ([6]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. f est dite bornée sur $[a,b]$, s'il existe $-\infty < m < M < +\infty$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, on a*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 1.5 ([18]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite lipschitzienne de rapport $k > 0$, si pour tout $x, y \in I$*

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

est satisfaite.

Définition 1.6 ([5]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est dite r-H-hölderienne, si pour tout $x, y \in I$*

$$|f(x) - f(y)| \leq H|x - y|^r,$$

est satisfaite, où $H > 0$ et $r \in (0,1]$.

1.0.3 Inégalité de Hölder et sa variante

Théorème 1.1 ([13]) *Soient f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a,b]$ où $a < b$, telle que $|f|$ et $|g|$ sont des fonctions p-intégrable et q-intégrable sur $[a,b]$ respectivement où $p, q > 1$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.2 ([3]) *Soient $x = (x_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ et $p = (p_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ deux n-uplets strictement positives et soit $q \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés par* *p est définie par*

$$M_n^{[q]} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i^q \right)^{\frac{1}{q}} & \textit{pour } q \neq -\infty, 0, +\infty, \\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \right)^{\sum\limits_{k=1}^{n} p_k} & \textit{pour } q = 0, \\ \min(x_1, x_2, ..., x_n) & \textit{pour } q = -\infty, \\ \max(x_1, x_2, ..., x_n) & \textit{pour } q = +\infty. \end{cases}$$

De plus, on a

$$M_n^{[q]} \leq M_n^{[r]},$$

pour $-\infty \leq q < r \leq +\infty$.

Théorème 1.3 (Version intégrale du Théorème 1.2) *Soient* $|f|^p$ *et* $|g|^q$ *deux fonctions intégrables sur* $[a, b]$*, où* $a < b$ *et* $q \geq 1$*, alors on a*

$$\int_a^b |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\, |g(x)|^q\, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.0.4 Quelques théorèmes importants

Théorème 1.4 ([8, 9]) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, une fonction convexe sur* $[a, b]$ *où* $a < b$*, alors*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Théorème 1.5 ([7]) *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, une fonction convexe sur* $[a, b]$ *où* $a < b$*, et soit* $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction positive, intégrable et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$*, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)\, w(x)\, dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)\, dx.$$

Théorème 1.6 ([4]) *Soit $f : [a,b] \subset [0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction s-convexe au second sens, où $s \in (0,1]$ et $a,b \in [0,\infty)$ tels que $a < b$. Si $f \in L([a,b])$, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$2^{s-1} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{1.1}$$

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type point milieu

Ce chapitre est consacré aux inégalités de type point milieu. Dans la première section nous verrons les inégalités de type point milieu pour les fonctions dont les premières dérivées sont convexes les résultats ont été développés par Kirmaci, ainsi qu'une variante établie par Pearce et Pečarić. Tandis que la seconde section traite une généralisation des résultats de la première section concernant les fonctions dont les premières dérivées jouissent de la s-convexités au second sens.

2.1 Inégalités de type point milieu pour les fonctions convexes

Les premiers résultats de cette section s'appuient sur l'identité donnée par le lemme suivant :

Lemme 2.1 ([10]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I°, où (I°est l'intérieure de I), $a, b \in I$ tel que $a < b$. Si $f' \in L([a, b])$, alors l'identité suivante est* *satisfaite*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2}) = (b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt\right).$$

Preuve. En intégrant par parties les deux intégrales du membre de droite de l'identité donnée, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)f'(ta+(1-t)b)dt \\
&= \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \tfrac{1}{a-b}\int_0^{\frac{1}{2}} f(ta+(1-t)b)dt \\
&\quad + \tfrac{f(ta+(1-t)b)}{a-b}(t-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \tfrac{1}{a-b}\int_{\frac{1}{2}}^1 f(ta+(1-t)b)dt \\
&= \tfrac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx - \tfrac{1}{b-a}f(\tfrac{a+b}{2}).
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.1 ([10]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I° (I° l'intérieure de I) telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a,b]$, alors on a*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2})\right| \leq \frac{b-a}{8}\left(\left|f'(a)\right| + \left|f'(b)\right|\right).$$

Preuve. D'après le Lemme 2.1 et la convexité de $|f'|$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2})\right| \\
= & \left|(b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} tf'(ta+(1-t)b)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1)\,f'(ta+(1-t)b)dt\right)\right| \\
\leq & \ (b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |t|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt\right) \\
\leq & \ (b-a)\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t^2\,|f'(a)| + t\,(1-t)\,|f'(b)|\right) dt\right. \\
& \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left((1-t)\,t\,|f'(a)| + (1-t)^2\,|f'(b)|\right) dt\right) \\
\leq & \ \tfrac{b-a}{8}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

où on a utilisé

$$\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^2 dt = \tfrac{1}{24} \text{ et } \int_0^{\frac{1}{2}} t(1-t)dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t(1-t)dt = \tfrac{1}{12}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.2 ([10]**)** *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I° (I° l'intérieure de I) telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe sur $[a,b]$ où*

$p > 1$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2}) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{16} \left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{P}} \left(\left(|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + 3\,|f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right. \\
&\left. + \left(3\,|f'(a)|^{\frac{p}{(p-1)}} + |f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}} \right)^{\frac{(p-1)}{p}} \right). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 2.1, la valeur absolue et l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2}) \right| \\
&\leq (b-a) \left(\int_0^{\frac{1}{2}} t\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1|\,|f'(ta+(1-t)b)|\,dt \right) \\
&\leq (b-a) \left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}} t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-t)^p\,dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
&\leq \frac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \left(\left(\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt \right)^{\frac{1}{q}} \right). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

D'après la convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt &\le \int_0^{\frac{1}{2}} [t\,|f'(a)|^q + (1-t)\,|f'(b)|^q]dt \\ &= \tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8} \end{aligned} \tag{2.3}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f'(ta+(1-t)b)|^q\,dt &\le \int_{\frac{1}{2}}^{1} [t\,|f'(a)|^q + (1-t)\,|f'(b)|^q]dt \\ &= \tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

En substituant (2.3) et (2.4) dans (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2})\right| \\ \le\ & \tfrac{b-a}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{8}\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\ =\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+3|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{3|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{4}\right)^{\frac{1}{q}}\right). \end{aligned}$$

En réarrangeant la dernière écriture on aboutit au résultat souhaité. ■

Théorème 2.3 ([10]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I° (I° l'intérieure de I) telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$ est convexe sur $[a,b]$ où $p > 1$, alors on a*

$$\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2})\right| \le \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).$$

Preuve. Comme les hypothèses du Théorème 2.1 sont satisfaites, alors (2.1) à lieu, et donc on a

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2})\right| &\leq \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left(|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + 3\,|f'(b)|^{\frac{p}{(p-1)}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right.\\ &\quad \left.+\left(3\,|f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\right).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité algébrique suivante :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^s \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^s + \sum_{k=1}^{n} b_k^s,$$

pour $0 \leq s \leq 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0, b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f(\tfrac{a+b}{2})\right| &\leq \tfrac{b-a}{16}\left(\tfrac{4}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}(4\,|f'(a)| + 4\,|f'(b)|)\\ &= \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{4}{b-a}\right)^{\frac{1}{p}}(|f'(a)| + |f'(b)|),\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. ■

Une autre variante a été proposée par Pearce et Pečarić [16], cette dernière traite le cas où $|f'|$ a une certaine puissance $q \geq 1$ est convexe donnée par le théorème ci-dessous

Théorème 2.4 ([16]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est convexe sur $[a,b]$ où $q \geq 1$, alors on a*

$$\left|f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \leq \tfrac{b-a}{4}\left[\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Preuve. Il est facile de prouver que

$$f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \tfrac{1}{b-a}\int_a^b S(x)f'(x)dx,$$

où

$$S(x)=\begin{cases} x-a, & \text{si } x\in[a,\frac{a+b}{2}],\\ x-b, & \text{si } x\in[\frac{a+b}{2},b].\end{cases}$$

Ainsi, en appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'égalité ci-dessus, puis en utilisant l'inégalité des moyens d'ordre q et la convexité de $|f'|^q$ sur $[a,b]$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|f(\tfrac{a+b}{2})-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\\
\leq\ & \tfrac{1}{b-a}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\left|f'(x)\right|dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\left|f'(x)\right|dx\right)\\
\leq\ & \tfrac{1}{b-a}\left(\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\left|f'(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)dx\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\left|f'(x)\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
=\ & \tfrac{1}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}dx\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b(b-x)\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
=\ & \tfrac{1}{b-a}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^2\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)dx\right)^{\frac{1}{q}}\right.
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b}(b-x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\Bigg)$$

$$= \frac{2}{b-a}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right)\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} = \frac{b-a}{4}\left(\frac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Les résultats précédents ont été généralisés de différentes manières, parmi ces généralisations on note celle donnée par Alomari et ses collaborateurs [1], dont ils ont traité le cas où la valeur absolue des dérivées premières sont s-convexes

2.2 Inégalités de type point milieu pour les fonctions s-convexes au second sens

Lemme 2.2 ([1]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable sur I°. Si $f' \in L([a,b])$ où $a < b \in I$ tels que $a < b$, alors l'identité suivante est satisfaite*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(\int\limits_0^1 tf'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)dt + \int\limits_0^1 (1-t)f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})dt\right). \qquad (2.5)$$

Preuve. Posons

$$I_1 = \int\limits_0^1 tf'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)dt,$$

et

$$I_2 = \int\limits_0^1 (1-t)f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})dt.$$

En intégrant par parties I_1, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_0^1 t f'(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt \\
&= \tfrac{2}{b-a} t f(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)\Big|_{t=0}^{t=1} - \tfrac{2}{b-a} \int\limits_0^1 f(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt \\
&= \tfrac{2}{b-a} f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{2}{b-a} \int\limits_0^1 f(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a)dt. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

En adoptant le changement de variable $x = t\frac{a+b}{2} + (1-t)a$, (2.6) donne

$$I_1 = \tfrac{2}{b-a} f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{4}{(b-a)^2} \int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx. \qquad (2.7)$$

D'une manière analogue, on obtient

$$I_2 = \tfrac{2}{b-a} f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{4}{(b-a)^2} \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)dx. \qquad (2.8)$$

En additionnant les équations (2.7) et (2.8), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{(b-a)^2}{4}$, on aboutit à l'identité désirée. ■

Théorème 2.5 **(**[1]**)** *Soit $f : I \subset [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable à I°, telle que $f' \in L([a,b])$, où $a, b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est s-convexe sur $[a,b]$, pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4(s+1)(s+2)} \left(|f'(a)| + 2(s+1) \left| f'(\tfrac{a+b}{2}) \right| + |f'(b)| \right) \qquad (2.9) \\
\leq\ & \tfrac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)} \left[|f'(a)| + |f'(b)| \right]. \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Preuve. Du Lemme 2.2, on a

$$
\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}[\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right| dt + \int_0^1 |t-1|\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right| dt] \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\int_0^1 t[t^s\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + (1-t)^s|f'(a)|]dt \\
& +\tfrac{b-a}{4}\int_0^1 (1-t)[t^s|f'(b)| + (1-t)^s\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|]dt \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{s+2}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(a)|\right) \\
& +\tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}|f'(b)| + \tfrac{1}{s+2}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)| + 2(s+1)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + |f'(b)|\right). \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Ainsi, nous avons prouvé l'inégalité (2.9). Concernant l'inégalité (2.10), il suffit d'appliquer la s-convexité de $|f'|$ sur $[a,b]$ à l'inégalité (2.11), c'est-à-dire.

$$\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| \leq 2^{s-1}\tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1}. \qquad (2.12)$$

D'où, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)| + 2(s+1)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + |f'(b)|\right) \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)| + 2(s+1)2^{1-s}\tfrac{|f'(a)|+|f'(b)|}{s+1} + |f'(b)|\right) \\
=\ & \tfrac{(2^{2-s}+1)(b-a)}{4(s+1)(s+2)}\left(|f'(a)| + |f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée. ∎

Théorème 2.6 ([1]) *Soit $f : I \subset [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, telle que $f' \in L([a,b])$, où $a,b \in I$ avec $a < b$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens sur $[a,b]$, pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$ et $q \geq 1$, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left((2^{1-s}+1)\left|f'(a)\right|^q + 2^{1-s}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left((2^{1-s}+1)\left|f'(b)\right|^q + 2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\}.
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité du Lemme 2.1, puis l'inégalité des moyens d'ordre q, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right| dt + \int_0^1 (1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right| dt \right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\left(\int_0^1 tdt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 (1-t)dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4\times 2^{1-\frac{1}{q}}}\left(\left(\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 (1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \right). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Comme $|f'|^q$ est s-convexe, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 t\left|f'(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)a)\right|^q dt \\
\leq\ &\int_0^1 [t^{s+1}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + t\,(1-t)^s\,|f'(a)|^q\,dt \\
=\ &\tfrac{1}{2+s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\,|f'(a)|^q\,. \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (1-t)\left|f'(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt \\
\leq\ &\int_0^1 (1-t)\,t^s\,|f'(b)|^q + (1-t)^{s+1}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q dt \\
=\ &\tfrac{1}{2+s}\,|f'(b)|^q + \tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

En substituant (2.14) et (2.15) dans (2.13), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \\
\leq\ &\tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\Big\{\left((s+1)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + |f'(a)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(|f'(b)|^q + (s+1)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\Big\}. \qquad (2.16)
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|^q$ est s-convexe sur $[a,b]$, on a

$$\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \leq 2^{1-s}\tfrac{|f'(a)|^q+|f'(b)|^q}{s+1}. \qquad (2.17)$$

En combinant (2.16) et (2.17), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left| f(\tfrac{a+b}{2}) - \tfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)}\right)^{\frac{1}{q}} \left\{ \left((2^{1-s}+1)\left|f'(a)\right|^q + 2^{1-s}\left|f'(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left((2^{1-s}+1)\left|f'(b)\right|^q + 2^{1-s}\left|f'(a)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\},
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. ■

Chapitre 3

Inégalités intégrales pondérées de type point milieu

Ce chapitre traite des nouveaux résultats qui sont soumis pour une éventuelle publication, dont l'un est soumis et l'autre a été accepté pour publication.

Dans la première section nous étudierons les inégalités intégrales pondérées de type point milieu pour les fonctions dont les dérivées premières sont s-convexes au second sens, ces dernières sont basées sur une nouvelle identité intégrale donnée par le lemme ci-dessous.

Par contre la deuxième section sera consacrée aux inégalités intégrales de type point milieu pour les fonctions dont les dérivées premières sont soit bornées, lipchitziennes ou hölderiennes et sont publier dans la revue "Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems" (voir [12]).

3.1 Inégalités intégrales pondérées de type point milieu pour les fonctions s-convexes

Lemme 3.1 *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]a,b[$, avec $a < b$, et soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si $f, w \in L([a,b])$, alors*

$$\begin{aligned} & -\left(\int_a^b w(u)\,du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \int_a^b w(u) f(u)\,du \\ = \; & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1 p_1(t) f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt - \int_0^1 p_2(t) f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt\right), \end{aligned}$$

où

$$p_1(t) = \int_t^1 w\left(sb + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds, \tag{3.1}$$

et

$$p_2(t) = \int_t^1 w\left(sa + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds. \tag{3.2}$$

Preuve. Posons

$$I = \int_0^1 p_1(t) f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt - \int_0^1 p_2(t) f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right). \tag{3.3}$$

L'intégration par parties de la première intégrale donne

$$\begin{aligned} & \int_0^1 p_1(t) f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\ = \; & \int_0^1 \left(\int_t^1 w\left(sb + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds\right) f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\ = \; & \tfrac{2}{b-a}\left(\int_t^1 w\left(sb + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds\right) f\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\Bigg| \\ & + \tfrac{2}{b-a}\int_0^1 w\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) f\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \\ = \; & -\tfrac{4}{(b-a)^2}\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^b w(u)\,du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \tfrac{4}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b w(u) f(u). \end{aligned} \tag{3.4}$$

D'une façon analogue, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 p_2(t)\, f'\left(ta + (1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right) dt.\\
= \;& \tfrac{4}{(b-a)^2}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{4}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} w(u)\, f(u)\, du. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

En remplaçant (3.4) et (3.5) dans (3.3), puis en multipliant le résultat obtenu par $\frac{(b-a)^2}{4}$, on aboutit au résultat souhaité. ■

Théorème 3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]a,b[$ telle que $f' \in L([a,b])$ avec $0 \leq a < b$, et soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si $|f'|$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0,1]$, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w(u)\, f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\
\leq \;& \tfrac{(b-a)^2}{4(s+1)(s+2)}\, \|w\|_{[a,b],\infty} \left(|f'(a)| + 2(s+1)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + |f'(b)|\right).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1 et des propriétés de la valeur absolue, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w(u)\, f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\
\leq \;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1 |p_1(t)|\left|f'\left(tb + (1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right| dt\right.\\
&\left. + \int_0^1 |p_2(t)|\left|f'\left(ta + (1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right| dt\right). \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Puisque $|f'|$ est s-convexe, on a

$$\left|f'(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right| \leq t^s\,|f'(b)| + (1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|, \qquad (3.7)$$

et

$$\left|f'(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right| \leq t^{s}\left|f'\left(a\right)\right|+(1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|. \tag{3.8}$$

En substituant (3.1), (3.2), (3.7) et (3.8) dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w\left(u\right)f\left(u\right)du-\left(\int_a^b w\left(u\right)du\right)f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1\left|\int_t^1 w\left(sb+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right|\left(t^{s}\left|f'\left(b\right)\right|+(1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1\left|\int_t^1 w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right|\left(t^{s}\left|f'\left(a\right)\right|+(1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_{[a,b]\infty}\left(\int_0^1(1-t)\left(t^{s}\left|f'\left(b\right)\right|+(1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1(1-t)\left(t^{s}\left|f'\left(a\right)\right|+(1-t)^{s}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right)dt\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_{[a,b]\infty}\left(\left|f'\left(b\right)\right|\int_0^1(1-t)t^{s}dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1(1-t)^{s+1}dt\right. \\
&\left.+\left|f'\left(a\right)\right|\int_0^1(1-t)t^{s}dt+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\int_0^1(1-t)^{s+1}dt\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left\|w\right\|_{[a,b]\infty}\left(\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'\left(a\right)\right|+\tfrac{2}{s+2}\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+\tfrac{1}{(s+1)(s+2)}\left|f'\left(b\right)\right|\right),
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. ■

Remarque 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend* $w\left(u\right)=\frac{1}{b-a}$*, on obtient le Théorème 2.2 de* [1].

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend $s = 1$, on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b w(u)\, f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{24} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(|f'(a)| + 4\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + |f'(b)|\right).\end{aligned}$$

De plus, si on choisit $w(u) = \frac{1}{b-a}$, on obtient

$$\begin{aligned}&.\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\;& \tfrac{b-a}{24} \left(|f'(a)| + 4\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| + |f'(b)|\right).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Remarque 3.2 *En utilisant la convexité de $|f'|$, l'inégalité (3.9) sera réduite au Théorème 2.2 de* [10].

Théorème 3.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur (a, b) telle que $f' \in L([a, b])$ avec $0 \leq a < b$, et soit $w : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si $|f'|^q$ est s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in (0, 1]$ où $q > 1$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$, alors on a*

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b w(u)\, f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq\;& \tfrac{(b-a)^2}{4} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(\tfrac{|f'(b)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^q + \left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de

Hölder et de la s-convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w(u) f(u)\,du - \left(\int_a^b w(u)\,du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1 |p_1(t)| \left|f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right| dt + \int_0^1 |p_2(t)| \left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right| dt\right) \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\left(\int_0^1 |p_1(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 |p_2(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\left[\left(\int_0^1 \left|\int_0^1 w(sb+(1-s)\tfrac{a+b}{2})ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(\left|\int_0^1 w(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2})ds\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left[\left(\int_0^1 (1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left(\int_0^1 (1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\int_0^1 \left(t^s|f'(b)|^q + (1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(\int_0^1 \left(t^s|f'(a)|^q + (1-t)^s\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(|f'(b)|^q\int_0^1 t^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1 (1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left(|f'(a)|^q\int_0^1 t^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\int_0^1 (1-t)^s\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right] \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\tfrac{|f'(b)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\tfrac{|f'(a)|^q+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème 3.2, si on prend* $w(u)=\frac{1}{b-a}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(b)|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

Remarque 3.3 *En utilisant la convexité de* $|f'|^q$, *le Corollaire 3.2 sera réduit au Théorème 2.3 de* [1].

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.2, si on prend* $s=1$, *on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b w(u)\,f(u)\,du-\left(\int_a^b w(u)\,du\right)f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(b)|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

De plus, si on choisit $w(u)=\frac{1}{b-a}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \qquad (3.10)\\ \leq\ &\frac{b-a}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[\left(\frac{|f'(b)|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\frac{|f'(a)|^q+\left|f'(\frac{a+b}{2})\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

Remarque 3.4 *En utilisant la convexité de* $|f'|^q$, *l'inégalité (3.10) sera réduite au Théorème 2.3 de* [10].

Théorème 3.3 *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $]a,b[$ *telle que* $f'\in L([a,b])$ *avec* $0\leq a<b$, *et soit* $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$. *Si* $|f'|^q$ *est s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé* $s\in(0,1]$,

et $q \geq 1$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b w(u) f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du \right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{8} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} |f'(b)|^q + \tfrac{2}{s+2} \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} |f'(a)|^q + \tfrac{2}{s+2} \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyens de puissances et de la s-convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b w(u) f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du \right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left(\int_0^1 |p_1(t)| \left| f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) \right| dt + \int_0^1 |p_2(t)| \left| f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) \right| dt \right) \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left(\left(\int_0^1 |p_1(t)|\, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |p_1(t)| \left| f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 |p_2(t)|\, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |p_2(t)| \left| f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\left(\int_0^1 (1-t)\, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t) \left| f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \left(\int_0^1 (1-t)\, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t) \left| f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) \right|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right)
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{4\times 2^{1-\frac{1}{q}}} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\left(\int_0^1 (1-t) \left(t^s \left|f'(b)\right|^q + (1-t)^s \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 (1-t) \left(t^s \left|f'(a)\right|^q + (1-t)^s \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\right) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{4\times 2^{1-\frac{1}{q}}} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\left(\left|f'(b)\right|^q \int_0^1 (1-t)\, t^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \int_0^1 (1-t)^{1+s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\left|f'(a)\right|^q \int_0^1 (1-t)\, t^s dt + \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \int_0^1 (1-t)^{1+s} dt \right)^{\frac{1}{q}} \right)$$

$$= \frac{(b-a)^2}{8} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left|f'(b)\right|^q + \tfrac{2}{s+2} \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2}{s+2} \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.3, si on prend* $w(u) = \frac{1}{b-a}$*, on obtient*

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{8} \left(\left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left|f'(b)\right|^q + \tfrac{2}{s+2} \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\tfrac{2}{(s+1)(s+2)} \left|f'(a)\right|^q + \tfrac{2}{s+2} \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right).$$

Remarque 3.5 *En utilisant la convexité de* $|f'|^q$*, le Corollaire 3.4 sera réduit au Théorème 2.4 de* [1].

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.3, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w(u)\, f(u)\, du-\left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{8}\left\|w\right\|_{[a,b],\infty}\left(\left(\tfrac{|f'(b)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

De plus, si on choisit $w(u)=\frac{1}{b-a}$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\, du-f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{8}\left(\left(\tfrac{|f'(b)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\tfrac{|f'(a)|^q+2\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q}{3}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

3.2 Inégalités intégrales pondérées de type point milieu pour les fonctions bornées et hölderiennes

Notons que ses résultats ont fait l'objet de la publication [].

Théorème 3.4 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]a,b[$ telle que $f'\in L([a,b])$ avec $0\leq a<b$, et soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. S'il existe des constantes $\gamma<\Gamma$ telles que $-\infty<\gamma\leq f'(u)\leq\Gamma<+\infty$ est satisfaite pour tout $u\in[a,b]$, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w(u)\, f(u)\, du-\left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right. \\
&\left.-\tfrac{(\Gamma+\gamma)(b-a)^2}{8}\left(\int_0^1 p_1(t)\, dt-\int_0^1 p_2(t)\, dt\right)\right| \\
\leq\ & \tfrac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^2}{8}\left\|w\right\|_{[a,b],\infty}.
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b w(u) f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\
= &\ \tfrac{(b-a)^2}{4} \left(\int_0^1 p_1(t) f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt - \int_0^1 p_2(t) f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt\right) \\
= &\ \tfrac{(b-a)^2}{4} \int_0^1 p_1(t) \left(f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{\Gamma+\gamma}{2} + \tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right) dt \\
&- \tfrac{(b-a)^2}{4} \int_0^1 p_2(t) \left(f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a\right) - \tfrac{\Gamma+\gamma}{2} + \tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right) dt \\
= &\ \tfrac{(b-a)^2}{4} \int_0^1 p_1(t) \left(f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right) dt + \tfrac{(\Gamma+\gamma)(b-a)^2}{8} \int_0^1 p_1(t)\, dt \\
&- \tfrac{(b-a)^2}{4} \int_0^1 p_2(t) \left(f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a\right) - \tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right) dt - \tfrac{(\Gamma+\gamma)(b-a)^2}{8} \int_0^1 p_2(t)\, dt.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Ainsi, de (3.11) on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b w(u) f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{(\Gamma+\gamma)(b-a)^2}{8} \left(\int_0^1 p_1(t)\, dt - \int_0^1 p_2(t)\, dt\right) \\
= &\ \tfrac{(b-a)^2}{4} \int_0^1 p_1(t) \left(f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right) dt \\
&- \tfrac{(b-a)^2}{4} \int_0^1 p_2(t) \left(f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)a\right) - \tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right) dt.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En appliquant la valeur absolue aux deux côtés de (3.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b w(u)\,f(u)\,du-\left(\int_a^b w(u)\,du\right)f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right.\\
&\left.-\tfrac{(\Gamma+\gamma)(b-a)^2}{8}\left(\int_0^1 p_1(t)\,dt-\int_0^1 p_2(t)\,dt\right)\right|\\
\leq\ &\tfrac{(b-a)^2}{4}\int_0^1 |p_1(t)|\left|f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right|dt\\
&+\tfrac{(b-a)^2}{4}\int_0^1 |p_2(t)|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,a\right)-\tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right|dt. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Comme $\gamma \leq f'(u) \leq \Gamma$ pour tout $u \in [a,b]$, on a donc

$$-\tfrac{\Gamma-\gamma}{2} \leq f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\Gamma+\gamma}{2} \leq \tfrac{\Gamma-\gamma}{2}.$$

Ainsi, on a

$$\left|f'\left(tb+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right| \leq \tfrac{\Gamma-\gamma}{2}, \qquad (3.14)$$

et

$$\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{\Gamma+\gamma}{2}\right| \leq \tfrac{\Gamma-\gamma}{2}. \qquad (3.15)$$

En remplaçant (3.1), (3.2), (3.14) et (3.15) dans (3.13), et en utilisant la symétrie de w, on obtient

$$\begin{aligned}
|\Lambda(a,b,w,f)| &\leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^2}{8}\left(\int_0^1\left|\int_t^1 w\left(sb+(1-s)\frac{a+b}{2}\right)ds\right|dt\right. \\
&\quad \left.+\int_0^1\left|\int_t^1 w\left(sa+(1-s)\frac{a+b}{2}\right)ds\right|dt\right) \\
&\leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^2}{8}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1\left|\int_t^1 ds\right|dt+\int_0^1\left|\int_t^1 ds\right|dt\right) \\
&= \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1(1-t)\,dt\right) \\
&= \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)^2}{8}\|w\|_{[a,b],\infty},
\end{aligned}$$

qui est le résultat souhaité. ■

Corollaire 3.6 *Dans le Théorème 3.4, si on prend* $w(u)=\frac{1}{b-a}$*, on obtient*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(\Gamma-\gamma)(b-a)}{8}.$$

Théorème 3.5 *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $]a,b[$ *telle que* $f'\in L([a,b])$ *avec* $0\leq a<b$*, et soit* $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$*. Si* f' *satisfait la condition de Hölder pour des certains* $H>0$ *et* $r\in(0,1]$*, alors on a*

$$|F(a,b,w,f)| \leq \frac{2}{2+r}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2+r}H\|w\|_{[a,b],\infty},$$

où

$$\begin{aligned}
F(a,b,w,f) &= \int_a^b w(u)f(u)\,du-\left(\int_a^b w(u)\,du\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
&\quad -\frac{(b-a)^2}{4}\left(f'(b)\int_0^1 p_1(t)\,dt - f'(a)\int_0^1 p_2(t)\,dt\right). \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, on a

$$\begin{aligned}
&\int_a^b w(u)\, f(u)\, du - \left(\int_a^b w(u)\, du\right) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\{ \int_0^1 p_1(t)\, f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt - \int_0^1 p_2(t)\, f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) dt \right\} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\{ \int_0^1 p_1(t) \left(f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(b) + f'(b)\right) dt \right. \\
& \left. - \int_0^1 p_2(t) \left(f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(a) + f'(a)\right) dt \right\} \\
=\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\{ \int_0^1 p_1(t) \left(f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(b)\right) dt + f'(b) \int_0^1 p_1(t)\, dt \right. \\
& \left. - \int_0^1 p_2(t) \left(f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(a)\right) dt - f'(a) \int_0^1 p_2(t)\, dt \right\}. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

Donc, de (3.17) on a

$$\begin{aligned}
\digamma(a,b,w,f) =\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\{ \int_0^1 p_1(t) \left(f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(b)\right) dt \right. \\
& \left. - \int_0^1 p_2(t) \left(f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(a)\right) dt \right\}, \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

où $\digamma(a,b,w,f)$ est donnée par (3.16). En appliquant la valeur absolue aux deux côtés de (3.18), on obtient

$$\begin{aligned}
|\digamma(a,b,w,f)| \leq\ & \tfrac{(b-a)^2}{4} \left\{ \int_0^1 |p_1(t)| \left|f'\left(tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(b)\right| dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 |p_2(t)| \left|f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(a)\right| dt \right\}. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Comme f' satisfait à la condition de Hölder, de (3.19) on a

$$\begin{aligned}
|F(a,b,w,f)| &\leq \tfrac{(b-a)^2}{4} H \left(\int_0^1 |p_1(t)| \left| tb + (1-t)\tfrac{a+b}{2} - b \right|^r dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 |p_2(t)| \left| ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2} - a \right|^r dt \right) \\
&= \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r} H \left(\int_0^1 |p_1(t)| (1-t)^r dt + \int_0^1 |p_2(t)| (1-t)^r dt \right).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

En substituant (3.1) et (3.2) dans (3.20), et en utilisant la symétrie de w, on obtient

$$\begin{aligned}
|F(a,b,w,f)| &\leq \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r} H \left(\int_0^1 \left| \int_t^1 w\left(sb + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds \right| (1-t)^r dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left| \int_t^1 w\left(sa + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds \right| (1-t)^r dt \right) \\
&\leq \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r} H \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\int_0^1 \left| \int_t^1 ds \right| (1-t)^r dt + \int_0^1 \left| \int_t^1 ds \right| (1-t)^r dt \right) \\
&= \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r} H \|w\|_{[a,b],\infty} \left(2\int_0^1 (1-t)^{1+r} dt \right) \\
&= \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r} H \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\tfrac{2}{2+r}\right) \\
&= \tfrac{2}{2+r} \left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r} H \|w\|_{[a,b],\infty}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Corollaire 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème 3.5, et si f' satisfait à la condition de Lipschitz pour un certain $L > 0$, alors on a*

$$|F(a,b,w,f)| \leq \tfrac{(b-a)^3}{12} L \|w\|_{[a,b],\infty}.$$

Corollaire 3.8 *Dans le Théorème 3.5, si on prend $w(u) = \frac{1}{b-a}$, on obtient*

$$\left| \tfrac{1}{b-a} \int_a^b f(u)\, du - f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right| \leq \tfrac{(b-a)^{1+r}}{(2+r)2^{1+r}} H + \tfrac{b-a}{8} \left(f'(b) - f'(a)\right).$$

Corollaire 3.9 *Dans le Corollaire 3.7, si on prend* $w(u) = \frac{1}{b-a}$*, on obtient*

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{(b-a)^2}{12}L + \frac{b-a}{8}\left(f'(b) - f'(a)\right).$$

3.2.1 Applications impliquant les moyens arithmétiques et logarithmiques

Nous considérerons les moyens des nombres réels arbitraires a, b.

Le moyen arithmétique : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$.

Le moyen p-logarithmique : $L_p(a,b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a, b > 0, a \neq b$ et $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Proposition 3.1 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < a < b$*, alors on a*

$$\left|L_3^3(a,b) - A^3(a,b)\right| \leq \frac{3(b+a)(b-a)^2}{8}.$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.6, appliqué à la fonction $f(x) = x^3$ dont la première dérivée est $f'(x) = 3x^2$, satisfait l'estimation suivante : $3a^2 \leq f'(x) \leq 3b^2$ sur $[a, b]$. ■

Proposition 3.2 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que* $0 < a < b \leq 1$*, alors on a*

$$\left|L_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}(a,b) - A^{\frac{3}{2}}(a,b)\right| \leq \frac{(b-a)^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{2}} + \frac{3(b-a)}{16}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right).$$

Preuve. L'assertion découle du Corollaire 3.8, appliqué à la fonction $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ dont la première dérivée est $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ est une fonction $\frac{1}{2}$-hölderienne. ■

Conclusion

L'objectif principal du mémoire était d'étudier d'une part, certaines inégalités de type point milieu qui sont très sollicitées dans l'estimation de l'erreur d'intégration approchée, et d'autre part d'essayer d'établir de nouvelles estimations concernant ce type d'inégalité.

Dans la première partie, nous avons rappelé certains types de convexité classique ainsi que quelques classes de fonctions.

Dans la deuxième partie nous avons étudié des inégalités de type point milieu via certains types de convexités.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant ce type d'inégalités qui sont soumis pour une éventuelle publication.

Bibliographie

[1] M. W. Alomari, M. Darus and U. S. Kirmaci, Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions. Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) 31 (2011), no. 4, 1643–1652.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[3] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[4] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, Hadamard's inequality for s-convex functions in the first sense and applications. Demonstratio Math. 31 (1998), no. 3, 633–642.

[5] S. S. Dragomir, P. Cerone, J. Roumeliotis et S. Wang, Une version pondérée de l'inégalité d'Ostrowski pour les cartographies de type Hölder et les applications en analyse numérique. Taureau. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 42 (90) (1999), no. 4, 301-314.

[6] S. S. Dragomir, Ostrowski and trapezoid type inequalities for generalized Riemann-Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions with bounded derivatives. RGMIA Res. Rep. Collect., (2017). 20.

[7] L. Fejér, Über die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss. 24 (1906), 369–390 (in Hungarian).

[8] J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J. Math. Pures Appl., 58 (1893), 171-215.

[9] C. Hermite, Sur deux limites d'une intégrale définie, Mathesis 3 (1883), 82.

[10] U. Kirmaci, Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula. Appl. Math. Comput. 147 (2004), no. 1, 137–146.

[11] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.

[12] B. Meftah and **D. Bouchemel**, Note on the weighted midpoint type inequalities having the Hölder condition. J. Frac. Calc. Nonlinear Sys. 1 (2021), no. 2, 51-59. doi :10.48185/jfcns.v2i1.220

[13] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[14] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[15] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[16] C. E. M. Pearce and J. Pečarić, Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formulæ. Appl. Math. Lett. 13 (2000), no. 2, 51–55.

[17] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[18] K.-L. Tseng, S.-R. Hwang and K.-C. Hsu, Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions and their applications. Comput. Math. Appl. 64 (2012), no. 4, 651–660.

Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems
jfcns.sabapub.com
ISSN : 2709-9547

J Frac Calc & Nonlinear Sys
(2021)2(1) : 51-59
doi:10.48185/jfcns.v2i1.220

Note on the weighted midpoint type inequalities having the Hölder condition

B. MEFTAH[a] and D. BOUCHEMEL[b,*]

[a] Laboratoire des télécommunications, Faculté des Sciences et de la Technologie, University of 8 May 1945 Guelma, P.O. Box 401, 24000 Guelma, Algeria.
[b] Département des Mathématiques, Faculté des mathématiques, de l'informatique et des sciences de la matière, Université 8 mai 1945 Guelma, Algeria.

• *Received: 05.05.2021* • *Accepted: 27.06.2021* • *Published Online: 29.06.2021*

Abstract

In this note, some new weighted midpoint type inequalities for Hölder continuous functions are given.

Keywords: Weighted midpoint inequality, Hölder continuous functions, bounded functions, Lipschitzian functions.
2010 MSC: 26D10, 26D15, 26A51..

1. Introduction

Mathematical inequalities are a powerful and very important tool in many branches of mathematics such as the theory of differential and integral equations as well as the theory of approximations and numerical analysis. Due to their wide fields of application in various problems related to other sciences such as physics, biology and engineering in general. They have attracted the attention of many researchers who have given rise to several investigations and studies see for example [1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17], and references therein.

In [8], Kirmaci gave the following midpoint type inequalities

$$\left|\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\xi(\tau)\,d\tau-\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\right|\leqslant\frac{\sigma_2-\sigma_1}{8}\left(\left|\xi'(\sigma_1)\right|+\left|\xi'(\sigma_2)\right|\right),$$

and

$$\left|\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int\limits_{\sigma_1}^{\sigma_2}\xi(\tau)\,d\tau-\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma2}{2}\right)\right|$$

*Corresponding author: badrimeftah@yahoo.fr

$$\leqslant \frac{\sigma_2-\sigma_1}{16}\left(\frac{4}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\left|\xi'(\sigma_1)\right|^{\frac{p}{p-1}}+3\left|\xi'(\sigma_2)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(3\left|\xi'(\sigma_1)\right|^{\frac{p}{p-1}}+\left|\xi'(\sigma_2)\right|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

In this note, we investigate some new weighted midpoint inequalities for functions having Hölder condition and for bounded functions.

2. Main results

We start by demonstrating this equality, then we will discuss our main results.

Lemma 2.1. *Let $\lambda : [\sigma_1, \sigma_2] \to \mathbb{R}$ be symmetric with respect to $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, with $\sigma_1 < \sigma_2$. And let $\xi : [\sigma_1, \sigma_2] \to \mathbb{R}$ be a differentiable function on (σ_1, σ_2). If $\xi, \lambda \in L([\sigma_1, \sigma_2])$, then*

$$-\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,dz\right)\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)+\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz$$

$$=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left(\int_0^1 p_1(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon-\int_0^1 p_2(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon\right),$$

where

$$p_1(\upsilon)=\int_\upsilon^1\lambda\left(r\sigma_2+(1-r)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr \tag{2.1}$$

and

$$p_2(\upsilon)=\int_\upsilon^1\lambda\left(r\sigma_1+(1-r)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr. \tag{2.2}$$

Proof. Let

$$I=\int_0^1 p_1(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon-\int_0^1 p_2(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon. \tag{2.3}$$

Integrating by parts and changing the variables, we obtain

$$\int_0^1 p_1(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon$$

$$=\int_0^1\left(\int_\upsilon^1\lambda\left(r\sigma_2+(1-r)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right)\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon$$

$$=\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\left(\int_\upsilon^1\lambda\left(r\sigma_2+(1-r)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right)\xi\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\Bigg|_{\upsilon=0}^{\upsilon=1}$$

$$+\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\int_0^1 \lambda\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\xi\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon$$

$$=-\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\left(\int_0^1 \lambda\left(r\sigma_2+(1-r)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right)\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)$$

$$+\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\int_0^1 \lambda\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\xi\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon$$

$$=-\left(\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\left(\int_{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}\lambda(z)\,dz\right)\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)+\left(\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\int_{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}^{\sigma_2}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz. \tag{2.4}$$

Similarly, we have

$$\int_0^1 p_2(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon$$

$$=\left(\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\left(\int_{\sigma_1}^{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}\lambda(z)\,dz\right)\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\left(\frac{2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\int_{\sigma_1}^{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz. \tag{2.5}$$

Substituting (2.4) and (2.5) in (2.3), using the symmetry of λ, and then multiplying the result by $\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}$, we get the desired result. □

Theorem 2.2. *Let $\lambda : [\sigma_1, \sigma_2] \to \mathbb{R}$ be symmetric with respect to $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, with $\sigma_1 < \sigma_2$. And let $\xi : [\sigma_1, \sigma_2] \to \mathbb{R}$ be a differentiable function on (σ_1, σ_2) such that $\xi' \in L([\sigma_1, \sigma_2])$. If there exist constants $\varphi < \Phi$ such that $-\infty < \varphi \leqslant \xi'(u) \leqslant \Phi < +\infty$ for all $z \in [\sigma_1, \sigma_2]$, then we have*

$$|\Lambda(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)| \leqslant \frac{(\Phi-\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8}\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty},$$

where

$$\Lambda(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz-\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,dz\right)\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)$$
$$-\frac{(\Phi+\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8}\left(\int_0^1 p_1(\upsilon)\,d\upsilon-\int_0^1 p_2(\upsilon)\,d\upsilon\right). \tag{2.6}$$

Proof. From Lemma 2.1, we have

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz-\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,dz\right)\xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)$$

$$=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left(\int_0^1 p_1(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon\right.$$
$$\left.-\int_0^1 p_2(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)d\upsilon\right)$$
$$=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left\{\int_0^1 p_1(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}+\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right)d\upsilon\right.$$
$$\left.-\int_0^1 p_2(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}+\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right)d\upsilon\right\}$$
$$=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left\{\int_0^1 p_1(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right)d\upsilon+\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\int_0^1 p_1(\upsilon)\,d\upsilon\right.$$
$$\left.-\int_0^1 p_2(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right)d\upsilon-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\int_0^1 p_2(\upsilon)\,d\upsilon\right\}. \tag{2.7}$$

Thus, (2.7) gives

$$\Lambda(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)=\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left\{\int_0^1 p_1(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right)d\upsilon\right.$$
$$\left.-\int_0^1 p_2(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right)d\upsilon\right\}, \tag{2.8}$$

where $\Lambda(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)$ is defined in (2.6). By applying the absolute value in both sides of (2.8), we get

$$|\Lambda(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)|\leqslant\frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left\{\int_0^1 |p_1(\upsilon)|\left|\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right|d\upsilon\right.$$
$$\left.+\int_0^1 |p_2(\upsilon)|\left|\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right|d\upsilon\right\}. \tag{2.9}$$

Since $\varphi\leqslant\xi'(z)\leqslant\Phi$ for all $z\in[\sigma_1,\sigma_2]$, we have

$$-\frac{\Phi-\varphi}{2}\leqslant\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\frac{(\Phi-\varphi)}{2}\leqslant\frac{\Phi-\varphi}{2},$$

which implies

$$\left|\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\frac{(\Phi-\varphi)}{2}\right|\leqslant\frac{\Phi-\varphi}{2} \tag{2.10}$$

and

$$\left|\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\tfrac{(\Phi-\varphi)}{2}\right|\leqslant\tfrac{\Phi-\varphi}{2}. \tag{2.11}$$

Using (2.1), (2.2), (2.10) and (2.11) in (2.9), and the symmetry of w, we get

$$\begin{aligned}|\Lambda(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)| &\leqslant \tfrac{(\Phi-\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8}\left(\int_0^1\left|\int_\upsilon^1\lambda\left(r\sigma_2+(1-r)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right|d\upsilon\right.\\ &\quad\left.+\int_0^1\left|\int_\upsilon^1\lambda\left(r\sigma_1+(1-r)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right|d\upsilon\right)\\ &\leqslant \tfrac{(\Phi-\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8}\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty}\left(\int_0^1\left|\int_\upsilon^1 dr\right|d\upsilon+\int_0^1\left|\int_\upsilon^1 dr\right|d\upsilon\right)\\ &= \tfrac{(\Phi-\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty}\left(\int_0^1(1-\upsilon)\,d\upsilon\right)\\ &= \tfrac{(\Phi-\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)^2}{8}\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty},\end{aligned}$$

which is desired result. □

Corollary 2.3. *Taking* $\lambda(z)=\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}$, *Theorem 1 becomes*

$$\left|\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz-\xi\left(\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\right|\leqslant\tfrac{(\Phi-\varphi)(\sigma_2-\sigma_1)}{8}.$$

Our next result involve the Hölder continuous functions. We recall that a function $\xi:[\sigma_1,\sigma_2]\to\mathbb{R}$ is of r-H-Hölder, if

$$|\xi(\theta_1)-\xi(\theta_2)|\leqslant H\,|\theta_1-\theta_2|^r$$

holds for all $\theta_1,\theta_2\in(\sigma_1,\sigma_2)$, where $H>0$ and $r\in(0,1]$, (see [5]).

Theorem 2.4. *Let* $\lambda:[\sigma_1,\sigma_2]\to\mathbb{R}$ *be symmetric with respect to* $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, *with* $\sigma_1<\sigma_2$. *And let* $\xi:[\sigma_1,\sigma_2]\to\mathbb{R}$ *be a differentiable function on* (σ_1,σ_2) *such that* $\xi'\in L([\sigma_1,\sigma_2])$. *If* ξ' *satisfies a Hölder condition for some* $H>0$ *and* $r\in(0,1]$, *then we have*

$$|F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)|\leqslant\tfrac{2}{2+r}\left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r}H\,\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty},$$

where

$$\begin{aligned}F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)&=\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,\xi(z)\,dz-\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\lambda(z)\,dz\right)\xi\left(\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\\ &\quad-\tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4}\left(\xi'(\sigma_2)\int_0^1 p_1(\upsilon)\,d\upsilon-\xi'(\sigma_1)\int_0^1 p_2(\upsilon)\,d\upsilon\right).\end{aligned} \tag{2.12}$$

Proof. Using Lemma 2.1, we deduce

$$\begin{aligned}
&\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \lambda(z)\,\xi(z)\,dz - \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \lambda(z)\,dz\right) \xi\left(\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right) \\
&= \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4} \left(\int_0^1 p_1(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right) d\upsilon \right.\\
&\quad \left. - \int_0^1 p_2(\upsilon)\,\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right) d\upsilon\right) \\
&= \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4} \left(\int_0^1 p_1(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_2)+\xi'(\sigma_2)\right) d\upsilon \right.\\
&\quad \left. - \int_0^1 p_2(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_1)+\xi'(\sigma_1)\right) d\upsilon\right\} \\
&= \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4} \left\{\int_0^1 p_1(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_2)\right) d\upsilon + \xi'(\sigma_2)\int_0^1 p_1(\upsilon)\,d\upsilon \right.\\
&\quad \left. - \int_0^1 p_2(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_1)\right) d\upsilon - \xi'(\sigma_1)\int_0^1 p_2(\upsilon)\,d\upsilon\right\}. \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

So, from (2.13) we get

$$\begin{aligned}
F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi) = \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4} &\left\{\int_0^1 p_1(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_2)\right) d\upsilon \right.\\
&\left. - \int_0^1 p_2(\upsilon)\left(\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_1)\right) d\upsilon\right\}, \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

where $F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)$ is defined in (2.12). By applying the absolute value in both sides of (2.14), we get

$$\begin{aligned}
|F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)| \leqslant \tfrac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4} &\left\{\int_0^1 |p_1(\upsilon)|\left|\xi'\left(\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_2)\right| d\upsilon \right.\\
&\left. + \int_0^1 |p_2(\upsilon)|\left|\xi'\left(\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)-\xi'(\sigma_1)\right| d\upsilon\right\}. \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Since $\xi'$is a Hölder continuous function, from (2.15), we get

$$
\begin{aligned}
|F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)| \leqslant & \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{4} H\left(\int_0^1 |p_1(\upsilon)|\left|\upsilon\sigma_2+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_2\right|^r d\upsilon\right.\\
&\left.+\int_0^1 |p_2(\upsilon)|\left|\upsilon\sigma_1+(1-\upsilon)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_1\right| d\upsilon\right)\\
&=\left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r} H\left(\int_0^1 |p_1(\upsilon)|(1-\upsilon)^r d\upsilon+\int_0^1 |p_2(\upsilon)|(1-\upsilon)^r d\upsilon\right).
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

Substituting (2.1) and (2.2) in (2.16), and using the symmetry of λ, we obtain

$$
\begin{aligned}
|F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)| \leqslant & \left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r} H\left(\int_0^1\left|\int_\upsilon^1 \lambda\left(r\sigma_2+(1-r)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right|(1-\upsilon)^r d\upsilon\right.\\
&\left.+\int_0^1\left|\int_\upsilon^1 \lambda\left(r\sigma_1+(1-r)\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)dr\right|(1-\upsilon)^r d\upsilon\right)\\
&\leqslant \left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r} H\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty}\left(\int_0^1\left|\int_\upsilon^1 dr\right|(1-\upsilon)^r d\upsilon+\int_0^1\left|\int_\upsilon^1 dr\right|(1-\upsilon)^r d\upsilon\right)\\
&=\left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r} H\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty}\left(2\int_0^1 (1-\upsilon)^{1+r} d\upsilon\right)\\
&=\left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r} H\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty}\left(\tfrac{2}{2+r}\right)\\
&=\tfrac{2}{2+r}\left(\tfrac{\sigma_2-\sigma_1}{2}\right)^{2+r} H\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty},
\end{aligned}
$$

which is desired result. □

Corollary 2.5. *Under the assumptions of Theorem 2.4, and if ξ' satisfies the Lipschitz condition for some $L>0$, we obtain*

$$
|F(\sigma_1,\sigma_2,\lambda,\xi)| \leqslant \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^3}{12} L\|\lambda\|_{[\sigma_1,\sigma_2],\infty},
$$

Corollary 2.6. *Takeing $\lambda(z)=\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}$, Theorem 2.4 becomes*

$$
\left|\frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\xi(z)\,dz-\xi\left(\tfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\right| \leqslant \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^{1+r}}{(2+r)2^{1+r}} H+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{8}\left(\xi'(\sigma_2)-\xi'(\sigma_1)\right).
$$

Corollary 2.7. *Takeing* $\lambda(z) = \frac{1}{\sigma_2-\sigma_1}$, *Corollary 2.5 becomes*

$$\left| \frac{1}{\sigma_2-\sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \xi(z)\, dz - \xi\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right) \right| \leqslant \frac{(\sigma_2-\sigma_1)^2}{12} L + \frac{\sigma_2-\sigma_1}{8} \left(\xi'(\sigma_2) - \xi'(\sigma_1)\right).$$

3. Applications involving the arithmetic and logarithmic means

We recall that for arbitrary real numbers z, k.
The Arithmetic mean: $A(z,k) = \frac{z+k}{2}$.
The p-Logarithmic mean: $L_p(z,k) = \left(\frac{k^{p+1}-z^{p+1}}{(p+1)(k-z)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $z, k > 0, z \neq k$ and $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Proposition 3.1. *Let* $z, k \in \mathbb{R}$ *with* $0 < z < k$, *then we have*

$$\left| L_3^3(z,k) - A^3(z,k) \right| \leqslant \frac{3(k+z)(k-z)^2}{8}.$$

Proof. The assertion follows from Corollary 2.3, applied to the function $\xi(b) = b^3$ which $\xi'(b) = 3b^2$ and $3z^2 \leqslant \xi'(b) \leqslant 3k^2$ on $[z,k]$. □

Proposition 3.2. *Let* $z, k \in \mathbb{R}$ *with* $0 < z < k \leqslant 1$, *then we have*

$$\left| L_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}(z,k) - A^{\frac{3}{2}}(z,k) \right| \leqslant \frac{(k-z)^{\frac{3}{2}}}{5\sqrt{2}} + \frac{3(k-z)}{16} \left(\sqrt{k} - \sqrt{z}\right).$$

Proof. The assertion follows from Corollary 2.6, applied to the function $\xi(b) = b^{\frac{3}{2}}$ which $\xi'(b) = \frac{3}{2} b^{\frac{1}{2}}$ is $\frac{1}{2}$-Hölder continuous function. □

References

[1] Alomari MW, Darus M and Kirmaci US (2011). *Some inequalities of Hermite-Hadamard type for s-convex functions*. Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **31**(4): 1643–1652.https://doi.org/10.1016/S0252-9602(11)60350-0

[2] Budak H and Pehlivan E (2020). *Weighted Ostrowski, trapezoid and midpoint type inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals*. AIMS Mathematics, **5**(3): 1960–1984. https://doi.org/10.3934/math.2020131

[3] Dedić L, Matić M and Pečarić J (2005). *On Euler midpoint formulae*. ANZIAM J. **46** (3): 417–438.https://doi.org/10.1017/S144618110000835X

[4] Dragomir SS and Agarwal RP (1998). *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula*. Appl. Math. Lett. **11** (5): 91–95.https://doi.org/10.1016/S0893-9659(98)00086-X

[5] Dragomir SS, Cerone P, Roumeliotis J and Wang S (1999). *A weighted version of Ostrowski inequality for mappings of Hölder type and applications in numerical analysis*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) **42**(4) : 301–314.https://www.jstor.org/stable/43678728?seq=1

[6] Hua J, Xi BY and Qi F (2014). *Inequalities of Hermite-Hadamard type involving an s-convex function with applications*. Appl. Math. Comput. **246**: 752–760.https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.08.042

[7] Kashuri A and Liko R (2019). *Some new Hermite-Hadamard type inequalities and their applications*. Studia Sci. Math. Hungar. **56** (1): 103–142.https://doi.org/10.1556/012.2019.56.1.1418

[8] Kirmaci US (2004). *Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula*. Appl. Math. Comput. **147** (1): 137–146.

[9] Latif MA (2015). *Inequalities of Hermite-Hadamard type for functions whose derivatives in absolute value are convex with applications*. Arab J. Math. Sci. **21** (1): 84–97.https://doi.org/10.1016/S0096-3003(02)00657-4

[10] Luo CY, Du CS, Kunt M and Zhang Y (2018). *Certain new bounds considering the weighted Simpson-like type inequality and applications*. J. Inequal. Appl. **2018**(332): 20. https://doi.org/10.1186/s13660-018-1924-3

[11] Meftah B (2018). *Some Ostrowski's inequalities for functions whose* n^{th} *derivatives are* s*-convex*. An. Univ. Oradea Fasc. Mat. **25** (2): 185–212.

[12] Meftah B and Souahi A (2019). *Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for functions whose derivatives are extended* s-(α, m)*-preinvex*. Int. J. Optim. Control. Theor. Appl. IJOCTA **9** (1): 73–81.https://doi.org/10.11121/ijocta.01.2019.00574

[13] Meftah B. (2020). *New integral inequalities Through the* φ*-preinvexity*. Iran. J. Math. Sci. Inform. **15** (1): 79-83.

[14] Minculete N and Mitroi FC (2012). *Fejér-type inequalities*. Aust. J. Math. Anal. Appl. **9** (1): Art. 12, 8. https://doi.org/10.1186/1029-242x-2012-226

[15] Delavar MR, Dragomir SS and De La Sen M (2019). *Hermite-Hadamard's trapezoid and mid-point type inequalities on a disk*. J. Inequal. Appl. **2019**(105): 8. https://doi.org/10.1186/s13660-019-2061-3

[16] M. Z. Sarikaya MZ (2012). *On new Hermite Hadamard Fejér type integral inequalities*. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **57** (3): 377–386.

[17] Set E, İşcan İ, Sarikaya MZ and Ö zdemir ME (2015). *On new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type for convex functions via fractional integrals*. Appl. Math. Comput. **259**: 875–881.https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.03.030