République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par : Bouressace Djihane

Intitulé

Quelque inégalités de type Čebyšev fractionnaires et de plusieurs variables

Dirigé par : Dr. Aissaoui Fatima

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.Bouhadjar Slimane**	**M.C.B Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.Aissaoui Fatima**	**M.C.A Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr. Rezgui Nassima**	**M.C.B Univ-Guelma**

Session Juillet 2021

Table des matières

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je saisie l'occasion offerte par l'achèvement de ma Thèse de master pour remercier vivement en premier lieu, Madame **Aissaoui Fatima**, *Maître de conférences à l'Université de Guelma d'avoir dirigé ce travail avec beaucoup d'attention, de patience et d'intérêt, et qui m'a fait bénéficier durant ces mois de ses conseils et de sa très grande compétence.*

*Mes sincères remerciements et ma gratitude vont aussi à Monsieur **Bouhadjar slimane**, Maître de conférences à l'Université de Guelma pour avoir accepté de présider le jury de soutenance. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.*

*Mes meilleurs remerciements vont aussi à Madame **Nassima Rezgui**, Maître de conférences à l'Université de Guelma pour avoir acceptée de faire partie du jury. Qu'elle veuille bien trouver ici l'expression de ma haute gratitude.*

DÉDICACE

Du profond de mon coeur, je dédié ce travail à tous ceux qui me sont chers,

Á MA CHÉRE MÈRE

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considèration pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien étre.

Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices. puisse dieu, le très haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie.

Á LA MÉMOIRE DE MON PÈRE

ce travail est dédié a mon pére, décédé trop tot, qui m'a toujours poussé et motivé dans mes études.

j'espére que, du monde que est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconaissance de la part de ta fille qui a toujours priè pour le salut de son âme. Puisse Dieu, le tout puissant, l'avoir en sa sainte miséricorde !

Á MÉS CHÉRES SOEURES

Sara, Ilham et Belkis

Je vous souhaite une belle vie plein d'amour et de santé.

Á MÉS CHARMANTES AMIS

Hanane, Khawla, Malek, Nedjla, Hanna et Djihen

A Tous ce bon monde et tous ceux que j'aime du font de mon coeur, je dis grand merci

De la part de Djihane.

.

ملخص

في هذه المذكرة سنقوم بدراسة بعض المتراجحات التكاملية من نوع شيبيشاف

المحور الاول سنقوم باعطاء بعض التعاريف المهمة.

المحور الثاني سنقوم بسرد بعض المعادلات من نوع مونتوقمري وتتبع بعض المتراجحات من نوع شيبيشاف

اما المحور الاخير ينقسم الى قسمين :

اولا سنقوم بدراسة هذه المعادلات والمتراجحات بالنسبة للتكاملات الكسرية

وثانيا سنقوم بسرد نظريات حول المعادلات والمتراجحات بالنسبة للدوال ذات عدة متغيرات.

الكلمات المفتاحية :

معادلة مونتوقمري، متراجحات شيبيشاف ، تكاملات كسرية.

Résumé

Le mémoire traite les inégalités intégrals plus précisément celle de Čebyšev. Le premier chapitre est ensacré aux quelques préliminaires. Le second chapitre traite les identites de Montgomery avec differents type de noyaux suivi des quelques inégalités intégrals de type Čebyšev. Enfin le dernier chapitre traite les identités et les inégalités fractionelles ainsi que les identites et les inégalités intégrals de type Čebyšev pour les fonction a deux variables.

Mots clés : Les inégalités de type Čebyšev, extension de Pečarić, Identité de Montegomery, Intégrale Fractionelle, Les inégalités Fractionelle de type Čebyšev.

Abstract

The dissertion deals with the integral inequalites more precisely that of Čebyšev. The first chapter deals with some preliminaries. The second chapteris devoted to some Montgomery identities with different types of kernels as well as some integral inequalities. We conclude this work with fractional inequalites and double integrals Čebyšev inequalities for two variables function.

Keywords and phrases : Čebyšev type inequalities, Pečarić's extension, Montegomery identity, Fractional integrals.

0.1 Introduction

La théorie des inégalités constitue un important sujet de recherche où plusieurs situations mathématiques font appels à ces inégalités. En revanche les inégalités intégrales ont connues un grand développement dans plusieurs domaines telles que l'analyse réelle, l'analyse numérique et les équations différentielles ect. Elles représentent un outil puissant et indispensable.

L'intérêt porté à l'étude des inégalités intégrales n'a cessé de croître à une abondante littérature a été développée sur ce sujet et pour d'amples détails voir les travaux de Pachpatte [8] , Burton, Pečarić [9], S.S Dragomir [12] dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités.

Il convient de rappeler qu'en théorie de l'intégration la relation entre l'intégrale du produit de deux fonctions et le produit de leurs intégrales est l'un des problèmes fascinants de l'analyse, parmi les inégalités intégrales bien connues nous citons à titre d'exemple celles de Grüss, et Čebyšev [13].

Dans notre mémoire on s'intéresse aux inégalités intégrales de type Čebyšev qui ont été appliquées presque à tous les types de fonctions et applicables dans plusieurs domaines tels que dans l'intégration numérique et en analyse non linéaire et dans l'étude de la stabilité.

L'objectif de cette mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Čebyšev fractionnaires et des inégalités intégrales de type Čebyšev pour les fonctions à plusieurs variables.

Cette mémoire est structuré comme suit :

Le chapitre 1 est dédié à un rappel l'intégration fractionnaire [11] en présentent quelques notions préliminaires, qui seront par la suite utilisées dans les démonstrations, et quelques définitions de l'analyse fonctionnelles.

Dans le deuxième chapitre, nous traiterons quelques résultats connus dans la littérature concernant les inégalités intégrales de type Čebyšev.

Tandis que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Čebyšev fractionnaires [7] et des inégalités intégrales de type Čebyšev pour les fonctions à plusieurs variables [5].

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre se compose de deux sections :

La première section est consacrée à un rappel de quelques notions mathématiques sur les espaces et les normes de L^p et quelques définitions de l'analyse fonctionnelles et de la théorie de probabilité avec quelques exemples.

Dans la deuxième section on commencera par présenter des notions sur le calcul fractionnaire, où nous rappelons quelques définitions utiles pour ce calcul qui seront par la suite utilisées dans les démonstrations.

1.1 Généralités sur la théorie fonctionnelle

Espace des fonctions intégrables :

Définition 1.1 *Soit $p \in [1, +\infty)$. On définit l'espace L^p :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ } \textit{mesurable et} \quad \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \quad \right\},$$

pour $f \in L^p(\Omega)$, *on note*

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Définition 1.2 *On appel espace* $L^\infty(\Omega)$ *l'espace des fonction essentiellement bornées sur* Ω :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ } \textit{mésurable et } \exists \, c \geq 0, \ |f(x)| \leq c \ \ \textit{p.p sur } \Omega \},$$

Pour $f \in L^\infty(\Omega)$, *on note*

$$\|f\|_\infty = ess \sup_{t \in \Omega} | f(t) | .$$

Théorème de Fubini

En énonce à présent un des résultats utiles dans le calcul des intégrales doubles c'est celui de Fubini.

Soient $\varnothing_1$ et $\varnothing_2$ deux fonctions à valeurs réelles, définies et continues sur un même intervalle $[a, b]$ telles que :

$$\forall \ t \in [a, b] : \qquad \varnothing_1(t) \leq \varnothing_2(t).$$

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ a \leq x \leq b \quad \varnothing_1(x) \leq y \leq \varnothing_2(x)\}$, Alors Ω est un fermé régulier et pour toute fonction f intégrable sur Ω on a :

$$\int_\Omega f(x, y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varnothing_{1(x)}}^{\varnothing_{2(x)}} f(x, y) \, dy \right) dx,$$

cas particulier Si $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, dans ce cas :

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Fonction de densité de probabilité

Définition 1.3 *Une fonction f définie sur $[a, b]$ est dite une fonction de densité de probabilité si elle est continue, positive et :*

$$\int_a^b f(x)dx = 1.$$

Exemple 1.1 *La fonction $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction de densité de probabilité.*

1.2 Généralités sur le calcul fractionnaire

Dans cette section nous rappelons quelques définitions de base sur le calcul fractionnaire [11].

Les fonctions Gamma et Béta

La fonction Gamma

Définition 1.4 *Pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, on pose*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt. \tag{1.1}$$

Cette fonction est appelée "fonction d'Euler".

Quelques proprietés de la fonction Gamma :

Corollaire 1.1 *La fonction $\Gamma(\alpha)$ vérifier la relation de récurrence suivante :*

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha).$$

La fonction gamma d'Euler généralise le factoriel

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base de calcul fractionnaire la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle très important spécialement dans une certaines combinaisons avec la fonction Gamma.

Définition 1.5 *Soient p, $q \in \mathbb{C}$ tels que* $\mathrm{Re}(p) > 0$ *et $Re(q) > 0$, on définit la fonction Bêta par :*

$$\beta(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{1.2}$$

La relation entre la fonction Gamma et Bêta

Proposition 1.1 *La fonction bêta est relié aux fonctions Gamma par la relation suivante :*

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p).\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad Re(p) > 0 \quad et \quad Re(q) > 0. \tag{1.3}$$

Proposition 1.2 *La fonction bêta possède la forme intégrale suivante :*

$$\beta(p, q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}d\ \theta, \tag{1.4}$$

cas particulier : $\beta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$ *et par suite* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Remarque 1.1 *Par le changement de variable $y = 1 - t$, on remarque que*

$$\beta(p, q) = \beta(q, p).$$

Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.6 *On appelle intégrale fractionnaire de f d'ordre α ($\alpha > 0$), on la note ${J_a}^\alpha$, la fonction définie par :*

$$J_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \tag{1.5}$$

où $\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma.

Théorème 1.1 *Si* $f \in L^1([a,b])$ *et* $\alpha > 0$, *alors* $(J_a^\alpha f)(x)$ *existe pour tout* $x \in]a,b[$ *et on a*

$$J_a^\alpha f \in L^1([a,b]).$$

Quelques propriétés de l'intégrale fractionnaire :

Proposition 1.3 *Pour toute fonction* $f \in L^1([a,b])$, *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *on a :*

$$J_a^\alpha (J_a^\beta f) = J_a^\beta (J_a^\alpha f) = J_a^{\alpha+\beta} f,$$

de plus

$$J_a^1 f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x (x-t)^{1-1} f(t)dt \quad = \int_a^x f(t)dt \ .$$

Preuve. D'après la formule (1.5) , on a :

$$[J_a^\alpha (J_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} (J_a^\beta f)(s)ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\beta-1} \ f(t)dtds,$$

le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$[J_a^\alpha (J_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \ f(t) \ [\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1} ds]dt,$$

en effectuant le changement de variable $s = t + (x-t)y, \ 0 \leq y \ \leq 1$ on obtient :

$$[J_a^\alpha (J_a^\beta f)](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \ f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dydt.$$

Enfin, d'après la relation (1.2) et (1.3), on obtient :

$$[J_a^\alpha (J_a^\beta f)](x) = \frac{\beta(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \ f(t)(x-t)^{\alpha+\beta-1} dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha+\beta-1} f(t)dt$$
$$= (J_a^{\alpha+\beta} f)(x).$$

■

Exemple 1.2 *Considérons la fonction $f(x) = (x-a)^m$ pour $\alpha > 0$ et $m > -1$ alors :*

$$J_a^\alpha (x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(x-a)^{\alpha+m},$$

en effet :

$$J_a^\alpha (x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^m dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = a + (x-a)\tau$, $0 \leq \tau \leq 1$ alors :

$$J_a^\alpha (x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a-(x-a)\tau)^{\alpha-1}(a+(x-a)\tau-a)^m (x-a)d\tau$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (x-a)^{\alpha-1}(1-\tau)^{\alpha-1}(x-a)^m \tau^m (x-a)d\tau$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^m d\tau$$
$$J_a^\alpha (x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^m d\tau.$$

En tenant compte de la fonction Bêta et la relation (1.3) on arrive à :

$$J_a^\alpha (x-a)^m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(x-a)^{\alpha+m}\beta(m+1,\alpha)$$

$$J_a^\alpha (x-a)^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}(x-a)^{\alpha+m}.$$

Chapitre 2

Généralités sur les inégalités intégrales

L'identité de Montgomery est une technique trés efficace dans l'établissement de nouvelles généralisations des inégalités intégrales de type Čebyšev. Dans la section suivante on évoque quelques extensions de cette identité, puis une généralisation de quelques inégalités intégrales [9] .

Lemme 2.1 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*, une fonction dérivable sur* $[a, b]$*. On sppose que* $f'(t)$ *est intégrable sur* $[a, b]$*. Alors l'identité de Montgomery*

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b P(x,t)\, f'(t)\, dt, \tag{2.1}$$

est satisfaite où le noyau de Peano défini par :

$$P(x,t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a}, a \leq t \leq x, \\ \frac{t-b}{b-a}, x < t \leq b. \end{cases} \tag{2.2}$$

Une extension de cette identité a été introduite par Pečarić [9]. Cette extension est donnée par le Lemme suivant :

Lemme 2.2 *Sous les même hypothèses du Lemme* (2.1) *et si* $w : [a, b] \to [0, +\infty[$ *est une fonction de densité de probabilité, alors on a une généralisation de l'identité de Montgomery*

$$f(x) = \int_a^b w(t)f(t)\,dt + \int_a^b P_w(x,t)\,f'(t)\,dt, \tag{2.3}$$

où le noyau de Peano $P_w(x,t)$ *est défini par :*

$$P_w(x,t) = \begin{cases} W(t) & a \le t \le x, \\ W(t) - 1 & x \le t \le b. \end{cases} \tag{2.4}$$

En 2007 Boukerrioua et Guezane Lakoud dans leur travail [3], ont établit une nouvelle généralisation de l'identité de Montgomery donnée ci-dessous

Lemme 2.3 *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable de dérivée* f' *intégrale et soit* $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *une fonction dérivable sur* $[0, 1]$ *avec* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) \neq 0$ *et* φ' *est intégrable sur* $[0, 1]$, *alors une généralisation de l'identité de Montgomery est donnée par :*

$$f(x) = \frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b w(t)\,\varphi'\left(\int_a^t w(s)\,ds\right) f(t)\,dt + \frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b P_{w,\varphi}(x,t)\,f'(t)dt, \tag{2.5}$$

où $P_{w,\varphi}$ *est la généralisation du noyau défini ci-dessous*

$$P_{w,\varphi}(x,t) = \begin{cases} \varphi(W(t)), & a \le t \le x, \\ \varphi(W(t)) - \varphi(1), & x < t \le b, \end{cases} \tag{2.6}$$

avec

$$W(t) = \int_a^t w(s)\,ds.$$

Les inégalités intégrales de type Čebyšev jouent un rôle important dans toutes les branches de mathématiques, ces inégalités s'appliquent aux fonctions dérivables, absolument continues, lipschitzienne, monotones et aux fonctions à variations bornées.

2.1 Quelques inégalités intégrales de type Čebyšev

Le lemme suivant présente une première version remarquable de l'inégalités intégrale de Čebyšev la plus classique [14] .

Lemme 2.4 *Soient $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions absolument continues, si de plus f' et $g' \in L_\infty [a,b]$, alors*

$$|T(f,g)| \leq \frac{1}{12}(b-a)^2 \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty , \tag{2.7}$$

ou

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx\right), \tag{2.8}$$

et $\|\|_\infty$ désigne la norme dans $L_\infty [a,b]$ définie par $\|f\|_\infty = ess \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$.

2.2 Inégalité de type Čebyšev en utilisant l'extension de Pečarić

On 2014 Guezane-Lakoud et Aissaoui [7] ont établit la première inégalité intégrales de type de Čebyšev en utilisant l'identité de Montgomrey (2.1).

Corollaire 2.1 *Soient $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $[a,b]$, f'et g' sont intégrables. Alors :*

$$| T(f,g) | \leq \frac{7}{60}(b-a)^2 \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty , \tag{2.9}$$

où $T\ (f,g)$ est défini par (2.8) .

Preuve. *Définissons $F, G, \tilde{F}$ et $\breve{G}$ suivante*

$$F = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \ , \quad \tilde{F} = \int_a^b P(x,t)f'(t)dt,$$

$$G = g(x) - \frac{1}{b-a}\int_b^a g(t)dt \ , \tilde{G} = \int_a^b P(x,t)g'(t)dt.$$

D'après l'identité de Montgomery (2.1)*, On a $FG = \tilde{F}\tilde{G}$ et :*

$$F.G = \left(f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\right)\left(g(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt\right)$$

$$\begin{aligned} &= f(x)g(x) - f(x)\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt \\ &\quad -g(x)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt\frac{1}{b-a}\int_a^b g(t)dt, \end{aligned} \tag{2.10}$$

Intégrons (2.10) *sur* $[a,b]$*, puis multiplions le résultat obtenu par* $\frac{1}{b-a}$*, on trouve* (2.8) *:*

$$T(f,g) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b p(x,t)f^{\ '}(t)dt\int_a^b p(x,t)g'(t)dtdx,$$

par conséquent

$$|T(f,g)| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b p(x,t)f^{\ '}(t)dt\int_a^b p(x,t)g'(t)dtdx\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b\int_a^b |p(x,t)|\left|f^{\ '}(t)\right|dt\int_a^b |p(x,t)|\,|g'(t)|\,dtdx$$

$$\leqslant \frac{1}{b-a}\|f'\|_\infty\|g'\|_\infty\int_a^b\left(\int_a^b |p(x,t)|\,dt\right)^2 dx, \tag{2.11}$$

calculons

$$\int_a^b |p(x,t)|\,dt = \int_a^x |p(x,t)|\,dt + \int_x^b |p(x,t)|\,dt$$
$$= \frac{1}{2(b-a)}[(x-a)^2 + (x-b)^2],$$

alors

$$\left(\int_a^b |p(x,t)|\,dt\right)^2 = \frac{1}{4(b-a)^2}[(x-a)^2 + (x-b)^2]^2,$$

et

$$\int_a^b \left(\int_a^b |p(x,t)|\,dt\right)^2 dx = \frac{1}{4(b-a)^2}\int_a^b \left[(x-a)^2 + (x-b)^2\right]^2 dx$$
$$= \frac{1}{4(b-a)^2}\left[\int_a^b (x-a)^4 dx + \int_a^b (x-b)^4 dx + 2\int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 dx\right]$$
$$= \frac{1}{4(b-a)^2}\left[\frac{(b-a)^5}{5} + \frac{(b-a)^5}{5} + \frac{(b-a)^5}{15}\right]$$
$$= \frac{7(b-a)^3}{60}, \tag{2.12}$$

donc en remplaçant le résultat (2.12) *dans* (2.11) *on obtient* (2.9)

$$\mid T\ (f,g) \mid \leq \frac{1}{b-a} \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty \frac{7(b-a)^3}{60} = \frac{7}{60}(b-a)^2 \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty .$$

■

Pachpatte, dans son travail [8], a établi une nouvelle généralisation de l'inégalité de type Čebyšev en utilisant l'extension donnée par (2.3). Le théorème suivant sans preuve montre ce résultat.

Théorème 2.1 *Soient f, g : $[a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $[a,b]$ et f' et g' intégrables sur $[a,b]$ et w une fonction de densité de probabilité alors on a l'inégalité suivante :*

$$\mid T(w,f,g) \mid \leq \parallel f' \parallel_\infty \parallel g' \parallel_\infty \int_a^b w(x) H^{\ 2}(x)dx, \tag{2.13}$$

oū

$$H(x)=\int_a^b \mid p_w(x,t)\mid dt,$$

et

$$T(w,f,g)=\int_a^b w(x)f(x)g(x)dt-\int_a^b w(x)f(x)dx\int_a^b w(x)g(x)dx\ . \tag{2.14}$$

Dans le théorème suivant on présente une nouvelle généralisation de l'inégalité intégrale de type Čebyšev obtenue par K. Boukerrioua et A. Guezane-Lakoud dans [3]. En utilisant l'extension donnée par (2.5).

Théorème 2.2 *Soient* $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *deux fonctions différentiable sur* $[a,b]$, *et* f', g' *intégrables sur* $[a,b]$. *Soient* w *et* φ *les deux fonctions définies dans le Lemme* 2.3 *alors on a :*

$$\mid T(w,f,g,\varphi^{'})\mid\leq\frac{1}{\varphi^2(1)}\parallel f'\parallel_\infty\parallel g'\parallel_\infty\parallel\varphi'\parallel_\infty\int_a^b w(x)H^{\,2}(x)dx, \tag{2.15}$$

oū

$$H(x)=\int_a^b\mid p_{w,\varphi}(x,t)\mid dt$$

$$\parallel\varphi'\parallel_\infty=\underset{t\in[0,1]}{ess}\sup\mid\varphi'(t\ )\mid,$$

et

$$T(w,f,g,\varphi')=\int_a^b w(x)\varphi'\left(\int_a^t w(t)dt\right)f(x)g(x)dx$$

$$-\frac{1}{\varphi(1)}\left[\int_a^b w(x)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)f(x)dx\right]\left[\int_a^b w(x)\varphi'(\int_a^t w(s)ds)g(x)dx\right]. \tag{2.16}$$

Chapitre 3

Inégalités intégrales de type Čebyšev

Ce chapitre se compose de deux sections :

La première section est consacrée aux inégalités intégrales de type Čebyšev fractionnaires qui sont basés sur les identités de Montgomery fractionnaires.
Dans la deuxième section on commencera par les identités de Montgomery mais pour les fonctions à plusieurs variables suivi des inégalités intégrales doubles de type Čebyšev.

3.1 Inégalités intégrales de type Čebyšev fractionnaires

Les identités de Montgomery fractionnaires

En 2009, Annastassiou [1] a établi deux identités de Montgomery fractionnaires. C'était un travail important pour les chercheurs dont l'énoncé est le suivant :

Théorème 3.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, alors l'identités de Montgomery pour les intégrales fractionnaires est donnée par :*

$$f(x) = \frac{\Gamma(a)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha} J_a^\alpha f(b) - J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)\, f(b)) + J_a^\alpha (P_1(x,b)\, f'(b)), \tag{3.1}$$

où le noyau de Peano fractionnaire $P_1(x,t)$ est défini par :

$$P_1(x,t)=\begin{cases}\frac{t-a}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), a\leq t\leq x,\\ \frac{t-b}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha), x<t\leq b.\end{cases} \tag{3.2}$$

Preuve. D'après (2.2) et en tenant compte des propriétés du calcul fractionnaire on a

$$\Gamma(\alpha)J_a^\alpha(P(x,b)f'(b))=\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}P(x,t)f'(t)dt \tag{3.3}$$

$$=\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}\frac{t-a}{b-a}f'(t)dt\ +\int_x^b(b-t)^{\alpha-1}\frac{t-b}{b-a}f'(t)dt$$

$$=\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}\frac{t-a+b-b}{b-a}f'(t)dt\ -\frac{1}{b-a}\int_x^b(b-t)^{\alpha-1}(b-t)f'(t)dt$$

$$=\int_a^x(1+\frac{t-b}{b-a})(b-t)^{\alpha-1}f'(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_x^b(b-t)^{\alpha}f'(t)dt$$

$$=\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}f'(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_x^b(b-t)^{\alpha}f'(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_x^b(b-t)^{\alpha}f'(t)dt$$

$$=\int_a^x(b-t)^{\alpha-1}f'(t)dt-\frac{1}{b-a}\int_a^b(b-t)^{\alpha}f'(t)dt.$$

Intégrons (3.3) par partie :

$$= \ (b-x)^{\alpha-1}f(x)-(b-a)^{\alpha-1}f(a)+(\alpha-1)\int_a^x(b-t)^{\alpha-2}f(t)dt-\frac{1}{b-a}([-(b-a)^{\alpha}f(a)]$$
$$+\alpha\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}f(t)dt)$$

$$= \ (b-x)^{\alpha-1}f(x)+(\alpha-1)\int_a^x(b-t)^{\alpha-2}f(t)dt-(b-a)^{\alpha-1}f(a)+(b-a)^{\alpha-1}f(a)$$
$$-\frac{\alpha}{b-a}\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

$$=(b-x)^{\alpha-1}f(x)+(\alpha-1)\int_a^x(b-t)^{\alpha-2}f(t)dt-\frac{\alpha}{b-a}\int_a^b(b-t)^{\alpha-1}f(t)dt$$

$$= (b-x)^{\alpha-1}f(x) - \frac{\alpha}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^\alpha f(b) + (\alpha-1)\int_a^x (b-t)^{\alpha-2}f(t)dt$$

$$\Gamma(\alpha)J_a^\alpha(P(x,b)f'(b)) = (b-x)^{\alpha-1}f(x) - \frac{1}{b-a}\Gamma(\alpha)J_a^\alpha f(b) + \Gamma(\alpha)J_a^{\alpha-1}(P(x,b)f(b)). \quad (3.4)$$

Finallement, à partir de (3.4) pour $\alpha \geq 1$, on obtient :

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^\alpha f(b) - J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)f(b)) + J_a^\alpha(P_1(x,b)f'(b)).$$

■

Remarque 3.1 *En remplace* α *par* 1 *dans l'identité* (3.1) *on trouve l'identité de Montgomery classique* (2.1).

Théorème 3.2 *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable, alors une généralisation de l'identité de Montgomery fractionnaire est donnée par :*

$$f(x) = (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)J_a^\alpha(w(b)f(b)) - J_a^{\alpha-1}(Q_w(x,b)f(b)) + J_a^\alpha(Q_w(x,b)f'(b)), \quad (3.5)$$

où $Q_w(x,t)$ *est le noyau de peano fractionnaire défini par :*

$$Q_w(x,t) = \begin{cases} (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)W(t) & a \leq t \leq x, \\ (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)(W(t)-1) & x \leq t \leq b. \end{cases} \quad (3.6)$$

Remarque 3.2 *En remplace* α *par* 1 *dans l'identité* (3.5) *on trouve l'identité de Montgomery avec poids* (2.3).

La troisième identité de Montgomery fractionnaire elle a était établit par A. Guezane-Lakoud -F. Aissaoui [7] en 2013, elles ont changé le noyau fractionnaire $P_{w,\varphi}$ donné par (2.6) par un noyau fractionnaire avec poids composé avec une fonction φ. Leurs résultats ont été les suivants :

Théorème 3.3 *Soit* $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) \neq 0$ *et* $\varphi' \in L^1[0,1]$, *alors une généralisation de l'identité de Montgomery fractionnaire est* *donnée par :*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\varphi(1)}(b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)J_a^\alpha(w(b)\varphi'(1)f(b)) \\ &-\frac{1}{\varphi(1)}J_a^{\alpha-1}(Q_{w,\varphi}(x,b)f(b))+\frac{1}{\varphi(1)}J_a^\alpha(Q_{w,\varphi}(x,b)f'(b)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

où $Q_{w,\varphi}(x,t)$ est le noyau de peano fractionnaire avec poids défini par :

$$Q_{w,\varphi}(x,t)=\begin{cases} (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\varphi(W(t)) & a\leq t\leq x\ , \\ (b-x)^{1-\alpha}\Gamma(\alpha)\left(\varphi\left(W\left(t\right)\right)-\varphi\left(1\right)\right) & x\leq t\leq b. \end{cases} \tag{3.8}$$

Remarque 3.3 *En remplace α par* 1 *dans l'identité* (3.7) *on trouve l'identité de Montgomery avec poids* (2.5).

Les inégalités fractionnaires de type Čebyšev

Dans cette section nous citons trois inégalités intégrales de type Čebyšev fractionnaires les deux premières inégalités sont déterminées via les identités Montgomery fractionnaires introduites par Annastassiou [1] et la troisième, est basée sur l'identité de Montgomry fractionnaire établi en 2013 par A. Guezane-Lakoud -F. Aissaoui [7] dont les énoncés sont données par les théorèmes suivants :

Théorème 3.4 *Soient $f,\ g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions différentiables, f', g' sont intégrables sur $[a,b]$ alors :*

$$\mid T_\alpha(f,g)\mid\leq\frac{(b-a)^{2\alpha}(2\alpha^2+11\alpha+8)}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)(2\alpha+1)(2\alpha+3)}\parallel f'\parallel_\infty\parallel g'\parallel_\infty, \tag{3.9}$$

où $\alpha\geq 1$ et $\parallel.\parallel_\infty$ $L_\infty[a,b]$, $\parallel f\parallel_\infty=\underset{t\in[a,b]}{ess\ sup}\mid f(t)\mid$, et $T_\alpha(f,g)$ est défini par :

$$T_\alpha(f,g)=\frac{1}{b-a}\Gamma(2\alpha-1)J_a^{2\alpha-1}((fg)(b))-\frac{\Gamma^2(\alpha)}{(b-a)^2}J_a^\alpha g(b)J_a^\alpha f\ (b). \tag{3.10}$$

Preuve. D'après l'identité fractionnaire de Montgomery (3.1) :

$$F=f(x)-\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(f(b))+J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)f(b))=\breve{E}=J_a^{\alpha}(P_1(x,b)f'(b))$$

$$G=g(x)-\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(g(b))+J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)g(b))=\breve{G}=J_a^{\alpha}(P_1(x,b)g'(b)),$$

puisque

$$F.G=\tilde{F}.\tilde{G},$$

et

$$F.G=\begin{pmatrix} f(x)-\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(f(b)) \\ +J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)f(b)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(x)-\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(g(b)) \\ +J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)g(b)) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & f(x)g(x)-f(x)\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(g(b))+f(x)J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)g(b)) \\
& -g(x)\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(f(b))+\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}\right)^2(b-x)^{2-2\alpha}J_a^{\alpha}(f(b))J_a^{\alpha}(g(b)) \\
& -\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(f(b))J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)g(b))+g(x)J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)f(b)) \\
& -J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)f(b))\frac{\Gamma(\alpha)}{b-a}(b-x)^{1-\alpha}J_a^{\alpha}(g(b))+J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)f(b))J_a^{\alpha-1}(P_1(x,b)g(b)).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Intégrons (3.11) sur $[a,b]$, puis multiplions le résultat obtenu par $\frac{1}{b-a}(b-x)^{2\alpha-2}$, en tenant compte des propriétés du calcul fractionnaire on trouve(3.10) :

$$T_\alpha(f,g)=\frac{1}{b-a}\Gamma(2\alpha-1)J_a^{2\alpha-1}((fg)(b))-\frac{\Gamma^2(\alpha)}{(b-a)^2}J_a^{\alpha}g(b)J_a^{\alpha}f\ (b)$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b(b-x)^{2\alpha-2}J_a^{\alpha}(P_1(x,b)f'(b))J_a^{\alpha}(P_1(x,b)g'(b))dx.$$

En passant par un long calcul on trouve :

$$|T_\alpha(f,g)| = \frac{1}{(b-a)\Gamma^2(\alpha)} \left| \int_a^b (b-x)^{2\alpha-2} \right.$$

$$\left. \left[\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} P_1(x,t) f'(t) dt \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} P_1(x,s) g'(s) ds \right] dx \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{(b-a)\Gamma^2(\alpha)} \int_a^b (b-x)^{2\alpha-2}$$

$$\left[\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} |P_1(x,t)| \, |f'(t)| \, dt \int_a^b (b-s)^{\alpha-1} |P_1(x,s)| \, |g'(s)| \, ds \right] dx$$

$$\leqslant \frac{1}{(b-a)\Gamma^2(\alpha)} \|f'\|_\infty \|g'\|_\infty \int_a^b (b-x)^{2\alpha-2} \left(\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} |P_1(x,t)| \, dt \right)^2 dx. \qquad (3.12)$$

Intégrons par partie

$$\int_a^b (b-t)^{\alpha-1} |P_1(x,t)| \, dt = \int_a^x (b-t)^{\alpha-1} |P_1(x,t)| \, dt + \int_x^b (b-t)^{\alpha-1} |P_1(x,t)| \, dt$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{b-a} \left[\int_a^x (b-t)^{\alpha-1}(t-a) dt + \int_x^b (b-t)^{\alpha} dt \right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{b-a} \left[(a-x)\frac{(b-x)^\alpha}{\alpha} - \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(b-x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)(b-x)^{1-\alpha}}{b-a} \left[(a(\alpha+1) + b(\alpha-1) - 2\alpha x)\frac{(b-x)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} + \frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \right], \qquad (3.13)$$

remplaçons (3.13) dans (3.12) on obtient

$$|T_\alpha(f,g)| \leqslant \frac{1}{(b-a)^3}\left\|f'\right\|_\infty \left\|g'\right\|_\infty \left[\int_a^b \frac{(b-x)^{2\alpha}}{\alpha^2(\alpha+1)^2}(a(\alpha+1)+b(\alpha-1)-2\alpha x)^2 dx\right.$$

$$\left. + \int_a^b \frac{(b-a)^{2\alpha+2}}{\alpha^2(\alpha+1)^2}dx + 2\int_a^b (a(\alpha+1)+b(\alpha-1)-2\alpha x)\frac{(b-x)^\alpha}{\alpha(\alpha+1)}\frac{(b-a)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)}dx\right]$$

$$= \frac{1}{(b-a)^3}\left\|f'\right\|_\infty \left\|g'\right\|_\infty \frac{(b-a)^{2\alpha+3}}{\alpha^2(\alpha+1)^2}\left[\frac{(\alpha-1)^2}{2\alpha+1} - \frac{4\alpha(\alpha-1)}{(2\alpha+1)(2\alpha+2)}\right.$$

$$\left. + \frac{8\alpha^2}{(2\alpha+1)(2\alpha+2)(2\alpha+3)} + 1 + \frac{2(\alpha-1)}{\alpha+1} - \frac{4\alpha}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\right]$$

$$\leqslant \frac{(b-a)^{2\alpha}(2\alpha^2+11\alpha+8)}{(\alpha+1)^2(\alpha+2)(2\alpha+1)(2\alpha+3)}\left\|f'\right\|_\infty \left\|g'\right\|_\infty .$$

■

Remarque 3.4 *En remplace α par 1 dans l'inégalité fractionnaire de Čebyšev* (3.9), *celle ci se réduit à l' inégalité de Čebyšev classique* (2.9).

Pour simplifier la notation, et pour deux fonctions données f et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, on note

$$\begin{aligned} T_\alpha(f,g,w) &= \Gamma(2\alpha-1)\, J_a^{2\alpha-1}(w(b)\, f(b)\, g(b)) \\ &\quad -\Gamma^2(\alpha)\, J_a^\alpha(w(b)\, g(b))\, J_a^\alpha(w(b)\, f(b)) . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Le théorème suivant présente la deuxième inégalité fractionnaire de type Čebyšev avec noyau poids.

Théorème 3.5 *soient $f,\ g\ :\ [a,b]\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $[a,b]$, f'et g'sont intégrables sur $[a,b]$. Alors l'inégalités fractionnaire de type Čebyšev avec noyau poids est donnée par :*

$$\mid T_{\alpha}(f,g,w)\mid\leq\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)}\parallel f'\parallel_{\infty}\parallel g'\parallel_{\infty}\int_{a}^{b}(b-x)^{2\alpha-2}w(x)H_{\alpha}^{2}(x)dx,\tag{3.15}$$

où $\alpha\geq 1$ et

$$H_{\alpha}(x)=\int_{a}^{b}(b-t)^{\alpha-1}\left|Q_{w}(x,t)\right|dt,$$

avec $Q_{w}(x,t)$ défini par (3.6).

Remarque 3.5 *si on remplace la valeur de α par 1, dans l'inégalité fractionnaire de Čebyšev* (3.15)*, celle ci se réduit à l'inégalité de Čebyšev dans l'extension de pachpatte* (2.13) .

Le théorème suivant représente la troixième inégalité fractionnaire de type Čebyšev avec noyau poids. Pour simplifier la notation, pour deux fonctions données f et $g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, on note

$$\begin{aligned}T_{\alpha}\left(f,g,\varphi,w\right) &= \Gamma\left(2\alpha-1\right)J_{a}^{2\alpha-1}\left(w\left(b\right)\varphi'\left(1\right)f\left(b\right)g\left(b\right)\right)- \\ &\quad \frac{\Gamma^{2}\left(\alpha\right)}{\varphi\left(1\right)}J_{a}^{\alpha}\left(w\left(b\right)\varphi'\left(1\right)g\left(b\right)\right)J_{a}^{\alpha}\left(w\left(b\right)\varphi'\left(1\right)f\left(b\right)\right).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Théorème 3.6 *soient $f,\ g\ :[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions différentiables sur $[a,b]$ f' et g'sont intégrables sur $[a,b]$. Alors l'inégalités fractionnaire de type Čebyšev avec noyau poids est donné par :*

$$\mid T_{\alpha}(f,g,\varphi,w)\mid\leq\frac{1}{\Gamma^{2}(\alpha)\varphi^{2}(1)}\parallel f'\parallel_{\infty}\parallel g'\parallel_{\infty}\int_{a}^{b}(b-x)^{2\alpha-2}w(x)H_{\alpha}^{2}(x)dx,\tag{3.17}$$

où $\alpha\geq 1$ et

$$H_{\alpha}(x)=\int_{a}^{b}(b-t)^{\alpha-1}\mid q_{w,\varphi}(x,t)\mid dt,$$

avec $Q_{w,\varphi}(x,t)$ *définie dans la formule* (3.8).

Remarque 3.6 *Si on remplace la valeur de* α *par* 1, *dans l'inégalité fractionnaires de Čebyšev* (3.17), *celle ci se réduit à l'inégalité de Čebyšev* (2.15).

3.2 Inégalité intégrale de type Čebyšev à deux variables

Dans les derniéres années, de nombreux articles ont été consacrés à la généralisation des inégalitès de type Čebyšev. Dans cette section nous abordons nos résultats concernant quelques inégalités intégrales de type Čebyšev pour des intégrales double et les fonctions à plusieurs variables [5, 6], en se basant sur une nouvelle version de l'identité de Montgomery à deux variables donnée dans le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit* $f : I = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ *est différentiable, la dérivée* $\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}$ *est intégrables sur I, alors l'identité de Montgomery est données par :*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t,y)\,dt + \frac{1}{(d-c)} \int_c^d f(x,s)\,ds \\ &\quad - \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(t,s)\,dsdt \\ &\quad + \int_a^b \int_c^d p(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} dsdt, \end{aligned} \tag{3.18}$$

où le noyau $P(x,t)$ *est définit dans* (2.2) *et* $Q(y,s)$ *est tel que*

$$Q(y,s) = \begin{cases} \frac{s-c}{d-c}, & c \leq s \leq y, \\ \frac{s-d}{d-c}, & y \leq s \leq d\ . \end{cases} \tag{3.19}$$

Preuve. Calculons l'intégrale double suivante

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
=\ & \int_a^x \int_c^y \left(\frac{t-a}{b-a}\right)\left(\frac{s-c}{d-c}\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
&+\int_a^x \int_y^d \left(\frac{t-a}{b-a}\right)\left(\frac{s-d}{d-c}\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
&+\int_x^b \int_c^y \left(\frac{t-b}{b-a}\right)\left(\frac{s-c}{d-c}\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
&+\int_x^b \int_y^d \left(\frac{t-b}{b-a}\right)\left(\frac{s-c}{d-c}\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
&= A_1 + A_2 + A_3 + A_4.
\end{aligned}$$

En intégrant les A_i par partie et en utilisant le théorème de fubini

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_a^x \int_c^y \left(\frac{t-a}{b-a}\right)\left(\frac{s-c}{d-c}\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
&= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^x (t-a)\int_c^y (s-c)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s}dsdt \\
&= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^x (t-a)\left[(y-c)\frac{\partial f(t,y)}{\partial t} - \int_c^y \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}ds\right]dt \\
&= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^x (t-a)(y-c)\frac{\partial f(t,y)}{\partial t}dt - \int_a^x (t-a)\left(\int_c^y \frac{\partial f(t,s)}{dt}ds\right)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}f(x,y) - \frac{(y-c)}{(b-a)(d-c)}\int_a^x f(t,y)\,dt \\
&\quad -\frac{(x-a)}{(b-a)(d-c)}\int_c^y f(x,s)\,ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^x \int_c^y f(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}$$

de la même manière on obtient

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{(x-a)(d-y)}{(b-a)(d-c)} f(x,y) - \frac{(d-y)}{(b-a)(d-c)} \int_a^x f(t,y)\,dt \\
&\quad - \frac{(x-a)}{(b-a)(d-c)} \int_y^d f(x,s)\,ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^x \int_y^d f(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{(y-c)(b-x)}{(b-a)(d-c)} f(x,y) - \frac{(y-c)}{(b-a)(d-c)} \int_x^b f(t,y)\,dt \\
&\quad - \frac{(b-x)}{(b-a)(d-c)} \int_c^y f(x,s)\,ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_x^b \int_c^y f(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A_4 &= \frac{(d-y)(b-x)}{(b-a)(d-c)} f(x,y) - \frac{(d-y)}{(b-a)(d-c)} \int_x^b f(t,y)\,dt \\
&\quad - \frac{(b-x)}{(b-a)(d-c)} \int_y^d f(x,s)\,ds + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_x^b \int_y^d f(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}$$

calculons $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, terme à termes on trouve

$$\begin{aligned}
& A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\
= & \int_a^b \int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} dsdt \\
= & f(x,y) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(t,y)\,dt - \frac{1}{(d-c)} \int_c^d f(x,s)\,ds \\
& + \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b \int_c^d f(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t,y)\,dt + \frac{1}{(d-c)}\int_c^d f(x,s)\,ds \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)\,dsdt \\
&\quad +\int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt,
\end{aligned}$$

d'où (3.18), ce que achève la démonstration. ■

On présente maintenant la première inégalité intégrale de type Čebyšev pour les fonctions àdeux variables en se basant sur l'identité de Montgomery (3.18).

Théorème 3.7 *Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\partial t}$ et $\frac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s\partial t}$ sont intègrables sur I, alors*

$$|T(f,g)| \leq \frac{49}{3600}(b-a)^2(d-c)^2\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty, \tag{3.20}$$

où l'opérateur $T(f,g)$ est défini par :

$$\begin{aligned}
T(f,g) &= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,g(x,y)\,dxdy \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)^2(d-c)}\int_a^b\int_c^d g(x,y)\int_a^b f(t,y)\,dtdxdy \\
&\quad -\frac{1}{(b-a)(d-c)^2}\int_a^b\int_c^d g(x,y)\int_c^d f(x,s)\,dsdxdy \\
&\quad +\frac{1}{(b-a)^2(d-c)^2}\int_a^b\int_c^d f(x,s)\,dsdx\int_c^d\int_a^b g(t,y)\,dtdy.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Preuve. Soient F,G,$\tilde{\mathrm{F}}$ et $\tilde{\mathrm{G}}$ des quantités définies par :

$$\begin{aligned}
F &= f(x,y) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(t,y)\,dt - \frac{1}{(d-c)}\int_c^d f(x,s)\,ds \\
&\quad +\frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d f(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
G &= g(x,y) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b g(t,y)\,dt - \frac{1}{(d-c)}\int_c^d g(x,s)\,ds \\
&\quad + \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d g(t,s)\,dsdt,
\end{aligned}
$$

$$
\tilde{F} = \int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt
$$

et

$$
\tilde{G} = \int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt. \tag{3.22}
$$

D'après l'identité de Montgomery (3.18) on a :

$$
FG = \tilde{F}\tilde{G}.
$$

En multipliant FG par $\frac{1}{(b-a)(d-c)}$ et en intégrant sur I, on obtient

$$
\begin{aligned}
T(f,g) &= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d\left(\int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right) \\
&\quad\times\left(\int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt.\right).
\end{aligned}
$$

Ce que implique que

$$
\begin{aligned}
|T(f,g)| &= \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d\left(\int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right) \\
&\quad\times\left(\int_a^b\int_c^d P(x,t)\,Q(y,s)\,\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt.\right) \\
&\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\int_a^b\int_c^d\left(\int_a^b\int_c^d |P(x,t)\,Q(y,s)|\left|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right|dsdt\right) \\
&\quad\times\left(\int_a^b\int_c^d |P(x,t)\,Q(y,s)|\,\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt\right)dxdy \\
&\le \frac{1}{(b-a)(d-c)}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\left\|\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty
\end{aligned}
$$

$$\times \int_a^b \int_c^d \left(\int_a^b \int_c^d |P(x,t)\, Q(y,s)|\, dsdt \right)^2 dxdy. \tag{3.23}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_c^d |P(x,t)\, Q(y,s)|\, dsdt &= \int_a^b |P(x,t)| \left(\int_c^d |Q(y,s)|\, ds \right) dt \\
&= \int_a^b |P(x,t)| \left(\int_c^y \frac{s-c}{d-c} ds + \int_y^d \frac{d-s}{d-c} ds \right) dt \\
&= \frac{1}{(d-c)} \int_a^b |P(x,t)| \left(\left[\frac{(s-c)^2}{2} \right]_c^y + \left[-\frac{(d-s)^2}{2} \right]_y^d \right) dt \\
&= \frac{\left[(y-c)^2 + (d-y)^2 \right]}{2(b-a)(d-c)} \left(\int_a^x (t-a)\, dt + \int_x^b (b-t)\, dt \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\left[(x-a)^2 + (b-x)^2 \right] \left[(y-c)^2 + (d-y)^2 \right]}{4(b-a)(d-c)}, \tag{3.24}$$

remplaçons (3.24) dans (3.23) on obtient

$$\begin{aligned}
|T(f,g)| &\leq \frac{1}{16(b-a)^3 (d-c)^3} \left\| \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \\
&\quad \times \int_a^b \int_c^d \left(\left[(x-a)^2 + (b-x)^2 \right] \left[(y-c)^2 + (d-y)^2 \right] \right)^2 dy \\
&= \frac{1}{16(b-a)^3 (d-c)^3} \left\| \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \\
&\quad \times \int_a^b \left[(x-a)^2 + (b-x)^2 \right]^2 dx \int_c^d \left[(y-c)^2 + (d-y)^2 \right]^2 dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{16(b-a)^3 (d-c)^3} \left\| \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \\
&\quad \times \left(\frac{(b-a)^5}{5} + \frac{(b-a)^5}{5} + \frac{(b-a)^5}{15} \right) \left(\frac{(d-c)^5}{5} + \frac{(d-c)^5}{5} + \frac{(d-c)^5}{15} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{16(b-a)^3(d-c)^3}\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty \left\|\frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty \\
&\quad \times\frac{(b-a)^5}{15}\times\frac{(d-c)^5}{15} \\
&= \frac{49}{3600}(b-a)^2(d-c)^2\left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty \left\|\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty .
\end{aligned}
$$

ce que achève la démonstration. ■

l'identitè de Montgomery à deux variables avec noyau poids

Nous donnons maintenant une nouvelle extension de l'identité de Montgomery avec poids pour les fonctions à deux variables similaire à (2.3), pour celà définissons deux fonctions de probabilité densité.

Soient $w:[a,b]\rightarrow[0,+\infty[$ une fonction de probabilité densité, et $W(t)=\int_a^t w(x)\,dx$ pour $a\leq t\leq b$, alors $W(a)=0$ et $W(b)=1$, et $\varphi:[c,d]\rightarrow[0,+\infty[$ une fonction de probabilité densité, et $\Psi(s)=\int_c^s \varphi(y)\,dy$ pour $c\leq s\leq d$, avec $\Psi(c)=0$ et $W(d)=1$.

Théorème 3.8 *Supposons que les dérivées partielles* $\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}$, $\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}$ *et* $\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s\partial t}$ *existent et sont continues sur* I *alors :*

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \textstyle\int_a^b w(t)\,f(t,y)\,dt+\int_c^d \psi(s)\,f(x,s)\,ds \\
&\quad -\textstyle\int_a^b w(t)\int_c^d \psi(s)\,f(t,s)\,dsdt \\
&\quad +\textstyle\int_a^b\int_c^d P_w(x,t)\,Q_\psi(y,s)\,\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt,
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

où $P_w(x,t)$ *et* $Q_\varphi(y,s)$ *deux noyaux de Peano définis par :*

$$
\begin{aligned}
P_w(x,t) &= \begin{cases} W(t), & a\leq t\leq x, \\ W(t)-1, & x<t\leq b. \end{cases} \\
Q_\varphi(y,s) &= \begin{cases} \Psi(s), & c\leq s\leq y, \\ \Psi(s)-1, & y<s\leq d. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

les inégalités de type Čebyšev avec poids pour les intégrale doubles

Motivé par l'identité (3.26) nous donnons une inégalité intégral de type Čebyšev avec noyau poids. Soit l'opérateur T défini par :

$$\begin{array}{c} T\left(w,\psi,f,g\right)=\int_a^b\int_c^d w\left(x\right)\psi\left(y\right)f\left(x,y\right)g\left(x,y\right)dxdy \\ -\int_a^b\int_c^d w\left(x\right)\psi\left(y\right)g\left(x,y\right)\left(\int_a^b w\left(t\right)f\left(t,y\right)dt\right)dxdy \\ -\int_a^b\int_c^d w\left(x\right)\psi\left(y\right)g\left(x,y\right)\left(\int_c^d \psi\left(s\right)f\left(x,s\right)ds\right)dxdy \\ +\left(\int_a^b w\left(x\right)\left(\int_c^d \psi\left(s\right)f\left(x,s\right)ds\right)dx\right) \\ \times\left(\int_c^d \psi\left(y\right)\left(\int_a^b w\left(t\right)g\left(t,y\right)dt\right)dy\right). \end{array} \tag{3.27}$$

Théorème 3.9 *Soient $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ telles que les dérivées partielles $\frac{\partial f(s,t)}{\partial s}$, $\frac{\partial f(s,t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s \partial t}$ existent et sont continues sur I. Alors :*

$$\left|T\left(w,\psi,f,g\right)\right|\leq\left\|\tfrac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\left\|\tfrac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t\partial s}\right\|_\infty\int_a^b\int_c^d w\left(x\right)\psi\left(y\right)H^2\left(x,y\right)dxdy, \tag{3.28}$$

où

$$H\left(x,y\right)=\int_a^b\int_c^d\left|P_w\left(x,t\right)Q_\psi\left(y,s\right)\right|dsdt.$$

Nous donnons maintenant une nouvelle extension de l'identité de Montgomery avec poid pour les fonctions à deux variables similaire à (2.5).

Théorème 3.10 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et sa dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 f\left(s,t\right)}{\partial s \partial t}$ est intégrable sur I.*

$$\begin{array}{c} f\left(x,y\right)=\frac{1}{\varphi(1)}\int_a^b w\left(t\right)\varphi'\left(W\left(t\right)\right)f\left(t,y\right)dt \\ +\frac{1}{\varphi(1)}\int_c^d\psi\left(s\right)\varphi'\left(\Psi\left(s\right)\right)f\left(x,s\right)ds \\ -\frac{1}{\varphi^2(1)}\int_a^b w\left(t\right)\varphi'\left(W\left(t\right)\right)\int_c^d\psi\left(s\right)\varphi'\left(\Psi\left(s\right)\right)f\left(t,s\right)dsdt \\ +\frac{1}{\varphi^2(1)}\int_a^b\int_c^d P_{w,\varphi}\left(x,t\right)Q_{\psi,\varphi}\left(y,s\right)\frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t\partial s}dsdt, \end{array} \tag{3.29}$$

où $P_{w,\varphi}$ défini dans (2.6) et $Q_{\psi,\varphi}$ le noyau de Peano défini par :

$$Q_{\psi,\varphi}(y,s) = \begin{cases} \varphi(\Psi(s)), c \leq s \leq y, \\ \varphi(\Psi(s)) - \varphi(1), y \leq s \leq d. \end{cases} \tag{3.30}$$

Théorème 3.11 *Soient f, $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables telles que leurs dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s \partial t}$, $\dfrac{\partial^2 g(s,t)}{\partial s \partial t}$ sont integrables sur I. Alors l'inégalité est donnée par :*

$$\begin{array}{c} |T(w,\psi,f,g,\varphi')| \leq \frac{1}{\varphi^4(1)} \left\| \frac{\partial^2 f(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \left\| \frac{\partial^2 g(t,s)}{\partial t \partial s} \right\|_\infty \\ \times \|\varphi'\|_\infty^2 \int_a^b \int_c^d w(x)\psi(y) H^2(x,y)\, dxdy, \end{array} \tag{3.31}$$

où

$$H(x,y) = \int_a^b \int_c^d |P_{w,\varphi}(x,t) Q_{\psi,\varphi}(y,s)|\, dsdt,$$

et l'opérateur

$$\begin{array}{c} T(w,\psi,f,g,\varphi') = \\ \int_a^b \int_c^d w(x)\varphi'(W(t))\psi(y)\varphi'(\Psi(y)) f(x,y) g(x,y)\, dxdy \\ -\frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b \int_c^d \left[w(x)\varphi'(W(x))\psi(y)\varphi'(\Psi(y)) g(x,y) \right. \\ \left. \int_a^b w(t)\varphi'(W(t)) f(t,y)\, dt \right] dxdy \\ -\frac{1}{\varphi(1)} \int_a^b \int_c^d \left[w(x)\varphi'(W(x))\psi(y)\varphi'(\Psi(y)) g(x,y) \right. \\ \left. \int_c^d \psi(s)\varphi'(\Psi(s)) f(x,s)\, ds \right] dxdy \\ +\frac{1}{\varphi^2(1)} \int_a^b w(x)\varphi'(W(x)) \left(\int_c^d \psi(s)\varphi'(\Psi(s)) f(x,s)\, ds \right) dx \\ \int_c^d \psi(y)\varphi'(\Psi(y)) \left(\int_a^b w(t)\varphi'(W(t)) g(t,y)\, dt \right) dy. \end{array} \tag{3.32}$$

Conclusion 3.1 *Ce projet est basé sur des outils d'analyse pour étudier d'une part, certaines inégalités intégrales de type Čebyšev fractionnaires sur la base des identités de Montgomery fractionnaires qui sont très utiles dans plusieurs domaines de mathématiques, et d'autre part des inégalités intégrales de type Čebyšev pour les fonctions à deux variables. A travers ce projet dans le cadre du parcours Master, on envisage une continuation dans cette direction. Prendre en compte des inégalités intégrales de type Čebyšev* *fractionnaires pour d'autres opérateurs fractionnaires, et des inégalités intégrales de type Čebyšev à n variables.*

Bibliographie

[1] G. Anastassiou, M. R. Hooshmandasl, A. Ghasemi, F. Moftakharzadeh, Montgomery identities for fractional integrals and related fractional inequalities, J. Ineq. Pure Appl. Math. 10 (4) (2009) Art. 97.

[2] G.A. Anastassiou Fractional Representation Formulae Under Initial Conditions and Fractional Ostrowski type Inequalities.

[3] Boukerrioua K, Guezane-Lakoud A. On Generalization of Čebyšev Type Inequalities. JIPAM. 2007;8 :Art 55, 4pp.

[4] S. S. Dragomir, A Refinement of Ostrowski's Inequality for Absolutely Continuous Functions and pplications, Acta Mathematica Vietnamica Volume 27 Number 2, 2002,pp.203-217.

[5] A. Guezane Lakoud and F. Aissaoui, New double integrals weighted Čebyšev type inequalities. Journal of Mathematics and System Science 1(2011)1-6.

[6] A. Guezane Lakoud and F. Aissaoui New Čebyšev type inequalities for double integrals. JMI Vol. 5 ; No 04 Décembre 2011.

[7] A. Guezane-Lakoud and F. Aissaoui New Results for Čebyšev type Inequalities Integral Transforms and Special Functions, Vol. *25*, No. 9, 711-720.

[8] B. G. Pachpatte, Inequalities for Differential and Integral Equation, Academic Press, New York, 1998.

[9] Pečariċ J. E and T. Pejkovic', On an Integral Inequality, J. Inequal. Pure Appl. Math. *5* (*2*) (*2004*), Art. 47.

[10] A. M. Fink N. S. Barnett, P. Cerone, S. S. Dragomir, , Comparing two Integral Means for Absolutely Continuous Mappings whose Derivatives are in $L_1[a,b]$ and Applications, Computers and Mathematics with Applications, 44 (2002), 241-251.

[11] Kilbas, A. Srivastava, Hari M. and Trujillo, Juan J., Theory and Applications of Fractional Differential Equations, North-Holland Mathematics Studies, *204*. Elsevier Science B.V, Amsterdam, *2006*.

[12] S.S Dragomir R.P Agarwal Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula.

[13] G. Gruss, Uber das maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,g(x)\,dx - \left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b g(x)\,dx\right)$ Math, Z, 39 (1935), 215_226.

[14] P. L. Chebyshev. Sur les expressions approximatives des intégrales définies par les autres prises entre les mêmes limites. Proc. Math. Soc. Charkov. 1882. p. 93-98.