

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : **EDP Et Analyse numérique**

Par:

BENKRINAH Hanna

Intitulé

**Traitement d'une équation intégrale de Volterra
de première espèce avec un noyau non linéaire**

Dirigé par : **Dr.GHIAT Mourad**

Devant le jury

PRESIDENT
RAPPORTEUR
EXAMINATEUR

Dr.BELLAOUAR Djamel
Dr.GHIAT Mourad
Dr.BERHAIL Amel

MCA Univ-Guelma
MCB Univ-Guelma
MCA Univ-Guelma

Session Juillet 2021

Traitement d'équation intégrale de Volterra de
première espèce avec un noyau non linéaire

BENKRINAH Hanna

Mémoire de Master en mathématiques

Université 8 Mai 1945 Guelma

12 juillet 2021

Dédicace

Je dedie ce mémoire avec fierté, amour et une immense joie,

A ma très chère grand-mère *RIM*.

Source inépuisable de tendresse, de patience et de sacrifice. ta prière
et ta bénédiction m'ont été d'un grand secours tout
au long de ma vie.

Quoique je puisse dire et écrire, je ne pourrais exprimer ma grande
affection et ma profonde reconnaissance. J'espère ne jamais te décevoir, ni
trahir ta confiance et tes sacrifices.

Puisse Dieu tout puissant, te préserver et t'accorder santé, longue vie,
et bonheur.

A mes petites chats adorables.

A mes tantes et leurs enfants.

A mes cousins et cousines.

A mes chères amies : Malak, Nedjla, Djihan, Rayane.

**En souvenir des moments heureux passés ensemble, avec mes vœux
sincères de réussite, bonheur, santé
et de prospérité.**



Hanna
Hanna





Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :
Je tiens tout d'abord remercier toutes les personnes qui m'ont aidée lors de la rédaction de ce mémoire.

Je voudrais dans un premier temps remercier à mon directeur de mémoire **Monsieur Mourad GHIAT**, pour avoir accepté de mon encadrement, son support, pour sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail, et sa disponibilité, surtout ses conseils avisés ce qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Merci beaucoup à tous les enseignants du département **Mathématique**.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2021 de Mathématiques et nos amis surtout . . .
. pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.



المخلص

في هذه الأطروحة نحن مهتمون بدراسة معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول. الهدف من هذا العمل هو إثبات وجود و تميز معادلة فولتيرا التكاملية من النوع الأول الخطي و الغير الخطي على المجال $[0, t]$ في المساحات الوظيفية الكافي. و في الاخير, سنقوم في هذا العمل باختبارات رقمية لمقاربة الحل بواسطة طريقة الشبه منحرف من أجل تأكيد فعالية هذه الطريقة.

الكلمات المفتاحية: معادلة تكاملية, معادلة فولتيرا التكاملية, معادلة خطية, معادلة غير خطية, النقطة الثابتة, طريقة نيستروم.

Résumé

Dans ce mémoire nous intéressons à l'étude de l'équation intégrale de Volterra de première espèce.

Le but de ce travail est de prouver l'existence ainsi que l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra de première espèce linéaire et non-linéaire sur l'intervalle $[0, t]$ dans les espaces fonctionnels adéquats.

Finalement, on va faire dans ce travail des tests numériques pour approcher la solution par la méthode des trapèzes dans le but de confirmer l'efficacité de cette méthode.

Mots clé : Équation intégrale, Équation intégrale de Volterra, Équation linéaire, Équation non-linéaire, Point fixe, Méthode de Nyström.

Abstract

In this thesis we are interested in the study of the integral equation of Volterra of the first kind.

The goal of this work is to prove the existence as well as the uniqueness of the solution of the integral equation of Volterra the first kind in linear and no linear space on the interval $[0, t]$ in the appropriate functional spaces.

Finally, will do in this work digital tests to approach the solution by the trapazoidal method in order to confirm the effectiveness of these methods.

Key word : Integral equation, Volterra integral equation, Linear equation, Non linear equation, Fixed point, Nyström method.

Table des matières

Introduction	8
1 Définitions et rappels	10
1.1 Équation intégrale	10
1.1.1 L'équation intégrale de Volterra	10
1.1.2 Propriété de dérivation	12
1.2 Notions d'analyse fonctionnelle	13
1.2.1 Théorème de point fixe de Banach	13
1.3 Notions d'analyse numérique	14
1.3.1 Interpolant polynômiale par morceaux	14
1.3.2 Méthode de Nyström	15
1.3.3 Lemme de majoration	17
2 Équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce	19
2.1 Étude analytique	20
2.2 Étude numérique	23
2.3 Test numérique	28
3 Équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce	38
3.1 Étude analytique	39
Conclusion	44

Bibliographie

45

Introduction

Les équations intégrales de Volterra ont été présentées au public par le scientifique Vito Volterra. Volterra a commencé à travailler sur les équations intégrales en 1884, mais son étude sérieuse à commencer en 1896. Le nom d'équation fut donnée par du Bois-Reymond en 1888. Cependant, le nom d'équation intégrale de Volterra à été inventé par Trayen Lalisco en 1908, il l'a expliqué dans ses livres "*Sur les équations de Volterra*", il a été écrit sous de la supervision du scientifique français Charles Emile Piccard. Et en 1911, Lalysco a écrit son premier livre sur les équation intégrales.

Le but de ce mémoire de Master est la résolution d'équation intégrale de Volterra de première espèce.

Les équations intégrales de Volterra, du premier ou du second type, sont caractérisées par une limite supérieure variable d'intégration [4].

De manière générale, il existe deux types d'équations de la première espèce qui se produisant généralement dans les applications pratiques : Le première type, le noyau est une fonction régulière (c'est-à-dire : continue, différentiable) par rapport à tout ces arguments, et le deuxième type le noyau est singulière lorsque à $s = t$. Pour la première espèce de l'équation intégrale Volterra, la fonction inconnue $f(t)$ apparait uniquement sous le signe

intégrale par la formule :

$$g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, f(s)) ds = 0$$

Le noyau K et la fonction g reçoivent des fonctions de valeur réelle, et λ est un paramètre réel ou complexe [1],[8]. On trouva dans la bibliographie [3],[7] des hypothèses sur les fonctions K et g permettant de démontrer plusieurs formes d'existence et unicité.

En générale, la théorie des équations intégrales de la première espèce est beaucoup moins étendue que la théorie des équations de la deuxième espèce.

Le travail dans ce mémoire est planifié comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions et théorèmes d'analyse fonctionnelle et d'analyse numérique, que nous invoquerons dans les chapitres qui suite.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Volterra de première espèce avec un noyau linéaire. En suite, fournir cette étude par des résultats numériques en utilisant la méthode de trapèzes.

Dans le troisième chapitre, nous allons produire l'étude analytique de l'équation intégrale de Volterra de première espèce avec un noyau non linéaire.

Enfin, nous terminerons notre travail par une conclusion générale.

Chapitre **1**

Définitions et rappels

Dans ce premier chapitre, on effectue des rappels mathématiques généraux nécessaire à la bonne compréhension des méthode qui sont mises en œuvre dans l'étude analytique et numérique des différents types d'équations intégrales de Volterra.

1.1 Équation intégrale

On appelle équation intégrale linéaire où f est la fonction inconnue ; telle que

$$\forall t \in \mathcal{D}; \quad f(t) - \lambda \int_{\mathcal{D}} K(t, s) f(s) dt = g(t),$$

où g et K sont des fonctions connues, λ est un paramètre numérique et \mathcal{D} un ensemble borné et fermé d'un espace euclidien de dimension n (t et s des points de cet espace), nous étudierons le cas unidimensionnel (i.e. les variables t et s parcourent un intervalle $[a, b]$) et $\lambda = 1$.

1.1.1 L'équation intégrale de Volterra

1. La forme standard de l'équation intégrale linéaire de Volterra est donnée par la forme :

$$\varphi(t) f(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) .ds$$

- On appelle équation intégrale de Volterra linéaire de seconde espèce une équation sous la forme :

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds,$$

où la fonction inconnue $f(t)$ apparait à la fois à l'extérieur et à l'intérieur du signe intégrale $K(t, s)$ et $g(t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel.

- Si la fonction $\varphi(t) = 0$:

$$g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s) f(s) ds = 0,$$

cette équation s'appelle équation intégrale de Volterra linéaire de première espèce.

2. La forme standard de l'équation intégrale non linéaire de Volterra est donnée par la forme :

$$\varphi(t) f(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, f(s)) ds.$$

- Si la fonction $\varphi(t) = 1$:

$$f(t) = g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, f(s)) ds,$$

où la fonction inconnue f apparait à l'extérieur et à l'intérieur du signe intégrale, K et g sont des fonctions connues et λ est un paramètre réel. Cette équation s'appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de seconde espèce.

- Si la fonction $\varphi(t) = 0$:

$$g(t) + \lambda \int_a^t K(t, s, f(s)) ds = 0$$

dans laquelle $f(t)$ est une fonction inconnue, cette équation s'appelle équation intégrale de Volterra non linéaire de première espèce.

Remarque 1.1.1. Si la fonction $g(t) = 0$ l'équation intégrale est dite **homogène**.

1.1.2 Propriété de dérivation

Définition 1.1.1. Soit ψ une fonction définie de $[a, b]^2$ à image dans \mathbb{R} , telle que pour tout $s \in [a, b]$, $\psi(\cdot, s) \in \mathcal{C}^1[a, b]$. On définit la fonction suivante :

$$\forall t \in [a, b]; \quad \varphi(t) = \int_a^t \psi(t, s) ds.$$

Proposition 1.1.1. Pour tout $t \in [a, b]$, on a

$$\varphi'(t) = \psi(t, t) + \int_a^t \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, s) ds.$$

Preuve 1.1.1. Nous avons :

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^t \psi(t+h, s) ds + \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds - \int_a^t \psi(t, s) ds}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(t+h, s) - \psi(t, s)}{h} ds \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds + \int_a^t \frac{d\psi}{dt}(t, s) ds. \end{aligned}$$

Mais, en utilisant le théorème des accroissements finis, il existe $\xi \in]0, h[$ tel que

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \psi(t+h, s) ds = \psi(t+h, t+\xi),$$

Il suffit de faire tendre h vers 0 pour obtenir le résultat.

1.2 Notions d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Théorème de point fixe de Banach

Ce théorème est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe .

Théorème 1.2.1. Voir[2] Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach. Soit $E : X \rightarrow X$ une application contractante de constante $n \in [0,1[$. Alors il existe un point unique $y^* \in X$, tel que $y^* = E(y^*)$.

Définition 1.2.1. E est dite **Lipschitzienne** si $\exists \ell > 0$ tel que $\forall x, y \in X$:

$$\|E(x) - E(y)\| \leq \ell \|x - y\|.$$

Si $\ell < 1$, alors E est **contractante**.

Si $\ell \geq 1$, alors E est **expansive**.

Théorème 1.2.2. E admet un unique point fixe $y^* \in X$ si elle est contractante. De plus, nous avons la suite récurrente

$$\begin{cases} y_0 \in X \\ y_{n+1} = E(y_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

qui converge vers y^* et vérifie la majoration suivante :

$$\|y_n - y^*\| \leq \frac{\ell^n}{1 - \ell} \|y_1 - y_0\|. \quad (1.1)$$

1.3 Notions d'analyse numérique

1.3.1 Interpolant polynômiale par morceaux

Soit $\{t_j\}_{j=1}^n$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ c'est-à-dire :

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_n = b.$$

On définit la suite de fonctions $\{e_j\}_{j=1}^n$ par

$$e_j(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & t \in [t_{j-1}, t_j], \\ \frac{t_{j+1} - t}{t_{j+1} - t_j} & t \in [t_j, t_{j+1}], \quad 2 \leq j \leq n-1. \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_1(t) = \begin{cases} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} & t \in [t_1, t_2], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$e_n(t) = \begin{cases} \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} & t \in [t_{n-1}, t_n], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ce qui s'appelle **les fonctions chapeaux**.

L'**interpolant polynômiale par morceaux d'ordre 1** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ est donné par :

$$\forall t \in [a, b], \quad P_{n,1}[f](t) = \sum_{j=1}^n f(t_j) e_j(t). \quad (1.2)$$

Pour $h > 0$, la fonction suivante :

$$w_0(h, f) = \max_{\substack{|s-t| < h \\ a \leq s, t \leq b}} |f(s) - f(t)|,$$

est appelée le module de continuité de f . Donc, si h tend vers 0 alors $w_0(h, f)$ tend vers

0, puisque f est continue.

Théorème 1.3.1. *Nous avons*

$$\sup_{t \in [a, b]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(h_n, f),$$

où

$$h_n = \max_{1 \leq j \leq n-1} (t_{j+1} - t_j).$$

Preuve 1.3.1. *Nous avons d'après (1.2), pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,*

$$P_{n,1}[f](t) = f(t_j)(1 - \alpha_j(t)) + f(t_{j+1})\alpha_j(t),$$

où,

$$\alpha_j(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \in [0, 1].$$

Ceci montre que pour tout $t \in [t_j, t_{j+1}]$,

$$P_{n,1}[f](t) - f(t) = (f(t_j) - f(t))(1 - \alpha_j(t)) + (f(t_{j+1}) - f(t))\alpha_j(t),$$

et enfin,

$$\sup_{t \in [\alpha, \beta]} |f(t) - P_{n,1}[f](t)| \leq w_0(h_n, f).$$

1.3.2 Méthode de Nyström

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Nous définissons la méthode de Nyström qui donne l'approximation numérique d'une intégrale qui est sous la forme $\int_a^b f(t)dt$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ est : $t_j = a + jh, 0 \leq j \leq n$ et $h = \frac{b-a}{n}$.

Les formules d'intégrations numériques sont données par :

$$\int_a^b f(t) dt \simeq h \sum_{j=0}^n w_j f(t_j),$$

où, les poids w_j sont positifs, tel que $\max_{0 \leq j \leq n} |w_j| \leq W$ fixe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 1.3.1. La méthode des **trapèzes** représente un cas particulier de la méthode de quadrature où les poids sont donnés par la suite suivante :

$$\begin{cases} w_0 = w_n = \frac{1}{2}, \\ w_j = 1, & 1 \leq j \leq n-1. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$I = \int_a^b f(t) dt \simeq T_n = \frac{h}{2} f(t_0) + h \sum_{j=1}^{n-1} f(t_j) + \frac{h}{2} f(t_n). \quad (1.3)$$

Cette méthode est celle que nous allons utiliser dans nos calculs numérique, si l'intégrand est borné. Nous l'avons choisi puisqu'elle assure la convergence du calcul sous la condition de continuité uniquement. Contrairement à d'autres méthodes, telle que Simpson, qui exige plus de régularité.

Théorème 1.3.2. Si $f \in \mathcal{C}([a, b])$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |I - T_n(f)| = 0.$$

Preuve 1.3.2. Un simple calcul nous montre que pour tout $n \geq 1$,

$$T_n(f) = \int_a^b P_{n,1}(f)(t) dt,$$

où, $P_{n,1}$ est l'**interpolant par morceaux d'ordre 1** de la fonction f correspondant à la subdivision $\{t_j\}_{j=0}^n = 1$.

Donc, en utilisant le **Théorème 1.3.1** nous obtenons

$$\begin{aligned} |I - T_n(f)| &= \left| \int_a^b (f(t) - P_{n,1}(f)(t)) dt \right| \\ &\leq (b-a)w_0(h, f). \end{aligned}$$

Et comme h tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, le résultat est démontré.

1.3.3 Lemme de majoration

Nous allons présenter deux lemmes de Gronewel

Lemme 1.3.1. *Soit $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant*

$$|\xi_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\xi_i| + B_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

où,

$$A > 0, |B_n| \leq B.$$

Alors,

$$|\xi_n| \leq (1 + A)^{n-1} (B + A |\xi_0|), \quad n \geq 1.$$

Preuve 1.3.3. Voir [8]

Lemme 1.3.2. *Supposons que*

$$|\varepsilon_n| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| |\varepsilon_j| + B, \quad n = r, r + 1, \dots,$$

où, $B > 0$ et

$$\sum_{j=0}^{r-1} |\varepsilon_j| \leq \eta.$$

- Si

$$\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1, \quad n = r, r + 1, \dots,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{1 - \alpha}, \quad n = 0, 1, \dots$$

- S'il existe des entiers $0 = J_0 < J_1 < \dots < J_m < J_{m+1}$, avec $0 \leq r < J_1$ et $J_m \leq n < J_{m+1}$, tel que pour $v = 0, 1, \dots, m$ et $n = r, r + 1, \dots$,

$$\sum_{j=j_v}^{\min(n, j_{v+1}-1)} |\alpha_{nj}| \leq \alpha < 1,$$

alors,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{B + \eta}{(1 - \alpha)^2} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)^m .$$

Preuve 1.3.4. Voir [8]

Chapitre 2

Équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce

Dans ce chapitre, nous allons faire une étude analytique et numérique d'une équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce, qui est de la forme

$$\int_0^t K(t, s) f(s) ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

K est défini par :

$$\begin{aligned} K : [0, T] \times \mathbb{R} &\longmapsto \mathbb{R}, \\ (t, s) &\longmapsto K(t, s). \end{aligned}$$

$g : [0, T] \longmapsto \mathbb{R}$ donnée, et f est inconnue.

Supposons que

$$(H1) \left\{ \begin{array}{l} (1) \quad g \in \mathcal{C}^1([0, T]), \\ (2) \quad K \text{ et } \frac{\partial K}{\partial t} \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R}), \\ (3) \quad g(0) = 0, \\ (4) \quad \forall t \in [0, T] : K(t, t) \neq 0. \end{array} \right.$$

$K(t, s)$, $\frac{\partial K(t, s)}{\partial t}$, $g(t)$ et $g'(t)$ sont continue pour tout $t \in [0, T]$. Alors, en dérivant les deux membres de l'équation (2.1) par rapport à la variable t on obtient

$$K(t, t) f(t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s) f(s) ds = g'(t). \quad (2.2)$$

Lorsque $K(t, t)$ ne s'annule pas en $0 \leq t \leq T$, alors on peut transformer l'équation (2.2) à l'équation intégrale de Volterra du seconde espèce suivante

$$f(t) + \int_0^t H(t, s) f(s) ds = G(t), \quad (2.3)$$

où

$$H(t, s) = \frac{1}{K(t, t)} \frac{\partial K}{\partial t}(t, s),$$

$$G(t) = \frac{g'(t)}{K(t, t)}.$$

Soient K et g vérifiant les conditions de hypothèse (H1), alors $H \in \mathcal{C}([0, T] \times \mathbb{R})$ et $G \in \mathcal{C}([0, T])$.

2.1 Étude analytique

Nous utilisons la méthode des approximations successives de Picard pour montrer l'existence et l'unicité de l'équation (2.3), nous construisons deux suites récurrentes $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui sont définies par les deux formules :

$$\begin{cases} f_n(t) = G(t) - \int_0^t H(t, s) f_{n-1}(s) ds, \\ f_0(t) = G(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t), \\ \varphi_0(t) = G(t). \end{cases}$$

Théorème 2.1.1. *Si G, H vérifiant les conditions de l'hypothèse (H1), alors l'équation (2.3) admet une solution unique dans $\mathcal{C}([0, T])$.*

Existence de la solution

Preuve 2.1.1. Choisir M et L tels que

$$\forall t, s \in [0, T] : \quad \begin{cases} |G(t)| \leq M, \\ |H(t, s)| \leq L. \end{cases}$$

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\varphi_n(t)| \leq M \frac{(Lt)^n}{n!}.$$

Pour $n = 0$:

$$|\varphi_0(t)| = |G(t)| \leq M.$$

Supposons que

$$|\varphi_n(t)| \leq M \frac{(Lt)^n}{n!},$$

on a

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(t) &= f_{n+1}(t) - f_n(t) \\ &= - \int_0^t H(t, s) \{f_n(s) - f_{n-1}(s)\} ds \\ &= - \int_0^t H(t, s) \varphi_n(s) ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(t)| &\leq \int_0^t |H(t, s)| |\varphi_n(s)| ds \\ &\leq L \int_0^t |\varphi_n(s)| ds \\ &\leq M \frac{L^{n+1}}{n!} \int_0^t s^n ds \\ &\leq M \frac{(Lt)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\max_{0 \leq t \leq T} |\varphi_n(t)| \leq M \frac{(Lt)^n}{n!}.$$

Mais, la suite de fonction $U_n(t)$ de terme générale $U_n(t) = M \frac{(Lt)^n}{n!}$ converge pour tout $t \in [0, T]$ et ça donne :

$$\sum_{n \geq 0} M \frac{(Lt)^n}{n!} = M \exp(Lt).$$

Ce qui implique que $\sum_{n \geq 0} \max_{0 \leq t \leq T} |\varphi_n(t)|$ est convergente, par conséquent $\sum_{n \geq 0} \varphi_n$ est uniformément convergente .

Alors , $\exists f \in \mathcal{C}([0, T])$ tel que :

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t). \quad (2.4)$$

Pour montrer que $f(t)$ est la solution de l'équation originale (2.3)

$$\begin{aligned} - \int_0^t H(t, s) f(s) ds &= - \int_0^t H(t, s) \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(s) ds \\ &= - \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t H(t, s) \varphi_i(s) ds \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_{i+1}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(t) - \varphi_0(t) \\ &= f(t) - G(t). \end{aligned}$$

Cela prouve que $f(t)$ défini par (2.4) satisfait l'équation (2.3).

Chaque fonction $\{\varphi_i\}_{0 \leq i \leq n}$ est clairement continue sur l'intervalle $[0, T]$ (la somme de deux fonctions continue). Par conséquent, f est continue sur $[0, T]$, car il s'agit de la limite d'une suite uniformément convergente des fonctions continues sur $[0, T]$.

Unicité de la solution

Preuve 2.1.2. *Pour montrer que $f(t)$ est la seule solution continue de l'équation (2.3), supposons qu'il existe une autre solution continue $\tilde{f}(t)$ de cette équation.*

On a :

$$f(t) - \tilde{f}(t) = - \int_0^t H(t, s) \{f(s) - \tilde{f}(s)\} ds.$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} |f(t) - \tilde{f}(t)| &\leq \int_0^t |f(s) - \tilde{f}(s)| |H(t, s)| ds \\ &\leq L \int_0^t |f(s) - \tilde{f}(s)| ds. \end{aligned}$$

Puisque f et \tilde{f} sont continues dans $[0, T]$, alors il existe une constante B telle que :

$$\forall t \in [0, T]; \quad |f(t) - \tilde{f}(t)| \leq B,$$

on obtient

$$|f(t) - \tilde{f}(t)| \leq L B t.$$

Nous répétons cette opération n fois, nous obtenons

$$|f(t) - \tilde{f}(t)| \leq B \frac{(L t)^n}{n!},$$

nous faisons n tendre vers l'infini pour conclure que $f(t) = \tilde{f}(t), \forall t \in [0, T]$.

2.2 Étude numérique

Pour l'approximation numérique de notre équation on commence par la subdivision de notre intervalle d'intégration en une famille de sous intervalles.

Ce qui donne la subdivision $\{t_j\}_{0 \leq j \leq n}$ que définit par :

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T,$$

$h = \frac{T}{n}$, $t_j = jh$, puis nous approchons l'intégrale

$$I = \int_0^{t_i} H(t_i, s) f(s) ds.$$

Par la méthode de trapèze exige le moins de régularité possible sur les fonctions intégrés afin d'être consistante avec notre équation, ce qui donne l'approximation :

$$I_i \simeq \frac{h}{2} H(t_i, t_0) f(t_0) + h \sum_{j=1}^{i-1} H(t_i, t_j) f(t_j) + \frac{h}{2} H(t_i, t_i) f(t_i).$$

Nous remplaçons cette formule dans l'équation (2.3), nous obtenons l'approximation F_i de $f(t_i)$ vérifiant :

$$(\Gamma) \begin{cases} F_i = G(t_i) - \frac{h}{2} H(t_i, t_0) F_0 - h \sum_{j=1}^{i-1} H(t_i, t_j) F_j - \frac{h}{2} H(t_i, t_i) F_i, & 1 \leq i \leq n, \\ F_0 = G(t_0). \end{cases}$$

qui est une équation linéaire par rapport à F_i , et est équivalente à

$$(\Gamma) \begin{cases} F_i = S - \frac{h}{2} H(t_i, t_i) F_i, & 1 \leq i \leq n, \\ F_0 = G(t_0). \end{cases}$$

Où

$$S = G(t_i) - \frac{h}{2} H(t_i, t_0) F_0 - h \sum_{j=1}^{i-1} H(t_i, t_j) F_j.$$

Étude du système

Le système (Γ) admet unique solution

- Si $i = 0$:

$$F_0 = G(t_0).$$

- Si $i = 1$:

$$\begin{aligned} F_1 &= G(t_1) - \frac{h}{2}H(t_1, t_0)F_0 - \frac{h}{2}H(t_1, t_1)F_1 \\ &= \frac{1}{1 + \frac{h}{2}H(t_1, t_1)} \left[G(t_1) - \frac{h}{2}H(t_1, t_0)F_0 \right]. \end{aligned}$$

- Si $i = 2$:

$$\begin{aligned} F_2 &= G(t_2) - \frac{h}{2}H(t_2, t_0)F_0 - hH(t_2, t_1)F_1 - \frac{h}{2}H(t_2, t_2)F_2 \\ &= \frac{1}{1 + \frac{h}{2}H(t_2, t_2)} \left[G(t_2) - \frac{h}{2}H(t_2, t_0)F_0 - hH(t_2, t_1)F_1 \right]. \end{aligned}$$

- Si $i = 3$:

$$\begin{aligned} F_3 &= G(t_3) - \frac{h}{2}H(t_3, t_0)F_0 - h \sum_{j=1}^2 H(t_3, t_j)F_j - \frac{h}{2}H(t_3, t_3)F_3 \\ &= G(t_3) - \frac{h}{2}H(t_3, t_0)F_0 - h[H(t_3, t_1)F_1 + H(t_3, t_2)F_2] - \frac{h}{2}H(t_3, t_3)F_3 \\ &= \frac{1}{1 + \frac{h}{2}H(t_3, t_3)} \left[G(t_3) - \frac{h}{2}H(t_3, t_0)F_0 - h[H(t_3, t_1)F_1 + H(t_3, t_2)F_2] \right]. \end{aligned}$$

⋮

- Si $i = n$:

$$\begin{aligned} F_n &= G(t_n) - \frac{h}{2}H(t_n, t_0)F_0 - h \sum_{j=1}^{n-1} H(t_n, t_j)F_j - \frac{h}{2}H(t_n, t_n)F_n \\ &= \frac{1}{1 + \frac{h}{2}H(t_n, t_n)} \left[G(t_n) - \frac{h}{2}H(t_n, t_0)F_0 - h \sum_{j=1}^{n-1} H(t_n, t_j)F_j \right]. \end{aligned}$$

Analyse de l'erreur

Dans cette partie, nous allons démontrer que la méthode numérique construite dans la partie précédente converge vers la solution exacte de l'équation.

Définition 2.2.1. Nous définissant l'erreur de discrétisation de (2.3) par la formule :

$$\varepsilon_i = F_i - f(t_i), \quad 0 \leq i \leq n.$$

On dit que la méthode est convergente si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Définition 2.2.2. Soit f une solution de l'équation (2.1), alors l'erreur de consistance de (2.1) est donnée par :

$$\delta(h, t_i) = \int_0^{t_i} H(t_i, s) f(s) ds - h \sum_{j=0}^i w_j H(t_i, t_j) f(t_j).$$

La méthode d'approximation est dite consistante si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\delta(h, t_i)| \right) = 0.$$

Théorème 2.2.1. Si la méthode d'approximation est consistante, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Preuve 2.2.1. Nous avons, pour $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_i &= -h \sum_{j=0}^i w_j \{H(t_i, t_j) F_j - H(t_i, t_j) f(t_j)\} - \delta(h, t_i) \\
 &= -h \sum_{j=0}^i H(t_i, t_j) \varepsilon_j - \delta(h, t_i). \\
 |\varepsilon_i| &\leq h \sum_{j=0}^i w_j L |F_j - f(t_j)| + |\delta(h, t_i)| \\
 &\leq hL \sum_{j=0}^i |\varepsilon_j| + |\delta(h, t_i)| \\
 (1 - hL) |\varepsilon_i| &\leq \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + |\delta(h, t_i)|.
 \end{aligned}$$

Si on prend $h < \frac{1}{L}$, on obtient

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hL}{1 - hL} \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \frac{|\delta(h, t_i)|}{1 - hL}.$$

En appliquant le **Lemme 1.3.1**, nous obtenons

$$|\varepsilon_i| \leq \left(\frac{\max_{0 \leq i \leq n} |\delta(h, t_i)|}{1 - hL} \right) \exp \left(\frac{hL}{1 - hL} \right).$$

Si la méthode est consistante, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0.$$

Résultats Numériques

Dans cette partie, nous allons donner des exemples pour présenter l'efficacité de la méthode utilisée pour approcher la solution de l'équation (2.1).

D'autre part,

$$|\varepsilon_i| = O \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\delta(h, t_i)| \right),$$

c'est-à-dire que l'ordre de convergence de cette méthode est lié à l'ordre de l'erreur de consistance $\delta(h, t_i)$.

2.3 Test numérique

Exemple 2.3.1. *Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce suivante :*

$$\int_0^t \left(\frac{1}{t^2 + s^2 + 1} \right) f(s) ds = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2t^2 + 1}{t^2 + 1} \right).$$

Le noyau

$$K(t, s) = \frac{1}{t^2 + s^2 + 1},$$

et,

$$g(t) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{2t^2 + 1}{t^2 + 1} \right).$$

La solution exacte de l'équation est :

$$f(t) = t.$$

Les Tableaux suivants donnent une estimation de la solution exacte et la solution approchée et l'erreur entre eux de l'équation.

Remarque 2.3.1. *lorsque vous utilisez le programme MATLAB pour $n=100$ et $n=1000$ cela nous donne un grand nombre de résultats, mais dans les tableaux suivantes, nous ne présenterons les résultats que pour certains points.*

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.1000	0.0980	0.0020
0.2	0.2000	0.1927	0.0073
0.3	0.3000	0.2851	0.0149
0.4	0.4000	0.3766	0.0234
0.5	0.5000	0.4682	0.0318
0.6	0.6000	0.5605	0.0395
0.7	0.7000	0.6534	0.0466
0.8	0.8000	0.7471	0.0529
0.9	0.9000	0.8412	0.0588
1.0	1.0000	0.9357	0.0643

TABLE 2.1 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=10

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.1000	0.0998	0.0002
0.2	0.2000	0.1993	0.0007
0.3	0.3000	0.2985	0.0015
0.4	0.4000	0.3977	0.0023
0.5	0.5000	0.4968	0.0032
0.6	0.6000	0.5961	0.0039
0.7	0.7000	0.6954	0.0046
0.8	0.8000	0.7948	0.0052
0.9	0.9000	0.8942	0.0058
1.0	1.0000	0.9937	0.0063

TABLE 2.2 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=100

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.1000	0.1000	0.0195e-003
0.2	0.2000	0.1999	0.0732e-003
0.3	0.3000	0.2999	0.1486e-003
0.4	0.4000	0.3998	0.2327e-003
0.5	0.5000	0.4997	0.3154e-003
0.6	0.6000	0.5996	0.3917e-003
0.7	0.7000	0.6995	0.4604e-003
0.8	0.8000	0.7995	0.5221e-003
0.9	0.9000	0.8994	0.5786e-003
1.0	1.0000	0.9994	0.6315e-003

TABLE 2.3 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=1000

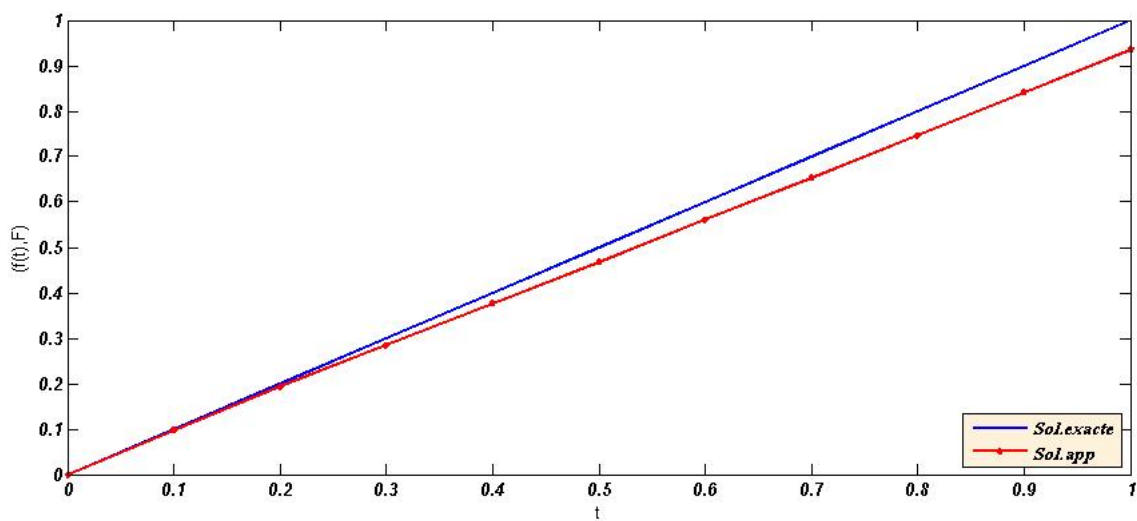


FIGURE 2.1 – Solution exacte et solution approchée avec $n=10$

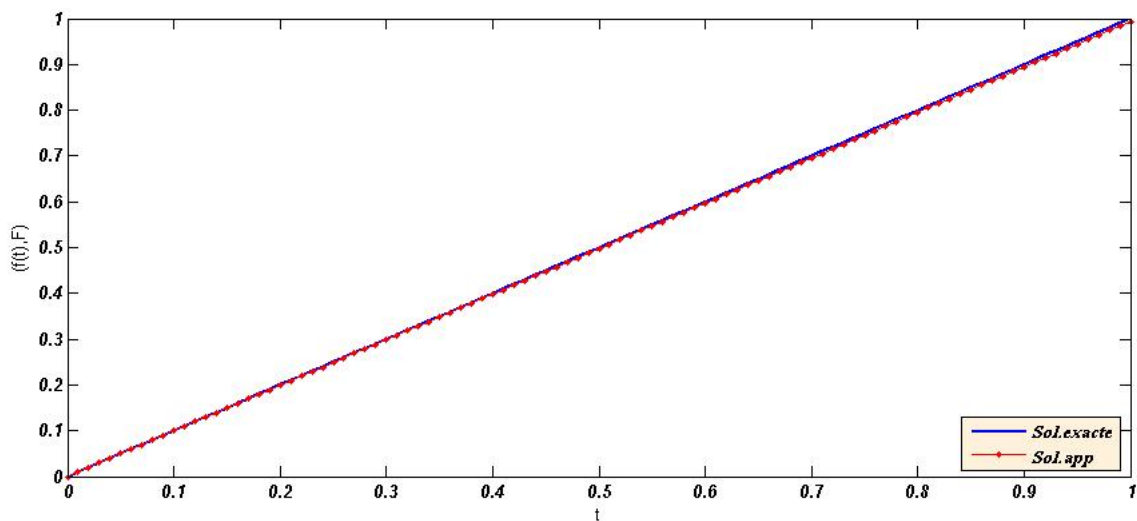


FIGURE 2.2 – Solution exacte et solution approchée avec $n=100$

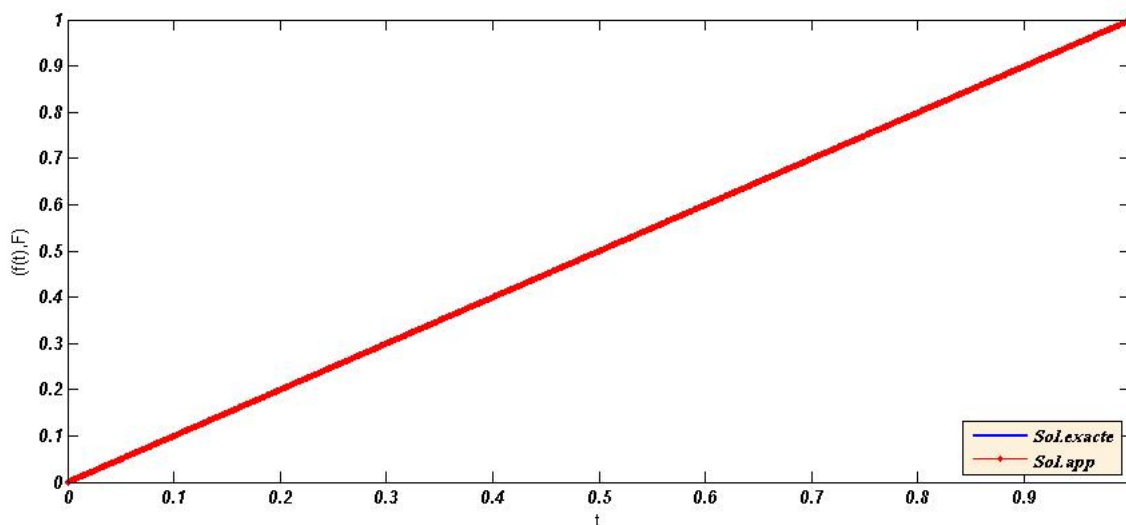


FIGURE 2.3 – Solution exacte et solution approchée avec $n=1000$

Exemple 2.3.2. *Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce suivante :*

$$\forall t \in [0, 1]; \quad \int_0^t \cos(t-s) f(s) ds = t \sin(t).$$

Le noyau

$$K(t, s) = \cos(t-s),$$

et,

$$g(t) = t \sin(t).$$

La solution exacte de l'équation est :

$$f(t) = 2 \sin(t).$$

Les Tableaux suivants donnent une estimation de la solution exacte et la solution approchée et l'erreur entre eux de l'équation.

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.1997	0.1993	0.0003
0.2	0.3973	0.3967	0.0007
0.3	0.5910	0.5900	0.0010
0.4	0.7788	0.7775	0.0013
0.5	0.9589	0.9572	0.0017
0.6	1.1293	1.1273	0.0020
0.7	1.2884	1.2861	0.0023
0.8	1.4347	1.4320	0.0027
0.9	1.5667	1.5637	0.0030
1.0	1.6829	1.6796	0.0033

TABLE 2.4 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=10

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.1997	0.1997	0.0333e-004
0.2	0.3973	0.3967	0.0667e-004
0.3	0.5910	0.5910	0.1000e-004
0.4	0.7788	0.7788	0.1333e-004
0.5	0.9589	0.9588	0.1667e-004
0.6	1.1293	1.1293	0.2000e-004
0.7	1.2884	1.2884	0.2333e-004
0.8	1.4347	1.4347	0.2667e-004
0.9	1.5667	1.5666	0.3000e-004
1.0	1.6829	1.6829	0.3333e-004

TABLE 2.5 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=100

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.1997	0.1997	0.0333e-006
0.2	0.3973	0.3967	0.0667e-006
0.3	0.5910	0.5910	0.1000e-006
0.4	0.7788	0.7788	0.1333e-006
0.5	0.9589	0.9589	0.1667e-006
0.6	1.1293	1.1293	0.2000e-006
0.7	1.2884	1.2884	0.2333e-006
0.8	1.4347	1.4347	0.2667e-006
0.9	1.5667	1.5667	0.3000e-006
1.0	1.6829	1.6829	0.3333e-006

TABLE 2.6 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=1000

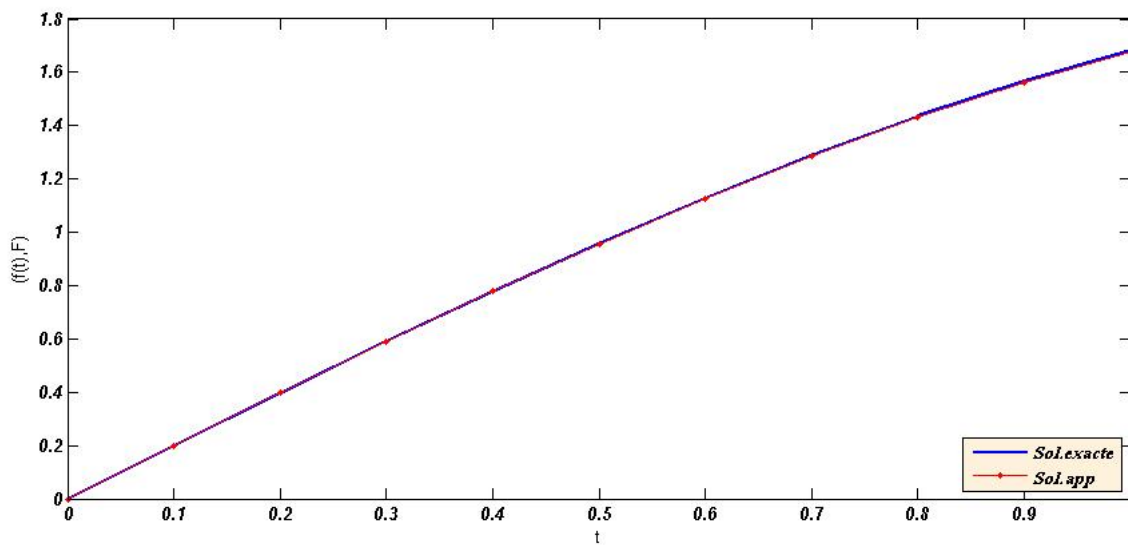


FIGURE 2.4 – Solution exacte et solution approchée avec n=10

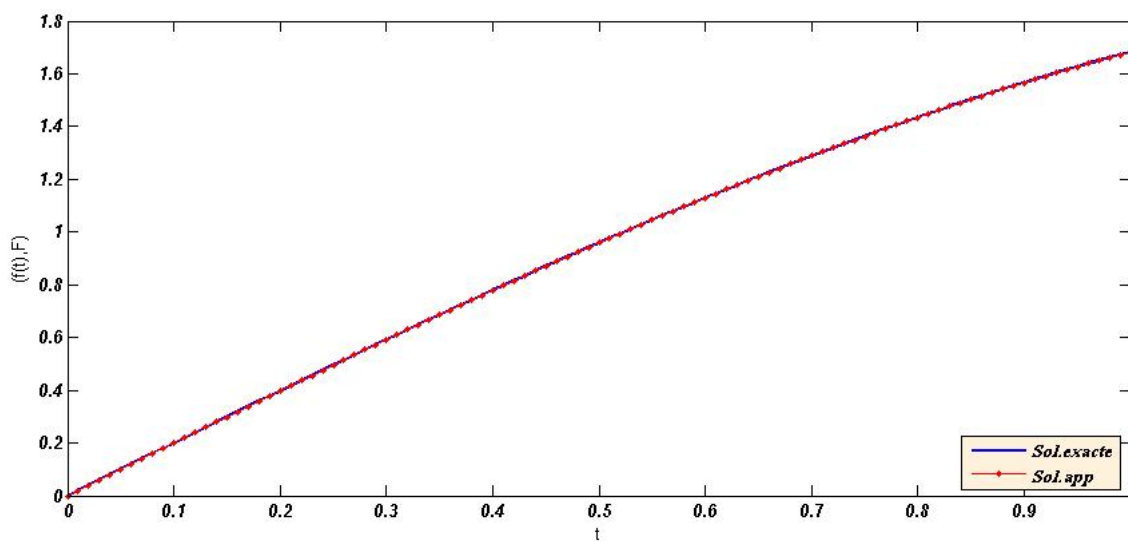


FIGURE 2.5 – Solution exacte et solution approchée avec n=100

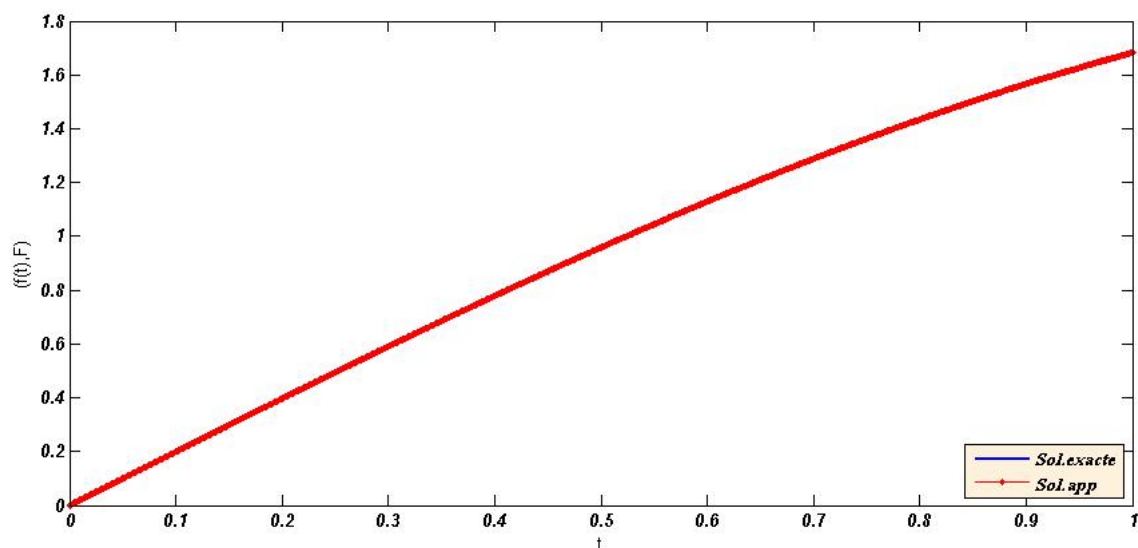


FIGURE 2.6 – Solution exacte et solution approchée avec $n=1000$

Exemple 2.3.3. *Considérons l'équation intégrale de Volterra de première espèce suivante*

$$\int_0^t (st^2 + 1) f(s) ds = t^2 \sin(t) - (t^3 + 1) \cos(t) + 1.$$

Le noyau

$$K(t, s) = st^2 + 1,$$

et,

$$g(t) = t^2 \sin(t) - (t^3 + 1) \cos(t) + 1.$$

La solution exacte de l'équation est :

$$f(t) = \sin(t).$$

Les Tableaux suivants donnent une estimation de la solution exacte et la solution approchée et l'erreur entre eux de l'équation.

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.0002	0.1000	0.0998
0.2	0.0015	0.2001	0.1987
0.3	0.0049	0.3005	0.2955
0.4	0.0115	0.4009	0.3894
0.5	0.0214	0.5009	0.4794
0.6	0.0345	0.5991	0.5646
0.7	0.0495	0.6937	0.6442
0.8	0.0651	0.7825	0.7174
0.9	0.0796	0.8629	0.7833
1.0	0.0918	0.9332	0.8415

TABLE 2.7 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=10

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.0998	0.0999	0
0.2	0.1987	0.1988	0.0002
0.3	0.2955	0.2960	0.0005
0.4	0.3894	0.3906	0.0012
0.5	0.4794	0.4816	0.0022
0.6	0.5646	0.5681	0.0035
0.7	0.6442	0.6492	0.0050
0.8	0.7174	0.7238	0.0065
0.9	0.7833	0.7912	0.0079
1.0	0.8415	0.8505	0.0090

TABLE 2.8 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=100

t	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
0	0	0	0
0.1	0.0998	0.0998	0.0020e-003
0.2	0.1987	0.1987	0.0158e-003
0.3	0.2955	0.2956	0.0521e-003
0.4	0.3894	0.3895	0.1189e-003
0.5	0.4794	0.4796	0.2189e-003
0.6	0.5646	0.5650	0.3482e-003
0.7	0.6442	0.6447	0.5962e-003
0.8	0.7174	0.7180	0.6474e-003
0.9	0.7833	0.7741	0.7871e-003
1.0	0.8415	0.8424	0.9034e-003

TABLE 2.9 – Résultat numérique d'équation intégrale de Volterra pour n=1000

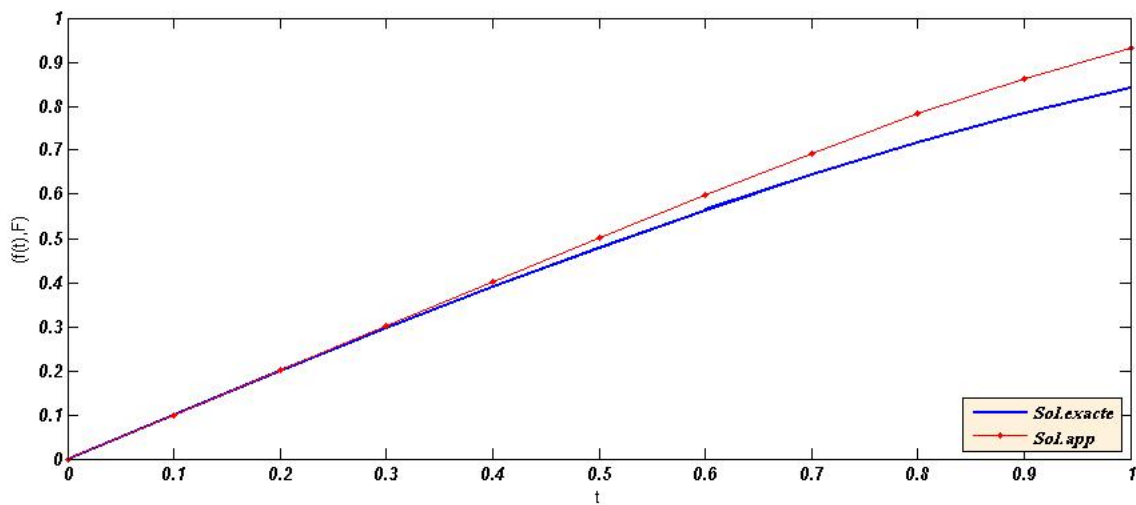


FIGURE 2.7 – Solution exacte et solution approchée avec $n=10$

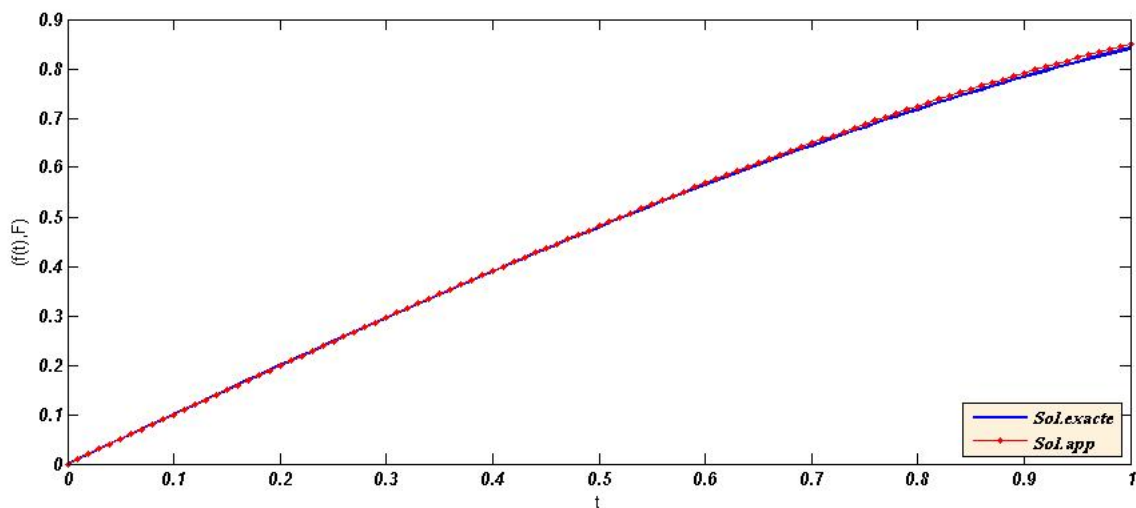


FIGURE 2.8 – Solution exacte et solution approchée avec $n=100$

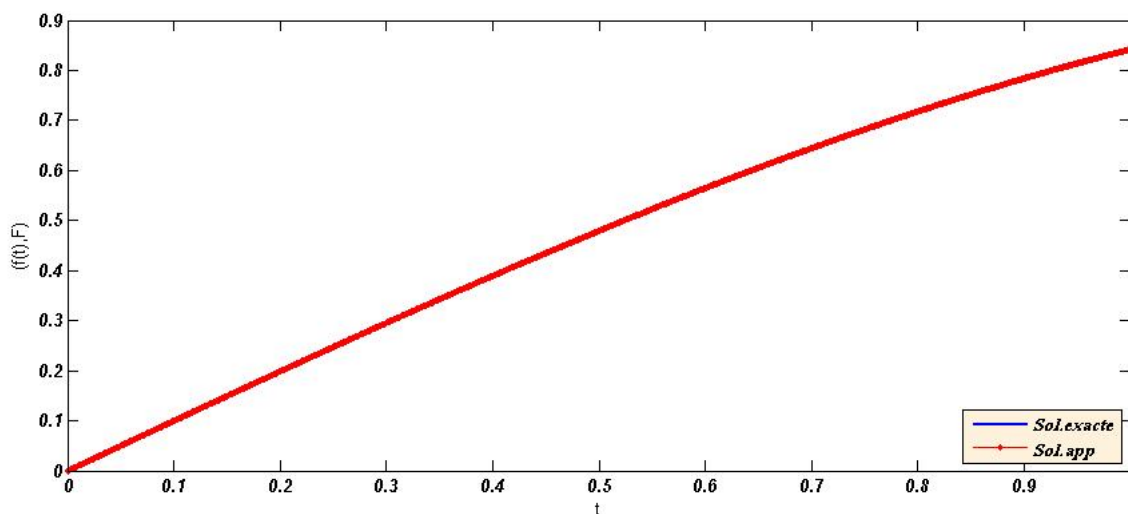


FIGURE 2.9 – Solution exacte et solution approchée avec $n=1000$

Conclusion

Les résultats obtenues dans les exemples précédent est présente l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra de première espèce avec un noyau linéaire par la méthode de trapèze. On note que l'erreur est convergente, et de cela nous concluons l'efficacité de cette méthode.

Chapitre 3

Équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce

Ce chapitre est consacré à établir l'étude analytique (l'existence et d'unicité) pour la résolution d'équation intégrale de Volterra de première espèce avec un noyau non linéaire.

Une équation non linéaire du Volterra de première espèce est une équation de la forme :

$$\int_0^t K(t, s, f(s)) ds = g(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3.1)$$

l'équation (3.1) peut être convertir en une équation du second type par dérivation.

Si on dérive (3.1) par rapport à t , on obtient

$$K(t, t, f(t)) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) ds = g'(t). \quad (3.2)$$

Ensemble des conditions suffisant pour garantir une solution continue unique est donné tel que :

$$\begin{aligned}
 (H2) \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 (1) \quad g(0) = 0, \\
 (2) \quad g \text{ et } g1' \in \mathcal{C}([0, T]), \\
 (3) \quad K \text{ et } \frac{\partial K}{\partial t} \in \mathcal{C}([0, T]^2 \times \mathbb{R}), \\
 (4) \quad \exists L \in \mathbb{R}_+, \forall t, s \in [0, T], \forall y, z \in \mathbb{R} : \\
 \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, z) \right| \leq L |y - z|, \\
 (5) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \exists x! : K(t, t, x) = y, \\
 (6) \quad \exists \theta \in \mathbb{R}_+, \forall t, s \in [0, T], \forall y, z \in \mathbb{R} : \\
 \quad |K(t, t, y) - K(t, t, z)| \geq \theta |y - z|, \\
 (7) \quad \text{Il existe des point } 0 = T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T, \\
 \quad \frac{LT_i}{\theta} < 1, \quad 0 \leq i \leq N.
 \end{array} \right. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

3.1 Étude analytique

considérez la méthode d'approximation successive appliqué a (3.2), nous construisons deux suite récurrents $\{f_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}, \{\varphi_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui sont définit par les deux formules :

$$\begin{cases} K(t, t, f_n(t)) = g'(t) - \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) ds, \\ f_0(t) = g'(t). \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\begin{cases} \varphi_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t), \\ \varphi_0(t) = g'(t). \end{cases} \tag{3.5}$$

Nous voulons montrer que la suite $f_n(t)$ converge vers une fonction continue qui est la solution de (3.2).

Preuve 3.1.1**Existence de solution**

Considérez d'abord la première intervalle $[0, T_1]$. Définissez $f_n(t)$ et $\varphi_n(t)$ comme dans (3.4) et (3.5).

Ensuite nous avons,

$$\begin{aligned} K(t, t, f_n(t)) - K(t, t, f_{n-1}(t)) &= g'(t) - \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) ds - g'(t) + \\ &\quad \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-2}(s)) ds \\ &= - \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-2}(s)) ds. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} |K(t, t, f_n(t)) - K(t, t, f_{n-1}(t))| &\leq \int_0^t \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-2}(s)) \right| ds \\ &\leq L \int_0^t |f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)| ds \\ &\leq Lt \max_{0 \leq s \leq t} |f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)|. \end{aligned}$$

D'après la condition (6) dans l'hypothèse (H2)

$$|K(t, t, f_n(t)) - K(t, t, f_{n-1}(t))| \geq \theta |f_n(t) - f_{n-1}(t)|.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \theta |f_n(t) - f_{n-1}(t)| &\leq LT_1 \max_{0 \leq s \leq t} |f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)|, \\ |f_n(t) - f_{n-1}(t)| &\leq \frac{LT_1}{\theta} \max_{0 \leq s \leq t} |f_{n-1}(s) - f_{n-2}(s)|. \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{LT_1}{\theta} \max_{0 \leq s \leq t} |\varphi_{n-1}(s)|.$$

De sorte que par la condition (7) de l'hypothèses (H2) que :

$$|\varphi_n(t)| \leq \frac{LT_1}{\theta} \max_{0 \leq \tau \leq T_1} |\varphi_{n-1}(\tau)|.$$

Cela peut être appliqué plusieurs fois pour donne :

$$\max_{0 \leq \tau \leq T_1} |\varphi_n(\tau)| \leq \left(\frac{LT_1}{\theta}\right)^n \max_{0 \leq \tau \leq T_1} |g'(\tau)|.$$

Puisque $\frac{LT_1}{\theta} < 1$, on voit que la suite

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t),$$

est dominée par :

$$\max_{0 \leq \tau \leq T_1} |g'(\tau)| \sum_{i=0}^n \left(\frac{LT_1}{\theta}\right)^i < \max_{0 \leq \tau \leq T_1} |g'(\tau)| \frac{1}{1 - \frac{LT_1}{\theta}},$$

est converge uniformément. Les φ_n sont des fonctions continues et donc $f(t)$ définie par :

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i(t),$$

est continue.

Unicité de la solution

Pour voir que f est la seul solution continue, supposons qu'il existe une autre solution continue \tilde{f} . Puis,

$$K(t, t, f(t)) - K(t, t, \tilde{f}(t)) = - \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, \tilde{f}(s)) ds,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |K(t, t, f(t)) - K(t, t, \tilde{f}(t))| &\leq L \int_0^t |f(s) - \tilde{f}(s)| ds \\ &\leq Lt \max_{0 \leq \tau \leq t} |f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|. \end{aligned}$$

On a,

$$|K(t, t, f(t)) - K(t, t, \tilde{f}(t))| \geq \theta |f(t) - \tilde{f}(t)|, \quad 0 \leq t \leq T_1,$$

ce qui implique :

$$|f(\tau) - \tilde{f}(\tau)| \leq \frac{LT_1}{\theta} \max_{0 \leq \tau \leq T_1} |f(\tau) - \tilde{f}(\tau)|.$$

Puisque $\frac{LT_1}{\theta} < 1$, cela ne peut être vrai que si $f(\tau) = \tilde{f}(\tau)$ c'est-à-dire que la solution est unique.

L'existence et l'unicité sur l'intervalle $[T_1, T_2]$: f est la solution de l'équation (3.2)?

On a :

$$\begin{aligned} K(t, t, f(t)) - g'(t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) ds &= K(t, t, f(t)) - K(t, t, f_n(t)) \\ &\quad + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) ds. \\ \Rightarrow \left| K(t, t, f(t)) - g'(t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) ds \right| &\leq |K(t, t, f(t)) - K(t, t, f_n(t))| \\ &\quad + \int_0^t \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) \right| ds \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Puisque K et $\frac{\partial K}{\partial t} \in \mathcal{C}([a, b]^2, \mathbb{R})$, alors

$$\begin{cases} K(t, t, f_n(t)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} K(t, t, f(t)), \\ \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f_{n-1}(s)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)). \end{cases}$$

Après avoir établi l'existence et l'unicité dans $[0, T_1]$, nous allons passer à l'intervalle suivante $[T_1, T_2]$.

Nous écrivons l'équation comme :

$$K(t, t, f(t)) = G(t) - \int_{T_1}^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) ds, \quad (3.6)$$

avec

$$G(t) = g'(t) - \int_0^{T_1} \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(s)) ds, \quad (3.7)$$

où, dans (3.7), $f(s)$ est la solution obtenue à la première étape. Mais (3.6) juste une équation de Volterra dont l'origine est décalé de T_1 à T_2 .

Nous pouvons donc appliqué à nouveau l'étape de base. Notez que, $G(t)$ est continue, de sorte que toutes les hypothèses sont satisfait pour (3.6).

Ainsi, (3.6) une solution unique continue dans $[T_1, T_2]$. De sorte que la continuation de $f(t)$ est continue et nous avons une solution unique continue dans $[0, T_2]$. Cet argument peut être répété et comme il n'y'a qu'un nombre fini de sous intervalles dans $[0, T]$, nous construisons ainsi l'unique solution continue dans $[0, T]$.

Conclusion

Notre travail consiste à prouver la résolution d'équation intégrale de Volterra de première espèce linéaire et non linéaire.

Nous avons utilisé la méthode de Picard pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de cette équation, qui est basée sur la construction d'une suite qui converge vers la solution exacte de l'équation.

Bibliographie

- [1] D. Porter and D.S. Stirling : *Integral Equations : A Practical Treatment from Spectral Theory to Applications*, Cambridge, 2004.
- [2] D. S. Smart : *Fixed point theorems. Cambridge Tracts in Mathematics. No. 66. Cambridge University Press. London-New York, 1974.*
- [3] H. Brunner : *Collocations methods for Volterra integral and related functional equations*, Cambridge University Press, New York, 2004.
- [4] M. Bocher : *Integral Equations*, Cambridge University Press, London, 1974.
- [5] M. GHIAT, H. GUEBBAI : "*Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear volterra equation with weakly singular kernel*". *Mathématiques Appliquées et Modélisation*, 2018.
- [6] M. GHIAT, H. GUEBBAI, M. KURULAY, S. SEGNI : "*On the weakly singular integro-differential nonlinear Volterra equation depending in acceleration term*". *Volterra integro-differential equation*, 2020.
- [7] M. M. Lavrentev, V. G. Romanov, and S. P. Shishatski : *Ill-posed problems of mathematical physics and analysis. AMS Bookstore, vol. 64, 1986.*
- [8] P. Linz : "*Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*". *SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1985.*
- [9] S. KAMOUCHE, M. GHIAT : "*Analytical study of a system of nonlinear Volterra integral equations with weakly singular kernels*". . *Volterra integro-differential equation*, 2019.

- [10] S. SEGNI, M. GHIAT, H. GUEBBAI : *"New approximation method for Volterra non-linear integro-differential equation"*. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2018.