République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

Melle Touahri Rayane

Intitulé

Sur quelques inégalités intégrales fractionnaires

Dirigé par : Dr. Chiheb Tarek

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Benchaabane Abbes	MCA	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Chiheb Tarek	MCB	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Fatima Aissaoui	MCA	Univ-Guelma

Session Juin 2021

Remerciements

Premièrement et avant tout je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à *« ALLAH »* de m'avoir éclairé le chemin du savoir.

اللهم لك الحمد

Je souhaite remercier en second lieu mon encadreur, **Dr. CHIHEB TAREK** directeur de ce mémoire, pour avoir accepté de m'encadrer et pour m'avoir donné la possibilité de réaliser ce mémoire de Master.

Mes remerciements les plus chaleureux sont adressés au **Dr. FATIMA AISSAOUI** de l'honneur qu'elle me fait en acceptant d'examiner, évaluer et juger mon travail.

J'adresse mes remerciements au **Dr. BENCHAABANE ABBES** pour avoir accepté de faire part de ce jury et qui m'a fait l'honneur de présider cette soutenance.

Je remercie également tous les enseignants du

Département de Mathématiques.

Enfin, je remercie du fond du cœur mes parents:

ma **mère** et mon **père** qui m'ont apporté leur amour et

leurs encouragements.

Merci énormément.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail…

À l'âme de ma grande sœur **«Asma»**, tu resteras graver dans mon cœur à tous jamais, toi qui était, est et sera toujours ma moitié
رحمة الله عليها

À ce que j'ai de plus cher au monde, celle qui m'a bercé, élevé et qui n'a jamais cessé de formuler des prières à mon égard, **ma précieuse mère**.

À celui qui m'a transmis l'amour des mathématiques, celui qui m'a toujours encouragé à atteindre tous mes objectifs, **mon très cher père**.

À mes deux frères **Chiheb** et **Loqmane**

بارك الله فيهما

À toute **ma famille** et en particulier **mon oncle** qui m'a énormément aidé durant la réalisation de ce travail.

À celle qui m'a appris à être optimiste et qui m'a apporté son soutien moral et ses précieux conseils,
ma chère amie Wided.

Rayane

Abstract

In this dissertation, we will focus on the study of real and fractional integral inequalities.

In the first chapter, we recall some definitions of classical and generalized convexity, as well as some classes of functions.

In the second chapter, we quote some results already known in the literature.

While the last chapter will be entirely devoted to new Simpson-type inequalities and those of trapezoids via Caputo fractional derivatives

We mention that these results are submitted for possible publication.

Keywords:

Hermite-Hadamard inequality, Simpson inequality, weight functions, s-convex functions, bounded functions, Hölderian functions, fractional derivatives of Caputo.

ملخص

في هاته المذكرة، سوف نركّز على دراسة عدم المساواة الحقيقية والكسرية.

في الفصل الأول، نذكّر ببعض تعريفات التحدب الكلاسيكي والمعمم، بالإضافة إلى بعض فئات الوظائف.

في الفصل الثاني، سنذكّر ببعض النتائج المعروفة بالفعل في الأدب.

بينما سيخصص الفصل الأخير بالكامل لنتائج جديدة من نوع سمبسون وتلك الخاصة بشبه المنحرف عبر مشتقات كابوتوالكسرية.

نذكر أن هذه النتائج مقدمة للنشر المحتمل.

الكلمات المفتاحية:

عدم مساواة من نوع هرميت هدامار، عدم مساواة من نوع سمبسون، دوال الوزن، الدوال المحدبة، الدوال المحدودة، الدوال الهولديرية، مشتقات كابوتو الكسرية.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l'étude des inégalités intégrales réelles et fractionnaires.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la convexité classique et généralisée, ainsi que quelques classes de fonctions.

Dans le deuxième chapitre, nous citons quelques résultats déjà connus dans la littérature.

Alors que le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités de type Simpson et à celles des trapèzes via les dérivées fractionnaires de Caputo.

Nous mentionnons que ces résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Mots-clés :

Inégalité d'Hermite-Hadamard, inégalité de Simpson, fonctions de poids, fonctions s-convexes, fonctions bornées, fonctions holderiennes, dérivées fractionnaires de Caputo.

Table des matières

Introduction

Les inégalités jouent un rôle important dans diverses branches des mathématiques modernes telles que la théorie de l'espace de Hilbert, la théorie des probabilités et des statistiques, l'analyse réelle, l'analyse complexe, l'analyse numérique, la théorie qualitative des équations différentielles et des équations aux différences, etc.

Le fondement mathématique de cette théorie a été établi en partie au cours du $18^{ème}$ et $19^{ème}$ siècles par d'éminents mathématiciens tels que : Gauss, Cauchy et Čebyšev dans les années qui suivirent le sujet attira de nombreux mathématiciens : Poincaré, Lyapunov, Gronwall, Hölder, Hadamard, Pólya, Bellman et Ostrowski. La littérature dans ce contexte est vaste et variée, parmi les ouvrages dont on peut trouver une très bonne description de l'évolution historique des inégalités on peut consulter, Mitrinović, Pečarić et Fink [22, 23, 24].

Cette théorie ne cesse d'évoluer dans plusieurs directions et par différentes manières. Des nouvelles inégalités ont été établies, des généralisations, des raffinements, extensions ainsi que des variantes sur plusieurs axes unidimensionnels, multidimensionnels, fractionnaires et discrets.

L'objectif de ce mémoire est de faire une petite synthèse concernant les inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard classiques et fractionnaires et ensuite d'établir de nouvelles généralisations.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques types de convexités classiques et de convexités généralisées pour les fonctions à une variable, une esquisse concernant l'intégration fractionnaire au sens de Caputo, ainsi que quelques identités intégrales utiles pour notre étude.

Dans le deuxième chapitre nous annoncerons quelques résultats concernant les inégalités intégrales de type Simpson pondérées et celle de Hermite-Hadamard fractionnaire.

Le dernier chapitre sera entièrement consacré aux nouvelles inégalités parmi ces dernières, on note les inégalités pondérées de type Simpson et celles d'Hermite-Hadamard plus précisément des trapèzes via la dérivée fractionnaire au sens de Caputo. Ces nouveaux résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certains types de convexité ainsi que certaines identités de fonctions.

1.0.1 Convexité classique

Dans tout ce qui va suivre nous désignons par $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition 1.1 ([20]) *Un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ est dit convexe, si pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a*

$$tx + (1 - t)\, y \in I.$$

Définition 1.2 ([17]) *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite quasi-convexe sur I, si*

$$f\left(tx + (1 - t)\, y\right) \leq \max\left\{f\left(x\right), f\left(y\right)\right\}$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.3 ([32]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe, si*

$$f\left(tx + (1 - t)\, y\right) \leq tf\left(x\right) + (1 - t)\, f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.4 ([5]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite une P-fonction, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq f\left(x\right) + f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.5 ([13]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite une fonction de Godunova-Levin, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq \tfrac{1}{t} f\left(x\right) + \tfrac{1}{1-t} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0,1[$.

Définition 1.6 ([9]) *Une fonction positive $f : I \to \mathbb{R}$ est dite une fonction s-Godunova-Levin, où $s \in [0,1]$, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq \tfrac{1}{t^s} f\left(x\right) + \tfrac{1}{(1-t)^s} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0,1[$.

Définition 1.7 ([2]) *Une fonction positive $f : I \subset [0,\infty[\to \mathbb{R}$ est dite s-convexe au second sens pour un certain nombre fixé $s \in]0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^s f(x) + (1-t)^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.8 ([37]) *Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, f est dite tgs-convexe sur I, si l'inégalité*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq t\left(1-t\right)\left[f\left(x\right) + f\left(y\right)\right]$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0,1[$.

Définition 1.9 ([38]) *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite bêta-convexe sur I, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq t^{p}\left(1-t\right)^{q} f\left(x\right) + t^{q}\left(1-t\right)^{p} f\left(y\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0,1[$, où $p, q > -1$.

Définition 1.10 ([30]) *Une fonction positive $f : I \subset [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est dite α-convexe au premier sens pour un certain nombre fixé $\alpha \in]0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \ \leq t^{\alpha} f(x) + (1 - t^{\alpha}) f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0,1]$.

Définition 1.11 ([36]) *Une fonction $f : K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite une fonction MT-convexe, si*

$$f\left(tx + (1-t)\,y\right) \leq \tfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}} f\left(x\right) + \tfrac{\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}} f\left(y\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in]0,1[$.

Définition 1.12 ([39]) *Soit $h : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, où $]0,1[\subseteq J$. Une fonction non négative $f : I \to \mathbb{R}$ est dite h-convexe sur I, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t) f(x) + h(1-t) f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0,1[$.

Définition 1.13 ([43]) *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite (α, s)-convexe pour des certains $s \in [-1,1]$ et $\alpha \in]0,1]$, si*

$$f(tx + (1-t)y) \leq t^{\alpha s} f(x) + (1 - t^{\alpha})^{s} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0,1[$.

Définition 1.14 ([34]) *Une fonction $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ est dite m-convexe, où $m \in]0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq tf(x) + m(1 - t)f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.15 ([21]) *Une fonction $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ est dite (α, m)-convexe, où $\alpha, m \in]0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^{\alpha} f(x) + m(1 - t^{\alpha}) f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.16 ([11]) *Une fonction $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ est dite (s, m)-convexe, où $s, m \in]0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq t^{s} f(x) + m(1 - t)^{s} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.17 ([27]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite une fonction (α, m)-Godunova-Levin au premier sens, où $\alpha, m \in]0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq \tfrac{1}{t^{\alpha}} f(x) + m \tfrac{1}{1 - t^{\alpha}} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0, 1[$.

Définition 1.18 ([27]) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite fonction (s, m)-Godunova-Levin au second sens, où $s \in [0, 1]$ et $m \in]0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1 - t)y) \leq \tfrac{1}{t^{s}} f(x) + m \tfrac{1}{(1 - t)^{s}} f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0, 1[$.

Définition 1.19 ([26]) *Une fonction positive* $f : I \subset [0,\infty[\rightarrow [0,\infty[$ *est dite* s-(α,m)-*convexe au second sens où* $\alpha, m \in [0,1]$ *et* $s \in]0,1]$, *si*

$$f\left(tx+(1-t)\,y\right) \ \leq (1-t^{\alpha})^{s} f(x) + m\left(t^{\alpha}\right)^{s} f\left(\tfrac{y}{m}\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.20 ([29]) *Une fonction* $f : K \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *est dite* m-MT-*convexe, si*

$$f\left(tx+m\left(1-t\right)y\right) \leq \tfrac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}} f\left(x\right) + \tfrac{m\sqrt{1-t}}{2\sqrt{t}} f\left(y\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ *et tout* $t \in]0,1[$.

Définition 1.21 ([41]) *Une fonction positive* $f : [0,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *est dite* (m, tgs)-*convexe, si*

$$f\left(tx+m\left(1-t\right)y\right) \ \leq t\left(1-t\right)\left[f(x)+mf\left(y\right)\right]$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0,b]$, $m \in [0,1]$ *et tout* $t \in]0,1[$.

Définition 1.22 ([31]) *Soit* $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *une fonction positive. On dit que* $f : [0,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction* $(h$-$m)$-*convexe, si* f *est positive, de plus*

$$f\left(tx+m\left(1-t\right)y\right) \ \leq h\left(t\right) f(x) + mh\left(1-t\right) f\left(y\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0,b]$, $m \in [0,1]$ *et tout* $t \in]0,1[$.

Définition 1.23 ([28]) *Soit* $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. *Une fonction* $f : [0,b] \rightarrow \mathbb{R}$ *est dite* (α, m, h)-*convexe, si*

$$f\left(tx+m\left(1-t\right)y\right) \ \leq h\left(t^{\alpha}\right) f(x) + mh\left(1-t^{\alpha}\right) f\left(y\right)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in [0,b], (\alpha, m) \in]0,1] \times]0,1]$ *et tout* $t \in [0,1]$.

Définition 1.24 ([43]) *Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite (α, s, m)-convexe pour des certains nombre fixés $s \in [-1, 1]$ et $\alpha, m \in]0, 1]$, si*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^{\alpha s} f(x) + m(1 - t^{\alpha})^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in]0, 1[$.

1.0.2 Convexité généralisée

Le concept de fonctions préinvexes est une généralisation du concept de convexité classique, ce dernier a été introduit par Hanson [15].

Dans ce qui suit, nous considérons que le sous-ensemble $K \subseteq \mathbb{R}$ et les fonctions $f : K \to \mathbb{R}$ et $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$.

Définition 1.25 ([42]) *Un ensemble K est dit invexe au point x par rapport à η, si*

$$x + t\eta(y, x) \in K$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in [0, 1]$.

Remarque 1.1 *K est dit un ensemble invexe par rapport à η, si K est invexe en chaque point $x \in K$.*

Définition 1.26 ([42]) *Une fonction f sur l'ensemble invexe K est dite préinvexe par rapport à η, si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t) f(x) + t f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in [0, 1]$.

Définition 1.27 ([40]) *Une fonction positive f sur l'ensemble invexe $K \subseteq [0, \infty[$ est dite s-préinvexe au second sens par rapport à η, pour un certain nombre fixé $s \in]0, 1]$, si*

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1 - t)^s f(x) + t^s f(y)$$

est satisfaite pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in [0,1]$.

Condition C [25]**.** Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble invexe par rapport à η, alors pour tout $a, b \in K$ et tout $t \in [0,1]$, on a

$$\eta\left(a, a + t\eta(b,a)\right) = -\eta(b,a) \text{ et } \eta\left(a, b + t\eta(a,b)\right) = (1-t)\,\eta\left(a,b\right).$$

Remarque 1.2 *Il s'ensuit de la* ***Condition C***

$$\eta\left(a + t_2\eta(b,a), a + t_1\eta(b,a)\right) = (t_2 - t_1)\,\eta\left(b,a\right)$$

pour tout $a, b \in K$ et tout $t_1, t_2 \in [0,1]$.

1.0.3 Quelques fonctions spéciales

Fonction gamma

La fonction gamma d'Euler est une fonction complexe, considérée comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle sur l'ensemble des nombres complexes à l'exception des entiers négatifs, et est définie comme suit

Définition 1.28 **(**[4]**)** *Pour tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, on définit la fonction suivante, appelée fonction gamma comme suit*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Remarque 1.3 *Pour $z \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma(z) = (z-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (z-1)$.*

Fonction bêta

Définition 1.29 ([33]) *La fonction bêta d'Euler est définie pour tout nombres complexes x et y de parties réelles strictement positives par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt.$$

Remarque 1.4 *La relation entre la fonction gamma et la fonction bêta est la suivante*

$$B(x,y) = \tfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

1.0.4 Quelques classes de fonctions

Définition 1.30 ([10]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, f est dite bornée sur $[a,b]$, s'il existe $-\infty < m < M < +\infty$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, on a*

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Définition 1.31 ([35]) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est une fonction lipschitzienne de rapport $k > 0$ si pour tout $x, y \in I$, on a*

$$|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

1.1 Calcul fractionnaire

L'histoire de la dérivée d'ordre non entier s'étale de la fin du 17 ^{ème} siècle jusqu'à nos jours. Les spécialistes s'accordent pour faire remonter son début à la fin de l'année 1695, quand de L'Hôpital (aussi orthographié de L'Hospital) a soulevé une question à Leibniz en s'interrogeant sur la signification de $\frac{d^n y}{dx^n}$ lorsque $n = \frac{1}{2}$. Leibniz, dans sa réponse voulut engager une réflexion sur une possible théorie de la dérivation non entière, et a répondu à L'Hospital : "... cela conduirait à un paradoxe ...". Il a fallu attendre les années 1990 pour voir apparaître les premières conséquences utiles. La première tentative sérieuse de donner une définition logique pour la dérivée fractionnaire est due à Liouville qui a publié neuf documents dans ce sujet entre 1832 et 1837. Indépendamment, Riemann a proposé une approche qui s'est avérée essentiellement celle de Liouville, et c'est pourquoi elle porte le non "Approche de Riemann-Liouville". Plus tard, d'autres théories on fait leurs apparitions comme celle de Grünwald-Leitnikov, de Weyl et de Caputo etc. Cette théorie n'a cessé d'attirer l'attention des chercheurs compte tenu de l'étendue de son champ d'application en traitement d'images, biologie, génie civil, mécanique et équations différentielles.

1.1.1 Dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.32 ([18]) *Soit $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \{1, 2, 3, ...\}$, $n = [\alpha] + 1$, $f \in AC^n [a, b]$ qui est l'espace des fonctions ayant n^{th} dérivées absolument continues. Le côté droit et le côté gauche des dérivées fractionnaires de Caputo d'ordre α sont définis comme suit*

$$\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\,dt, x > a,$$

et

$$\left({}^cD^{\alpha}_{b^-}f\right)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int\limits_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\,dt, b > x.$$

Si $\alpha = n \in \{1, 2, 3, ...\}$ et la dérivée usuelle $f^{(n)}(x)$ d'ordre n existe, alors la dérivée fractionnaire de Caputo $\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(x)$ coïncide avec $f^{(n)}(x)$ tandis que $\left({}^cD^{\alpha}_{b^-}f\right)(x)$ coïncide avec $f^{(n)}(x)$ avec exactitude à un multiplicateur constant $(-1)^n$. En particulier on a pour $n = 1$ et $\alpha = 0$

$$\left({}^cD^{0}_{a^+}f\right)(x) = \left({}^cD^{0}_{b^-}f\right)(x) = f(x).$$

1.1.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.1 ([22]) *Soient f et g sont deux fonctions réelles définies sur $[a,b]$ où $a<b$, telle que $|f|$ et $|g|$ sont des fonctions p-intégrable et q-intégrable sur $[a,b]$ respectivement où $p,q>1$ tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors*

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.2 ([3]) *Soient $x=(x_i)_{i=1,2,...,n}$ et $p=(p_i)_{i=1,2,...,n}$ deux n-uplets strictement positives et soit $q\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, l'inégalité des moyens d'ordre q pondérés par p est définie par*

$$M_n^{[q]}=\begin{cases}\left(\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k}\sum\limits_{i=1}^{n}p_i x_i^q\right)^{\frac{1}{q}} & \text{pour } q\neq-\infty,0,+\infty,\\ \left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{p_i}\right)^{\sum\limits_{k=1}^{n}p_k} & \text{pour } q=0,\\ \min(x_1,x_2,...,x_n) & \text{pour } q=-\infty,\\ \max(x_1,x_2,...,x_n) & \text{pour } q=+\infty.\end{cases}$$

De plus, on a

$$M_n^{[q]}\leq M_n^{[r]},$$

pour $-\infty\leq q<r\leq+\infty$.

Théorème 1.3 ([3]) *La version intégrale du Théorème 1.2 est : pour $q\geq1$ et si $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b |f(x)\,g(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)|\,|g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1.1.3 Quelques identités intégrales importantes

Lemme 1.1 ([19]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$, et soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si $f', w \in L([a,b])$, alors*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)\,dx-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)\,f(x)\,dx \\
=\;&\tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\,f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 p_2(t)\,f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)dt\right),
\end{aligned}$$

où

$$p_1(t)=\tfrac{3}{4}\int_0^1 w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds-\int_0^t w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds,$$

et

$$p_2(t)=\tfrac{1}{4}\int_0^1 w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)\,b\right)ds-\int_0^t w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)\,b\right)ds.$$

Preuve. En intégrant par partie et en faisant le changement de variable $x = sa + (1-s)\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 p_1(t)\,f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
&= \int_0^1\left(\tfrac{3}{4}\int_0^1 w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right. \\
&\quad\left.-\int_0^t w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right)f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{-2}{b-a}\left(\tfrac{3}{4}\int\limits_0^1 w\left(sa+(1-s)\,\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right. \\
&\quad \left. -\int\limits_0^t w\left(sa+(1-s)\,\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right) f\left(ta+(1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&\quad -\tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 w\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) f\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
&= \tfrac{-2}{b-a}\left[-\tfrac{1}{4}f(a)-\tfrac{3}{4}f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right]\int\limits_0^1 w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds \\
&\quad -\tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 w\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) f\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt \\
&= \tfrac{1}{(b-a)^2}\left[f(a)+3f(\tfrac{a+b}{2})\right]\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} w(x)dx-\tfrac{4}{(b-a)^2}\int\limits_a^{\frac{a+b}{2}} w(x)f(x)dx.
\end{aligned}
$$

De même, on a

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_0^1 p_2\,(t)\, f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)dt \\
&= \tfrac{-2}{b-a}\left(\tfrac{1}{4}\int\limits_0^1 w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)\,b\right)ds\right. \\
&\quad \left. -\int\limits_0^t w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)\,b\right)ds\right) f\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\Bigg|_0^1 \\
&\quad -\tfrac{2}{b-a}\int\limits_0^1 w\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right) f\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)dt \\
&= \tfrac{1}{(b-a)^2}\left[3f(\tfrac{a+b}{2})+f(b)\right]\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} w(x)dx-\tfrac{4}{(b-a)^2}\int\limits_{\frac{a+b}{2}}^{b} w(x)f(x)dx.
\end{aligned}
$$

Puisque $w(x)$ est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, on a

$$\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} w(x)dx = \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} w(x)dx = \frac{1}{2}\int_{a}^{b} w(x)dx.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
&\tfrac{b-a}{4}(I_1+I_2) \\
=\ & \tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_{a}^{b} w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_{a}^{b} w(x)f(x)dx.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve. ■

Lemme 1.2 (**[12]**) *Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, une fonction telle que $g \in C^n([a,b])$. Si $g^{(n)}$ est symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, alors on a*

$$\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}g\right)(b) = (-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{b^-}g\right)(a) = \tfrac{1}{2}\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}g\right)(b) + (-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{b^-}g\right)(a)\right].$$

Preuve. Par symétrie de $g^{(n)}$ on a $g^{(n)}(a+b-x) = g^{(n)}(x)$, où $x \in [a,b]$. Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}g\right)(b) &= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{b} \tfrac{g^{(n)}(x)}{(b-x)^{\alpha-n+1}}dx \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{b} \tfrac{g^{(n)}(a+b-x)}{(x-a)^{\alpha-n+1}}dx \\
&= \tfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{a}^{b} \tfrac{g^{(n)}(x)}{(x-a)^{\alpha-n+1}}dx \\
&= (-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{b^-}g\right)(a).
\end{aligned}$$

D'où l'égalité requise. ■

Lemme 1.3 (**[12]**) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 \le a < b$, une fonction telle que $f \in C^{n+1}([a,b])$,* *et* $f^{(n+1)}(x) > 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$*. Si* $f^{(n+1)}$ *est convexe, alors l'égalité suivante pour les dérivées fractionnaires de Caputo est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(b) + (-1)^n\left({}^{c}D_{b^-}^{\alpha}f\right)(a)\right] \\ = & \tfrac{b-a}{2}\int\limits_0^1 \left((1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}\right) f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\,dt. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Preuve. Il est clair que

$$\begin{aligned} & \tfrac{b-a}{2}\int\limits_0^1 \left((1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}\right) f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\,dt \\ = & \tfrac{b-a}{2}\int\limits_0^1 \left((1-t)^{n-\alpha}\right) f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\,dt \\ & -\tfrac{b-a}{2}\int\limits_0^1 t^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\,dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Par un simple calcul, on a

$$\begin{aligned} & \tfrac{b-a}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\,dt \\ = & \tfrac{b-a}{2}\left[\tfrac{f^{(n)}(b)}{b-a} - (n-\alpha)\int\limits_a^b \left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)^{n-\alpha-1}\tfrac{f^{(n)}(x)}{b-a}dx\right] \\ = & \tfrac{f^{(n)}(b)}{2} - \tfrac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}}(-1)^n\left({}^{c}D_{b^-}^{\alpha}f\right)(a). \end{aligned} \tag{1.3}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} & -\tfrac{b-a}{2}\int\limits_0^1 t^{n-\alpha} f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\,dt \\ = & \tfrac{b-a}{2}\left[\tfrac{f^{(n)}(a)}{b-a} - (n-\alpha)\int\limits_a^b \left(\tfrac{b-x}{b-a}\right)^{n-\alpha-1}\tfrac{f^{(n)}(x)}{b-a}dx\right] \\ = & \tfrac{f^{(n)}(a)}{2} - \tfrac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left({}^{c}D_{a^+}^{\alpha}f\right)(b). \end{aligned} \tag{1.4}$$

En substituant (1.3) et (1.4) dans (1.2) nous obtenons (1.1). ■

Chapitre 2

Inégalités intégrales de type Hermite-Hadamard

Nous rappelons la fameuse inégalité d'Hermite-Hadamard pour les fonctions convexes, puis nous énonçons quelques-unes de ses généralisations.

Théorème 2.1 **(**[14, 16]**)** *Soit* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, une fonction convexe, alors*

$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.1}$$

Dragomir et Fitzpatrick, ont établi une généralisation de l'inégalité (2.1) pour les fonctions s-convexes, comme suit

Théorème 2.2 **(**[7]**)** *Supposons que* $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *est une fonction* s*-convexe au second sens, où* $s \in \,]0,1]$ *et* $a,b \in [0,\infty[$ *telle que* $a < b$*. Si* $f \in L([a,b])$*, alors l'inégalité suivante à lieu*

$$2^{s-1} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leq \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \tfrac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{2.2}$$

Dragomir et Agarwal, ont donné l'inégalité suivante liée à l'inégalité (2.1), connue sous le nom d'inégalité trapézoïdale (ou inégalité des trapèzes), donnée par le théorème suivant

Théorème 2.3 ([6]) *Soit $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur I°, $a, b \in I^\circ$ avec $a < b$. Si $|f'|$ est convexe sur $[a, b]$, alors l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\tfrac{f(a)+f(b)}{2} - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{(b-a)(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}. \tag{2.3}$$

Barani et ses collaborateurs, ont établi l'analogue préinvexe de l'inégalité (2.3) comme suit

Théorème 2.4 ([1]) *Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble invexe ouvert par rapport à $\theta : A \times A \to \mathbb{R}$. Supposons que $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable. Si $|f'|$ est préinvexe sur A alors, pour tout $a, b \in A$ avec $\theta(a, b) \neq 0$ l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\left|\tfrac{f(b)+f(b+\theta(a,b))}{2} - \tfrac{1}{\theta(a,b)}\int_b^{b+\theta(a,b)} f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{|\theta(a,b)|(|f'(a)|+|f'(b)|)}{8}.$$

L'inégalité suivante est connue dans la littérature sous le nom d'inégalité de Simpson

Théorème 2.5 ([8]) *Soit f est une fonction 4 fois continûment différentiable sur $]a, b[$ dont la dérivée quatrième est bornée, alors*

$$\left|\tfrac{1}{6}\left[f(a) + 4f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \tfrac{1}{2880}(b-a)^4 \left\|f^{(4)}\right\|_\infty,$$

est satisfaite, où $\left\|f^{(4)}\right\|_\infty = \sup\limits_{x\in]a,b[} \left|f^{(4)}(x)\right|$.

2.1 Inégalités intégrales de type Simpson pondérées pour les fonctions (α, m, h)-convexes

les résultats suivants ont été établis par Luo et ses collaborateurs (voir [19]), dans ce qui suit nous notons par $\|w\|_{[a,b],\infty} = \sup_{x\in[a,b]} |w(x)|$ où $w : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Théorème 2.6 ([19]) *Soit $f : \mathbb{R}_0 = [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}_0$ telle que $f' \in L([a,b])$, et soit $w : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, où $a, b \in \mathbb{R}_0$, $a < b$. Si $|f'|^q$ pour $q \geq 1$ est (α, m, h)-convexe sur $\left[0, \frac{b}{m}\right]$ pour des certains nombres fixés $(\alpha, m) \in]0,1] \times]0,1]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{5}{16}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left[\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right|\left(h\left(t^\alpha\right)|f'(a)|^q + h\left(1-t^\alpha\right)m\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&+\left.\left[\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right|\left(h\left(t^\alpha\right)\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q + h\left(1-t^\alpha\right)m\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Preuve. En appliquant le Lemme 1.1 et en utilisant le fait que

$$\|w\|_{[a,\frac{a+b}{2}],\infty} = \|w\|_{[\frac{a+b}{2},b],\infty} \leq \|w\|_{[a,b],\infty},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}\int_0^1 w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds - \int_0^t w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right|\right. \\
&\times\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}\int_0^1 w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)\,b\right)ds-\int_0^t w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)\,b\right)ds\right| \\
&\times\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|dt\Big) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}\int_0^1 ds-\int_0^t ds\right|\left|f'\left(ta+(1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}\int_0^1 ds-\int_0^t ds\right|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|dt\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|\left|f'\left(ta+(1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|dt\right). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité des moyennes de puissances, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty} \\
&\times\left(\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|\left|f'\left(ta+(1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{b-a}{4}\left(\tfrac{5}{16}\right)^{1-\frac{1}{q}}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|\left|f'\left(ta+(1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right), \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

où, nous avons utilisé le fait que

$$
\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|dt=\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|dt=\tfrac{5}{16}. \qquad (2.7)
$$

De la (α, m, h)-convexité de $|f'|^q$ sur $\left[0, \frac{b}{m}\right]$, on a

$$\left|f'\left(ta + (1-t)\,\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q \leq h\left(t^\alpha\right)|f'(a)|^q + h\left(1-t^\alpha\right) m \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2m}\right)\right|^q, \tag{2.8}$$

et

$$\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)\,b\right)\right|^q \leq h\left(t^\alpha\right)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q + h\left(1-t^\alpha\right) m \left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q. \tag{2.9}$$

En remplaçant (2.8) et (2.9) dans (2.6), nous obtenons le résultat souhaité. ■

Corollaire 2.1 ([19]) *Si on prend $q = 1$, le Théorème 2.6, devient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a) + 6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\; & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4} - t\right| \left(h\left(t^\alpha\right)|f'(a)| + h\left(1-t^\alpha\right) m \left|f'\left(\tfrac{a+b}{2m}\right)\right|\right) dt\right. \\
&\left. + \int_0^1 \left|\tfrac{1}{4} - t\right| \left(h\left(t^\alpha\right)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right| + h\left(1-t^\alpha\right) m \left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|\right) dt\right).
\end{aligned}$$

Théorème 2.7 ([19]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.6, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a) + 6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\; & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{5}{16}\right)^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left[\int_0^1 \left(h\left(1 - \left(\tfrac{1-t}{2}\right)^\alpha\right) m \left|f'\left(\tfrac{a}{m}\right)\right|^q + h\left(\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^\alpha\right)|f'(b)|^q\right) dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left. + \left[\int_0^1 \left(h\left(\left(\tfrac{t}{2}\right)^\alpha\right)|f'(a)|^q + h\left(1 - \left(\tfrac{t}{2}\right)^\alpha\right) m \left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right) dt\right]^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Preuve. En utilisant le fait que $ta+(1-t)\frac{a+b}{2}=\left(1-\frac{1-t}{2}\right)a+\frac{1-t}{2}b$ et de la (α,m,h)-convexité de $|f'|^q$ sur $\left[0,\frac{b}{m}\right]$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q\\
=\ &\left|f'\left(\left(1-\tfrac{1-t}{2}\right)a+\tfrac{1-t}{2}b\right)\right|^q\\
\leq\ &h\left(1-\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^\alpha\right)m\left|f'\left(\tfrac{a}{m}\right)\right|^q+h\left(\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^\alpha\right)\left|f'(b)\right|^q, \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

de même, on a

$$\begin{aligned}
&\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q\\
\leq\ &h\left(\left(\tfrac{t}{2}\right)^\alpha\right)\left|f'(a)\right|^q+h\left(1-\left(\tfrac{t}{2}\right)^\alpha\right)m\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q. \qquad (2.12)
\end{aligned}$$

En remplaçant (2.11) et (2.12) dans (2.6) nous obtenons l'inégalité requise. ■

Le résultat suivant traite le cas où $|f'|^q$ est (α,m,h)-convexe où $q>1$.

Théorème 2.8 ([19]) *Soit $f:\mathbb{R}_0=[0,+\infty[\,\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}_0$, telle que $f'\in L([a,b])$, et soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$, où $a,b\in\mathbb{R}_0$, $a<b$. Si $|f'|^q$ pour $q>1$ est (α,m,h)-convexe sur $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ pour des certains nombres fixés $(\alpha,m)\in\,]0,1]\times]0,1]$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx-\frac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right|\\
\leq\ &\frac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}Q^{1-\frac{1}{q}}\left(\left[\int_0^1\left(h\left(t^\alpha\right)|f'(a)|^q+h\left(1-t^\alpha\right)m\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\left.+\left[\int_0^1\left(h\left(t^\alpha\right)\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q+h\left(1-t^\alpha\right)m\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right), \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

où

$$Q=\frac{(q-1)(3^{(2q-1)/(q-1)}+1)}{(2q-1)2^{2(2q-1)/(q-1)}}.$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Hölder pour (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right| \left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right| dt \\
&+\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right| \left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right| dt \\
\leq\ & \left(\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right|^{\frac{q}{q-1}} dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 \left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right|^{\frac{q}{q-1}} dt\right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\int_0^1 \left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Substituons (2.8) et (2.9) dans (2.14), et utilisons la quantité ci-dessous

$$\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right|^{\frac{q}{q-1}} dt = \int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right|^{\frac{q}{q-1}} dt = \tfrac{(q-1)(3^{(2q-1)/(q-1)}+1)}{(2q-1)2^{2(2q-1)/(q-1)}} = Q$$

on obtient l'inégalité (2.13). La preuve est ainsi achevée. ■

Théorème 2.9 ([19]) *Sous les hypothèses du Théorème 2.8, on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\left\|w\right\|_{[a,b],\infty} Q^{1-\frac{1}{q}} \\
&\times\left(\left[\int_0^1 \left(h\left(1-\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right)m\left|f'\left(\tfrac{a}{m}\right)\right|^q+h\left(\left(\tfrac{1-t}{2}\right)^{\alpha}\right)\left|f'(b)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\int_0^1 \left(h\left(\left(\tfrac{t}{2}\right)^{\alpha}\right)\left|f'(a)\right|^q+h\left(1-\left(\tfrac{t}{2}\right)^{\alpha}\right)m\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right)dt\right]^{\frac{1}{q}}\right). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Preuve. La preuve du Théorème 2.9 est analogue à celle du Théorème 2.7 en remplaçant $ta+(1-t)\frac{a+b}{2}$ par $\frac{1+t}{2}a+\frac{1-t}{2}b$ et $\frac{a+b}{2}t+(1-t)b$ par $\frac{t}{2}a+\left(1-\frac{t}{2}\right)b$. ■

Théorème 2.10 ([19]) *Soit $f:\mathbb{R}_0=[0,+\infty[\ \to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}_0$, telle que $f'\in L([a,b])$, et soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par* *rapport à $\frac{a+b}{2}$, où $a,b \in \mathbb{R}_0$, $a < b$. Si $|f'|^q$ est (α,m,s)-convexe sur $\left[0,\frac{b}{m}\right]$ pour des certains nombres fixés $(\alpha,m) \in \left]0,1\right] \times \left]0,1\right]$, $q,p > 1$ et $p^{-1}+q^{-1}=1$, alors*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{1+3^{p+1}}{(p+1)4^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left[\tfrac{1}{1+s\alpha}|f'(a)|^q+\left(2^{1-s}-\tfrac{1}{1+s\alpha}\right)m\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\tfrac{1}{1+s\alpha}\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q+\left(2^{1-s}-\tfrac{1}{1+s\alpha}\right)m\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\right]^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Preuve. Puisque $|f'|^q$ est (α,m,s)-convexe sur $\left[0,\frac{b}{m}\right]$, et en utilisant l'inégalité de Hölder pour (2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx\right| \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^1\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q dt\right]^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \tfrac{b-a}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\tfrac{1+3^{p+1}}{(p+1)4^{p+1}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\left[|f'(a)|^q\int_0^1 t^{\alpha s}dt+m\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2m}\right)\right|^q\int_0^1(1-t^\alpha)^s dt\right]^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left[\left|f'(\tfrac{a+b}{2})\right|^q\int_0^1 t^{\alpha s}dt+m\left|f'\left(\tfrac{b}{m}\right)\right|^q\int_0^1(1-t^\alpha)^s dt\right]^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant l'inégalité $(1-t^\alpha)^s \leq 2^{1-s}-t^{s\alpha}$ pour $t\in[0,1]$ avec un certain nombre fixé $\alpha \in]0,1]$ et $s\in[0,1]$, on a

$$\int_0^1(1-t^\alpha)^s dt \leq \int_0^1\left(2^{1-s}-t^{s\alpha}\right)dt = 2^{1-s}-\tfrac{1}{1+s\alpha}. \tag{2.18}$$

Aussi on a

$$\int_0^1 t^{\alpha s} dt = \frac{1}{1+s\alpha}. \tag{2.19}$$

Le résultat voulu découle par substitution de (2.18) et (2.19) dans (2.17). La preuve est ainsi terminée. ■

Nous allons maintenant discuter le cas où la dérivée f' de la fonction considérée est bornée.

Théorème 2.11 ([19]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, et soit $a, b \in I^\circ$, tels que $a < b$ et $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. On suppose que f' est intégrable sur $[a,b]$ et qu'il existe deux constantes $m < M$ telles que $-\infty < m \leq f'(x) \leq M < +\infty$ pour tout $x \in [a,b]$, alors*

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{8(b-a)} \left[f(a) + 6f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b w(x)f(x)dx \right. \\ &\left. - \frac{(b-a)(m+M)}{8} \left[\int_0^1 p_1(t)\, dt + \int_0^1 p_2(t)\, dt \right] \right| \\ \leq\ & \frac{5(b-a)(M-m)}{64} \|w\|_{[a,b],\infty}, \end{aligned} \tag{2.20}$$

où $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont définies dans le Lemme 1.1.

Preuve. D'après le Lemme 1.1, on a

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1}{8(b-a)} \left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx \\
= \ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right]dt\right. \\
& \left. + \int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)-\tfrac{m+M}{2}+\tfrac{m+M}{2}\right]dt\right) \\
= \ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right]dt\right. \\
& \left. + \int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)-\tfrac{m+M}{2}\right]dt\right) \\
& + \tfrac{(b-a)(m+M)}{8}\left(\int_0^1 p_1(t)\,dt + \int_0^1 p_2(t)\,dt\right).
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
& T := \tfrac{1}{8(b-a)} \left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx \\
& -\tfrac{(b-a)(m+M)}{8}\left(\int_0^1 p_1(t)\,dt + \int_0^1 p_2(t)\,dt\right) \\
= \ & \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-\tfrac{m+M}{2}\right]dt\right. \\
& \left. + \int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)-\tfrac{m+M}{2}\right]dt\right).
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$|T| \leq \tfrac{b-a}{4} \left(\int_0^1 |p_1(t)| \left| f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - \tfrac{m+M}{2} \right| dt \right.$$

$$\left. + \int_0^1 |p_2(t)| \left| f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)b\right) - \tfrac{m+M}{2} \right| dt \right)$$

$$\leq \frac{(b-a)(M-m)}{8} \left(\int_0^1 |p_1(t)| \, dt + \int_0^1 |p_2(t)| \, dt \right).$$

Puisque f' satisfait $-\infty < m \leq f'(x) \leq M < +\infty$, on obtient

$$m - \tfrac{m+M}{2} \leq f'(x) - \tfrac{m+M}{2} \leq M - \tfrac{m+M}{2},$$

ce qui implique que

$$\left| f'(x) - \tfrac{m+M}{2} \right| \leq \tfrac{M-m}{2}.$$

En utilisant la symétrie de w par rapport à $\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
|T| &\leq \tfrac{(b-a)(M-m)}{8} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left| \tfrac{3}{4} \int_0^1 w\left(sa + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds - \int_0^t w\left(sa + (1-s)\tfrac{a+b}{2}\right) ds \right| dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \left| \tfrac{1}{4} \int_0^1 w\left(s\tfrac{a+b}{2} + (1-s)b\right) ds - \int_0^t w\left(s\tfrac{a+b}{2} + (1-s)b\right) ds \right| dt \right) \\
&\leq \tfrac{(b-a)(M-m)}{8} \|w\|_{[a,b],\infty} \\
&\quad \times \left(\int_0^1 \left| \tfrac{3}{4} \int_0^1 ds - \int_0^t ds \right| dt + \int_0^1 \left| \tfrac{1}{4} \int_0^1 ds - \int_0^t ds \right| dt \right) \\
&\leq \tfrac{5(b-a)(M-m)}{64} \|w\|_{[a,b],\infty}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Le résultat ci-dessous traite le cas où la dérivée f' de la fonction considérée satisfait à la condition de Lipschitz.

Théorème 2.12 ([19]) *Soit $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur I°, et soit $a, b \in I^\circ$, tels que $a < b$ et $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. On suppose que f' est intégrable sur $[a,b]$ et satisfait à la condition de Lipschitz pour un certain $L > 0$, alors*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{1}{8(b-a)} \left[f(a) + 6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b w(x)f(x)dx \right. \\ & \left. - \tfrac{b-a}{4} \left(f'(a) \int_0^1 p_1(t)\, dt + f'(b) \int_0^1 p_2(t)\, dt \right) \right| \\ \leq \; & \tfrac{41(b-a)^2 L}{3.2^8} \left\| w \right\|_{[a,b],\infty}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

où $p_1(t)$ et $p_2(t)$ sont définies dans le Lemme 1.1.

Preuve. D'après le Lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{8(b-a)} \left[f(a) + 6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \int_a^b w(x)dx - \tfrac{1}{b-a} \int_a^b w(x)f(x)dx \\ = \; & \tfrac{b-a}{4} \left(\int_0^1 p_1(t) \left[f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(a) + f'(a) \right] dt \right. \\ & \left. + \int_0^1 p_2(t) \left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)b\right) - f'(b) + f'(b) \right] dt \right) \\ = \; & \tfrac{b-a}{4} \left(\int_0^1 p_1(t) \left[f'\left(ta + (1-t)\tfrac{a+b}{2}\right) - f'(a) \right] dt \right. \\ & \left. + \int_0^1 p_2(t) \left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2} + (1-t)b\right) - f'(b) \right] dt \right) \\ & + \tfrac{b-a}{4} \left(\int_0^1 p_1(t) f'(a)\, dt + \int_0^1 p_2(t) f'(b)\, dt \right). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
R &= \tfrac{1}{8(b-a)}\left[f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]\int_a^b w(x)dx-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b w(x)f(x)dx \\
&\quad -\tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\,f'(a)\,dt+\int_0^1 p_2(t)\,f'(b)\,dt\right) \\
&= \tfrac{b-a}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)\right]dt\right. \\
&\quad \left.+\int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)-f'(b)\right]dt\right).
\end{aligned}$$

Puisque f' satisfait à la condition de L-Lipschitzienne, on a

$$\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)\right|\leq L\left|ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}-a\right|=L\,|1-t|\left(\tfrac{b-a}{2}\right),$$

et

$$\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)-f'(b)\right|\leq L\left|t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b-b\right|=L\,|t|\left(\tfrac{b-a}{2}\right).$$

D'où

$$|R|\leq\tfrac{(b-a)^2L}{8}\left(\int_0^1(1-t)\,|p_1(t)|\,dt+\int_0^1 t\,|p_2(t)|\,dt\right).$$

En utilisant la symétrie de w par rapport à $\frac{a+b}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \tfrac{(b-a)^2L}{8}\,\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1(1-t)\left|\tfrac{3}{4}-t\right|dt+\int_0^1 t\left|\tfrac{1}{4}-t\right|dt\right) \\
&\leq \tfrac{41(b-a)^2L}{3.2^8}\,\|w\|_{[a,b],\infty}.
\end{aligned}$$

La preuve est ainsi achevée. ■

2.2 Inégalités de type trapèzes via les dérivées fractionnaires de Caputo

Théorème 2.13 ([12]) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$, une fonction telle que $f \in C^{n+1}([a,b])$. Si $\left|f^{(n+1)}\right|$ est convexe sur $[a,b]$, alors l'inégalité suivante pour les dérivées fractionnaires de Caputo est satisfaite*

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD_{a^+}^{\alpha}f\right)(b) + (-1)^n\left({}^cD_{b^-}^{\alpha}f\right)(a)\right]\right| \\ \leq\; & \frac{b-a}{2(n-\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{n-\alpha}}\right)\left[\left|f^{(n+1)}(a)\right| + \left|f^{(n+1)}(b)\right|\right]. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.3 et la convexité de $\left|f^{(n+1)}\right|$, on a

$$\begin{aligned} & \left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2} - \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD_{a^+}^{\alpha}f\right)(b) + (-1)^n\left({}^cD_{b^-}^{\alpha}f\right)(a)\right]\right| \\ \leq\; & \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|\left((1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}\right)\right| \left|f^{(n+1)}(ta+(1-t)b)\right| dt \\ \leq\; & \frac{b-a}{2}\int_0^1 \left|\left((1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}\right)\right| \left(t\left|f^{(n+1)}(a)\right| + (1-t)\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right) dt \\ =\; & \frac{b-a}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left((1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha}\right) \left(t\left|f^{(n+1)}(a)\right| + (1-t)\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right) dt \\ & +\frac{b-a}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t^{n-\alpha} - (1-t)^{n-\alpha}\right) \left(t\left|f^{(n+1)}(a)\right| + (1-t)\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right) dt \\ =\; & \frac{b-a}{2}\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha+1}\right) dt\right.\right. \\ & \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t^{n-\alpha+1} - t(1-t)^{n-\alpha}\right) dt\right) \\ & + \left|f^{(n+1)}(b)\right|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left((1-t)^{n-\alpha+1} - t^{n-\alpha}(1-t)\right) dt\right. \\ & \left.\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(t^{n-\alpha}(1-t) - (1-t)^{n-\alpha+1}\right) dt\right)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{b-a}{2}\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right| + \left|f^{(n+1)}(b)\right|\right) \\
&\quad \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(t(1-t)^{n-\alpha} - t^{n-\alpha+1}\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(t^{n-\alpha+1} - t(1-t)^{n-\alpha}\right) dt \right) \\
&= \tfrac{b-a}{2(n-\alpha+1)} \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-\alpha}\right) \left(\left|f^{(n+1)}(a)\right| + \left|f^{(n+1)}(b)\right|\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est ainsi achevée. ■

Chapitre 3

Nouveaux résultats

Ce chapitre est entièrement consacré aux nouveaux résultats que nous avons développés et soumis pour une éventuelle publication. Dans la première section, nous traiterons des inégalités pondérées de type Simpson pour des fonctions dont le module des dérivées premières est quasi-convexe au moyen du Lemme 1.1 donné dans [19]. Cependant, dans la deuxième section, nous traiterons des inégalités trapézoïdales fractionnaires pour les fonctions s-préinvexes via des dérivées fractionnaires au sens de Caputo.

3.1 Inégalités pondérées de type Simpson pour les fonctions quasi-convexes

Théorème 3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]a,b[$ telle que $f' \in L([a,b])$ avec $0 \leq a < b$, et soit $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si $|f'|$ est quasi-convexe, alors on a*

$$\begin{aligned} & \left| \tfrac{1}{8} \left(f(a) + 6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \left(\int_a^b w(u)\, du \right) - \int_a^b w(u) f(u)\, du \right| \\ \leq \; & \tfrac{5(b-a)^2}{64} \|w\|_{[a,b],\infty} \left(\max\left\{ \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|, |f'(a)| \right\} + \max\left\{ \left| f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \right|, |f'(b)| \right\} \right). \end{aligned}$$

Preuve. En multipliant les deux membres de l'identité du Lemme 1.1 par $(b-a)$, en appliquant la valeur absolue aux deux membres de l'identité résultante, et en utilisant la quasi-convexité de $|f'|$, on a

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1 |p_1(t)|\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
& \left.+\int_0^1 |p_2(t)|\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right) \\
=\ & \frac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1\left|\frac{3}{4}\int_0^1 w\left(sa+(1-s)\frac{a+b}{2}\right)ds-\int_0^t w\left(sa+(1-s)\frac{a+b}{2}\right)ds\right|\right. \\
& \times\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt \\
& +\int_0^1\left|\frac{1}{4}\int_0^1 w\left(s\frac{a+b}{2}+(1-s)b\right)ds-\int_0^t w\left(s\frac{a+b}{2}+(1-s)b\right)ds\right| \\
& \left.\times\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(a)|\right\}\int_0^1\left|\frac{3}{4}\int_0^1 ds-\int_0^t ds\right|dt\right. \\
& \left.+\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}\int_0^1\left|\frac{1}{4}\int_0^1 ds-\int_0^t ds\right|dt\right) \\
=\ & \frac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(a)|\right\}\int_0^1\left|\frac{3}{4}-t\right|dt\right. \\
& \left.+\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}\int_0^1\left|\frac{1}{4}-t\right|dt\right) \\
=\ & \frac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(a)|\right\}\left(\int_0^{\frac{3}{4}}\left(\frac{3}{4}-t\right)dt+\int_{\frac{3}{4}}^1\left(t-\frac{3}{4}\right)dt\right)\right. \\
& \left.+\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}-t\right)dt+\int_{\frac{1}{4}}^1\left(t-\frac{1}{4}\right)dt\right)\right) \\
=\ & \frac{5(b-a)^2}{64}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(a)|\right\}+\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,|f'(b)|\right\}\right),
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que

$$\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right| dt = \int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right| dt = \tfrac{5}{16}. \tag{3.1}$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.1 *Dans le Théorème 3.1, si on prend* $w(u)=\frac{1}{b-a}$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{5(b-a)}{64}\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(a)\right|\right\}+\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|,\left|f'(b)\right|\right\}\right).
\end{aligned}$$

Corollaire 3.2 *Dans le Théorème 3.1, additionnellement si*

1/ $|f'|$ *est croissante, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{5(b-a)^2}{64}\left\|w\right\|_{[a,b],\infty}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'(b)\right|\right).
\end{aligned}$$

2/ $|f'|$ *est décroissante, alors on a*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \tfrac{5(b-a)^2}{64}\left\|w\right\|_{[a,b],\infty}\left(\left|f'(a)\right|+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

Théorème 3.2 *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $]a,b[$ *telle que* $f'\in L([a,b])$ *avec* $0\leq a<b$, *et soit* $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue et symétrique par*

rapport à $\frac{a+b}{2}$. Si $|f'|^q$ est quasi-convexe où $q>1$ avec $p^{-1}+q^{-1}=1$, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^{p+1}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\|w\|_{[a,b],\infty} \\
&\times\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,|f'(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,|f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de Hölder et la quasi-convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)f(u)\,du\right| \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1|p_1(t)|\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|dt\right. \\
&\left.+\int_0^1|p_2(t)|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|dt\right) \\
\leq\ & \frac{(b-a)^2}{4}\left(\left(\int_0^1|p_1(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1|p_2(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \frac{(b-a)^2}{4}\left[\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}\int_0^1 w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds-\int_0^t w\left(sa+(1-s)\tfrac{a+b}{2}\right)ds\right|^P dt\right)^{\frac{1}{p}}\right. \\
&\times\left(\int_0^1\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&+\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}\int_0^1 w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)b\right)ds-\int_0^t w\left(s\tfrac{a+b}{2}+(1-s)b\right)ds\right|^P dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\left.\times\left(\int_0^1\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left[\left(\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|^P dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&= \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left[\left(\int_0^{\frac{3}{4}}\left(\tfrac{3}{4}-t\right)^p dt+\int_{\frac{3}{4}}^1\left(t-\tfrac{3}{4}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\right.\\
&\quad\times\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\quad\left.+\left(\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\tfrac{1}{4}-t\right)^p dt+\int_{\frac{1}{4}}^1\left(t-\tfrac{1}{4}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&= \tfrac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\\
&\quad\times\left[\left(\tfrac{1}{p+1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{p+1}+\tfrac{1}{p+1}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\tfrac{1}{p+1}\left(\tfrac{1}{4}\right)^{p+1}+\tfrac{1}{p+1}\left(\tfrac{3}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right]\\
&= \tfrac{(b-a)^2}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^{p+1}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\|w\|_{[a,b],\infty}\\
&\quad\times\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le fait que

$$
\int_0^1\left|\tfrac{3}{4}-t\right|^P dt=\int_0^1\left|\tfrac{1}{4}-t\right|^p dt=\tfrac{1}{p+1}\left[\left(\tfrac{3}{4}\right)^{p+1}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^{p+1}\right].
$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.3 *Dans le Théorème 3.2, si on prend* $w(u)=\frac{1}{b-a}$*, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
&\leq \tfrac{b-a}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\tfrac{3}{4}\right)^{p+1}+\left(\tfrac{1}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\quad\times\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(a)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'(b)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.4 *Dans le Théorème 3.2, additionnellement si*

1/ $|f'|$ *est croissante, alors on a*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}\left(f\left(a\right)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)\left(\int\limits_a^b w\left(u\right)du\right)-\int\limits_a^b w\left(u\right)f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)^2}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{p+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|+\left|f'\left(b\right)\right|\right).\end{aligned}$$

2/ $|f'|$ *est décroissante, alors on a*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}\left(f\left(a\right)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)\left(\int\limits_a^b w\left(u\right)du\right)-\int\limits_a^b w\left(u\right)f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)^2}{4(p+1)^{\frac{1}{p}}}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{p+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left|f'\left(a\right)\right|+\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right).\end{aligned}$$

Théorème 3.3 *Soit* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction différentiable sur* $]a,b[$ *telle que* $f'\in L([a,b])$ *avec* $0\leq a<b$, *et soit* $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ *une fonction continue et symétrique par rapport à* $\frac{a+b}{2}$. *Si* $|f'|^q$ *est quasi-convexe, où* $q\geq 1$, *alors on a*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}\left(f\left(a\right)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)\left(\int\limits_a^b w\left(u\right)du\right)-\int\limits_a^b w\left(u\right)f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ &\frac{5(b-a)^2}{64}\|w\|_{[a,b],\infty}\\ &\times\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'\left(a\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\left\{\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|^q,\left|f'\left(b\right)\right|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right).\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyens d'ordre q, et la quasi-convexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{8}\left(f\left(a\right)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(b\right)\right)\left(\int\limits_a^b w\left(u\right)du\right)-\int\limits_a^b w\left(u\right)f\left(u\right)du\right|\\ \leq\ &\frac{(b-a)^2}{4}\left(\int\limits_0^1\left|p_1\left(t\right)\right|\left|f'\left(ta+\left(1-t\right)\frac{a+b}{2}\right)\right|dt\right.\\ &\left.+\int\limits_0^1\left|p_2\left(t\right)\right|\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+\left(1-t\right)b\right)\right|dt\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{(b-a)^2}{4}\left(\left(\int_0^1 |p_1(t)|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |p_1(t)|\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^1 |p_2(t)|\,dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 |p_2(t)|\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&\leq \frac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right|\left|f'\left(ta+(1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right| dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right|\left|f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&\leq \frac{(b-a)^2}{4}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right| dt\right)\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right.\\
&\quad\left.+\left(\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right| dt\right)\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right)\\
&= \frac{5(b-a)^2}{64}\|w\|_{[a,b],\infty}\\
&\quad\times\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé (3.1). La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.5 *Dans le Théorème 3.3, si on prend* $w(u)=\frac{1}{b-a}$*, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)\,du\right|\\
&\leq \frac{5(b-a)}{64}\left(\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(a)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\max\left\{\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|^q, |f'(b)|^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.6 *Dans le Théorème 3.3, additionnellement si*

1/ $|f'|$ est croissante, alors on a

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)\,f(u)\,du\right|\\
&\leq \frac{5(b-a)^2}{64}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|+|f'(b)|\right).
\end{aligned}
$$

2/ $|f'|$ est décroissante, alors on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)\,f(u)\,du\right| \\
\leq\; & \tfrac{5(b-a)^2}{64}\,\|w\|_{[a,b],\infty}\left(|f'(a)|+\left|f'\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right|\right).
\end{aligned}$$

Le résultat ci-dessous est vrai pour les fonctions hölderiennes

Théorème 3.4 *Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $]a,b[$ telle que $f'\in L([a,b])$ avec $0\leq a<b$, et soit $w:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique par rapport à $\frac{a+b}{2}$. S'il existe $H>0$ et $0<r\leq 1$ tel que $|f'(x)-f'(y)|\leq H|x-y|^r$, alors on a*

$$|\Upsilon|\leq H\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r}\tfrac{1}{2(r+1)(r+2)}\left(\tfrac{1}{2\times 4^r}+3r+2\right)\|w\|_{[a,b],\infty},$$

où

$$\begin{aligned}
\Upsilon \;=\;& \tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)\,f(u)\,du \\
&-\tfrac{(b-a)^2}{4}\left(f'(a)\int_0^1 p_1(t)\,dt+f'(b)\int_0^1 p_2(t)\,dt\right). \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{8}\left(f(a)+6f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)\left(\int_a^b w(u)\,du\right)-\int_a^b w(u)\,f(u)\,du \\
=\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\,f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 p_2(t)\,f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)dt\right) \\
=\;& \tfrac{(b-a)^2}{4}\left(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)+f'(a)\right]dt\right. \\
&\left.+\int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)\,b\right)-f'(b)+f'(b)\right]dt\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tfrac{(b-a)^2}{4}\Bigg(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)\right]dt+f'(a)\int_0^1 p_1(t)\,dt \\
&\quad+\int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)-f'(b)\right]dt+f'(b)\int_0^1 p_2(t)\,dt\Bigg). \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

Donc, d'après (3.3), on a

$$
\begin{aligned}
\Upsilon &= \tfrac{(b-a)^2}{4}\Bigg(\int_0^1 p_1(t)\left[f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)\right]dt \\
&\quad+\int_0^1 p_2(t)\left[f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)-f'(b)\right]dt\Bigg), \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

où Υ est définie par (3.2). En appliquant la valeur absolue aux deux côtés de (3.4), et en utilisant le fait que f' est une fonction hölderienne, on a

$$
\begin{aligned}
|\Upsilon| &\leq \tfrac{(b-a)^2}{4}\Bigg(\int_0^1 |p_1(t)|\left|f'\left(ta+(1-t)\tfrac{a+b}{2}\right)-f'(a)\right|dt \\
&\quad+\int_0^1 |p_2(t)|\left|f'\left(t\tfrac{a+b}{2}+(1-t)b\right)-f'(b)\right|dt\Bigg) \\
&\leq \tfrac{(b-a)^2}{4}H\Bigg(\int_0^1 |p_1(t)|\left|(1-t)\left(\tfrac{b-a}{2}\right)\right|^r dt \\
&\quad+\int_0^1 |p_2(t)|\left|t\left(\tfrac{a-b}{2}\right)\right|^r dt\Bigg) \\
&= H\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r}\left(\int_0^1 |p_1(t)|(1-t)^r dt+\int_0^1 |p_2(t)|\,t^r dt\right) \\
&\leq H\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r}\|w\|_{[a,b],\infty}\left(\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right|(1-t)^r dt+\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right|t^r dt\right) \\
&= H\left(\tfrac{b-a}{2}\right)^{2+r}\tfrac{1}{2(r+1)(r+2)}\left(\tfrac{1}{2\times 4^r}+3r+2\right)\|w\|_{[a,b],\infty},
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé la quantité ci-dessous

$$
\int_0^1 \left|\tfrac{3}{4}-t\right|(1-t)^r dt=\int_0^1 \left|\tfrac{1}{4}-t\right|t^r dt=\tfrac{1}{4(r+1)(r+2)}\left(\tfrac{1}{2\times 4^r}+3r+2\right).
$$

La preuve est terminée. ■

Remarque 3.1 *Le Théorème 3.4 sera réduit en Théorème 3.2 de* [19], *si on prend* $r = 1$ *et on remplace* H *par* L.

3.1.1 Applications à des moyens spéciaux

Nous examinons les moyens des nombres réels arbitraire a, b.

Le moyen arithmétique : $A(a,b) = \frac{a+b}{2}$.

Le moyen p-Logarithmique : $L_p(a,b) = \left(\frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{(p+1)(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}$, $a, b > 0$, $a \neq b$ et $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

Proposition 3.1 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $0 < a < b$, *alors on a*

$$\left|A\left(a^4, b^4\right) + 3A^4(a,b) - 4L_4^4(a,b)\right| \leq \frac{5(b-a)}{4}\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + b^3\right).$$

Preuve. L'affirmation découle du Théorème 3.1 avec $w(u) = 1$ appliqué à la fonction $f(x) = x^4$. ■

Proposition 3.2 *Soit* $a, b \in \mathbb{R}$ *avec* $0 < a < b$, *alors on a*

$$\left|A\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}\right) + 3A^{\frac{1}{2}}(a,b) - 4L_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(a,b)\right| \leq \frac{(b-a)\sqrt{7}}{8\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{2}{a+b}}\right).$$

Preuve. L'affirmation découle du Théorème 3.2 avec $w(u) = \frac{1}{b-a}$ et $q = 2$, appliqué à la fonction $f(x) = 2\sqrt{x}$. ■

3.2 Inégalités de type trapèzes pour les fonctions s-préinvexes via les dérivées fractionnaires de Caputo

Lemme 3.1 *Soit* $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f \in C^{n+1}([a, a+\eta(b,a)])$ *et* $f^{(n+1)} \in L([a, a+\eta(b,a)])$ *avec* $\eta(b,a) > 0$, *alors l'égalité suivante pour les dérivées* *fractionnaires de Caputo est satisfaite*

$$\begin{aligned}&\tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^{n}\left({}^{c}D_{(a+\eta(b,a))^{-}}^{\alpha}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\\ =\;&\tfrac{\eta(b,a)}{2}\int_{0}^{1}\left(t^{n-\alpha}-(1-t)^{n-\alpha}\right)f^{(n+1)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)dt.\end{aligned}$$

Preuve. Posons

$$I=I_1-I_2, \tag{3.5}$$

où

$$I_1=\int_{0}^{1}t^{n-\alpha}f^{(n+1)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)dt,$$

et

$$I_2=\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^{n-\alpha}f^{(n+1)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)dt.$$

En intégrant par parties I_1, on obtient

$$\begin{aligned}I_1 &= \tfrac{1}{\eta(b,a)}f^{(n)}\left(a+\eta\left(b,a\right)\right)-\tfrac{n-\alpha}{\eta(b,a)}\int_{0}^{1}t^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)dt\\ &= \tfrac{1}{\eta(b,a)}f^{(n)}\left(a+\eta\left(b,a\right)\right)-\tfrac{n-\alpha}{(\eta(b,a))^{2}}\int_{a}^{a+\eta(b,a)}\left(\tfrac{u-a}{\eta(b,a)}\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(u\right)du\\ &= \tfrac{1}{\eta(b,a)}f^{(n)}\left(a+\eta\left(b,a\right)\right)-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{(\eta(b,a))^{n-\alpha+1}}\left(-1\right)^{n}\left({}^{c}D_{(a+\eta(b,a))^{-}}^{\alpha}f\right)\left(a\right). \end{aligned}\tag{3.6}$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned}I_2 &= -\tfrac{1}{\eta(b,a)}f^{(n)}\left(a\right)+\tfrac{n-\alpha}{\eta(b,a)}\int_{0}^{1}\left(1-t\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)dt\\ &= -\tfrac{1}{\eta(b,a)}f^{(n)}\left(a\right)+\tfrac{n-\alpha}{(\eta(b,a))^{n-\alpha+1}}\int_{a}^{a+\eta(b,a)}\left(a+\eta\left(b,a\right)-u\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(u\right)du\\ &= -\tfrac{1}{\eta(b,a)}f^{(n)}\left(a\right)+\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{(\eta(b,a))^{n-\alpha+1}}\left({}^{c}D_{a^{+}}^{\alpha}f\right)\left(a+\eta\left(b,a\right)\right). \end{aligned}\tag{3.7}$$

En Substituant (3.6) et (3.7) dans (3.5), ensuite multipliant l'égalité résultante par $\frac{\eta(b,a)}{2}$ on obtient le résultat souhaité. ■

Théorème 3.5 *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $f\in C^{n+1}([a,a+\eta(b,a)])$ et $\eta(b,a)>0$. Si $\left|f^{(n+1)}\right|$ est s-préinvexe pour un certain nombre fixé $s\in]0,1]$, alors l'inégalité suivante pour les dérivées fractionnaires de Caputo est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^\alpha_{a+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^\alpha_{(a+\eta(b,a))-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right|\\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(B(n-\alpha+1,s+1)+\tfrac{1}{n+s-\alpha+1}\right)\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right),
\end{aligned}$$

où B est la fonction bêta.

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, et la s-préinvexité de $\left|f^{(n+1)}\right|$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^\alpha_{a+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^\alpha_{(a+\eta(b,a))-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right|\\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1 t^{n-\alpha}\left|f^{(n+1)}(a+t\eta(b,a))\right|dt\right.\\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{n-\alpha}\left|f^{(n+1)}(a+t\eta(b,a))\right|dt\right)\\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1 t^{n-\alpha}\left((1-t)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+t^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right)dt\right.\\
&\left.+\int_0^1(1-t)^{n-\alpha}\left((1-t)^s\left|f^{(n+1)}(a)\right|+t^s\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right)dt\right)\\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|\int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^s dt+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\int_0^1 t^{n+s-\alpha}dt\right.\\
&\left.+\left|f^{(n+1)}(a)\right|\int_0^1(1-t)^{n+s-\alpha}dt+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\int_0^1 t^s(1-t)^{n-\alpha}dt\right)\\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^s dt+\int_0^1 t^{n+s-\alpha}dt\right)\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right)\\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(B(n-\alpha+1,s+1)+\tfrac{1}{n+s-\alpha+1}\right)\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right).
\end{aligned}$$

La preuve est terminée.

Corollaire 3.7 *Dans le Théorème 3.5, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right|\\ \leq\ &\frac{\eta(b,a)}{2(n-\alpha+1)}\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right).\end{aligned}$$

■

Corollaire 3.8 *Dans le Théorème 3.5, si on choisit $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(b)+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(b)^-}f\right)(a)\right]\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{2}\left(B(n-\alpha+1,s+1)+\frac{1}{n+s-\alpha+1}\right)\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right).\end{aligned}$$

De plus, si on prend $s=1$, on obtient

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(b)+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(b)^-}f\right)(a)\right]\right|\\ \leq\ &\frac{b-a}{2(n-\alpha+1)}\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|+\left|f^{(n+1)}(b)\right|\right).\end{aligned}$$

Théorème 3.6 *Soit $f:[a,a+\eta(b,a)]\to\mathbb{R}$ une fonction telle que $f\in C^{n+1}([a,a+\eta(b,a)])$ et $\eta(b,a)>0$. Si $\left|f^{(n+1)}\right|^q$ est s-préinvexe pour un certain nombre fixé $s\in(0,1]$ où $p,q>1$ avec $p^{-1}+q^{-1}=1$, alors l'inégalité suivante pour les dérivées fractionnaires de Caputo est satisfaite*

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right|\\ \leq\ &\eta(b,a)\left(\frac{1}{np-\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité de

Hölder, et la s-préinvexité de $|f'|^q$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right| \\
\leq\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\left(\int_0^1 t^{np-\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{(n+1)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_0^1(1-t)^{np-\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left|f^{(n+1)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
=\ & \tfrac{\eta(b,a)}{2}\left(\left(\int_0^1 t^{np-\alpha p}dt\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_0^1(1-t)^{np-\alpha p}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\right) \\
&\times\left(\int_0^1\left|f^{(n+1)}\left(a+t\eta\left(b,a\right)\right)\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
\leq\ & \eta\left(b,a\right)\left(\tfrac{1}{np-\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left((1-t)^s\left|f^{(n+1)}\left(a\right)\right|^q+t^s\left|f^{(n+1)}\left(b\right)\right|^q\right)dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
=\ & \eta\left(b,a\right)\left(\tfrac{1}{np-\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.9 *Dans le Théorème 3.6, si on prend $s=1$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2}-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right| \\
\leq\ & \eta\left(b,a\right)\left(\tfrac{1}{np-\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Corollaire 3.10 *Dans le Théorème 3.6, si on choisit $\eta\left(b,a\right)=b-a$, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\left|\tfrac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2}-\tfrac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD^{\alpha}_{a^+}f\right)(b)+(-1)^n\left({}^cD^{\alpha}_{(b)^-}f\right)(a)\right]\right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\tfrac{1}{np-\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\tfrac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{s+1}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

De plus, si on prend $s = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2} - \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^{c}D^{\alpha}_{a^{+}}f\right)(b) + (-1)^{n}\left({}^{c}D^{\alpha}_{(b)^{-}}f\right)(a)\right]\right| \\
\leq\ & (b-a)\left(\frac{1}{np-\alpha p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}}{2}\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Théorème 3.7 *Soit $f : [a, a+\eta(b,a)] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^{n+1}([a, a+\eta(b,a)])$ et $\eta(b,a) > 0$. Si $\left|f^{(n+1)}\right|^{q}$ est s-préinvexe où $q \geq 1$, alors l'inégalité suivante pour les dérivées fractionnaires de Caputo est satisfaite*

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^{c}D^{\alpha}_{a^{+}}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^{n}\left({}^{c}D^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^{-}}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{n-\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(B(n-\alpha+1,s+1)\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}+\frac{1}{n-\alpha+s+1}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{n-\alpha+s+1}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}+B(n-\alpha+1,s+1)\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\right),
\end{aligned}$$

où B est la fonction bêta.

Preuve. D'après le Lemme 3.1, les propriétés de la valeur absolue, l'inégalité des moyens d'ordre q, et la s-préinvexité de $|f'|^{q}$, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^{c}D^{\alpha}_{a^{+}}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^{n}\left({}^{c}D^{\alpha}_{(a+\eta(b,a))^{-}}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right| \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\left(\int_{0}^{1}t^{n-\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{0}^{1}t^{n-\alpha}\left|f^{(n+1)}(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{n-\alpha}dt\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{n-\alpha}\left|f^{(n+1)}(a+t\eta(b,a))\right|^{q}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
\leq\ & \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{n-\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\int_{0}^{1}t^{n-\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}+t^{s}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\left.+\left(\int_{0}^{1}(1-t)^{n-\alpha}\left((1-t)^{s}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^{q}+t^{s}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^{q}\right)dt\right)^{\frac{1}{q}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{n-\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q \int_0^1 t^{n-\alpha}(1-t)^s\,dt + \left|f^{(n+1)}(b)\right|^q \int_0^1 t^{n-\alpha+s}dt\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left. + \left(\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q \int_0^1 (1-t)^{n-\alpha+s}\,dt + \left|f^{(n+1)}(b)\right|^q \int_0^1 t^s(1-t)^{n-\alpha}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right) \\
&= \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{n-\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(B(n-\alpha+1,s+1)\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q + \frac{1}{n-\alpha+s+1}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n-\alpha+s+1}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q + B(n-\alpha+1,s+1)\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

La preuve est terminée. ■

Corollaire 3.11 *Dans le Théorème 3.7, si on prend $s=1$, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(a+\eta(b,a))}{2} - \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)\left[\left({}^cD^\alpha_{a^+}f\right)(a+\eta(b,a))+(-1)^n\left({}^cD^\alpha_{(a+\eta(b,a))^-}f\right)(a)\right]}{2(\eta(b,a))^{n-\alpha}}\right| \\
&\leq \frac{\eta(b,a)}{2}\left(\frac{1}{n-\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(\frac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+(n-\alpha+1)\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{(n-\alpha+1)\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.12 *Dans le Théorème 3.7, si on choisit $\eta(b,a)=b-a$, on obtient*

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2} - \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD^\alpha_{a^+}f\right)(b)+(-1)^n\left({}^cD^\alpha_{(b)^-}f\right)(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{n-\alpha+1}\right)^{1-\frac{1}{q}}\left(\left(B(n-\alpha+1,s+1)\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q + \frac{1}{n-\alpha+s+1}\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n-\alpha+s+1}\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q + B(n-\alpha+1,s+1)\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

De plus, si on prend $s=1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f^{(n)}(a)+f^{(n)}(b)}{2} - \frac{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)}{2(b-a)^{n-\alpha}}\left[\left({}^cD^\alpha_{a^+}f\right)(b)+(-1)^n\left({}^cD^\alpha_{(b)^-}f\right)(a)\right]\right| \\
&\leq \frac{b-a}{2(n-\alpha+1)^{1-\frac{1}{q}}}\left(\left(\frac{\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+(n-\alpha+1)\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{(n-\alpha+1)\left|f^{(n+1)}(a)\right|^q+\left|f^{(n+1)}(b)\right|^q}{(n-\alpha+1)(n-\alpha+2)}\right)^{\frac{1}{q}}\right).
\end{aligned}
$$

Conclusion

La problématique de ce mémoire était d'étudier les inégalités intégrales fractionnaires de type Hermite-Hadamard, et d'autre part essayer d'établir de nouvelles estimations concernant ce genre d'inégalités.

Dans la première partie, nous avons rappelé certains types de convexité classique et généralisée ainsi que certaines identités.

Dans la seconde partie nous avons étudié quelques inégalités de type Hermite-Hadamard pondérées et fractionnaires.

Et dans la troisième partie nous avons discuté des nouveaux résultats concernant les inégalités intégrales pondérées de type Simpson ainsi que les inégalités intégrales des trapèzes via les dérivées fractionnaires au sens de Caputo. Ces résultats sont soumis pour une éventuelle publication.

Bibliographie

[1] A. Barani, A. G. Ghazanfari and S. S. Dragomir, Hermite-Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex. J. Inequal. Appl. 2012, 2012 :247, 9 pp.

[2] W. W. Breckner, Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen. (German) Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 23 (1978), no. 37, 13–20.

[3] P. S. Bullen, D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Means and their inequalities. Translated and revised from the Serbo-Croatian. Mathematics and its Applications (East European Series), 31. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1988.

[4] P. J. Davis, Leonhard Euler's integral : A historical profile of the gamma function. Amer. Math. Monthly 66 1959 849–869.

[5] S. S. Dragomir, J. E. Pečarić, and L. E. Persson, Some inequalities of Hadamard type. Soochow J. Math. 21 (1995), no. 3, 335–341.

[6] S. S. Dragomir and R. P. Agarwal, Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula. Appl. Math. Lett. 11 (1998), no. 5, 91–95.

[7] S. S. Dragomir and S. Fitzpatrick, The Hadamard inequalities for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Math. 32 (1999), no. 4, 687–696.

[8] S. S. Dragomir, R. P. Agarwal and P. Cerone, On Simpson's inequality and applications. J. Inequal. Appl. 5 (2000), no. 6, 533–579.

[9] S. S. Dragomir, nequalities of Hermite-Hadamard type for h-convex functions on linear spaces. Proyecciones 34 (2015), no. 4, 323–341.

[10] S. S. Dragomir, Ostrowski and trapezoid type inequalities for generalized Riemann-Liouville fractional integrals of absolutely continuous functions with bounded derivatives. RGMIA Res. Rep. Collect., (2017). 20.

[11] N. Eftekhari, Some remarks on (s, m)-convexity in the second sense. J. Math. Inequal. 8 (2014), no. 3, 489–495.

[12] G. Farid, A. Javed and S. Naqvi, Hadamard and Fejér-Hadamard inequalities and related results via Caputo fractional derivatives. Bull. Math. Anal. Appl. 9 (2017), no. 3, 16–30.

[13] E. K. Godunova and V. I. Levin, Inequalities for functions of a broad class that contains convex, monotone and some other forms of functions. (Russian) Numerical mathematics and mathematical physics (Russian), 138–142, 166, Moskov. Gos. Ped. Inst., Moscow, 1985.

[14] J. Hadamard, Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, J. Math. Pures Appl., 58 (1893), 171-215.

[15] M. A. Hanson, On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), no. 2, 545–550.

[16] C. Hermite, Sur deux limites d'une intégrale définie, Mathesis 3 (1883), 82.

[17] D. A. Ion, Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions. An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. 34 (2007), 83–88.

[18] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[19] C.-Y. Luo, T.-S. Du, M. Kunt and Y. Zhang, Certain new bounds considering the weighted Simpson-like type inequality and applications. J. Inequal. Appl. 2018, Paper No. 332, 20 pp.

[20] O. L. Mangasarian, Nonlinear programming. McGraw-Hill Book Co., New York-London-Sydney 1969.

[21] V. G. Mihesan, A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. Convex, Cluj-Napoca, 1993. (Romania), vol. 1.

[22] D. S. Mitrinović, Analytic inequalities. In cooperation with P. M. Vasić. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165 Springer-Verlag, New York-Berlin 1970.

[23] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Classical and new inequalities in analysis. Mathematics and its Applications, 61. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

[24] D. S. Mitrinović, J. E. Pecarić and A. M. Fink, Inequalities for functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic, Dordrecht, 1994.

[25] S. R. Mohan and S. K. Neogy, On invex sets and preinvex functions. J. Math. Anal. Appl. 189 (1995), no. 3, 901–908.

[26] M. Muddassar, M.I. Bhatti and W. Irshad, Generalisations of integral inequalities of Hermite-Hadamard type through convexity. Bull. Aust. Math. Soc. 88 (2013), no. 2, 320–330.

[27] M. A. Noor, K. I. Noor and M. U. Awan, Fractional Ostrowski inequalities for (s, m)-Godunova-Levin functions. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 30 (2015), no. 4, 489–499.

[28] M. A. Noor, M. U. Awan, K. I. Noor and T.M. Rassias, On (α, m, h)-convexity. Appl. Math. Inf. Sci. 12 (2018), no. 1, 145–150.

[29] O. Omotoyinbo and A. Mogbademu, Some New Hermite-Hadamard Integral inequalities for convex functions. Int. J. Sci. Innovation Tech. 1 (2014), no. 1, 001-012.

[30] W. Orlicz, A note on modular spaces. I. Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys. 9 1961 157–162.

[31] M. E. Özdemir, A. O. Akdemir and E. Set, On $(h-m)$-convexity and Hadamard-type inequalities. arXiv preprint arXiv :1103.6163. (2011).

[32] J. E. Pečarić, F. Proschan and Y. L. Tong, Convex functions, partial orderings, and statistical applications. Mathematics in Science and Engineering, 187. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[33] E. D. Rainville, Special functions. Reprint of 1960 first edition. Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y., 1971.

[34] G. Toader, Some generalizations of the convexity. Proceedings of the colloquium on approximation and optimization (Cluj-Napoca, 1985), 329–338, Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 1985.

[35] K.-L. Tseng, S.-R. Hwang and K.-C. Hsu, Hadamard-type and Bullen-type inequalities for Lipschitzian functions and their applications. Comput. Math. Appl. 64 (2012), no. 4, 651–660.

[36] M. Tunç, H. Yildirim, On MT-convexity, arXiv preprint, 2012 (2012), 7 pages.

[37] M. Tunç, E. Göv, and Ü. Şanal, On tgs-convex function and their inequalities. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 30 (2015), no. 5, 679–691.

[38] M. Tunç, U. Sanal and E. Gov, Some Hermite-Hadamard inequalities for $beta$-convex and its fractional applications. New Trends in Mathematical Sciences, 3 (2015), no 4, p. 18.

[39] S. Varošanec, On h-convexity. J. Math. Anal. Appl. 326 (2007), no. 1, 303–311.

[40] Y. Wang, S.-H. Wang and F. Qi, Simpson type integral inequalities in which the power of the absolute value of the first derivative of the integrand is s-preinvex. Facta Univ. Ser. Math. Inform. 28 (2013), no. 2, 151–159.

[41] H. Wang, T. Du and Y. Zhang, k-fractional integral trapezium-like inequalities through (h,m)-convex and (α,m)-convex mappings. J. Inequal. Appl. 2017, Paper no. 311, 20 pp.

[42] T. Weir and B. Mond, Pre-invex functions in multiple objective optimization. J. Math. Anal. Appl. 136 (1988), no. 1, 29–38.

[43] B.-Y. Xi, D. D. Gao and F. Qi, Integral Inequalities of Hermite–Hadamard Type for (α, s)-Convex and (α, s, m)-Convex Functions. HAL Archives. 2018. Available online : https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01761678 (accessed on 24 October 2018).