République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et **Analyse numérique**

Par :

TRIKI Bahya et ROUABHIA Khawla

Intitulé

Sur la contrôlabilité approchée des équations d'évolution fractionnaire avec la dérivée fractionnaire de Hilfer.

Dirigé par : Dr. KERBOUA Mourad

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. BOUHADJAR Slimane	MCB	Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. KERBOUA Mourad	MCA	Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Pr. DEBBOUCHE Amar	PROF	Univ-Guelma

Session Juillet 2021

Remerciement

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur, Monsieur KERBOUA MOURAD.

A ma chère mère BARKA et mon cher frère HOSAYN et KAHOUL, les secrets de ma force, merci pour tous vos sacrifices, merci d'être simplement ma famille.
Pour mon père AHMED, que Dieu lui fasse miséricorde

Je veux dédier ce souvenir à mon mari HAROUN

Je le remercie pour leur encouragement à compléter ce travail.

A mes chers amies KHAWLA et NADJLA, AMINA, ABLA, YOUSRA, BOUCHRA, SALWA, WAFA, RAYEN… Merci pour vos encouragements.

Nous remercions le chef de département de mathématiques Mr Chiheb Tarek.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont enseignées et toutes les personnes qui m'ont aidée durant ma formation.

BAHYA

Remerciement

Je remercie avant tout Allah, le tout puissant de m'avoir aidé pour réaliser ce travail.

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et présenter mon plus profond respect à mon encadreur, Monsieur KERBOUA MOURAD.

A mes chers parents (KEBLOUTI, CHRIFA) secrets de ma force, merci pour tous vos sacrifices pour que vos enfants Grandissent prospèrent, merci d'être simplement ma famille.

Je dédie cette réussite A mes frères AYMEN et SOUFAIN.

A mes chers amies BAHYA et HANA, LAMIS, SOURAI, RAYEN… Merci pour vos encouragements.

Nous remercions le chef de département de mathématiques Mr Chiheb Tarek.

Je tiens également à remercier toutes les personnes qui m'ont enseignées et toutes les personnes qui m'ont aidée durant ma formation.

KHAWLA

Table des matières

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions la contrôlabilité approchée d'une claase d'équation différentielle non linéaire à evolution fractionnaire immpliquant une dérivée fractionnaire de Hilfer (Riemann-Liouville généralisée) dans un espace de Hilbert. L'objectif principal de notre mémoire est de présenter les conditions suffisantes appropriées, pour que notre système puisse être approximativement contrôlable. L'outil mathématique suivie ici est basée sur le calcul fractionnaire, le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semi-groupe.

Mots clés : contrôlabilité approchée, équation d'évolution fractionnaire, dérivée fractionnaire au sens de Hilfer, point fixe.

Abstract

In this memory, we study the approximate controllability of a class of nonlinear differential equation with fractional evolution involving a fractional Hilfer (generalized Riemann-Liouville) derivative in a Hilbert space. The main objective of our memory is to present the appropriate sufficient conditions, so that our system can be approximately controllable. The mathematical tool followed here is based on fractional calculus, the fixed point theorem combined with the semigroup theory.

r **Keywords :** approximate controllability, fractional evolution equation, Hilfer fractional derivative, fixed point.

ملخص

في هذه المذكـرة، ندرس قابلية التحـكم التقريبيـة لفئة من المعادلات التفاضليـة الكـسريـة غير الخطية الذي يتضمن مشتق هيلفـر الكسـري (ريمـان-ليوفيــل) في فضاء هيلبرت. الهدف الرئيسي من الدراسـة في هذه المذكـرة هو تقديم الشــروط الكافيـة المناسبـة، بحيث يمكن التحكم تقريبا في نظامنا. الأداة الرياضيـة المتبعـة هنا تعتمـد على حساب التفاضل والتكامل الكسري ، نظرية النقطة الثابتة مجتمعة مع نظرية شبه الزمـرة.

الكلمات المفتاحية : قابليـة التحكـم التقريبية، معادلة التطـور الكسـري، مشتـق هيـلفر الكسري، النقطــة الثابتــة.

Introduction

De nombreux problèmes mathématiques, physiques, biologiques et techniques peuvent être décrits par des équations aux dérivées partielles d'ordres fractionnaires. En fait, les équations différentielles d'ordres fractionnaires sont considérées comme un modèle alternatif aux équations différentielles non linéaires. Au cours des deux dernières décennies, les équations différentielles d'ordres fractionnaires (voir, par exemple [7], [12], [16], [14] et leurs références) ont attiré de nombreux scientifiques, et des contributions notables ont été apportées à la fois à la théorie et les applications des équations différentielles d'ordres fractionnaires. Plusieurs chercheurs ont étudié les résultats d'existence de problèmes de valeurs initiales et aux limites impliquant des équations différentielles d'ordres fractionnaires.
La motivation de ces travaux découle à la fois du développement de la théorie du calcul fractionnaire lui-même et des applications de telles constructions dans divers domaines, y compris la physique, la chimie, l'aérodynamique, l'électrodynamique du milieu complexe, ...etc.

Récemment, ZHOU ET JIAO [18] ont discuté de l'existence de solutions douces d'évolution fractionnaire et d'équations d'évolution neutre dans un espace arbitraire de Banach dans lequel la solution Mild (douce) est définie en utilisant la fonction de densité de probabilité et la théorie des semigroupes. En utilisant la même méthode, ZHOU ET AL. [19] ont donné une définition appropriée d'une solution Mild (douce) pour une équation d'évolution impliquant un dérivé fractionnaire de Riemann – Liouville. HILFER [5] a proposé une dérivée fractionnaire de Riemann – Liouville généralisée, en abrégé, qui inclut la dérivée fractionnaire de Riemann – Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo. Très récemment, GU ET TRUJILLO [4] ont étudié une classe d'équations d'évolution impliquant des dérivés fractionnaires de Hilfer.
Le comportement qualitatif le plus important d'un système dynamique est la contrôlabilité. Cela signifie qu'il est possible de diriger n'importe quel état initial du système vers n'importe quel état final dans un certain temps fini en utilisant un contrôle admissible. Le concept de la contrôlabilité joue un rôle majeur dans les espaces de dimensions finies et infinies, c'est-à-dire des systèmes représentés par des équations différentielles ordinaires et des équations différentielles partielles respectivement. Il est donc naturel d'étendre ce concept à des systèmes dynamiques représentés par des équations différentielles fractionnaires.
Récemment, la contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution semi-linéaires fractionnaires dans des espaces abstraits a été étudiée par de nombreux chercheurs. Dans [15], SAKTHIVEL ET AL. a étudié la contrôlabilité approchée des systèmes différentiels fractionnaires semi-linéaires. KUMAR ET SUKAVANAM [8], [17] ont obtenu un nouvel ensemble de conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée d'une classe de systèmes de contrôle de retard semi-linéaires d'ordre fractionnaire en utilisant le principe de contraction et le théorème du point fixe de Schauder.
MAHMUDOV [9] a formulé et prouvé un nouvel ensemble de conditions suffisantes pour la contrôlabilité approchée des équations d'évolution de type neutre fractionnaire dans les espaces de Banach en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.

MAHMUDOV ET MCKIBBEN [11] ont étudié la contrôlabilité approchée des équations d'évolution fractionnaire impliquant une dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville généralisée (Hilfer) dans un éspace de Hilbert.
Ce mémoire est organisé comme suit :
Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base du calcul fractionnaire à savoir : Fonctions spéciales et Intégrales et dérivées d'ordres fractionnaires.
Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié au théorie des semi-groupes, où on présente les notions de base de cette théorie et introduisons le concept du solution Mild (Douce), ainsi on fait rappel sur les transformée de Laplace et les théorèmes du point fixe qui sont trés utils à la résolution de notre problème.
Dans **le trosième chapitre**, nous étudions la contrôlabilité approchée des équations différentielles à evolution fractionnaire immpliquant de dirivée fractionnaire de Hilfer. Les principales techniques reposent sur le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semigroupe et le calcul fractionnaire.

Chapitre 1

Outils Fonctionnels et Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre, nous rappellons quelques notions de base que nous allons utiliser dans les chapitres suivantes tels que : Espaces fonctionnels, Fonctions spéciales (Fonction Gamma, Fonction Bêta) et le Calcul fractionnaire (intégrale fractionnaire, Dérivée fractionnaire de (Riemann-Liouville, Caputo et Hilfer).

1.1 Espaces fonctionnels

Avant de présenter les définitions des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaires, il convient d'introduire les espaces fonctionnels suivants :
Soit $\Omega = [a, b]$ $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.1.1 *Pour $1 \leq p \leq \infty$, on définit*
1. *L'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, des $(classes\ de)$ fonctions f réelles ou complexes sur Ω telles que f est mesurable et $\int_a^b |f(t)|^p dt < \infty$, muni de la norme*

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p \leq \infty.$$

2. *L'espace* $L^{\infty}(\Omega)$, $p=\infty$, *des (classes de) fonctions mesurables bornées presque partout (p.p.) sur* Ω *muni de la norme*

$$||f||_{\infty} = \underset{t\in\Omega}{ess\sup}|f(t)| = \inf\{K \geq 0;\ |f(t)| \leq K,\ p.p.\ sur\ \Omega\}.$$

DÉFINITION 1.1.2 *Soit* $\Omega=[a,b]$ *un intervalle fini de* $\mathbb{R}$*, alors l'espace des fonctions absolûment continues, noté* $AC^1(\Omega)$*, est défini comme l'espace des fonctions* $f:\Omega\to\mathbb{C}$*, dérivable presque partout telle que* $f' \in L^1(\Omega)$*.*
On a ainsi

$$f \in AC^1(\Omega) \Longleftrightarrow f(t) = f(a) + \int_a^t f'(s)ds,\ t\in\Omega.$$

Pour $n\geq 2$ *nous notons par* $AC^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* $f:\Omega\to\mathbb{C}$*, telles que* $f^{(k)}\in C(\Omega)$ $k=1,...,n-1$ *et* $f^{(n-1)}\in AC^1(\Omega)$*.*

Notation *: On notera* $AC^1(\Omega)$ *par* $AC(\Omega)$. L'espace $AC^n(\Omega)$ *est caractérisé par le résultat suivant*

LEMME 1.1.1 *Une fonction* $f \in AC^n(\Omega)$*, si et seulement si elle s'écrit sous la forme*

$$f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1} f^{(n)}(s)\ ds + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k,\ \forall t\in\Omega.$$

1.2 Fonctions spéciales

1.2.1 La Fonction Gamma

La fonction Gamma d'Euler est une fonction de base du calcul fractionnaire. Cette fonction généralise le factoriel $n!$.

DÉFINITION 1.2.1 ([2] , [3]**)** *La fonction Gamma est définie par l'intégrale*

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt,\ x>0 \tag{1.1}$$

ou parfois

$$\Gamma(x) = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}t^{2x-1}dt,\ x>0$$

avec $\Gamma(1)=1;\ \Gamma(0_+)=+\infty.$

Quelques propriétés sur la fonction Gamma

Soit $x \neq 0,\ n \in \mathbb{N}$, alors :

1. $\Gamma(n+1) = n!$

2. $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$, pour $x \in \mathbb{R}_-$.

3. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

4. $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}(\ln t)^n\, dt,\ \ x > \ 0.$

De ce qui précède, nous pouvons obtenir :

a) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}.\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

c) $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{-3}{2}+1\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{-1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{-3}{2}.\frac{-1}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$

Représentation de la fonction Gamma sous forme d'une limite

La fonction Gamma peut être représentée aussi par la limite

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

où nous supposons que $Re(z) > 0$.

1.2.2 La fonction Bêta

Parmi les fonctions de base du calcul fractionnaire : la fonction Bêta. Cette fonction joue un rôle important spécialement dans une certaine combinaison avec la fonction Gamma.

DÉFINITION 1.2.2 ([2] , [3]**)** *La fonction Bêta est donnée par*

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt,\ Re(x) > 0,\ Re(y) > 0. \tag{1.2}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^{2x-1}\cos(t)^{2y-1}\, dt.$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma comme suit

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(y,x)\,,\ \forall x,y : Re(x) > 0,\ Re(y) > 0.$$

– Quelques propriétés sur la fonction Bêta

Soient $Re(x) > 0$ et $Re(y) > 0$, alors :

1. $B(x+1,y) = \frac{x}{x+y} B(x,y)$.

2. $B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

3. $B(x,1) = \frac{1}{x}$.

4. $B(x,n) = \frac{(n-1)!}{x.(x+1)...(x+n-1)}, \quad n \geq 1$.

5. $B(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \ m \geq 1$ et $n \geq 1$.

1.3 Intégrales et Dérivées d'ordre Fractionnaire

1.3.1 Intégrale d'ordre arbitraire (Formule de Cauchy)

Soit $f : [a; b) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. b pouvant être fini ou infini.

Une primitive de f est donnée par l'expression

$$\left(I_a^1 f\right)(t) = \int_a^t f(\tau)\ d\tau$$

pour une primitive seconde on aura

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t \left(\int_a^s f(t)\, dt\right)\ ds.$$

En utilisant le théoréme de Fubini, on peut écrire

$$\left(I_a^2 f\right)(t) = \int_a^t (t-\tau) f(\tau)\ d\tau$$

Plus généralement le n^{ieme} itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$(I_a^n f)(t) = \int_a^t dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 ... \int_a^{t_{n-1}} dt_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\ d\tau, \tag{1.3}$$

pour tout entier n. Cette formule est appelée formule de Cauchy.

1.3.2 Intégrale et dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

L'approche de Riemann-Liouville relative à la définition de l'intégrale fractionnaire s'appuie sur la formule de Cauchy (1.3), en généralisant cette formule à un ordre α réel positif et en remplaçant la fonction factorielle par la fonction Gamma on aura la définition suivante :

DÉFINITION 1.3.1 ([1]) *Si $f \in C[a,b],\ \alpha \in \mathbb{R}_+$, l'intégrale*

$$I^{\alpha}_{a^+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad \textit{telle que} \quad a \in]-\infty, +\infty[\tag{1.4}$$

est appelée intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre α (qu'on va utiliser dans tout ce qui suit), et l'intégrale

$$I^{\alpha}_{b^-} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{b} (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad \textit{telle que} \quad b \in]-\infty, +\infty[$$

est appelelée intégrale fractionnaire à droite de Riemann-Liouville d'ordre α.

Exemples pour l'intégrale fractionnaire au sens R-L

a) Considérons la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$. Alors

$$I^{\alpha}_{a}(t-a)^{\beta} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^{\beta} ds$$

Une changement $s = a + (t-a)\tau$, donne

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a}(t-a)^{\beta} &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{1} (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{\beta} d\tau \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times B(\beta+1, \alpha) \\ &= \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1+\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha}. \end{aligned}$$

On voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$ où on a

$$I^{1}_{a}(t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} (t-a)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (t-a)^{\beta+1}.$$

b) Soit la fonction : $f(t) = C$. Alors

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_{a} C &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{\alpha-1} C ds \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_{\alpha}^{t} (t-s)^{\alpha-1} ds, \end{aligned}$$

pour évaluer cette intégrale on effectue le changement de variable $\tau = t - s$

$$\begin{aligned} I_a^\alpha C &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_\alpha^{t-a} \tau^{\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{(t-a)^\alpha}{\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^\alpha. \end{aligned}$$

PROPOSITION 1.3.1 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale fractionnaire au sens de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_{a^+}^\alpha [\, I_{a^+}^\beta f(t)] = I_{a^+}^{(\beta+\alpha)} f(t) \text{ pour } \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

De plus on a :

$$\frac{d}{dt}(I_{a^+}^\alpha f)(t) = (I_{a^+}^{\alpha-1} f)(t) \text{ pour } \alpha > 0.$$

Dérivées fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

DÉFINITION 1.3.2 ([1]) *Pour $\alpha \geq 0$ et $n-1 \leq \alpha < n$, la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f intégrable sur $[a,t]$ est formellement définie par*

$${}^L D_{a^+}^\alpha f(t) = D^n I_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_\alpha^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \tag{1.5}$$

où $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$.

Exemples :

a) Soit la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$, $\beta > -1$, on a :

$${}^L D_{a^+}^\alpha (t-a)^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_\alpha^t (t-s)^{n-\alpha-1} (s-a)^\beta ds,$$

en faisant le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$, on aura :

$$\begin{aligned} {}^L D_{a^+}^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} (t-a)^{n+\beta-\alpha} \int_\alpha^t (1-\tau)^{n-\alpha-1} \tau^\beta ds \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+1-\beta) B(n-\alpha, \beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha+1)\Gamma(n-\alpha+\beta+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

b) Pour $\alpha = 1$, la formule de dérivation se réduit a :

$$\begin{aligned} {}^L D^1_{a^+}(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta)}(t-a)^{\beta-1} \\ &= \beta(t-a)^{\beta-1} = \frac{d}{dt}\left[(t-a)^\beta\right]. \end{aligned}$$

c) Si on prend $\beta = 0$ dans l'exemple précédent, on arrive au résultat suivant :

$${}^L D^1_{a^+} 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

C'est -à-dire que la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas ni nulle ni constante, mais on a :

$${}^L D^1_{a^+} C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)}(t-a)^{-\alpha}.$$

Propriétés générales :

$$(i) \qquad {}^L D^\alpha_{a^+}\left(I^\alpha f(t)\right) = f(t)$$

(L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire).

$$(ii) \qquad {}^L D^\beta_{a^+}\left(I^\alpha f(t)\right) = {}^L D^{\beta-\alpha}_{a^+} f(t), \ \beta > \alpha$$

$$(iii) \qquad I^\alpha\left({}^L D^\alpha_{a^+} f(t)\right) \neq f(t)$$

et si $\beta - \alpha < 0, \ {}^L D^{\beta-\alpha}_{a^+} f(t) = I^{\alpha-\beta} f(t)$.

En général la dérivation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas

$${}^L D^{-\alpha}_{a^+}({}^L_a D^\beta_{a^+} f(t)) = {}^L D^{\beta-\alpha}_{a^+} f(t) - \sum_{k=1}^{m} [{}^L D^{\beta-k}_{a^+} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}$$

avec $m-1 \leq \beta < m$.

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

DÉFINITION 1.3.3 ([1]) *La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ d'une fonction f est donnée par :*

$${}^C D^\alpha_{a^+} f(t) = I^{n-\alpha}_{a^+}(D^n f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \tag{1.6}$$

avec $n-1 \leq \alpha \leq n, \ n \in \mathbb{N}^*$.

Propriétés générales :

1. Linéarité

Soit $n-1<\alpha<n,\ n\in\mathbb{N},\ \alpha,\lambda\in\mathbb{C}$ et soient les deux fonctions $f(t)$et $g(t)$ telles que ${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}\ f(t)$ et ${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}g(t)$ existent. La dérivation fractionnaire de Caputo est un opérateure lineare :

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}(\lambda f(t)+g(t))=\lambda {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)+{}^{C}D^{\alpha}_{a^+}g(t). $$

2. Non-commutativité

On suppose que $n-1<\alpha<n,\ m,n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{R}_+$ et soit la fonction $f(t)$ telle que ${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ existe, alors :

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}{}^{C}D^{m}_{a^+}f(t)={}^{C}D^{\alpha+m}_{a^+}f(t)\neq{}^{C}D^{m}_{a^+}{}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t). $$

3. Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $\alpha>0$ avec $n-1<\alpha<n,\ (n\in\mathbb{N}^*)$ supposons que f est une fonction telle que ${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ et ${}^{L}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$ existent alors

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)={}^{L}D^{\alpha}_{a^+}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. $$

On déduit que si $f^{(k)}(a)=0$ pour $k=0,1,2..,n-1$, on aura ${}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)={}^{L}D^{\alpha}_{a^+}f(t)$.

4. **Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire**

Si f est une fonction continue on a

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}I^{\alpha}_{a^+}f=f \text{ et } I^{\alpha}_{a^+}\left({}^{C}D^{\alpha}_{a^+}f(t)\right)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k}}{k!}, $$

donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droite.

Exemples

1. La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}^{C}D^{\alpha}_{a^+}K=0,\ K=const $$

$$^C D^{\alpha}_{a^+} K = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} K^{(n)} dx = 0$$

2. Soit la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$ et soit α un entier et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors on a

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau - a)^{\beta-n},$$

d'où

$$^C D^{\alpha}_{a^+} (t-a)^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau,$$

effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
^C D^{\alpha}_{a^+} (t-a)^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \int_a^t (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

1.3.4 Dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

DÉFINITION 1.3.4 ([9]**)** *La dérivée fractionnaire au sens de Hilfer d'ordre* $0 \leq \nu \leq 1$ *et* $0 < \mu < 1$ *de la fonction* $f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *est défini par :*

$$D^{\nu,\mu}_{a^+} f(t) = I^{\nu(1-\mu)}_{a^+} \frac{d}{dt} I^{(1-\nu)(1-\mu)}_{a^+} f(t) \tag{1.7}$$

– Si $\nu = 0,\ 0 < \mu < 1,$ la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer coïncide avec la dérivée fractionnaire classique au sens de Riemann – Liouville :

$$D^{0,\mu}_{a^+} f(t) = \frac{d}{dt} I^{(1-\mu)}_{a^+} f(t) =^L D^{\mu}_{a^+} f(t).$$

– Si $\nu = 1,\ 0 < \mu < 1$, la dérivée fractionnaire au sens de Hilfer coïncide avec la dérivée fractionnaire classique au sens de Caputo :

$$D^{1,\mu}_{a^+} f(t) = I^{(1-\mu)}_{a^+} \frac{d}{dt} f(t) =^C D^{\alpha}_{a^+} f(t)$$

La dérivée fractionnaire au sens de hilfer peut considérer comme interpolateur entre la dérivée de Riemann-Liouville et de Caputo.

Chapitre 2

Semi-groupes et Solutions Mild (douces)

Dans ce chapitre nous présentons les notions de base de la théorie des semi-groupes, la représentation des solutions de notre problème, ainsi nous rappelons quelques éléments de base sur la transformée de Laplace, cloturons ce chapitre par la présentations de quelques théorèmes de point fixe. Ces bases mathématiques seront utilisées tout au long de notre mémoire.

Soit X un espace de Banach muni d'une norme noté $\|.\|$ et le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, $\mathcal{L}(X)$ est l'espace des opérateurs linéaires bornés de X dans lui même dont la norme est

$$\|U\|_{\mathcal{L}(x)} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ux\|}{\|x\|},$$

pour tout $U \in \mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}(X)$ est un espace de Banach.

2.1 Semi-groupe fortement continu

DÉFINITION 2.1.1 ([13]**)** *Une famille d'opérateurs $\{\mathcal{S}(t)\}_{t \geq 0}$ linéaires bornés définis sur X est dite semi-groupe fortement continu (ou de classe C_0), ou simplement C_0-semi-groupe si on a :*

(i) *$\mathcal{S}(0) = I$ (I est l'opérateur d'identité dans $\mathcal{L}(X)$).*

(ii) $\mathcal{S}(t+s) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}(s)$ *pour tout* $s, t \geq 0$.*(propriété algebrique)*

(iii) $\lim\limits_{t\to 0} ||\mathcal{S}(t)x - x|| \ = 0$ *pour tout* x *dans* X. *(propriété topologique)*

*si en remplace **(iii)** par :*

$$\lim_{t\to 0} ||\mathcal{S}(t) - I\ || \ = 0, \quad t \geq 0,$$

il s'agit d'un semi-groupe uniformément continu.

Théorème 2.1.1 ([13]**)** *Pour* $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-*semi-groupe sur* X*, alors on a les propriétés suivantes*

(i) $t \to |\mathcal{S}(t)|_{\mathcal{L}(X)}$ *est bornée sur tout intervalle compact* $[0, t_1]$;

(ii) *Pour tout* x *dans* X*, la fonction* $t \to \mathcal{S}(t)\ x$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$;

(iii) *Il existe des constantes* $\omega \in \mathbb{R}$ *et* $M \geq 1$ *telles que*:

$$|\mathcal{S}(t)|_{\mathcal{L}(X)} \leq \ Me^{\omega t}, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Définition 2.1.2 ([13]**)** *L'opérateur* A *défini par :*

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{S}(t)x - x}{t} \text{ existe pour tout } t > 0 \right\}$$

et

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{S}(t)\ x - x}{t} = \frac{d}{dt}\ \mathcal{S}(t)x|_{t=0}, \text{ pour } x \in D\ (A)$$

est dit générateur infinitésimal du C_0-*semi-groupe.*

L'espace $D(A)$ *est muni de la norme du graphe* $||x||_{D(A)} = ||x||\ + ||Ax||, \quad x \in D\ (A)$.

Remarque 2.1.1 *Si* $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0-*semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés de générateur infinitésimal* A*, alors il est unique.*

Proposition 2.1.1 *Soient* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un semi groupe d'opérateurs linéaires bornées et* A *son générateur infinitésimal. Si* $x \in D(A)$ *alors* $S(t)x \in D(A)$ *et on a l'égalité* $S(t)Ax = AS(t)x;\ \forall\ t \geq 0$.

Remarque 2.1.2 *On voit que* $S(t)D(A) \subseteq D(A);\ \forall\ t \geq 0$.

Lemme 2.1.1 *Soit* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *un* C_0-*semi -groupe alors :*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)xd\tau = S(t)x,$$

pour tout $x \in X$ *et* $t \geq 0$.

2.2 Solution Mild (Douce)

Dans cette section on présente la solution de l'équation différentielle linéaire fractionnaire. Le concept du solution mild peut être introduit pour étudier le problème à valeur initiale non homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \ 0 < t < T, \\ x(0) = x_0, \qquad\qquad\qquad x \in X \end{cases} \tag{2.1}$$

où $f : [0, T[\to X$.

Nous définissons maintenant le concept d'une solution mild

DÉFINITION 2.2.1 *Soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{\mathcal{S}(t)\}_{t\geq 0}$ sur $X,\ x_0 \in X$, et $f \in L^1([0,T]\ , X)$ l'espace des fonctions Bochner-intégrables sur $[0,T]$ à valeurs dans X.*

La fonction $x \in C([0,T]\,,\ X)$ donnée par

$$x(t) = \mathcal{S}(t)\, x_0 + \int_0^t \mathcal{S}\,(t-s)\, f(s)\, ds, \quad 0 < t < T,$$

est la solution mild du probléme à valeur initiale (2.1) sur $[0,T]$.

2.3 Eléments sur la transformée de Laplace

Nous rappelons danc ce paragraphe quelques éléments de base sur la transformée de Laplace dans le cas entier que nous allons par la suite l'étendre au cas fractionnaire.

DÉFINITION 2.3.1 *On dit que $f(t)$ est une fonction originale si :*

1. *$f(t) = 0$ pour $t < 0$.*

2. *$|f(t)| < Me^{s_0 t}$ pour $t > 0$ avec $M > 0$, $s_0 \in \mathbb{R}$.*

3. *La fonction $f(t)$ satisfait les conditions de Dirichlet pour tout intervalle $[a,b]$:*

a) *$f(t)$ est bornée,*

b) *$f(t)$ est continue, ou bien a un nombre fini des points de discontinuites de premiére forme,*

c) *$f(t)$ a un nombre fini des extrémes.*

On consindére la variable complexe telle que : $s = \alpha + i\beta$ et $Re(s) = \alpha \geq s_1 \geq s_0$ alors

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

est dite la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ et on note

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt\ .$$

La transformée de Laplace inverse est défini par

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{t \to +\infty} \int_{\gamma - it}^{\gamma + it} F(s) e^{st}\, dt\ = \mathcal{L}^{-1}[F(s)],$$

où $i = \sqrt{-1}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

2.3.1 Images de quelques fonctions élémentaires

Original	Image	Original	Image
1	$\frac{1}{s}$	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$	$\frac{t^n}{n!}e^{\alpha t}$	$\frac{1}{(s-\alpha)^{n+1}}$
$\cos\beta t$	$\frac{s}{s^2+\beta^2}$	$t\cos\beta t$	$\frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}$
$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$t\sin\beta t$	$\frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2}$
$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2-\beta^2}$	$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2-\beta^2}$

2.3.2 Exemple

Soit la fonction $f(t) = t^\lambda$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^\lambda\, dt$$

pour évaluer cette intégrale on effuctue le changement de variable $x = ts$ alors

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{x^\lambda}{s^\lambda} \frac{dx}{s} \\ F(s) &= \frac{1}{s^{\lambda+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^\lambda dx = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}} \end{aligned}$$

donc la transformation de Laplace est :

$$\mathcal{L}(t^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$$

et la transformation de Laplace inverse est :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{\lambda+1}}\right) = \frac{t^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$$

2.3.3 Propriétés de la transformée de Laplace

Dans cette sous-section on utilisant la notation $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ et $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$

- Propriété de la linéairité

$$\mathcal{L}[a\ f(t) + b\ g(t)] = aF(s) + bG(s),\ a, b \in \mathbb{R}$$

- Propriété de la similarité

$$\mathcal{L}[\ f(\alpha t)\ ] = \frac{1}{\alpha}\ F(\frac{s}{\alpha}),\quad \alpha > 0$$

- Propriété de convolution

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égales a zéro pour $t < 0$, est égale au produit de leurs transformées de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{f(t) * g(t); s\right\} = F(s)G(s)$$

sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent.

2.3.4 Les théorèmes de différentiation et d'intégration

THÉORÈME 2.3.1 ([1]) ***(Différentiation d'un original)***
La transformée de Laplace de la Dérivée d'ordre k de la fonction $f(t)$ est donée par :

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - [s^{k-1}f(0) + s^{k-2}f'(0) + ... + f^{(k-1)}(0)].$$

THÉORÈME 2.3.2 ([1]) ***(Intégration d'un original)*** *La transformée de Laplace de l'intégrale la fonction $f(t)$ est donée par :*

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

THÉORÈME 2.3.3 ([1]) ***(Différentiation d'un transforme)*** *On a*

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}[(-t)^n f(t)].$$

2.3.5 La transformée de Laplace de l'intégrale et la dérivée fractionnaire au sens R-L

- **Intégrales fractionnaires**

Si $\alpha > 0$, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville est donée par :

$$I = I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-y)^{\alpha-1}\, f(y)\, dy$$

$$\mathcal{L}[I] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{L}[t^{\alpha-1}]\mathcal{L}[f(t)] = \frac{F(s)}{s^{\alpha}}$$

- **Dérivées fractionnaires**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[{}^L D_t^{\alpha} f(t)] &= \mathcal{L}[\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{dt^n}{d^n t}) \int_0^t (t-u)^{n-\alpha-1}\, f(u)\, du] \\ &= \mathcal{L}[(\frac{dt^n}{d^n t}) I^{n-\alpha} f(t)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0),$$

$$\mathcal{L}[{}^L D_t^{\alpha} f(t)] = s^n \frac{F(s)}{s^{n-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0,}$$

$$\mathcal{L}[{}^L D_t^{\alpha} f(t)] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-\alpha-1} [D^k I^{n-\alpha} f(t)]_{t=0,}$$

2.3.6 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo se donne par la formule :

$$\mathcal{L}\left[{}^C D_{0^+}^{\alpha} f(t)\right] = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} \left.\frac{d^k f(t)}{dt^k}\right|_{t=0_+}, \quad n-1 < \alpha < n$$

2.3.7 La transformée de Laplace d'un C_0-semi groupe

Dans la suite, pour $\omega \geq 0$ nous désignerons par A_{ω} l'ensemble

$$A_{\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C};\ \lambda > \omega > \omega_0\}$$

Soit $\lambda \in A_\omega$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornées nous avons

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t};\ \forall\, t \geq 0.$$

Définissions l'application $R_\lambda : X \to X$ par

$$R_\lambda x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt$$

Il est clair que R_λ est un opérateur linéaire. De plus on a

$$\|\, R_\lambda x\| \leq \int_0^{+\infty} \left\| e^{-\lambda t} S(t) x \right\| dt \leq \frac{M}{\lambda - \omega} \|x\|\, ;\ \forall\, x \in X,$$

d'ou il résulte que R_λ est un opérateur linéaire borné.

DÉFINITION 2.3.2 *L'opérateur $R : A_\omega \to \mathcal{F}(X)$*

$$R(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt,$$

s'appelle la transformée de Laplace du semi groupe $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

THÉORÈME 2.3.4 *Si λ est telle que*

$$\lambda > \omega_0 = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\log \|S(t)\|}{t}$$

Alors $\lambda \in \rho(A)$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} s(t) dt$ existe. Et :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) x dt = R(\lambda, A) x.$$

2.4 Théorèmes du point fixe

Les théorèmes de points fixes sont des outils très utiles en mathématiques et particulièrement dans la résolution des équations différentielles et intégrales. En effet, ces théorèmes fournissent des conditions suffisantes pour lesquelles une fonction donnée admet un point fixe, ainsi on assure l'existence de la solution d'un problème donné en le transformant en un problème de poit fixe, et on détermine éventuellement ces points fixes qui sont les solutions du problème posé.

DÉFINITION 2.4.1 *Soient* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé et* (x_n) *une suite de* X *. On dit que* (x_n) *est une suite de Cauchy*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, N \geq 0,\ \forall\, n > N,\ \forall\, m \geq N,\ \|x_{n+m} - x_n\| \leq \epsilon.$$

DÉFINITION 2.4.2 *On dit que* X *est complet pour la norme* $\|\cdot\|$ *si tout suite de Cauchy dans* X *est convergente. Un tel espace est aussi appelé espace de Banach.*

DÉFINITION 2.4.3 *Soit* f *une application d'un ensemble* X *dans lui même. On appelle point fixe de* f *tout point* $x \in X$ *tel que*

$$f(x) = x.$$

En **1922** STEFAN BANACH prouva son fameux résultat dit "*principe de contraction de banach*", ce théorème est le résultat le plus élémentaire et le plus utilisé puisqu'il n'assure pas seulement l'existence d'un point fixe mais aussi son unicité.

DÉFINITION 2.4.4 *Soit* $(X, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Une application* ϕ *de* X *dans* X *est dite contactante s'il existe un nombre* $\gamma :\ 0 \leq \gamma < 1$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *on a*

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq \gamma \|x - y\|.$$

THÉORÈME 2.4.1 *(Point fixe de Banach)*[3]
Soient X *un espace de Banach et* $\phi : X \to X$ *est un opérateur contractant. Alors il existe un point fixe* $x \in X$ *tel que* $\phi x = x$.

THÉORÈME 2.4.2 *(Théorème de Schauder* (1930)*)*
Soit D *un sous ensemble fermé et convex d'un espace de Banach* X *et* $f : D \to D$ *une application continue telleque* $f(D)$ *est relativement compact. Alors* f *possède un point fixe. Plus généralement, si* D *est un compact convexe alors toute fonction continue de* D *sur* D *possède un point fixe.*

Chapitre 3

Contrôlabilité approchée des équations d'evolution d'ordre fractionnaire de Hilfer

Le but de ce chapitre est d'étudier la contrôlabilité approchée des équations différentielles à evolution fractionnaire immpliquant une dérivée fractionnaire au sens de Hilfer. Les outils mathématiques de base utilisés dans ce chapitre reposent sur le théorème du point fixe combinée avec la théorie du semi-groupe et le calcul fractionnaire. La méthode est inspirée en considérant le problème de la contrôlabilité approchée comme la limite des problèmes de contrôle optimal et en le remplaçant via la convergence des opérateurs résolvants (la condition résolvante $(\mathbf{R})$).

3.1 Position du Problème

Ci-dessous, nous étudions la contrôlabilité approchée d'une classe d'équations d'évolution fractionnaire suivante :

$$D_{0^+}^{\nu,\mu}x(t) = Ax(t) + Bu(t) + f\left(t, x(t)\right), \qquad t \in J = (0,\ b], \tag{3.1}$$

$$I_{0^+}^{(1-\nu)(1-\mu)}x(0) = x_0, \tag{3.2}$$

où $D_{0^+}^{\nu,\mu}$ est la dérivée fractionnaire de Hilfer, $0 \leq \nu \leq 1,\ 0 < \mu < 1$, l'état $x(\cdot)$ prend ces valeurs dans un espace de Hilbert X, et A est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $\{S(t),\ t > 0\}$ dans X.

La fonction de contrôle u prend des valeurs dans un espace de Hilbert $U,\ u \in L^2([0,b],U)$, et $B : U \to X$ est un opérateur linéaire borné. La fonction $f : [0,b] \times X \to X$ est une fonction donnée.

Avant l'introduction de la définition de la solution mild de (3.1)-(3.2), nous présentons les définitions, lemmes et les notations suivantes.

Considérons l'espace de Banach

$$C^{\nu,\mu}\left([0,b], X\right) = \left\{ x \in C\left(J,X\right) : \lim_{t \longrightarrow 0^+} t^{(1-\nu)(1-\mu)} x(t) \text{ existe et finie} \right\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\nu,\mu}$ définie par $\|x\|_{\nu,\mu} = \sup\limits_{0 \leq t \leq b} \left| t^{(1-\nu)(1-\mu)} x(t) \right|$.

Nous adoptons maintenant la solution Mild (Douce) de notre problème (3.1)-(3.2).

DÉFINITION 3.1.1 ([10, 16]) *Une solution $x(\cdot;u) \in C\left([0,b], X\right)$ est dite une solution mild de (3.1)-(3.2) si pour tout $u \in L^2\left([0,b], U\right)$ l'équation intégrale fractionnaire*

$$x(t) = \mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s)[Bu(s) + f(s,x(s))]ds \tag{3.3}$$

est satisfait, pour tout $0 \leq t \leq b$.

Où

$\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t) = I_{0^+}^{\nu(1-\mu)} \mathcal{P}_\mu\left(t\right),\ \mathcal{P}_\mu\left(t\right) = t^{\mu-1}\mathcal{T}_\mu\left(t\right),\ \mathcal{T}_\mu\left(t\right) = \int_0^{+\infty} \mu\theta\Psi_\mu(\theta) S\left(t^\mu\theta\right) d\theta$ et

$$\Psi_\mu(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\theta)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma\left(1-n\mu\right)} \sin\left(n\pi\mu\right),\ \theta \in (0,\infty).$$

Ici, $S(t)$ est un C_0-semi-groupe engendré pat l'opérateur linéaire $A : X \to X$, Ψ_μ est une fonction de type Wright définie sur $(0,\infty)$ qui satisfait

$$\begin{aligned} \Psi_\mu(\theta) &\geq 0, \quad \int_0^\infty \Psi_\mu(\theta)d\theta = 1, \\ \int_0^\infty \theta^\delta \Psi(\theta)d\theta &= \frac{\Gamma\left(1+\delta\right)}{\Gamma\left(1+\mu\delta\right)}, \quad \delta \in (-1,\infty). \end{aligned}$$

LEMME 3.1.1 *Les opérateurs $\mathcal{S}_{\nu,\mu}$ et $\mathcal{P}_\mu$ ont les propriétés suivantes :*

(i) Pour tout $t \geq 0$ *fixé,* $\mathcal{S}_{\nu,\mu}$ *et* $\mathcal{P}_\mu$ *sont des opérateurs linéaires et bornés, et*

$$||\mathcal{P}_\mu(t)x|| \leq \frac{Mt^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}||x||, \qquad ||\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x|| \leq \frac{Mt^{(\nu-1)(1-\mu)}}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}||x||.$$

(ii) *L'opérateur* $\{\mathcal{P}_\mu : t \geq 0\}$ *est compact, si* $\{S(t) : t \geq 0\}$ *est compact.*

Ci-dessous nous imposons les conditions suivantes sur les données de notre problème :

(**H1**) $\{S(t),\ t > 0\}$ est compact.

(**H2**) La fonction $f : [0, b] \times X \longrightarrow X$ satisfait :

(**a**) $f(t, \cdot) : X \longrightarrow X$ est continu pour chaque $t \in (0, b]$,

(**b**) pour chaque $x \in X,\ f(\cdot, x) : (0; b] \longrightarrow X$ est fortement mesurable,

(**H3**) Il existe une constante $\mu_1 \in (0, \mu)$ et $n \in L^{1/\mu_1}([0, b], \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $x \in X$ et presque tout $t \in [0, b]$, on a

$$\|f(t, x)\| \leq n(t).$$

Soit $x(b, u)$ la valeur d'état de (3.3) au temps terminal b correspondant à la fonction de contrôle u. On introduit l'ensemble $\mathfrak{R}(b) = \{x(b, u) : u \in L_2([0, b],\ U)\}$ qui est appelé l'ensemble accessible du système (3.3) au temps terminal b, et désignons sa fermeture dans X par $\overline{\mathfrak{R}(b)}$.

DÉFINITION 3.1.2 *On dit que le système (3.1)-(3.2) est approximativement contrôlable sur* $[0, b]$ *si* $\overline{\mathfrak{R}(b)} = X$*, c'est-à-dire, étant donné un arbitraire* $\epsilon > 0$*, il est possible de diriger du point* x_0 *à une distance* ϵ *de tous les points de l'espace d'états* X *au temps* b.

Afin d'étudier la contrôlabilité approchée pour le système différentiel fractionnaire non linéaire (3.1)-(3.2), nous considérons d'abord la contrôlabilité approchée de sa partie linéaire

$$D_{0^+}^{\nu,\mu}x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \in (0, b], \tag{3.4}$$

$$I_{0^+}^{(1-\nu)(1-\mu)}x(0) = x_0. \tag{3.5}$$

La contrôlabilité approchée pour le système fractionnaire linéaire (3.4)-(3.5) est une généralisation naturelle de la contrôlabilité approchée du système de contrôle du premier ordre linéaire. Il convient d'introduire les deux opérateurs (contrôlabilité et résolvent) suivants associés à (3.4)-(3.5) :

$$L_0^b = \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s)Bu(s)ds,$$
$$\Gamma_0^b = \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s)BB^*\mathcal{P}_\mu^*(b-s)ds, \qquad \frac{1}{2} < \mu \leq 1$$
$$R(\epsilon, \Gamma_0^b) = \epsilon(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1},$$

où B^* désigne l'adjoint de B et $\mathcal{P}_\mu^*(t)$ est l'adjoint de $\mathcal{P}_\mu(t)$.Il est claire que l'opérateur L_0^b est un opérateur linéaire borné.

Nous imposons également la condition résolvante suivante :

$(\mathbf{R})$ **R**$_1$**)** $\left\|R(\epsilon, \Gamma_0^b)\right\| \leq 1$ pour tout $\epsilon \succ 0$.

R$_2$**)** Pour chaque $h \in X,\ \epsilon(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1}(h)$ converge vers 0 quand $\epsilon \longrightarrow 0^+$ dans une topologie forte.

REMARQUE 3.1.1 *L'hypothèse* $(\mathbf{R}_2)$ *équivaut à la contrôlabilité approchée du système linéare (3.4)-(3.5). (voir* $[1, 10]$*)*

Dans l'ordre de formuler le problème de contrôlabilité sous la forme dans laquelle le théorème du point fixe est réellement applicable, on suppose que le système linéaire correspondant est approximativment contrôlable. On montrera que le système (3.1)-(3.2) est approximativement contrôlable à condition que l'on puisse montrer pour tout $\epsilon > 0$ qu'il existe une fonction continue (fonction de contrôle) $x \in C([0, b], X)$ telle que

$$\begin{cases} u_\epsilon(t,x) = B^*\mathcal{P}_\mu^*(b-t)(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1}p(x), \\ x(t) = \mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s)[Bu(s) + f(s, x(s))]ds, \end{cases} \tag{3.6}$$

où

$$p(x) = h - \mathcal{S}_{\nu,\mu}(b)x_0 - \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s)f(s, x(s))ds.$$

Sur la base de cette observation, notre opjectif est de trouver les conditions de la solvabilité de (3.6). Notons également qu'il sera montré que le contrôle en (3.6) dérige le système (3.1)-(3.2) de x_0 à

$$h - \epsilon(\epsilon I + +\Gamma_0^b)^{-1}p(x)$$

à condition que le système (3.6) ait une solution.

3.2 Existence des solutions Mild

Cette section est consacrée à l'étude des résultats d'existence et d'unicité pour notre problème (3.1)-(3.2) en utilisant le théorème du point fixe de Schauder.
Pour tout $\epsilon \succ 0$ considérons l'opérateur $\Phi_\epsilon : C^{\nu,\mu}([0,b],X) \to C^{\nu,\mu}([0,b],X)$ défini par :

$$(\Phi_\epsilon x)(t) = \mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s)[Bu_\epsilon(s,x) + f(s,x(s))]ds.$$

Soit $x \in C^{\nu,\mu}\ ([0,b],X)$. Observons que

$$\begin{aligned}
\lim_{t\longrightarrow 0^+} t^{(1-\nu)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x_0 &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma(\nu(1-\mu))}\int_0^t (t-s)^{\nu(1-\mu)-1}s^{\mu-1}\mathcal{P}_\mu(s)x_0 ds\\
&= \lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}\int_0^1 (1-s)^{\nu(1-\mu)-1}s^{\mu-1}\mathcal{P}_\mu(ts)x_0 ds\\
&= \frac{x_0}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}
\end{aligned}$$

Définissons $t^{(1-\nu)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon x)(t)$ comme suit

$$t^{(1-\nu)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon x)(t) := \begin{cases} t^{(1-\nu)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x_0 + t^{(1-\nu)(1-\mu)}\int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s) \\ \quad\times[Bu_\epsilon(s,x) + f(s,x(s))]ds, \quad 0 < t \le b, \\ \frac{x_0}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}, \quad t = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Nous montrerons que pour tout $\epsilon > 0$ l'opérateur
$\Phi_\epsilon : C^{\nu,\mu}([0,b],X) \to C^{\nu,\mu}\ ([0,b],X)$ a un point fixe. Pour le prouver, nous utiliserons le théorème du point fixe de Schauder.

LEMME 3.2.1 *Soit $0 \le \nu \le 1$ et $\frac{1}{2} < \mu \le 1$. Si les hypothèses **(H1) - (H3)** sont vérifiées, alors pour tout $\epsilon > 0$, la fonction de contrôle $u_\epsilon(t,x)$ a les propriétés suivantes :*
(i) $\|u_\epsilon(t,x)\| \le \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\epsilon\Gamma(\mu)}\left(\|h\| + \frac{Mb^{(\nu-1)(1-\mu)}}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}\|x_0\| + \frac{M}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\|n\|_{1/\mu_1}\right).$
(ii) *Pour tout $t \in [0,b]$ on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|u_\epsilon(t,x_n) - u_\epsilon(t,x)\| = 0$,*
où $M_B = \|B\|$, $\|n\|_{1/\mu_1}$ est L^{1/μ_1} norme de n.

preuve

(i) Par la definition de $u_\epsilon(t,x)$ on a

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon(t,x)\| &\leq \left\|B^*\mathcal{P}_\mu^*(b-t)(\epsilon I+\Gamma_0^b)^{-1}p(x)\right\| \\
&\leq \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\left\|(\epsilon I+\Gamma_0^b)^{-1}p(x)\right\| \\
&\leq \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\epsilon\Gamma(\mu)}\|p(x)\| \\
&\leq \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\epsilon\Gamma(\mu)}\left(\|h\|+\|\mathcal{S}_{\nu,\mu}(b)x_0\|+\left\|\int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s)f(s,x(s))ds\right\|\right)
\end{aligned}$$

Utilisons l'inégalité de Hōlder et $(\mathbf{H3})$, on obtient

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon(t,x)\| &\leq \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\epsilon\Gamma(\mu)}\left(\|h\|+\frac{Mb^{(\nu-1)(1-\mu)}}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}\|x_0\|+\frac{M}{\Gamma(\mu)}\int_0^b(b-s)^{\mu-1}n(s)ds\right) \\
&\leq \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\epsilon\Gamma(\mu)} \\
&\quad\times\left(\|h\|+\frac{Mb^{(\nu-1)(1-\mu)}}{\Gamma(1-\mu)+\mu)}\|x_0\|+\frac{M}{\Gamma(\mu)}\left(\int_0^t(t-s)^{\frac{\mu-1}{1-\mu_1}}ds\right)^{1-\mu_1}\left(\int_0^t n^{\frac{1}{\mu_1}}(s)ds\right)^{\mu_1}\right) \\
&\leq \frac{M_B M(b-t)^{\mu-1}}{\epsilon\Gamma(\mu)}\left(\|h\|+\frac{Mb^{(\nu-1)(1-\mu)}}{\Gamma(\nu(1-\mu)+\mu)}\|x_0\|+\frac{M}{\Gamma(\mu)}\frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1}b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}}\|n\|_{1/\mu_1}\right).
\end{aligned}$$

(ii) supposons que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\|x_n-x\|_{v,\mu}=0$. Alors nous avons

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}x_n(s)=x(s),\quad 0<s\leq b.$$

De $(\mathbf{H2})$, il s'ensuit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}f(s,x_n(s))=f(s,x(s))\quad p.p.\quad \text{dans } [0,b].$$

En utilisant $(\mathbf{H3})$, nous obtenons

$$(b-s)^{\mu-1}\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|\leq 2(b-s)^{\mu-1}n(s),\quad p.p.\quad \text{dans } [0,b].$$

Comme $s\to 2(b-s)^{\mu-1}n(s)$ est intégrable sur $[0,b]$, par le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on a

$$\int_0^b(b-s)^{\mu-1}\|f(s,x_n(s))-f(s,x(s))\|ds\longrightarrow 0,\quad \text{quand } n\longrightarrow+\infty.$$

De plus, il s'ensuit que

$$\|p(x_n) - p(x)\| \leq \frac{M}{\Gamma(\mu)} \int_0^b (b-s)^{\mu-1} \|f(s, x(s))\| \, ds \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \|u_\epsilon(t, x_n) - u_\epsilon(t, x)\| &= \left\|B^* \mathcal{P}_\mu^*(b-t)(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} (p(x_n) - p(x))\right\| \\ &\leq \frac{M_B M}{\epsilon \Gamma(\mu)} \|p(x_n) - p(x)\| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty. \end{aligned}$$

LEMME 3.2.2 *Soit* $0 \leq v \leq 1$ *et* $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$. *Sous les hypothèses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$, *pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe un nomber positif* $\tau := \tau(\epsilon)$ *tel que* $\Phi_\epsilon(B_\tau) \subset B_\tau$, *où*

$$B_\tau := \left\{ x \in C^{v,\mu}([0,b], X) : \|x\|_{v,\mu} \leq \tau \right\}.$$

Preuve

Soit $\epsilon > 0$ fixé et $x \in B_\tau$. Comme $x(t)$ est continu, il résulte de $(\mathbf{H2})$ que $f(t, x(t))$ est une fonction mesurable sur $[0, b]$. En utilisant l'inégalité de Hōlder et $(\mathbf{H3})$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon x)(t)\right\| &\leq \left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)} \mathcal{S}_{\nu,\mu}(t) x_0\right\| \\ &\quad + \left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)} \int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s) f(s, x(s)) ds\right\| \\ &\quad + \left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)} \int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s) B u_\epsilon(s, x) ds\right\| \\ &=: I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Nous estimons chacun des $I_i, \; i = 1, 2, 3$, séparément. Par l'hypothèse $(\mathbf{H3})$, on a

$$I_I \leq \left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)} \mathcal{S}_{\nu,\mu}(t) x_0\right\| \leq \frac{M}{\Gamma(v(1-\mu)+\mu)} \|x_0\| \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq t^{(1-\nu)(1-\mu)} \int_0^t \|\mathcal{P}_\mu(t-s) f(s, x(s))\| \, ds \\ &\leq \frac{M t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1} \|f(s, x(s))\| \, ds \\ &\leq \frac{M t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1} n(s) ds \\ &\leq \frac{M t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma(\mu)} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\mu-1}{1-\mu_1}} ds \right)^{1-\mu_1} \left(\int_0^t n^{\frac{1}{\mu_1}}(s) ds \right)^{\mu_1} \end{aligned}$$

$$I_2 \leq \frac{Mb^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma(\mu)} \frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1} b^{\mu-\mu_1}}{((\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}} \|n\|_{1/\mu_1} \tag{3.10}$$

La combinaison des estimations (3.8) - (3.9) donne

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &< \frac{M}{\Gamma(v(1-\mu)+\mu)} \|x_0\| + \frac{Mb^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma(\mu)} \frac{(1-\mu_1)^{1-\mu_1} b^{\mu-\mu_1}}{(\mu-\mu_1)^{1-\mu_1}} \|n\|_{1/\mu_1} \\ : &= \Delta. \end{aligned}$$

Ensuite, l'estimation I_3 devient

$$\begin{aligned} I_3 &\leq t^{(1-\nu)(1-\mu)} \int_0^t \|\mathcal{P}_\mu(t-s) B u_\epsilon(s,x)\| \, ds \\ &= t^{(1-\nu)(1-\mu)} \int_0^t \left\|\mathcal{P}_\mu(t-s) B B^* \mathcal{P}_\mu^*(b-s)(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x)\right\| ds \\ &\leq t^{(1-\nu)(1-\mu)} \int_0^t \left\|\mathcal{P}_\mu(t-s) B B^* \mathcal{P}_\mu^*(b-s)\right\| ds \left\|(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x)\right\| \\ &\leq \frac{M_B^2 M^2 t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma^2(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1}(b-s)^{\mu-1} ds \left\|(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x)\right\| \\ &\leq \frac{M_B^2 M^2 t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma^2(\mu)} \frac{b^{2\mu-1}}{\mu} \left\|(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x)\right\| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} \frac{M_B^2 M^2 t^{(1-\nu)(1-\mu)}}{\Gamma^2(\mu)} \frac{b^{2\mu-1}}{\mu} \|p(x)\| \end{aligned}$$

$$I_3 \leq \frac{1}{\epsilon} \frac{M_B^2 M^2}{\Gamma^2(\mu)} \frac{b^{2\mu-1}}{\mu} \left(b^{(1-\nu)(1-\mu)} \|h\| + \Delta\right) \tag{3.11}$$

Ainsi,

$$\left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon x)(t)\right\| \leq \Delta + \frac{1}{\epsilon} \frac{M_B^2 M^2}{\Gamma^2(\mu)} \frac{b^{2\mu-1}}{\mu} \left(b^{(1-\nu)(1-\mu)} \|h\| + \Delta\right).$$

Les deux dernières inégalités impliquent que pour un $\tau > 0$ suffisamment grand, l'inégalité suivante est vraie

$$\left\|t^{(1-\nu)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon z_\tau)(t)\right\| \leq \tau.$$

Par conséquent, Φ_ϵ applique B_τ en lui-même.

LEMME 3.2.3 *Soit* $0 \leq v \leq 1$ *et* $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$. *Si les hypothèses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont vérifiées, alors l'ensemble* $\{\Phi_\epsilon x : x \in B_\tau\}$ *est une famille équicontinue de fonctions sur* $[0, b]$.

Preuve

Pour $0 < t < t+h \leq b$, on a

$$\begin{array}{rl} & \left\|(t+h)^{(1-\nu)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon z)(t+h) - t^{(1-v)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon z)(t)\right\| \\ \leq & \left\|(t+h)^{(1-\nu)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t+h)x_0 - t^{(1-v)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)x_0\right\| \\ & +\left\| \begin{array}{c} \int_t^{1+h}(t+h-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t+h-s)^{\mu-1\cdot}\mathcal{P}_\mu(t+h-s) \\ \times\left[Bu_\epsilon(s,z)+f(s,z(s)\right]ds \end{array} \right\| \\ & +\left\| \begin{array}{c} \int_0^t \left((t+h-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t+h-s)^{\mu-1\cdot} - (t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1}\right) \\ \times\mathcal{P}_\mu(t+h-s)\left[Bu_\epsilon(s,z)+f(s,z(s)\right]ds \end{array} \right\| \\ & +\left\| \begin{array}{c} \int_0^t (t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1}\left(\mathcal{P}_\mu(t+h-s)-\mathcal{P}_\mu(t-s)\right) \\ \times\left[Bu_\epsilon(s,z)+f(s,z(s))\right]ds \end{array} \right\| \\ \leq & I_4+I_5+I_6+I_7 \end{array}$$

Pour $0 < t < t+h \leq b$, on a

$$I_4 \leq \left\|(t+h-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t+h) - (t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}\right\| \|x_0\|.$$

Par le **LEMME 3.1.1**, on sait que $t^{(1-\nu)(1-\mu)}\mathcal{S}_{\nu,\mu}(t)$ est uniformément continue sur $[0,b]$, ce qui permet de déduire que $\lim_{h\longrightarrow 0^+} I_4 = 0$.

Par condition (**H3**), on en déduit que $\lim_{h\longrightarrow 0^+} I_5 = 0$.

Notons que

$$\begin{array}{rl} & \left|(t+h-s)^{(1-\nu)(1-\mu)} - (t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1})\right| m(s) \\ \leq & (t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1}m(s), \end{array}$$

et $\int_0^t (t+h-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1}m(s)ds$ existe, it résulte du théorème de convergence dominé de Lebesgue que

$$\int_0^t \left|(t+h-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t+h-s)^{\mu-1} - (t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1}\right| m(s) \to 0$$

quand $h \longrightarrow 0^+$. Il s'ensuit que $\lim_{h\longrightarrow 0^+} I_6 = 0$.

Pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, on a

$$\begin{array}{rl} I_7 \leq & \left(\int_0^{t-\epsilon} + \int_{t-\epsilon}^t\right)(t-s)^{(1-\nu)(1-\mu)}(t-s)^{\mu-1}.\left|\mathcal{P}_\mu(t+h-s)-\mathcal{P}_\mu(t-s)\right| \\ & \times\left|Bu_\epsilon(s,z)+f(s,z(s))\right|ds. \end{array}$$

De la compacité de $\mathcal{P}_\mu(t>0)$ implique la continuité de $\mathcal{P}_\mu(t)(t>0)$ dans la topologie d'opérateur uniforme, on peut facilement voir que $\lim_{h\longrightarrow 0^+} I_7 = 0$.

Le cas $t = 0$ et $0 < h \leq b$ decoule de (3.7).

Ainsi, l'ensemble $\{\Phi_\epsilon x : x \in B_\tau\}$ est une famille equicontinue de fonctions dans $C^{v,\mu}([0, b], X)$.

LEMME 3.2.4 *Soit $0 \leq v \leq 1$ et $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$. Supposons que les hypothèses $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ soient vérifiées. Pour tout $t \in [a, b]$ l'ensemble $V(t) = \{(\Phi_\epsilon x)(t) : x \in B_\tau\}$ est relativement compact dans X.*

Preuve

Soit $0 < t \leq b$ fixé et soit λ un nombre réel satisfaisant $0 < \lambda < t$. Pour $\delta > 0$, on définit l'opérateur $\Phi_\epsilon^{\lambda,\delta}$ sur B_τ par

$$\begin{aligned}
(\Phi^{\lambda,\delta}x)(t) \quad : \quad &= \frac{1}{\Gamma(v(1-\mu))} S(\lambda^\mu \delta). \int_\lambda^t \frac{s^{\mu-1}}{(t-s)^{1-v(1-\mu)}}. \int_\delta^\infty \mu\theta\Psi_\mu(\theta) S(s^\mu\theta - \lambda^\mu\delta) d\theta ds x_0 \\
&+ \mu S(\lambda^\mu\delta) \int_0^{t-\lambda} \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\mu-1}\Psi_\mu(\theta).S((t-s)^\mu\theta - \lambda^\mu\delta) d\theta \\
&\times [Bu_\varepsilon(s, z) + f(s, z(s))] ds
\end{aligned}$$

Comme $S(t)$ est un opérateur compact, l'ensemble $\left\{(\Phi^{\lambda,\delta}x)(t) : x \in B_\tau\right\}$ est relativement compact dans X. De plus pour chaque $x \in B_\tau$, on a

$$\begin{aligned}
\left\|(\Phi_\epsilon x) - (\Phi_\epsilon^{\lambda,\delta}x)(t)\right\| \quad \leq \quad & \frac{1}{\Gamma(v(1-\mu)} \left\| \int_0^t \frac{s^{\mu-1}}{(t-s)^{1-v(1-\mu)}} \int_0^\delta \mu\theta\Psi_\mu(\theta) S(s^\mu\theta) d\theta ds x_0 \right\| \\
&+ \frac{1}{\Gamma(v(1-\mu))} \left\| \int_0^\lambda \frac{s^{\mu-1}}{(t-s)^{1-v(1-\mu)}} \int_\delta^\infty \mu\theta\Psi_\mu(\theta) S(s^\mu\theta) d\theta ds x_0 \right\| \\
&+ \mu \left\| \int_0^t \int_0^\delta \theta(t-s)^{\mu-1}\Psi_\mu(\theta) S((t-s)^\mu\theta)[Bu_\epsilon(s, x) + f(s, x(s)] d\theta ds \right\| \\
&+ \mu \left\| \int_{t-\lambda}^t \int_\delta^\infty \theta(t-s)^{\mu-1}\Psi_\mu(\theta) S((t-s)^\mu\theta)[Bu_\epsilon(s, x) + f(s, x(s)] d\theta ds \right\| \\
&=: I_8 + I_9 + I_{10} + I_{11}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned}
I_8 \quad &\leq \quad \frac{\mu M}{\Gamma(v(1-\mu))} \int_0^t \frac{s^{\mu-1}}{(t-s)^{1-v(1-\mu)}} ds \left(\int_0^\delta \theta\Psi_\mu(\theta) d\theta \right) \|x_0\| \\
&\leq \quad \frac{\mu M}{\Gamma(v(1-\mu))} \frac{1}{t^{(1-v)(1-\mu)}} \int_0^1 (1-s)^{v(1-\mu)-1} s^{\mu-1} ds \left(\int_0^\delta \theta\Psi_\mu(\theta) d\theta \right) \|x_0\|
\end{aligned}$$

$$I_8 \leq \frac{\mu M}{\Gamma(v(1-\mu))} \frac{1}{t^{(1-v)(1-\mu)}} B\left(v(1-\mu),\mu\right)\left(\int_0^\delta \theta \Psi_\mu(\theta)d\theta\right)\|x_0\|, \tag{3.13}$$

et

$$I_9 \leq \frac{\mu M}{\Gamma(v(1-\mu))} . \int_0^\lambda \frac{s^{\mu-1}}{(t-s)^{1-v(1-\mu)}} ds \left(\int_0^\infty \theta \Psi_\mu(\theta)d\theta\right)\|x_0\|$$

$$I_9 \leq \frac{\mu M b^{v(1-\mu)-1}}{\Gamma(v(1-\mu))\Gamma(1+\mu))} \frac{\lambda^\mu}{\mu}\left(\int_0^\infty \theta \Psi_\mu(\theta)d\theta\right)\|x_0\|, \tag{3.14}$$

où nous avons utilisé l'égalité

$$\int_0^\infty \theta_\mu^\beta \Psi_\mu(\theta)d\theta) = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\mu\beta)}$$

De (3.13)-(3.14), on obtient

$$I_8 \longrightarrow 0, \; I_9 \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0^+, \;\; \delta \to 0^+$$

De même

$$I_{10} \longrightarrow 0, \; I_{11} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0^+, \;\; \delta \to 0^+$$

Par conséquent, pour chaque $x \in B_\tau$,

$$\left\|(\Phi_\epsilon x(t) - (\Phi_\epsilon^{\lambda,\delta} x(t)\right\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to 0^+, \;\; \delta \to 0^+$$

Il existe donc des ensembles relativement compacts arbitrairement proches de l'esemble $\{(\Phi_\epsilon x(t) : x \in B_\tau\}$. Ainsi, l'ensemble $\{(\Phi_\epsilon x(t) : x \in B_\tau\}$ est relativement compact dans X.

LEMME 3.2.5 *Soit* $0 \leq v \leq 1$ *et* $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$. *Si les hypothèses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont satisfaites, alors l' opérateur* $\Phi_\epsilon : C^{v,\mu}([0,b],X) \to C^{v,\mu}([0,b],X)$ *est continue sur* B_τ.

<u>Preuve</u>

Pour tout $t \in [0,b], \; x_n, x \in B_\tau$, nous avons

$$\begin{aligned} & \left\| t^{(1-v)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon x_n)(t) - t^{(1-v)(1-\mu)}(\Phi_\epsilon x)(t) \right\| \\ \leq \; & \frac{M t^{(1-v)(1-\mu)}}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-s)^{\mu-1} \left(\|f(s,x_n(s)) - f(s,x(s))\|\right. \\ & \left. + M_b \|u_\epsilon(s,x_n) - u_\epsilon(s,x)\|\right) ds. \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est similaire a la preuve du **LEMME 3.2.1.**

THÉORÈME 3.2.1 *Si les hypothèses* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont satisfaites et* $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$*, alors il existe une solution à l'équation (3.6).*

Preuve

Selon la version à dimension infinie du théorème d'Ascoli – Arzela si $(\mathbf{i})$ pour $t \in [a, b]$ l'ensemble $V(t) := \{(\Phi_\epsilon x)(t) : x \in B_\tau\}$ est relatement compact dans X, $(\mathbf{ii})$ la famille $\{\Phi_\epsilon x : x \in B_\tau\}$ est uniformément bornée équicontinue, alors $\{\Phi_\epsilon x : x \in B_\tau\}$ est une famille relativement compact dans $C^{v,\mu}([0, b], X)$. Les propriétés $(\mathbf{i})$ et $(\mathbf{ii})$ découlent des lemmes (**LEMME 3.2.2**, **LEMME 3.2.3** et **LEMME 3.2.4**). D'après le **LEMME 3.2.5**, pour tout $\epsilon > 0$, l'opérateur Φ_ϵ est continu. Ainsi, du théorème du point fixe de Schauder a un point fixe. Par conséquent, le système de contrôle fractionnaire (3.6) a une solution sur $[0, b]$.

3.3 Contrôlabilité approchée

THÉORÈME 3.3.1 *Soit* $0 \leq v \leq 1$ *et* $\frac{1}{2} < \mu \leq 1$*. Supposons que les conditions* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$, $(\mathbf{R})$ *sont satisfaites, alors le système (3.1)-(3.2) est approximativement contrôlable sur* $[0, b]$.

Preuve

Soit $\epsilon > 0$ et soit x^ϵ un point fixe de Φ_ϵ dans $B_{\tau(\epsilon)}$. Alors x^ϵ est une solution Mild (Douce) de (3.1)-(3.2) sur $[0, b]$ sous le contrôle

$$\begin{aligned} u_\epsilon(t, x^\epsilon) &= B^* \mathcal{S}^*_{\nu,\mu}(b-t)(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x^\epsilon), \\ p(x^\epsilon) &= h - \mathcal{S}_{\nu,\mu}(b) x_0 - \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s) f(s, x^\epsilon(s)) ds \end{aligned}$$

et satisfait l'égalité suivante

$$\begin{aligned} x^\epsilon(b) &= \mathcal{S}_{\nu,\mu}(b) x + \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s) \left[B u_\epsilon(s, x^\epsilon) + f(s, x^\epsilon(s)) \right] ds \\ &= \mathcal{S}_{\nu,\mu}(b) x_0 + (-\epsilon I + \epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x^\epsilon) + \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s) f(s, x^\epsilon(s)) ds \end{aligned}$$

$$x^\epsilon(b) = h - \epsilon(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1} p(x^\epsilon). \tag{3.15}$$

Il résulte de $(\mathbf{H3})$ que pour tout $\epsilon > 0$

$$\int_0^b \|f(s, x^\epsilon(s))\|^{1/\mu_1} ds \leq \int_0^b n^{1/\mu_1}(s)ds.$$

Par conséquent la séquence $\{f(., x^\epsilon(.))\}$. Alors, il se trouve une sous-suite notée par$\{f(., x^\varepsilon(.))\}$ qui converge faiblement, vers, disons $f(.)$ dans $L^{1/\mu_1}([0, b], X)$. Alors

$$\begin{aligned}
\|p(x^\epsilon) - p\| &= \left\| \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s)\left[f(s, x^\epsilon(s)) - f(s)\right] ds \right\| \\
&\leq \sup_{0 \leq t \leq b} \left\| \int_0^t \mathcal{P}_\mu(t-s)\left[f(s, x^\epsilon(s)) - f(s)\right] ds \right\| \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quand $\epsilon \longrightarrow 0^+$, en raison de la compacité de l'opérateur

$$f(.) \longrightarrow \int_0^{.} \mathcal{P}_\mu(. - s)f(s)ds : \; L^{1/\mu_1}([0, b], X) \longrightarrow C([0, b], X),$$

où

$$p = h - \mathcal{S}_{\nu,\mu}x_0 - \int_0^b \mathcal{P}_\mu(b-s)f(s)ds.$$

Puis par (3.15) et l'hypothèse $(\mathbf{R})$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\|x^\epsilon(b) - h\| &= \left\|\epsilon(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1}\left(p(x^\epsilon) - p\right) + \epsilon(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1}(p)\right\| \\
&\leq \|p(x^\epsilon) - p\| + \left\|\epsilon(\epsilon I + \Gamma_0^b)^{-1}(p)\right\| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quand $\epsilon \longrightarrow 0^+$. Par conséquent, la contrôlabilité approchée de (3.1)-(3.2) a été prouvée. ■

3.4 Application

Comme application, nous considérons le système différentiel fractionnaire avec condition initiale et dérivée fractionnaire au sens de Hilfer

$$D_{0^+}^{v,3/4}x(t,z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}x(t,z) + b(z)u(t) + f(t, x(t,z)) \tag{3.16}$$

$$x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \quad t > 0 \tag{3.17}$$

$$I_{0^+}^{(1/4)(1-v)}x(0) = x_0, \quad 0 < z < \pi, \quad 0 \leq t \leq b \tag{3.18}$$

où $u \in L_2[0,b],\ X = L_2[0,\pi],\ h \in X,\ 0 \le v \le 1,\ \mu = \frac{3}{4}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et uniformément bornée. Soit $B \in L(\mathbb{R}, X)$ defini par

$$\begin{aligned} (Bu)(z) &= b(z)u, \\ B^{*}v &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle b, e_n \rangle \langle v, e_n \rangle \end{aligned}$$

où $0 \le z \le \pi$, $u \in \mathbb{R},\ b(\theta) \in L_2[0,\pi]$, et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur defini par $Ax = x^{''}$, où

$$D(A) = \left\{ x \in X\ : x,\ x^{'} \text{ sont absolument continues, } x^{''} \in X,\ x(0) = x(\pi) = 0 \right\}.$$

Alors

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} -n^2 \langle x, e_n \rangle e_n,\ x \in D(A),$$

où $e_n(z) = \sqrt{2/\pi} \sin nz,\ 0 \le z \le \pi,\ (n = 1, 2, ...)$ est une base orthônormale sur X, il est bien connue que A est un opérateur infinitésimal d'un semi-groupe différentiable $S(t)\ (t > 0)$

$$S(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \langle x, e_n \rangle e_n, \quad x \in X.$$

De plus, pour tout $x \in X$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\frac{3}{4}}(t) &= \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \theta \Psi_{\frac{3}{4}}(\theta) S(t^{\frac{3}{4}}\theta) d\theta, \\ \mathcal{T}_{\frac{3}{4}}(t)x &= \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \theta \Psi_{\frac{3}{4}}(\theta) \exp(-n^2 t^{\frac{3}{4}}\theta) d\theta \langle x, e_n \rangle e_n. \end{aligned}$$

Afin de montrer que le système linéaire associé est approximativement contrôlable sur $[0,b]$, nous devons montrer que $(b-s)^{\mu-1} B^{*}\mathcal{T}_{\mu}(b-s)x = 0 \Rightarrow x = 0$. En effet, observons que

$$\begin{aligned} (b-s)^{\mu-1} B^{*}\mathcal{T}_{\mu}(b-s)x &= (b-s)^{\mu-1} \sum_{n=1}^{\infty} \langle b, e_n \rangle \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \theta \Psi_{\frac{3}{4}}(\theta) \exp\left(-n^2 t^{\frac{3}{4}}\theta\right) d\theta \langle x, e_n \rangle \\ &= (b-s)^{\mu-1} \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \theta \Psi_{\frac{3}{4}}(\theta) \exp(-n^2 t^{\frac{3}{4}}\theta) d\theta \langle b, e_n \rangle \langle x, e_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\langle x, e_n \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ à condition que $\langle b, e_n \rangle = \int_0^\pi b(\theta) e_n(\theta) d\theta \neq 0$ pour $n = 1, 2, 3...$ Par conséquent, le système linéaire associé est approximativement contrôlable à condition que $\int_0^\pi b(\theta) e_n(\theta) d\theta \neq 0$ pour $n = 1, 2, 3....$ En raison de la compacité du semi groupe $S(t)$ (et par conséquent $\mathcal{T}_{\frac{3}{4}}$) généré par A, le système linéaire associé de (3.16)-(3.18) n'est pas exactement contrôlable mais il est approximativement contrôlable. Par conséquent, selon le **THÉORÈME 3.2.2**, le système (3.16)-(3.18) sera approximativement contrôlable sur $[0, b]$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques conditions suffisantes et appropiées pour l'existance et l'unicité de solution mild (douce) et de résultats de contrôlabilité approchée pour une classe d'équation à evolution fractionnaire immpliquant une dérivée fractionnaire au sens de Hilfer. Les résultats sont établies respectivement en utilisant le calcul fractionnaire, le théorème du point fixe de Schauder et le principe de contraction de Banach. La méthode est inspirée en considérant le problème de la contrôlabilité approchée comme la limite des problèmes de contrôle optimal et en le remplaçant via la convergence des opérateurs résolvants (la condition résolvante $(\mathbf{R})$).

Bibliographie

[1] A.E. BASHIROV AND N.I. MAHMUDOV, On concepts of controllability for deterministic and stochastic systems, SlAM Journal on Control and Optimization, 37 (**1999**) : 1808-1821.

[2] A. CHIBOUTA ET R. ACHI, Contrôlabilité approchée des systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire, Mémoire de fin d'études (Master) soutenue en juillet **2019**, Département de Mathématiques, Universitaire 8 Mai 1945 Guelma.

[3] A. GRANAS AND J. DUGUNDJI, Fixed point theory, Springer-Verlas, New York. **2003**.

[4] H. GU AND J. J. TRUJILLO, Existence of mild solution for evolution equation with Hilfer fractional derivative, Applied Mathematics and Computation, In Press.

[5] R. HILFER, Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, **2000**.

[6] M. KERBOUA, A. DEBBOUCHE, D. BALEANU, Approximate controllability of Sobolev type fractional stochastic nonlocal nonlinear differential equations in Hilbert spaces, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations 58(**2014**), 1-16.

[7] A.A. KILBAS, H. M. SRIVASTAVA, AND J. J. TRUJILLO, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, 204. Elsevier Science B.V., Amsterdam, **2006**.

[8] S. KUMAR AND N. SUKAVANAM, Approximate controllability of fractional order semilinear systems with bounded delay. J. Differ. Equs. 252, (**2012**) : 6163–6174.

[9] N.I. MAHMUDOV, Approximate controllability of fractional neutral evolution equations in Banach spaces. Abstr. Appl. Anal. 2013, (**2013**) Article ID 531894.

[10] N.I. MAHMUDOV, Approximate Controllability of Semilinear Deterministic and Stochastic Evolution Equations in Abstract Spaces, SIAM J. Control Optim., 42(5), (**2003**) : 1604–1622.

[11] N.I. MAHMUDOV AND M.A. MCKIBBEN, On the approximate controllability of fractional evolution equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivative, Journal of Function Spaces 2015 (**2015**).

[12] K. S. MILLER AND B. ROSS, An Introduction to the Fractional Calculus and Differential Equations, John Wiley, New York, **1993**.

[13] A. PAZY, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, **1983**.

[14] I. PODLUBNY, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA, **1999**.

[15] R. SAKTHIVEL, Y. REN, AND N. I. MAHMUDOV, On the approximate controllability of semilinear fractional differential systems. Comput. Math. Appl. 62, (**2011**) : 1451–1459.

[16] S G. SAMKO, A. A. KILBAS, AND O. I. MARICHEV, Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications (London : Gordon and Breach), **1993**.

[17] N. SUKAVANAM AND S. KUMAR, Approximate Controllability of Fractional Order Semilinear Delay Systems, Journal of Optimization Theory and Applications, Volume 151, Issue 2, (**2011**) pp 373-384.

[18] Y. ZHOU AND F. JIAO, Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations, Nonlinear Anal. : RWA 11 (**2010**) 4465–4475.

[19] Y. ZHOU, L. ZHANG, AND X.H. SHEN, Existence of mild solutions for fractional evolution equations, J. Int. Equ. Appl. 25 (**2013**) 557–585.