République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP et Analyse numérique

Par : Boutheyna Guerouf

Intitulé

Automates Cellulaires comme Systèmes Dynamiques

Dirigé par : Saliha Djenaoui

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. Abbes Benchaabane	MCA Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. Saliha Djenaoui	MCB Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. Tarek Bahloul	MCB Univ-Guelma

Session juillet 2021

Automates cellulaires comme systèmes dynamiques

Boutheyna Guerouf

Sous la direction : Dr. Saliha Djenaoui

TABLE DES MATIÈRES

REMERCIEMENT

Tout d'abord, je remercie le grand Dieu qui nous a aidé à réaliser ce travail.

Je remercie mon encadreur D. Saliha Djenaoui pour son encadrement, ses conseils, sa gentillesse et sa patience.

Je tiens à remercier les membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Je dédie entièrement ce travail à mon père, à ma mère et à mes frères et sœurs. Je leurs souhaite beaucoup de bonheur et de réussite.

INTRODUCTION

Les systèmes dynamiques sont un domaine passionnant et très actif en mathématiques pures et appliquées, qui implique des outils et des techniques de nombreux domaines tels que les analyses, la géométrie et la théorie des nombres et a des applications dans de nombreux domaines tels que la physique, la biologie, l'économie.
L'adjectif dynamique fait référence au fait que les systèmes qui nous intéressent évoluent dans le temps. Les systèmes dynamiques discrets sont des systèmes pour lesquels le temps évolue en unités discrètes. Le temps est paramétré par une variable discrète n qui prend des valeurs entières. Dans un système dynamique continu, la variable de temps change continuellement et on lui donne un nombre réel t.

Les automates cellulaires modélisent des phénomènes variés tels la circulation automobile et la propagation des feux de forêt... Ils ont été inventés par Ulam et von Neumann en 1949. Un exemple bien connu de l'automate cellulaire est le jeu de la vie de Conway (1970). Les automates cellulaires ont été étudiés comme systèmes dynamiques (à temps discret) par Hedlund (1969).

L'objectif de ce mémoire est de savoir que tout automate cellulaire est un système dynamique et que la transitivité implique le mélange faible, dans les automates cellulaires.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, nous nous intéressons aux automates cellulaires unidimensionnels. D'abord, tout automate cellulaire est un système dynamique qui commute avec le décalage (livre de Kurka [1]), donc on peut étudier les automates cellulaires en utilisant les outils de la théorie des systèmes dynamiques. Enfin, la transitivité est équivalente au mélange faible [2], dans les automates cellulaires.

Mots clés : Système dynamique, transitivité, mélange faible, automate cellulaire.

ABSTRACT

In this thesis, we are interested in one-dimensional cellular automata. First, any cellular automaton is a dynamic system which commutes with shift (Kurka's book [1]), so we can study cellular automata using the tools of dynamical systems theory. Finally, the transitivity is equivalent to the weak mixing [2], in cellular automata.

Keywords : Dynamical systems, transitivity, weak mixing, cellular automata.

CHAPITRE 1

RAPPELS

Dans ce chapitre, nous ferons un rappel général sur les notions d'espaces métriques compacts qui seront nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. *Une distance sur un ensemble X est une application*

$$d : X \times X \to [0, +\infty)$$

telle que

1. $\forall x \in X, \forall y \in X,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$
2. $\forall x \in X, \forall y \in X,\ d(x, y) = d(y, x)$
3. $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X,$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

L'ensemble X muni d'une distance d est appelé un espace métrique.

Exemple 1.1.2. *Distance usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:*

$$d(x, y) = |x - y| .$$

Définition 1.1.3. *Soit X un espace métrique et $Y \subseteq X$.*

1. *$\mathring{Y} = \{x \in X : \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \subseteq Y\}$ est l'intérieur de Y.*
2. *$\overline{Y} = \{x \in X : \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x) \cap Y \neq \emptyset\}$ est la fermeture de Y.*
3. *Y est ouvert si $\mathring{Y} = Y$.*
4. *Y est fermé si $\overline{Y} = Y$.*
5. *Un point $x \in X$ est isolé, si $\{x\}$ est un ensemble ouvert.*

Proposition 1.1.4. *Soit X un espace métrique et $Y, Z \subseteq X$ sous-ensembles de X.*

1. *Pour tout $x \in X, \varepsilon > 0, B_\varepsilon(x)$ est un ensemble ouvert.*
2. *$\mathring{Y} \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$.*
3. *$\overline{X/Y} = X/\mathring{Y}$.*
4. *Y est ouvert ssi X/Y est fermé.*
5. *Si $Y \subseteq Z$ alors $\mathring{Y} \subseteq \mathring{Z}$ et $\overline{Y} \subseteq \overline{Z}$.*

Proposition 1.1.5. *Soit X un espace métrique.*

1. *$\emptyset$ et X sont des ensembles ouverts.*
2. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert.*
3. *L'union de toute famille d'ouverts est un ouvert*
4. *$\emptyset$ et X sont des fermés.*
5. *L'union de deux fermés est un fermé.*
6. *L'intersection de toute famille de fermés est un fermé.*

Définition 1.1.6. *Soit X un espace métrique. Une suite $(x_n \in X)_{n \geq 0}$ converge vers un point $x \in X$, ou x est la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 0, \forall m \geq n, d(x_m, x) < \varepsilon.$$

On écrit $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, ou $x_n \to x$ quand $n \to \infty$. On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite convergente si elle converge vers un certain point $x \in X$.

La topologie d'un espace métrique est sa famille d'ouverts

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq X : U \text{ est ouvert}\}.$$

Les propriétés qui peuvent être définies en termes d'ensembles ouverts sont appelées topologiques. Il s'agit notamment des opérations d'intérieur, de fermeture et de limite

$$x \in \mathring{Y} \text{ ssi } \exists U \in \mathcal{T}, x \in U \subseteq Y.$$

$$x \in \overline{Y} \text{ ssi } \forall U \in \mathcal{T}, (x \in U \implies U \cap Y \neq \emptyset).$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ ssi } \forall U \in \mathcal{T}, (x \in U \implies \exists n \geq 0, \forall m \geq n, x_m \in U).$$

Proposition 1.1.7. *Un ensemble Y d'un espace métrique X est fermé ssi la limite de toute suite convergente de points de Y appartient à Y, c'est-à-dire si*

$$\forall y \in Y^{\mathbb{N}}, \forall x \in X, (\lim_{n\to\infty} y_n = x \implies x \in Y).$$

Définition 1.1.8.

1. *un espace métrique (Y, d_Y) est un sous-espace d'un espace métrique (X, d_X) si $Y \subseteq X$ et d_Y coïncide avec d_X dans Y.*
2. *Si $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ sont des espaces métriques, leur produit est l'espace métrique (X, d) où $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, et pour $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, .., y_n)$,*

$$d(x, y) = \max\{d_i(x_i, y_i) : 1 \leq i \leq n\}.$$

Proposition 1.1.9.

1. *Si $Y \subseteq X$ est sous-espace de X, alors un ensemble $U \subseteq X$ est ouvert dans Y ssi il existe un ensemble $V \subseteq X$ ouvert dans X tel que $U = Y \cap V$. Donc $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}_X\}$.*
2. *Si $X = X_1 \times X_2$ est un espace produit, alors*

$$\mathcal{T}_X = \{U \subseteq X : \forall x \in U, \exists U_1 \in \mathcal{T}_{X_1}, \exists U_2 \in \mathcal{T}_{X_2}, x \in U_1 \times U_2 \subseteq U\}.$$

Définition 1.1.10. *Soient (X, d_X), (Y, d_Y) des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application.*

1. *f est continue en un point $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in X, (d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

2. *f est continue, si elle est continue en tous les point $x \in X$.*
3. *f uniformément continue, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in X, (d_X(x, x') < \delta \implies d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon).$$

4. *f est homéomorphisme si elle est bijective et f et f^{-1} sont continues.*
5. *X et Y sont homéomorphes, si il existe un homéomorphisme entre eux.*
6. *f est une isométrie, si $d_Y(f(x), f(x')) = d_X(x, x')$.*

Proposition 1.1.11. *Soit $f : X \to Y$ une application entre espaces métriques, et $x \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue en x.*
2. *Pour tout voisinage V de $f(x)$, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.*
3. *Pour toute suite $(x_n \in X)_{n\geq 0}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Proposition 1.1.12. *Soit $f : X \to Y$ une application entre espaces métriques, et $x \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est continue.*
2. *Pour tout ouvert $V \subseteq Y, f^{-1}(V)$ est un ouvert dans X.*
3. *Pour tout fermé $V \subseteq Y, f^{-1}(V)$ est un fermé dans X.*
4. *Pour tout ensemble $V \subseteq X, f(\overline{V}) \subseteq \overline{f(V)}$.*

1.2 Espaces compactes

Une sous-suite d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est toute suite $(x_{n_i})_{i\geq 0}$, où $(n_i)_{i\geq 0}$ est une suite croissante d'indices.

Définition 1.2.1.

1. *Un espace métrique X est compact, si chaque suite de ses points a une sous-suite convergente.*
2. *Un espace métrique est borné, s'il existe $x \in X$ et $r > 0$ tels que $X \subseteq B_r(x)$.*
3. *Un sous-ensemble Y d'un espace métrique X est compact (borné), s'il est compact (borné) comme sous-espace.*

Théorème 1.2.2 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée de nombres réels a une sous-suite convergente.*

Proposition 1.2.3.

1. *Un sous-ensemble compact d'un espace métrique est fermé et borné.*
2. *Un sous-ensemble fermé d'un espace métrique compact est compact.*
3. *Le produit d'espaces métriques compacts est compact.*
4. *Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ est compact ssi il est fermé et borné.*

Proposition 1.2.4.

1. *Le produit d'une suite bornée d'espaces compacts est compact.*
2. *La somme d'un nombre fini d'espaces compacts est compact.*

Proposition 1.2.5. *Soit $f : X \to Y$ une application continue et X compact. Alors*

1. *$f(X))$ est compacte.*
2. *Si f est bijective, alors f^{-1} est continue, donc f est un homéomorphisme.*

Définition 1.2.6. *Soit X un espace métrique.*

1. *Un ensemble $Y \subseteq X$ est dense, si $\overline{Y} = X$.*
2. *Un ensemble $Y \subseteq X$ est résiduel, s'il existe une suite $(U_i)_{i\geq 0}$ d'ensembles denses ouverts, tels que $\bigcap_{i\geq 0} U_i \subseteq Y$.*
3. *Une famille $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ d'ouverts de X est appelée une base, si tout ouvert $U \subseteq X$ est l'union de certains ensemble de $\mathcal{B}$, c'est-à-dire si*

$$\forall U \in \mathcal{T}, \forall x \in U, \exists B \in \mathcal{B}, x \in B \subseteq U.$$

Proposition 1.2.7. *Tout espace métrique compact a un ensemble dense dénombrable et une base dénombrable.*

Définition 1.2.8.

1. *Un recouvrement d'un espace X est une famille $\mathcal{U}$ de ses sous-ensembles non-vides dont l'union est X.*
2. *Une partition est un recouvrement dont les ensembles sont deux à deux disjoints.*
3. *Si tous les ensembles de $\mathcal{U}$ sont ouverts (fermés), on dit que $\mathcal{U}$ est un recouvrement ouvert (fermé).*
4. *Si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ sont des recouvrements de X, on dit que $\mathcal{V}$ est un sous-recouvrement de $\mathcal{U}$.*

Proposition 1.2.9. *Soit X un espace métrique. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. *X est compact.*
2. *Tout recouvrement ouvert de X a un sous-recouvrement fini.*
3. *Si $(V_i)_{i\geq 0}$ sont des fermés et $\emptyset \neq V_{i+1} \subseteq V_i \subseteq X$, alors $V = \bigcap_i V_i$ est non-vide.*

Théorème 1.2.10 (Théorème de Baire)**.** *Tout ensemble résiduel d'un espace métrique compact est non-vide et dense.*

Proposition 1.2.11. *Si $f : X \to Y$ est une application continue et si X est compact, alors f est uniformément continue.*

1.3 Espaces connexes

On dit qu'un ensemble $Y \subseteq X$ d'un espace métrique est ouvermé s'il est à la fois fermé et ouvert.

Définition 1.3.1. *Soit X un espace métrique.*

1. *X est connexe ssi ses seuls ensembles ouvermé sont $\emptyset$ et X.*
2. *Un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est connexe, ssi il est connexe comme un sous-espace.*

Proposition 1.3.2. *Soit $f : X \to Y$ une application continue surjective. Si X est connexe, alors Y est connexe.*

Définition 1.3.3. *Un espace métrique X est localement connexe, si tout voisinage de tout point contient un voisinage connexe : pour tout $x \in U \subseteq X$, où U est ouvert, il existe un ensemble fermé $V \subseteq U$ tel que $x \in \mathrm{V}$.*

Définition 1.3.4. *Soit X un espace métrique*

1. *X est totalement discontinu, si pour tous points distincts $x, y \in X$, il existe un ensemble ouvermé W tel que $x \in W$ et $y \in X/W$.*
2. *X est parfait s'il n'a pas de points isolés. Pour tout $x \in X$ et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $B_\varepsilon(x)/\{x\}$ est non-vide.*
3. *X est un espace de Cantor, s'il est compact, parfait et totalement discontinu.*

CHAPITRE 2

SYSTÈMES DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux systèmes dynamiques topologique (à temps discret).

2.1 Systèmes dynamiques

Soit $f : X \to X$ une application. Si $x \in X$, considérons les itérations $x, f(x), f(f(x)), \ldots$ Pour $n > 0$, on note $f^n(x)$ le n ième itéré de f en x, c'est-à-dire $f \circ f \circ \cdots \circ f$, n fois. En particulier, $f^1 = f$ et par convention f^0 : est l'application identité, qui sera notée Id ($Id(x) = x$ pour tout $x \in X$).

On peut considérer $f^n(x)$ comme le statut du point x au temps n. Nous appelons orbite l'évolution d'un point x.

Définition 2.1.1. *On note $\mathcal{O}_f^+(x)$ l'orbite d'un point $x \in X$ sous les itérations de l'application f :*

$$\mathcal{O}_f^+(x) := \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^n(x), \ldots\} = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

Ici $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels comprenant 0.

Définition 2.1.2. *Un point $x \in X$ est périodique s'il existe $n \in \mathbb{N}/\{0\}$, tel que $f^n(x) = x$. Si $n = 1$, de sorte que nous avons $f(x) = x$, nous disons que x est un point fixe. Plus généralement, si $f^n(x) = x$, on dit que x est périodique de périodique n ou que n est une période pour x. En particulier, $f^{n+j}(x) = f^j(x)$ pour tout $j \geq 0$.*

Définition 2.1.3. *Si x est un point périodique, la période minimale de x est l'entier minimum $n \geq 1$ tel que $f^n(x) = x$.*

Définition 2.1.4. *Un système dynamique topologique est une application $f : X \to X$ où (X, d) est un espace métrique et f est continue.*

Exemple 2.1.5 (La rotations du cercle)**.** *Considérons un cercle de rayon unitaire. Plus précisément, on notera S^1 l'ensemble*

$$S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2.$$

En identifiant $\mathbb{R}^2$ avec le plan complexe $\mathbb{C}$, on peut aussi écrire

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta}, 0 \leq \theta < 1\} \subset \mathbb{C}.$$

Considérons une rotation de sens direct R_α d'angle $2\pi\alpha > 0$ sur le cercle. Il est donné par

$$R_\alpha(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i(\theta+\alpha)} = e^{2\pi i\alpha} e^{2\pi i\theta}.$$

Nous nous référerons à cette formule pour R_α comme notation multiplicative, puisque rotation de $2\pi\alpha$ dans cette notation complexe équivaut à multiplier le nombre complexe $e^{2\pi i\theta}$ par $e^{2\pi i\alpha}$. (On peut aussi considérer des rotations d'angles négatifs $2\pi\alpha < 0$, avec la convention qu'elles représentent des rotations dans le sens des aiguilles d'une montre (rotation positive) par $|2\pi\alpha|$.)
Il existe une distance naturelle $d(z_1, z_2)$ entre les points sur S^1, qui est induite par la distance de la longueur de l'arc. La distance de longueur d'arc entre deux points est la longueur de l'arc le plus court reliant les deux points. Nous re-normaliserons la distance de la longueur de l'arc en divisant par 2π. Ainsi, d désignera la distance de la longueur de l'arc divisée par 2π. Puisque $\theta_1, \theta_2 \in [0, 1)$, on a $|\theta_1 - \theta_2| < 1$. Si $|\theta_1 - \theta_2| \leq \frac{1}{2}$, la longueur d'arc est

$$d(e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}) = \frac{\textit{distance de longueur d'arc}}{2\pi} = \frac{2\pi|\theta_1 - \theta_2|}{2\pi} = |\theta_1 - \theta_2|.$$

Si $|\theta_1 - \theta_2| \geq \frac{1}{2}$

$$d(e^{2\pi i\theta_1}, e^{2\pi i\theta_2}) = \frac{\textit{distance de longueur d'arc}}{2\pi} = \frac{2\pi - 2\pi|\theta_1 - \theta_2|}{2\pi} = 1 - |\theta_1 - \theta_2|.$$

La rotation préserve la distance (voir la figure 2.1), ce qui signifie que

$$d(R_\alpha(z_1), R_\alpha(z_2)) = d(z_1, z_2), \text{ pour tous } z_1, z_2 \in S^1.$$

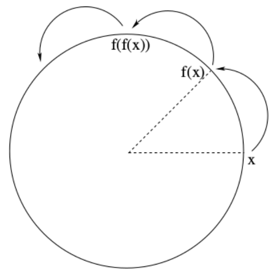


FIGURE 2.1 – Rotation de S^1.

Les deux points sont tournés du même angle $2\pi i\alpha$. Ainsi, le la rotation du cercle est un exemple d'isométrie, c'est-à-dire une application qui préserve une distance.
Il existe une autre façon de décrire un cercle, qui sera souvent plus pratique. Imaginez ouvrir le cercle pour obtenir un intervalle. Soit $I/\sim$ l'intervalle unitaire aux extrémités identifiées : le symbole $\sim$ nous rappelle que $0 \sim 1$ sont collés ensemble. Alors $I/\sim$ équivaut à un cercle.
Plus formellement, considérons $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, c'est-à-dire l'espace dont les points sont des classes d'équivalence $x+\mathbb{Z}$ de nombres réels x jusqu'à des entiers : deux réels $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ sont dans la même classe d'équivalence ssil existe $k \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 = x_2 + k$. Alors $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = I/\sim$ puisque l'intervalle unitaire $I = [0,1]$ contient exactement un représentant pour chaque classe d'équivalence à la seule exception de 0 et 1, qui appartiennent à la même classe d'équivalence, mais sont identifiés.
Nous écrirons de manière équivalente $[0,1]/\sim$ ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pour désigner l'intervalle avec des des points d'extrémité collés. La rotation de sens direct (dans le sens inverse des aiguilles d'une montre) R_α devient l'application $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ donnée par

$$R_\alpha = x + \alpha \mod 1,$$

où $\mod 1$ *signifie que l'on soustrait la partie entière (par exemple $3,14 \mod 1 = 0,14$), donc en prenant le représentant de la classe d'équivalence $x + \alpha + \mathbb{Z}$ qui se trouve dans $[0,1)$. On appelle α le nombre de rotation de R_α (remarquez que l'angle de rotation est $2\pi\alpha$). Plus explicitement, si $x, \alpha \in [0,1)$ on a*

$$R_\alpha(x) = \begin{cases} x+\alpha & si \quad x+\alpha < 1 \\ x+\alpha-1 & si \quad x+\alpha \geq 1. \end{cases}$$

Nous appelons cette notation additive (puisque ici la rotation devient l'addition $\mod 1$*). Les rotations du cercle présentent un comportement très différent selon que le nombre de rotation α est rationnel ($\alpha \in \mathbb{Q}$) ou irrationnel ($\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$).*

Théorème 2.1.6. *[Dichotomie pour les rotations] Soit $R_\alpha : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ une rotation du cercle.*

1. *Si $\alpha = p/q$ est rationnel, avec $p, q \in \mathbb{Z}$, toutes les orbites sont périodiques de période q,*
2. *Si α est irrationnel, pour tout point $z_1 \in S^1$ l'orbite $\mathcal{O}^+_{R_\alpha}(z_1)$ est dense.*

2.2 Dynamique topologique

La dynamique topologique est la branche des systèmes dynamiques qui étudie les systèmes dynamiques topologiques et leurs propriétés dynamiques topologiques.

Définissons maintenant quelques propriétés dynamiques étudiées en dynamique topologique.

2.2.1 Transitivité

Définition 2.2.1. *Un système dynamique topologique est transitif s'il existe une orbite dense, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in X$ tel que l'ensemble $\mathcal{O}^+_f(x_0)$ est dense.*

Définition 2.2.2. *Un système dynamique topologique est minimal si toutes les orbites sont denses, c'est-à-dire pour tout $x \in X$ l'ensemble $\mathcal{O}^+_f(x_0)$ est dense.*

Remarque 2.2.3. *La minimalité implique la transitivité car si toutes les orbites sont denses, il y a en particulier une orbite dense, par contre, l'inverse n'est pas vrai, car il existe des systèmes qui sont transitives mais pas minimaux.*

Un autre caractérisation utile de la transitivité est la suivante. On dit qu'un point $x \in X$ est isolé si le singleton $\{x\}$ est un ensemble ouvert dans X ou de manière équivalente, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_d(x, \varepsilon) = \{x\}$.

Proposition 2.2.4. *Soit X compact, un système dynamique topologique $f : X \to X$ est transitif si pour tous ouverts non vides U, V, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

L'implication inverse nécessite le lemme suivant :

Lemme 2.2.5. *Supposons que X n'a pas de pointe isolés. Si $\mathcal{O}^+_f(x_0)$ est dense, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{O}^+_f(f^n(x_0))$ est aussi dense.*

Exemple 2.2.6. *La rotation irrationnelle est minimale, donc transitive, d'après le théorème 2.1.6.*

2.2.2 Mélange

Le mélange est une propriété dynamique plus forte que la transitivité.

Mélange faible

Définition 2.2.7. *Un système dynamique topologique $f : X \to X$ est faiblement mélangeant si $f \times f : X \times X \to X \times X$ est transitif.*
De manière équivalente, un système dynamique topologique $f : X \to X$ est faiblement mélangeant si pour tous ouverts non vides $U, V, U', V' \subseteq X$, il existe $n \geq 1$ tel que

$$U \cap f^n(V) \neq \emptyset \quad et \quad U' \cap f^n(V') \neq \emptyset.$$

Mélange fort

Définition 2.2.8. *Un système dynamique topologique $f : X \to X$ est mélangeant si pour tous ouverts non vides $U, V \subset X$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Le mélange fort implique le mélange faible qui a son tour implique la transitivité. Les implications réciproques ne sont pas vraies.

Exemple 2.2.9. *Une rotation du cercle n'est pas mélangeante. En effet, si $U = \{e^{i\theta} : \theta \in]0, 1/4[\}$ et $V = \{e^{i\theta} : \theta \in]1/2, 3/4[\}$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des puissances arbitrairement grandes qui envoient V dans $\{e^{i\theta} : \theta \in [1/2 - \varepsilon, 3/4 + \varepsilon]\}$, donc de manière disjointe à U.*

2.2.3 Équicontinuité et sensibilité

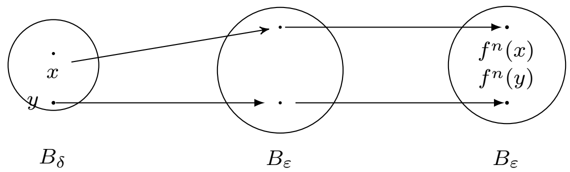
— L'ensemble des points d'équicontinuité $\mathcal{E}_f \subseteq X$ de f est défini par

$$x \in \mathcal{E}_f \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in B_\delta(x), \forall n \geq 0, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon.$$

Si $\mathcal{E}_f \neq \emptyset$, alors on dit que f est presque-équicontinu.
Si $\mathcal{E}_f$ est résiduel, alors on dit que f est quasi-équicontinu.
Si $\mathcal{E}_f = X$, alors on dit que f est équicontinu.
De manière équivalente par compacité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

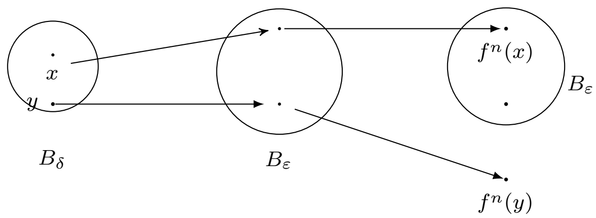
$$\forall x \in X, \forall y \in B_\delta(x), \forall n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon.$$

Quand le contexte sera évident, on pourra omettre l'indice f.



— f est sensible si

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in X, \forall \delta > 0, \exists y \in B_\delta(x), \exists n \in \mathbb{N}, d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon.$$



Exemple 2.2.10. *$\forall \alpha$, la rotation R_α est équicontinue, car R_α est une isométrie (les itérations des points voisins restent proches), donc R_α n'est pas sensible.*

CHAPITRE 3

AUTOMATES CELLULAIRES

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux automates cellulaires unidimensionnels.

3.1 Espaces symboliques

Un espace symbolique est un espace de suites infinies de symboles.

— A est un ensemble fini de symboles appelé **alphabet**.
— $A^{\mathbb{Z}}$ s'appelle l'espace de configurations.
— Une **configuration** est une suite biinfinie d'éléments de A.
— Un **mot** sur A est une suite finie d'éléments de A.
  — $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ est l'ensemble de tous les mots finis $u = u_0 \dots u_{n-1}$.
  — $A^+ = \bigcup_{n>0} A^n$.
  — On dit que v est un **sous-mot** de u et on écrit $v \sqsubset u$, s'il existe $k, l < |u|$ avec $k < l$ tels que
$$v = u_{[\![k,l[\![} = u_k \dots u_{l-1}.$$
— On munit $A^{\mathbb{Z}}$ de la topologie produit de la topologie discrète. $A^{\mathbb{Z}}$ est un espace compact, car A est fini. La topologie produit correspond à la **distance** suivante :
$$\forall x, y \in A^{\mathbb{Z}}, d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 2^{-k} & \text{si } x \neq y \text{ où } k = \min\{\, i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq y_i \vee x_{-i} \neq y_{-i}\} \end{cases}.$$
Pour toutes configurations x et y, pour tout entier positif k,
$$d(x,y) < 2^{-k} \iff x_{[\![-k,k]\!]} = y_{[\![-k,k]\!]}.$$

— La topologie sur $A^{\mathbb{Z}}$ peut être décrite comme la topologie engendrée par les cylindres. Un **cylindre** dans $A^{\mathbb{Z}}$ est un ensemble

$$[u]_i = \left\{ x \in A^{\mathbb{Z}} \middle| \, x_{[\![i,i+|u|[\![} = u \right\},$$

où $u \in A^*$ et $i \in \mathbb{Z}$. Un cylindre est ouvermé (ouvert et fermé) puisqu'il est une union de boules et son complémentaire est aussi un cylindre.

Proposition 3.1.1. *[1] $A^{\mathbb{N}}$ est un espace de Cantor.*

Définition 3.1.2. *Un **décalage plein** est $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, où A est un alphabet et l'application σ est définie pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et tout $i \in \mathbb{Z}$ par :*

$$\sigma(x)_i = x_{i+1} \ .$$

*Cette application s'appelle le **décalage**, elle est continue.*

Donc, le décalage $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est un système dynamique topologique.

Proposition 3.1.3. *[3] $(A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$ est faiblement mélangeant.*

3.2 Automates cellulaires

Définition 3.2.1. *Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire (AC) s'il existe deux entiers $m \leq a$ (mémoire et anticipation) et une règle locale*

$$f : A^{a-m+1} \to A$$

telle que pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$ et $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$F(x)_i = f(x_{[i+m,i+a]}).$$

— F s'appelle la règle globale de l'AC.
— $r = \max\{-m, a\} \geq 0$ s'appelle le **rayon** de l'AC.
— $d = a - m \geq 0$ s'appelle le **diamètre** de l'AC.

3.2.1 Exemple d'un AC unidimensionnel

L'automate cellulaire le plus simple consiste en une grille unidimensionnelle de cellules ne pouvant prendre que deux états ("0" ou "1"), avec un voisinage, pour chaque cellule, d'elle-même et des deux cellules qui lui sont adjacentes. Chacune des cellules pouvant prendre deux états, il existe $2^3 = 8$ motifs possibles d'un tel voisinage. Pour que l'automate cellulaire fonctionne, il faut définir quel doit être l'état, à la génération suivante, d'une cellule pour chacun de ces motifs.

Exemple 3.2.2. *Considérons l'automate cellulaire défini par la table suivante :*

Motif (t)	*000*	*001*	*010*	*011*	*100*	*101*	*110*	*111*
Valeur de la cellule centrale (t+1)	*0*	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*	*1*	*0*

Cela signifie que si par exemple, à un temps t donné, une cellule est à l'état "0", sa voisine de gauche à l'état " 0" et sa voisine de droite à l'état "1", au temps $t+1$ elle sera à l'état "1".
L'automate cellulaire précédent est $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, S)$ défini par

$$S(x)_i = \mod{}_2(x_{i-1} + x_{i+1}).$$

Le comportement de cet AC est montré dans le diagramme espace-temps (Figure 3.1), Les uns sont représentés par des carrés noirs et les zéros par des carrés blancs.

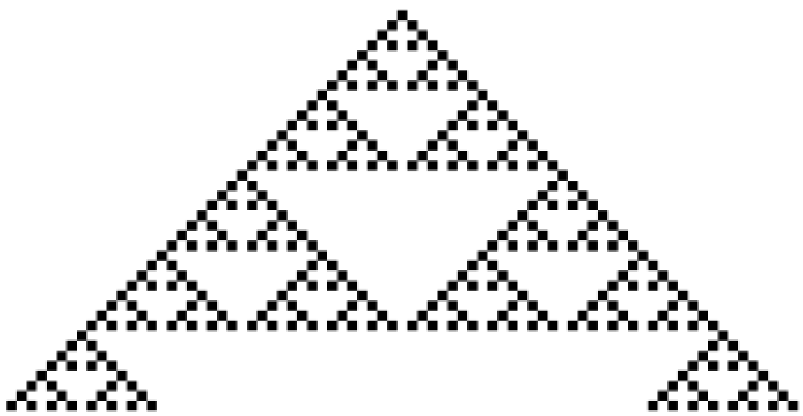


FIGURE 3.1 – Diagramme espace-temps de l'AC S.

3.2.2 Exemple d'un AC bidimensionnel

Exemple 3.2.3 (Jeu de la vie)**.** *C'est l'automate cellulaire le plus célèbre. Il a été inventé par le grand mathématicien anglais Conway en* 1970. *Le jeu de la vie est un automate cellulaire bidimensionnel. Les cases se trouvent sur une grille à* 2 *dimensions. On parle de cellules car elles peuvent être dans deux états : mortes ou vivantes. Ce modèle est censé représenter l'évolution d'une population au cours du temps. Néanmoins, les règles d'évolution inventées par Conway n'ont rien de réalistes. Voici la règle locale : L'état d'une cellule au temps $N+1$ dépend des* 8 *cellules qui l'entourent.*

— *Une cellule morte possédant exactement 3 voisines vivantes devient vivante (elle naît).*
— *Une cellule vivante possédant 2 ou 3 voisines vivantes reste vivante, sinon elle meurt.*

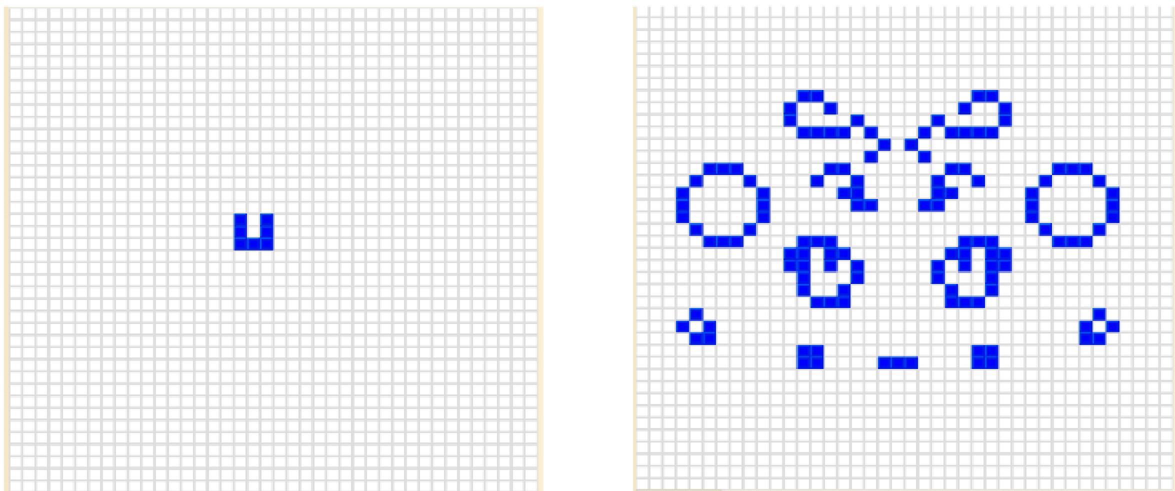


FIGURE 3.2 – Diagramme espace-temps de l'AC "jeu de la vie".

3.3 Automate cellulaire est un système dynamique

Grâce au théorème suivant, on peut étudier les automates cellulaires comme des systèmes dynamiques topologiques.

Théorème 3.3.1. *[1] Une fonction $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ est un automate cellulaire si elle est continue et commute avec le décalage, c'st-à-dire $\sigma \circ F = F \circ \sigma$.*

Preuve. *Soit $F : A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ un AC de rayon $r = \max\{-m, a\}$.*
Puisque $-r \leq m \leq a \leq r$. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$d(x,y) < 2^{-n-r} \implies x_{[-n-r,n+r]} = y_{[-n-r,n+r]} \implies x_{[-n+m,n+a]} = y_{[-n-m,n+a]}$$
$$\implies F(x)_{[-n,n]} = F(y)_{[-n,n]} \implies d(F(x),F(y)) < 2^{-n}.$$

Donc, F est continue. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$$F(\sigma(x))_i = f(\sigma(x)_{[i+m,i+a]}) = f(x_{[i+m+1,i+a+1]}) = F(x)_{i+1} = \sigma(F(x))_i.$$

$$\begin{tikzcd} A^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\sigma"'] & A^{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\sigma"] \\ A^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "F"] & A^{\mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$

Donc, F commute avec le décalage.
Supposons que F est continue et commute avec le décalage. Puisque F est uniformément continue, pour $\varepsilon = 1$, il existe $r \geq 0$ tel que

$$d(x, y) < 2^{-r} \implies d(F(x), F(y)) < 1$$

$$x_{[-r,r]} = y_{[-r,r]} \implies F(x)_0 = F(y)_0.$$

Il existe $f : A^{2r+1} \to A$ tel que pour tout $x \in A^{\mathbb{Z}}$,

$$F(x)_0 = f(x_{[-r,r]}).$$

Puisque F commute avec le décalage,

$$F(x)_i = \sigma^i(F(x))_0 = F(\sigma^i(x))_0 = f(\sigma^i(x)_{[-r,r]}) = f(x_{[i-r,i+r]}).$$

Ainsi, nous avons une règle locale avec $m = -r$ et $a = r$.

Comme $A^{\mathbb{Z}}$ est un espace métrique compact, tout automate cellulaire est un système dynamique topologique, d'après le théorème 3.3.1.

3.4 Automates cellulaires transitifs

Proposition 3.4.1. *[2] Tout automate cellulaire transitif est faiblement mélangeant.*

Preuve. *Puisque σ est faible mélangeant et bijectif, d'après la proposition 3.1.3, pour tous U, U', V, V' ouverts non vides, $\exists t \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\begin{cases} \sigma^{-t}(U) \cap U' = W \neq \emptyset \\ \sigma^{-t}(V) \cap V' = W' \neq \emptyset \end{cases}.$$

W et W' sont des ouverts, car σ est continu.
Supposons que F est transitif, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que

$$F^m(W) \cap W' \neq \emptyset.$$

Puisque $\begin{cases} W \subseteq U' \\ W' \subseteq V' \end{cases}$, $F^m(U') \cap V' \neq \emptyset$.

D'après l'hypothèse,

$$F^m(W) \cap W' \neq \emptyset \iff F^m(\sigma^{-t}(U) \cap U') \cap (\sigma^{-t}(V) \cap V') \neq \emptyset$$

$$\implies \sigma^t[F^m(\sigma^{-t}(U) \cap U') \cap (\sigma^{-t}(V) \cap V')] \neq \emptyset$$
$$\implies \sigma^t[F^m(\sigma^{-t}(U) \cap U')] \cap \sigma^t(\sigma^{-t}(V) \cap V') \neq \emptyset$$
$$\implies F^m[\sigma^t(\sigma^{-t}(U) \cap U')] \cap [V \cap \sigma^t(V')] \neq \emptyset,$$

car $F \circ \sigma = \sigma \circ F$.

$$\implies F^m[U \cap \sigma^t(U')] \cap [V \cap \sigma^t(V')] \neq \emptyset.$$

Puisque $\begin{cases} U \cap \sigma^t(U') \subseteq U \\ V \cap \sigma^t(V') \subseteq V \end{cases}$, $F^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Donc, pour tous U, U', V, V' ouverts non vides, $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{cases} F^m(U') \cap V' \neq \emptyset \\ F^m(U) \cap V \neq \emptyset \end{cases}.$$

Donc, F est faiblement mélangeant.

Donc, un automate cellulaire est transitif si et seulement s'il est faiblement mélangeant.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Petr Kurka, "Topological and Symbolic Dynamics", Société Mathématique de France, 2003.

[2] T.K. Subrahmonian Moothathu, "Homogeneity of surjective cellular automata", Discrete and continuous dynamical systems, 13(1), 195–202, 2005.

[3] R. Krikortan, "Systèmes Dynamiques. Notes du cours de M2", Université Paris 6, 2011-12.

[4] Alexander Gorodnik, "Dynamical Systems and Ergodic Theory", University of Bristol, 2017-18.