

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des Sciences et de la Technologie
Département d'Électronique et Télécommunications

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE
DOCTORAT EN SCIENCE

Filière : Contrôle

Présentée par

TEBBIKH RAJA

Intitulée

**Représentation diffusive des opérateurs pseudo-différentiels
et applications**

Soutenue le : 26 Mai 2021

Devant le Jury composé de :

Président :	Pr. BABOURI Abdesselam	Université 8 Mai 1945 Guelma.
Encadreur :	Pr. KECHIDA Sihem	Université 8 Mai 1945 Guelma.
Co-encadreur "invité"	Pr. TEBBIKH Hicham	LAIG. Université 8 Mai 1945 Guelma.
Examineur :	Pr. BOUDEN Toufik	Université de Jijel.
Examineur :	Pr. LADACI Samir	ENP Constantine.

Année Universitaire : 2020/2021.

Abstract

This work is intended as a contribution to the stabilization and optimal control of an articulated flexible arm by a diffusive approach. The diffusive representation approach is the mathematical framework adapted to the analysis and to the local time dynamic realization of systems whose description involves non-standard operators such as pseudo-differential operators. In this work, we first focus on the implementation of diffusive representations in continuous time: analysis of the different realizations of infinite dimension and their dissipative behavior, the choice of parameters directly influencing the efficiency and the convergence of the approximations carried out, and then we apply these tools to the problem of controlling flexible structures.

Flexible arms are characterized by a substantial number of significant modes of vibration, so controls based on the modal approach are too weak when the performance level required is high. The energy of high frequencies is practically uncontrollable in the event of uncertainties about the parameters of the system. A passive approach is proposed for the control of an articulated flexible arm, based on the principle of wave-absorbing boundary control. Such a control reveals a hereditary operator “integrator of order $\frac{1}{2}$.” The diffusive realization of this operator allowed the implementation in numerical simulation of a wave-absorbing feedback boundary control, conferring on the closed loop system the property of global passivity, therefore unconditional stability. This pre-stabilization designed through a diffusive system, simulating a virtual semi-infinite beam extending the flexible arm on the articulated side, allows to obtain a well posed problem of optimal control (in closed loop), in the case of tracking a reference signal relating to the rigid mode of the flexible arm. The initial condition of this diffusion determines the design of the torque control ensuring stabilization and optimal control of the arm. The obtained results clearly demonstrated the effectiveness and robustness of the proposed methodology in terms of stabilization and tracking.

Keywords : Diffusive representation, pseudo-differential operators, stabilisation, vibrating structures, flexible arm, optimal control.

Résumé

Ce travail se veut une contribution à la stabilisation et au contrôle optimal d'un bras flexible articulé par une approche diffusive. L'approche représentation diffusive est le cadre mathématique adapté à l'analyse et à la réalisation dynamique locale en temps des systèmes dont la description fait intervenir des opérateurs non standard de type pseudo-différentiel. Dans ce travail, on se concentre tout d'abord sur la mise en place des représentations diffusives en temps continu : analyse des différentes réalisations de dimension infinie et leur comportement dissipatif, le choix des paramètres influant directement sur l'efficacité et la convergence des approximations réalisées, par la suite on passe à l'application de ces outils au problème de contrôle de structures flexibles.

Les bras flexibles possèdent un grand nombre de modes de vibration propres significatifs, ce qui rend leurs contrôles basés sur l'approche modale peu robustes. L'énergie du système, notamment pour les hautes fréquences, est pratiquement incontrôlable en cas d'incertitude sur le modèle. On propose une approche passive pour le contrôle d'un bras flexible articulé à une extrémité et libre à l'autre, basée sur le principe de l'absorption d'ondes par contrôle frontière. Un tel contrôle fait apparaître un opérateur héréditaire de type pseudo-différentiel, intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$. La réalisation diffusive de cet opérateur a permis la mise en œuvre en simulation numérique du contrôle, par feedback absorbant d'ondes conférant au système bouclé la propriété de passivité globale, donc une stabilité inconditionnelle. Cette pré-stabilisation conçue à travers un système diffusif, simulant une poutre semi-infinie à l'extrémité articulée et prolongeant virtuellement le bras flexible, permet d'obtenir un problème de contrôle optimal (en boucle fermée) bien posé, dans le cas de poursuite d'une consigne de référence portant sur le mode rigide du bras flexible. C'est la condition initiale de cette diffusion qui détermine la conception du contrôle en couple assurant la stabilisation et le contrôle optimal du bras. Les résultats de simulation ont montré clairement l'efficacité et la robustesse de la méthodologie de l'approche proposée en stabilisation et en poursuite.

Mots clés : Représentation diffusive, opérateurs pseudo-différentiels, stabilisation, structures vibrantes, bras flexible, contrôle optimal.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى المساهمة في الاستقرار والتحكم الأمثل لذراع مفصلي مرن من خلال نهج مصمم بشكل انتشاري. نهج التمثيل الانتشاري هو الإطار الرياضي الذي تم تكييفه مع التحليل والتحقق الديناميكي المحلي من حيث الزمن ، للأنظمة التي يتضمن وصفها عوامل غير قياسية من النوع الشبه التفاضلي « OPD ». في هذا العمل، نركز أولاً على تحقيق التمثيل الانتشاري في وقت مستمر: تحليل مختلف الإنجازات ذات البعد اللانهائي وسلوكها التبدلي، واختيار المعلمات التي تؤثر بشكل مباشر على الكفاءة وتقارب التقديرات المحققة ، ثم نطبق هذه الأدوات على مشكلة التحكم في الهياكل المرنة.

تتميز الأذرع المرنة بعدد كبير من أوضاع الاهتزاز الهامة، لذا فإن الضوابط القائمة على النهج المعياري تكون ضعيفة للغاية عندما يكون مستوى الأداء المطلوب مرتفعاً. طاقة الترددات العالية لا يمكن السيطرة عليها عملياً في حالة عدم اليقين حول معلمات النظام. تم اقتراح نهج سلبي "غير فعال" للتحكم في ذراع مرن مفصلي عند أحد الطرفين وحر من الطرف الآخر، بناءً على مبدأ امتصاص الموجة عن طريق التحكم في الحدود. يكشف مثل هذا التحكم عن عامل وراثي "تكاملي النظام 1/2". سمح مفهوم "التمثيل الانتشاري" بتصميم هذا العامل بطريقة لا وراثية وتحقيق المحاكاة العددية للتحكم في الحدود بواسطة تغذية راجعة ممتصة للموجة، مما منح نظام الحلقة المغلقة الخاصية السلبية الكلية، وبالتالي استقرار غير مشروط. هذا التثبيت المسبق المصمم من خلال نظام إنتشاري، يحاكي شعاعاً افتراضياً شبه لانهائي يمد الذراع المرن على الجانب المفصلي، يسمح بالحصول على مشكلة مطروحة جيداً للتحكم الأمثل في حالة تتبع إشارة مرجعية تتعلق بالنمط الجامد للذراع المرن. إن الشرط الأولي لهذا الانتشار هو الذي يحدد تصميم التحكم في عزم الدوران لضمان الاستقرار والتحكم الأمثل للذراع. أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها بوضوح فعالية ومتانة المنهجية المقترحة من حيث الاستقرار والتتبع.

الكلمات المفتاحية: التمثيل الانتشاري ، العوامل الشبه تفاضلية ، الاستقرار ، الهياكل الاهتزازية ، الذراع المرن ، التحكم الأمثل.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à noter les efforts de mon encadrement présidé par le professeur Tebbikh Hicham et suivi par professeure Kechida Sihem. Mes occupations n'ont certainement pas facilité cet encadrement. Ce travail a été proposé et guidé avec efficacité par professeur Tebbikh Hicham, la compétence du professeure Kechida Sihem m'a beaucoup aider à mettre en valeur le fruit de ce travail. Je tiens à remercier vivement mes Directeurs de thèse, Je leur en suis très reconnaissante.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Babouri Abdesselam, professeur à l'université de Guelma, d'avoir accepté de présider le jury de ce travail.

Je remercie également Messieurs, Bouden Toufik, professeur à l'université de Jijel, et Ladaci Samir, professeur à l'ENP de Constantine pour m'avoir fait l'honneur d'être examinateurs de cette thèse.

Une mention spéciale est décernée à ma fille, docteur en informatique, qui m'a encouragée et épaulée pour publier les résultats de ce travail dans de bonnes conditions. Je n'oublierai jamais ton soutien.

Enfin, j'aimerais conclure en saluant tous ceux qui luttent, individuellement ou collectivement, pour vivre dignement aujourd'hui.

Liste des Figures

1.1	Contour Γ -transfert diffusif.....	26
2.1	Contour de Bromwich associé à un Γ -transfert diffusif.....	38
2.2	Fonctions d'interpolation.....	39
2.3a	Réponses impulsionnelles : exacte et approchée par "RD" de l'intégrateur Fractionnaire.....	44
2.3b	Diagramme de Bode d'un intégrateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ approché par représentation diffusive $K=10$	45
2.4a	Diagramme de Bode d'un intégrateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ approché par représentation diffusive, $K=30$	45
2.4b	Diagramme de Bode d'un dérivateur fractionnaire d'ordre $\frac{1}{2}$ approché par représentation diffusive, $K=30$	46
2.5	Mauvaise approximation diffusive d'un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$	46
2.6	Réponse fréquentielle de $\ln(\partial_t)$: exacte(- -), approchée (-).....	47
2.7	Approximation diffusive de première espèce d'un transfert fractionnaire avec $K=10$	48
2.8	Approximation Γ -diffusive d'un transfert fractionnaire avec $K_1=5$ et $K_2=5$	48
2.9	Transfert fractionnaire avec $K_1=25$ et $K_2=5$	49
2.10	Transfert fractionnaire avec $K_1=8$, $K_2=5$ et $\text{tg}(\beta)=1$	49
2.11	Réponse fréquentielle de l'approximation $\partial_t^{-0.75}$	52
2.12	Lieu Pôle-zéro (diffusif) de l'approximation $\partial_t^{-0.75}$	52
2.13	Evolution de $X(-)$ et la pulsation $dX(- -)$	53
2.14	Plan de phase (dX, X)	53
2.15	Evolution des composantes diffusives.....	54
3.1	Bras flexible articulé.....	57
3.2	Décomposition des ondes lors d'une discontinuité.....	58
3.3	Système bras réel et bras virtuel.....	59
3.4	Ondes : Incidentes et Réfléchies à l'extrémité articulée.....	60
3.5	Contrôle d'un bras flexible articulé par retour fractionnaire.....	64
3.6	Comportement en 2D du bras autonome.....	75
3.7	Comportement en 3D du bras autonome.....	75
3.8	Comportement en 3D du bras contrôlé.....	76
3.9	Comportement en 2D du bras contrôlé.....	76
3.10	Energie du bras dans le cas autonome.....	77
3.11	Energie du bras dans le cas contrôlé.....	77
4.1	Bras + poutre virtuelle simulée par contrôle diffusif.....	80
4.2	Schéma bloc du système global.....	83
4.3	Comportement en 2D du bras contrôlé.....	84
4.4	Comportement en 3D du bras contrôlé.....	85

4.5	Positions Initiale et finale du bras.....	85
4.6	Evolution de l'extrémité libre du bras $\theta(1, t)$	85
4.7	Evolution du contrôle optimal $u^*(t)$	86
4.8	Evolution de l'énergie mécanique du bras.....	86
4.9	Evolution de l'énergie mécanique du bras.....	86

Liste des tableaux

2.1	Approximation diffusive $\{\mu_k\}$ de $\partial_t^{-0.75}$	51
3.1	Fréquences propres du bras flexible articulé.....	69

Table des Matières

Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
Introduction Générale	1
• Contrôle et stabilisation.....	2
• Positionnement du travail.....	4
• Etat de l'art sur les représentations diffusives des "OPD"	5
• Contribution.....	6
• Résultats.....	8
• Organisation de la thèse.....	9
Chapitre 1 Représentation diffusive des opérateurs pseudo-différentiels	11
1.1 Introduction	11
1.2 Opérateurs Pseudo-Différentiels	11
1.2.1 Définition	11
1.2.2 Opérateurs fractionnaires	13
1.2.3 Opérateurs de Volterra	14
1.2.4 Systèmes fractionnaires	16
1.2.5 Classe d'opérateurs d'hystérésis différentiels	17
1.2.6 Autres exemples d'opérateurs pseudo- différentiels	18
1.2.7 Problèmes liés au calcul fractionnaire	18
1.3 Etude des "OPD" sous Représentation Diffusive	19
1.3.1 Introduction à la représentation diffusive	19
1.3.2 Classe des intégrateurs fractionnaires	22
1.3.3 Représentation diffusive étendue par dérivation	22
1.3.4 Structure diffusive des systèmes différentiels fractionnaires	23
1.3.5 Exemples de représentations diffusives	24
1.3.6 Localisation en temps d'"OPD" causaux	25
1.3.7 Γ -Représentations	25
1.3.8 Extensions	28
1.4 Conclusion	34
Chapitre 2 Approximations diffusives d'opérateurs pseudo-différentiels	35
2.1 Introduction	35
2.2 Méthodes d'Approximation	35

2.2.1	Approximation par optimisation	36
2.2.2	Approximation par interpolation	38
2.2.3	Approximation diffusive étendue par dérivation	40
2.2.4	Choix des paramètres d'approximation numérique	40
2.2.5	Convergence de l'approximation	42
2.3	Approximation Numérique de $I^{1/2}$ et $D^{1/2}$	42
2.3.1	Simulation numérique	43
2.3.2	Résultats de simulation	43
2.4	Application de la "RD" de Seconde Espèce	47
2.5	Exemple de Simulation d'Equations Différentielles Fractionnaires	50
2.6	Conclusion	54

Chapitre 3 Application de l'approche diffusive à la stabilisation d'un bras flexible56

3.1	Introduction	56
3.2	Dynamique du Bras	57
3.3	Contrôle par Absorption d'Onde	58
3.3.1	Principe	58
3.3.2	Dynamique du bras	59
3.3.3	Synthèse du contrôle	61
3.3.4	Système global	63
3.4	Contrôle Diffusif	64
3.4.1	Réalisation diffusive du contrôleur	64
3.4.2	Système couplé : bras articulé et intégrateur fractionnaire	64
3.4.3	Energie et stabilité du système global	65
3.5	Simulation Numérique du Système Global	66
3.5.1	Principe	66
3.5.2	Approximation modale du bras avec conditions au limites autonomes	67
3.5.3	Approximation modale du bras avec conditions aux limites non autonomes.....	70
3.5.4	Simulation numérique	74
3.6	Conclusion	78

Chapitre 4 Contrôle optimal passif d'un bras flexible articulé par impédance à mémoire..... 79

4.1	Introduction	79
4.2	Présentation du problème.....	79
4.3	Condition initiale de la diffusion.....	81
4.4	Critère d'optimisation.....	82
4.5	Simulation numérique et discussion des résultats.....	82

Table des Matières

4.5.1 Algorithme.....	82
4.5.2 Discussion.....	83
4.6 Conclusion.....	87
Conclusion Générale	88
Références	90

Introduction Générale

Introduction Générale

De nombreux phénomènes rencontrés dans différentes disciplines sont par nature non standards, de type pseudo-différentiel. Au plan physique, ceci est principalement dû à la nature répartie des phénomènes à l'échelle microscopique, dont l'expression au niveau macroscopique fait surgir, à partir d'un certain niveau de précision, des comportements complexes, fortement conditionnés par les diverses géométries, inhomogénéités, etc. Particulièrement, lorsque les phénomènes impliqués font intervenir un nombre de variables significatives élevé et ont une origine plus ou moins répartie, souvent mal connue, les méthodes classiques sont alors généralement peu efficaces voire inutilisables pour décrire et maîtriser de façon correcte et constructive, sur le plan algorithmique, les comportements complexes rencontrés.

Le cadre mathématique adapté à ces situations existe depuis plusieurs décennies et est actuellement au point au niveau théorique, il s'agit des opérateurs dits "pseudo-différentiels" (OPD). Les opérateurs pseudo-différentiels forment un outil puissant qui nous permet de passer de la théorie des opérateurs à celles des symboles, notamment d'inverser des opérateurs elliptiques (procédure de construction de la paramétrix). Ainsi, les OPD sont des représentations temps/fréquences qui généralisent les opérateurs différentiels, à coefficients constants et leur notion de fonction de transfert, à une classe beaucoup plus grande d'opérateurs regroupant notamment les opérateurs intégral-différentiels fractionnaires. La généralisation portant essentiellement sur trois points :

- L'extension aux aspects temps-espace sur \mathbb{R}^n ou des variétés régulières,
- L'extension à des fonctions très générales, des variables symboliques $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \dots$
- La variabilité (opérateurs non convolutifs).

Bien évidemment, le cadre pseudo-différentiels n'épuise pas tous les opérateurs, mais est assujéti à certaines hypothèses spécifiques, énoncées sur la base de considérations physiques. Néanmoins, l'intérêt de tels opérateurs semble désormais acquis, ils apparaissent dans de nombreux problèmes de modélisation :

- En rhéologie des polymères ou élastomères-viscoélasticité [1], les relations contraintes-déformation font généralement apparaître plusieurs ordres de dérivation fractionnaire pour une bonne description sur une bande fréquentielle étendue, ces ordres pouvant en outre dépendre de l'état nominal du matériau, potentiellement variable (effet des non linéarité lors des grandes déformations). Notamment, le modèle de Zener à dérivées fractionnaires est capable de décrire de manière fiable le

comportement viscoélastique sur une large bande de fréquences en n'utilisant que quatre paramètres [2].

- En acoustique [3-5], combustion [6], électrochimie [7-9], composants électroniques [10], micro-ondes [11], électromagnétisme (milieux polarisable) [12], économie [13], etc.
- Dans le domaine des signaux et de leur traitement, l'omniprésence d'objets fractals d'une part, de bruits non standard d'autre part (mouvement brownien fractionnaire) rend ce type d'opérateurs incontournables malgré leur nature non markovienne a priori pénalisante : calcul stochastique [14], bruits de composants électroniques [15], filtrage [16,17], Finances [18], Fractals [19,20], etc.
- Des opérateurs non standards variés apparaissent également dans l'expression de l'impédance caractéristique de milieux propagatifs [21], il en est de même dans le cas de problèmes de contrôle d'EDP abordés par des approches plus algébriques [22].

Par leur richesse, les modèles pseudo-différentiels présentent de plus en plus d'intérêt pour les problèmes actuels dans divers domaines. Les problèmes (d'analyse, de simulation, de contrôle, etc..) relatifs à de tels modèles posent en général de nombreuses difficultés, directement liées à la non localité dans le temps de ces opérateurs, les outils classiques de l'analyse des systèmes dynamiques étant pour la plus part du temps dédiés au cas différentiel. Même dans le cas linéaire, où le passage au domaine fréquentiel est envisageable dans certains cas, l'approche fréquentielle classique n'est pas adaptée aux problèmes temps-réels (identification, poursuite, contrôle, etc.).

Contrôle et stabilisation

Dans de nombreuses applications industrielles, le bruit ou les vibrations constituent un problème majeur. D'une façon générale le contrôle vibratoire tend à limiter l'amplitude des vibrations d'une structure afin d'améliorer ou de fiabiliser son fonctionnement. Les différentes techniques de contrôle sont généralement basées sur des critères énergétiques :

- *Les techniques passives* dont le principe consiste à utiliser des matériaux piézoélectriques connectés à des circuits passifs de dissipation, ne sont cependant efficaces que pour un seul mode de vibration et sont très sensibles à toute dérive de caractéristiques de la structure. D'une façon générale ces techniques sont peu efficaces en basses fréquences.
- *Les techniques actives* sont plus performantes mais plus complexes à mettre en œuvre. Elles reposent généralement sur une chaîne complète de contre réaction intégrant capteurs, systèmes de calcul et actionneurs. Face aux dérives des caractéristiques du système à contrôler, les mises en œuvre de ces techniques sont délicates et peuvent conduire à l'instabilité du système.
- *Les techniques actives-passives* : L'utilisation conjointe des matériaux absorbants (viscoélastique ou piézoélectrique + une impédance dissipative) efficace en haute fréquence et d'un contrôle actif est très efficace en basse fréquence mais souffre des limitations associées à ces deux techniques de contrôle.

- *Les techniques semi-passives* sont basées sur l'extraction par éléments piézoélectriques d'une partie de l'énergie vibratoire de la structure et reposent sur un traitement direct de couplage électromécanique de l'élément piézoélectrique visant à améliorer le contrôle réalisé. Ce traitement nécessite généralement un réseau de commande et de traitement basse consommation nettement moins complexe à mettre en œuvre que ceux utilisés dans le contrôle actif.

L'analyse des vibrations et le contrôle des structures flexibles sont des sujets difficiles qui ont été étudiés pendant de nombreuses années et qui sont toujours d'intérêt de nos jours. Cependant, malgré toutes les recherches consacrées à la modélisation et au contrôle de ce type de structures, il n'existe pas de solution universelle pour le contrôle, ce qui est clairement justifié par le nombre d'articles récents présentant de nouvelles solutions améliorées pour le contrôle des vibrations, dans différents domaines [23,24].

Les techniques de contrôle sont nombreuses et se différencient par leur efficacité, les algorithmes et leur technologie. Le contrôle actif, est largement utilisé dans les applications industrielles lorsque le niveau de vibration est fort. En utilisant le contrôle actif, la performance peut être poussée à de très bons niveaux, mais on doit prendre compte des limites imposées par le contrôleur.

Les poutres jouent un rôle important dans la modélisation des ponts, des tours, des bâtiments, des ailes d'avion, des structures spatiales faisant de la suppression active des vibrations et de la conception de contrôleurs de faisceaux intelligents un domaine très recherché [25-27].

La complexité des tâches de contrôle associées aux systèmes de suppression des vibrations nécessite l'utilisation de contrôleurs basés sur des outils mathématiques plus avancés, tels que la branche de calcul fractionnaire. De nombreuses méthodologies de réglage de contrôleur par ordre fractionnaire ont été développées et testées dans le seul but de supprimer les vibrations. Les vibrations d'une aile d'avion modélisée par un faisceau intelligent sont supprimées à l'aide de régulateurs d'ordre fractionnaire de type PID dans [28,29], dans [30], les paramètres de contrôle sont calculés par des techniques d'optimisation. Les vibrations structurelles des systèmes incertains sont atténuées en utilisant un contrôleur de mode glissant d'ordre fractionnaire dans [31]. Les vibrations résiduelles sont abordées dans [32] en utilisant les stratégies de contrôle adaptatif-prédictif d'ordre fractionnaire, alors que [33] utilise un contrôleur optimal d'ordre fractionnaire pour les vibrations des moteurs à courant alternatif.

Ces travaux mentionnés ci-dessus utilisent des stratégies de réglage d'ordre fractionnaire complexes, basées sur des modèles disponibles de la dynamique des processus vibratoires. Le développement de la commande est difficile et nécessite une formation avancée en ordre fractionnaire de l'ingénieur de commande. A des fins de mise en œuvre, par exemple, le contrôleur d'ordre fractionnaire de type PID doit d'abord être approché avec une fonction de transfert d'ordre entier ayant le même comportement, dans une plage de fréquences spécifiée, en utilisant des méthodes d'approximation telles que l'expansion de

fraction continue (CFE), Matsuda, le filtre d'Oustaloup et le filtre d'Oustaloup modifié [34,35], pour n'en citer que quelques-uns.

Positionnement du travail

Les systèmes dynamiques flexibles, tels que les poutres et les plaques vibrantes, sont caractérisés par un grand nombre de modes de vibration significatifs. Les formes et fréquences propres associées sont de façon générale, très sensibles aux erreurs de modélisation inévitables, de sorte que les contrôles basés sur l'approche modale sont trop peu robustes dès que le niveau de performance requis est élevé. Ainsi le traitement de ce problème par l'approche active présente généralement des inconvénients majeurs aux hautes fréquences (le contrôle actif ne doit porter que sur un nombre réduit de modes). L'énergie du système n'est généralement pas décroissante, ce qui constitue un risque d'instabilité en boucle fermée. L'approche par ondes progressives associée aux contrôles par absorption [36] et [37], constitue une alternative intéressante aux méthodes classiques, basée sur la connaissance explicite des modes de vibration du système. L'intérêt d'une telle approche résulte principalement du fait suivant: les modes de vibration sont déterminés à la fois par les caractéristiques de propagation locales et par la géométrie du domaine vibrant dans son ensemble, alors que le concept d'une onde progressive est principalement basé sur les propriétés locales du support considéré. Par conséquent, les commandes par ondes progressives, dénommées passives du fait de l'absence d'énergie extérieure, à base de matériau piézoélectrique, sont par nature robustes aux erreurs des modes propres, ce qui est un avantage considérable, en particulier dans le domaine des hautes fréquences. Contrairement, le contrôle actif nécessite une modélisation exacte des modes et des fréquences propres, qui eux, dépendent de la géométrie du domaine de vibration.

Plusieurs études théoriques et expérimentales ont démontré la pertinence de l'approche par ondes progressives du point de vue, à la fois, performance et robustesse. Parmi les plus significatifs citons le contrôle par absorption d'ondes [38] et le contrôle optimal H_∞ [39] dans lesquels apparaissent des opérateurs non rationnels avec des comportements à longue mémoire.

Les difficultés rencontrées lors de l'étude des systèmes contenant des opérateurs intégral-différentiels fractionnaires ont fortement limité les applications pratiques. Ces difficultés proviennent essentiellement du fait que ces opérateurs, sont héréditaires et à noyaux singuliers. Cette singularité en 0, souvent de la forme $1/t^\alpha$, nécessite un pas d'intégration très petit et un domaine d'intégration très étendu. En effet la voie directe basée sur le calcul de l'intégrale de convolution est par nature pénalisante sur le plan de la mémoire, alors, dans ce contexte, où on doit décrire des comportements dynamiques non standards, à mémoire longue, la simulation est encore plus lourde et demande un très grand espace de stockage en mémoire.

En plus le problème de définition des conditions initiales dans l'étude des systèmes différentiels fractionnaires conduit à des solutions comportant un grand nombre de fonctions

spéciales compliquées, ce qui ne facilite ni la caractérisation des propriétés analytiques importantes des solutions, ni la simulation numérique de celles-ci. Les approximations rationnelles d'ordre élevé de tels opérateurs sont généralement difficiles à mettre en œuvre en raison de leur sensibilité excessive et de leurs comportements instables.

Par conséquent, les solutions théoriques ont été présentées, dans les travaux cités ci-dessus, en termes de fonctions de transfert non rationnelles et les problèmes liés à la stabilité, aux comportements asymptotiques et en particulier aux approximations numériques n'ont pas été complètement surmontés.

Dans ce contexte, notre présente recherche propose une méthodologie de contrôle absorbant diffusif de poutres pour combler les lacunes rencontrées dans ces travaux. Le contrôle est conçu de manière complètement passive en exploitant les propriétés physiques d'évolution de la poutre, de sorte que la stabilité globale du système en boucle fermée soit garantie. L'analyse de Lyapunov est utilisée pour étudier la convergence de l'approche proposée. Nous étendons la pré-stabilisation obtenue au problème de suivi.

Les notions de représentation et de réalisation diffusive d'"OPD" qui sont à la fois simples et efficaces permettent d'obtenir une réalisation locale en temps, des opérateurs non rationnels avec comportement à longue mémoire, se prêtant bien à une utilisation en domaine théorique, que pratique.

Le principe fondamental de l'outil représentation diffusive consiste à remplacer un opérateur pseudo-différentiel "OPD" par une équation dynamique entrée-sortie de type diffusif dans un espace d'état fonctionnel [40] et [41]. La dimension infinie de la variable d'état est utilisée pour résumer l'histoire de l'entrée, de telle sorte que les convolutions à mémoire longue définie par les opérateurs fractionnaires, soient disponibles en sortie.

Etat de l'art sur les représentations diffusives des "OPD"

Le concept des opérateurs pseudo-différentiels permet une grande souplesse pour les problèmes précédemment évoqués, ce pour les raisons suivantes :

- La classe des OPD possède une structure mathématique riche (algèbre, corps dans le cas des opérateurs causaux). Cela permet beaucoup de souplesse, tant du point de vue algébrique que topologique et numérique.
- Les transferts rationnels stables sont contenus dans cette classe (comptabilité parfaite avec les dynamiques standards).
- Par cette structure algébrique-topologique souple et bien adaptée à l'analyse, l'approximation et la simulation, la classe des opérateurs pseudo-différentiels sous représentation diffusive permet d'aborder dans un cadre unifié une grande variété de problèmes non standards très actuels notamment de construire des schémas d'approximation numérique simples et efficaces.

L'étude des représentations diffusives est l'objet d'une thématique de recherche introduite au cours des années 90 par le groupe de travail (<http://www.laas.fr/gt.opd>) et développée par la suite, à une échelle internationale, par plusieurs laboratoires dont le LAIG fait partie. Les opérateurs non standards visés par les représentations diffusives sont en fait des opérateurs pseudo-différentiels, leur théorie a été élaborée d'abord dans [40], puis dans [41] et [42], de nombreuses simulations se trouvent par exemples dans [43]. Les réalisations diffusives, au sens de la théorie des systèmes, transforment une équation pseudo-différentielle avec des opérateurs héréditaires en une équation différentielle du premier ordre sur un espace de Hilbert de dimension infinie. Cette structure permet une analyse de la stabilité interne et fournit une méthode naturelle pour approximer les solutions [44]. Des extensions aux équations temps-variables et non linéaires ont été envisagées dans [45] et par exemple dans [46] pour les opérateurs à hystérésis.

Divers problèmes ont été déjà abordés avec succès (en analyse, approximation, contrôle, identification, modélisation stochastique,...) affirmant ainsi la légitimité du présent travail d'un point de vue concret. Des applications diverses sont présentées dans [47,48,49], d'autres concernant l'étude théorique des processus aléatoires générés par ses opérateurs diffusifs [50] et des applications sur les capteurs CCD [15] ou sur la simulation des turbulences du vent sur une aile d'avion [51]. Un contrôle diffusif par rétroaction pseudo-différentielle a été proposé [22] et [52]. Un nouveau concept de robustesse est appliqué dans [29]: la pseudo-invariance sous groupe de transformation. La modélisation et simulation de phénomènes physiques tels que la propagation des ondes dans un matériau poreux [54,55]. L'identification d'opérateurs diffusifs est aussi un enjeu important [56-58].

Contribution

Dans ce contexte, notre activité de recherche se concentre tout d'abord sur la mise en place des représentations diffusives en temps continu : analyse des différentes réalisations de dimension infinie et leur comportement de dissipativité, l'approximation numérique de ces réalisations et le choix des paramètres influant directement sur l'efficacité de l'approche diffusive et la convergence des approximations réalisées. Ces outils ont conduit alors à la contribution :

1. Réalisation diffusive des opérateurs pseudo-différentiels : critères de choix des paramètres d'approximation et simulation numérique de quelques exemples d'opérateurs fractionnaires de fonction de transfert p^α avec $|\alpha| < 1$, ($\alpha = +\frac{1}{2}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\alpha = -0.75$). Les techniques proposées peuvent être utilisées pour n'importe quel : $-1 < \alpha < 1$.

Pour mettre en évidence l'efficacité de l'approche diffusive ainsi que la convergence des approximations réalisées, l'évolution d'un oscillateur du second ordre avec amortissement viscoélastique fractionnaire est présentée sous représentation diffusive. Les résultats montrent bien le comportement viscoélastique à mémoire longue.

2. Nous proposons une approche de contrôle passif basée sur l'absorption d'ondes pour la stabilisation d'un bras flexible, articulé à une extrémité et libre à l'autre. Le contrôle absorbant, ainsi réalisé, assure une adaptation d'impédance au niveau de l'extrémité articulée du bras. Le principe de l'absorption par adaptation d'impédance consiste à simuler via les actionneurs, le prolongement infini du bras, de telle sorte que les coefficients de réflexion soient nuls (adaptation totale) ou minimaux (adaptation partielle, dans le cas d'une articulation). Dans le cas de notre application, bras flexible décrit par l'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli, cette adaptation d'impédance fait apparaître un opérateur héréditaire de type pseudo-différentiel (intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$). Le contrôle est ainsi réalisé sous approximation diffusive par un couple appliqué à l'extrémité articulée, simulant le prolongement du bras à moins l'infini. Le système global obtenu peut être exprimé sous la forme abstraite $dX / dt = AX$, où A est un générateur d'un semi groupe dissipatif dans l'espace d'état incluant une variable diffusive, ce qui permet de simplifier l'analyse et la simulation numérique du système.

3. L'aspect stabilisation étant résolu par un feedback diffusif absorbant, nous nous intéressons par la suite au problème de contrôle optimal, dans le cas de poursuite d'une consigne de référence portant sur le mode rigide du bras. Une telle commande doit concilier plusieurs propriétés antinomiques de sorte qu'un problème d'optimisation (compromis entre celles-ci) peut être posé. Parmi ces propriétés, nous pouvons citer :

- * La rapidité,
- * La régularité (absence de couple violent qui pourrait détruire le bras),
- * La précision,
- * L'insensibilité aux perturbations, etc.

L'originalité de l'approche proposée consiste en la prise en compte d'une condition initiale non nulle de la diffusion comme variable d'optimisation. Cela représente l'analogie diffusif d'un contrôle par "précontrainte" d'une poutre virtuelle de même impédance, connectée au bras souple. La précontrainte est déterminée de façon à minimiser la fonctionnelle de coût. Ainsi formulé, le problème s'écrit de façon synthétique: $\min J(\varphi_0)$, avec contrainte dynamique constituée du système en boucle fermée: "bras+feedback diffusif".

La solution de ce problème, qui, dans le cas d'une fonctionnelle quadratique, sera résolue par pseudo-inversion dans un espace de Hilbert, permet un contrôle optimal en boucle fermée, avec rejet de toute perturbation (comportement de type "intégrateur" d'un intégrateur fractionnaire). Par une réinterprétation convenable du problème, on pourra déduire un compensateur optimal en dimension infinie, permettant au bras souple de suivre une consigne non déterminée a priori, de façon rapide et précise, la stabilité étant encore garantie par la passivité globale du système. Le contrôle optimal ainsi défini peut être qualifié d'actif, puisque de l'énergie mécanique est communiqué au système (sous forme de condition initiale de diffusion qui sera traduite, en boucle fermée, par un couple initial), tout en étant

effectivement réalisé en boucle fermée passive, l'apport d'énergie extérieure étant déterminé "hors de la boucle".

La nature globalement passive du système bouclé lui confère la propriété de robustesse inconditionnelle même par rapport aux incertitudes sur les paramètres du système ce qui n'est pas le cas en contrôle actif où le système est instable, essentiellement au sens où l'énergie des hautes fréquences est en pratique incontrôlable en cas d'incertitude sur le modèle.

A la fin de chaque chapitre, des simulations numériques sont présentées pour illustrer l'efficacité de la méthodologie proposée.

Les résultats obtenus ont fait l'objet des communications et publications suivantes :

1. R. Tebbikh, H. Tebbikh et S. Kechida, 2020, "Passive Optimal Feedback Control of an Articulated Flexible Arm," Journal of Vibration and Control, Article reuse guidelines: sagepub.com/journals-permissions. <https://doi.org/10.1177/1077546320956763>
2. R. Tebbikh, B. Boudjehem, B. Madi et H Tebbikh, "Stabilisation des Structures Flexibles par Approche Diffusive", the fifth international Congress on Material Sciences and Engineering, Guelma, 22-24 November 2008, Algeria.
3. R. Tebbikh, "Représentation Diffusive des Opérateurs Pseudo-Différentiels et Applications", JTGE, Octobre 2008, Algérie.
4. R. Tebbikh, B. Boudjehem et H Tebbikh, "Représentation Diffusive d'Opérateurs Pseudo-Différentiels et Application à la Stabilisation des Structures Vibrantes", les journées 2007 sur les signaux et systèmes, JSS'07, 14 et 15 Novembre 2007, Guelma, Algérie.
5. R. Tebbikh, B. Boudjehem, L. Chabbi, H Tebbikh, "Diffusif Pseudo-Differential Control of a Flexible Beam", WSEAS Transaction on Systems issue 4, Vol. 5, Pages: 898-904, April 2006.

Organisation de la thèse

Ce travail réparti en quatre chapitres a pour objectif de montrer l'efficacité et la souplesse de l'outil représentation diffusive dans différents domaines d'application, en particulier en contrôle ou la nécessité de compensateurs non standards apparaît dans de nombreux phénomènes. Ces compensateurs sont cherchés dans une classe d'opérateurs pseudo-différentiels par le biais de leurs représentations diffusives.

Le premier chapitre s'attache à rassembler les principes fondamentaux nécessaires à la compréhension de l'outil représentation diffusive. Des techniques d'utilisation de cette approche dans différentes applications, théoriques et pratiques sont largement détaillées.

Le deuxième chapitre développe les techniques d'approximation diffusive des opérateurs pseudo-différentiels. Les outils classiques utilisés pour l'approximation numérique des opérateurs fractionnaires diffusifs sont présentés : fonctions d'interpolation et critères de choix des paramètres d'approximation. La simulation numérique de quelques exemples d'opérateurs fractionnaires utilisés dans la suite de notre travail est réalisée, (intégrateurs d'ordre $\frac{1}{2}$ et 0.75, dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$).

Afin de mettre en évidence l'efficacité de la représentation diffusive du point de vue simulations numériques, l'évolution d'un oscillateur du second ordre avec amortissement viscoélastique fractionnaire est présentée sous représentation diffusive. La réalisation d'un intégrateur d'ordre 0.75 est traitée dans l'exemple de simulation.

L'objectif principal du troisième chapitre est de mettre en œuvre en simulation numérique des conditions d'impédance adaptée dans le cas d'une structure vibrante articulée, selon une approche de contrôle basée sur la représentation diffusive. Le principe de la condition de transparence est de minimiser les effets des ondes incidentes sur les ondes réfléchissantes, au niveau de l'articulation, ainsi la dynamique de la structure (bras flexible) est décrite en termes d'ondes propagatives. Le contrôle proposé fait apparaître un intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$ dont l'approximation basée sur l'équation de diffusion a été largement détaillée dans le deuxième chapitre. Le système global obtenu est exprimé sous la forme abstraite $dX/dt = AX$, où A est un générateur d'un semi groupe dissipatif dans l'espace d'état incluant une variable diffusive, ce qui permet de simplifier la simulation numérique du système bouclé. Les résultats de simulation sont présentés à la fin du chapitre afin d'illustrer l'efficacité de l'approche proposée.

L'application de l'outil représentation diffusive au contrôle optimal passif d'un bras flexible articulé par impédance à mémoire fait l'objet du quatrième chapitre. Les outils développés dans les deux chapitres précédents sont appliqués dans le cadre de poursuite d'une consigne de référence portant sur le mode rigide du bras, de telle sorte que le contrôle en couple appliqué à l'extrémité articulée soit optimal en poursuite et en stabilisation. Ce contrôle est réalisé par l'intermédiaire d'un système diffusif simulant une poutre semi-infinie à gauche et prolongeant virtuellement le bras flexible. C'est la condition initiale de cette

diffusion qui détermine la conception du contrôle optimal en couple. Enfin, les résultats sont présentés pour différents cas de simulation afin de montrer l'efficacité et la robustesse du contrôle optimal diffusif proposé.

Une discussion des résultats obtenus de l'ensemble du travail suit ces quatre chapitres.

Chapitre 1

*Représentation diffusive des opérateurs
pseudo-différentiels*

Chapitre 1

Représentation diffusive des opérateurs pseudo-différentiels

1.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter les éléments essentiels de l'outil représentation diffusive en temps continu, dont le principe fondamental consiste à remplacer un opérateur pseudo-différentiel "OPD" par une équation dynamique entrée-sortie de type diffusif dans un espace d'état fonctionnel.

La première partie de ce chapitre est consacrée aux opérateurs pseudo-différentiels dont on présente brièvement les notions théoriques essentielles pour définir les "OPD" diffusifs. On présente quelques notions sur le calcul fractionnaire, les difficultés qui lui sont liées et des exemples d'"OPD" de grande utilité en pratique.

Les notions de représentation et réalisation diffusives d'opérateurs pseudo-différentiels sont ensuite introduites. Le concept de cette approche diffusive s'appuie essentiellement sur une transformation particulière du symbole (ou du noyau de l'"OPD") en une distribution explicite (symbole diffusif $\mu(t,x)$, à travers laquelle la représentation diffusive "RD" réunit dans une même algèbre une grande variété d'opérateurs d'un grand intérêt pratique.

En fin, la mise en œuvre de l'approche diffusive est présentée à travers quelques exemples d'opérateurs non linéaires.

1.2 Opérateurs pseudo-différentiels

1.2.1 Définition

Dans le contexte des opérateurs causaux, la notion " Opérateurs Pseudo-Différentiels " ("OPD") généralise celle de fonction de transfert : un opérateur pseudo-différentiel s'exprime par un symbole $H(t,p)$ qui est une représentation temps-

fréquence. Les hypothèses sur la fonction H sont peu restrictives. Les opérateurs différentiels, les opérateurs convolutifs de fonction de transfert rationnelle et les opérateurs intégrro-différentiels fractionnaires (pour lesquels le symbole est une fonction de puissance) sont des "OPD" élémentaires.

L'ensemble des "OPD" possède une structure d'algèbre pour le produit de composition et constitue de ce fait un cadre unifié, dans un contexte étendu au " temps-variable "[1].

Les "OPD" peuvent donc être considérés comme généralisation portant essentiellement sur trois points :

- ✓ L'extension aux aspects temps-espace sur \mathbb{R}^n ou des variétés régulières.
- ✓ L'extension à des fonctions très générales, des variables symboliques $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \dots\dots\dots$
- ✓ La variabilité (opérateurs non convolutifs).

Les opérateurs, pseudo-différentiels sont des opérateurs à noyaux, au sens donné à ce terme par L.Schwartz dans [60], satisfaisant toujours deux propriétés fondamentales, l'une de nature globale, l'autre de nature locale. La première, affirme la régularité \mathcal{C}^∞ , du noyau en dehors de la diagonale, dans le cas ou seule cette propriété est vérifiée, on parle d'opérateurs très réguliers. Cette qualité a des conséquences agréables pour les manipulations. On est par exemple assuré que les réponses de tels opérateurs à des excitations de régularité \mathcal{C}^∞ , sont elles-mêmes de régularité \mathcal{C}^∞ , ou encore que les singularités ne sont pas propagées. La deuxième propriété constitutive d'un opérateur pseudo-différentiel touche à la structure de son noyau au voisinage de la diagonale. Cette structure peut être synthétisée localement par une formule de type intégrale oscillante :

$$Au(x) = \int_{\xi} e^{ix\xi} a(x, \xi) \widehat{U}(\xi) d\xi .$$

Où $\widehat{U}(\xi)$ désigne la transformée de Fourier de u , $a(x, \xi)$ est le symbole principal de l'opérateur pseudo-différentiel au sens d'Hormander de classe S^m . Cela signifie que toutes les dérivées $\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} a(x, \xi)$ de a sont des $\mathcal{O}(\|\xi\|^{m-|\alpha|})$ uniformément en x . La classe à laquelle appartient un tel opérateur est alors notée L^m [61].

En différentes disciplines de nombreux phénomènes rencontrés sont par nature non standards (pseudo-différentiels entre autres). Les "OPD" sont des représentations temps/fréquences qui généralisent les opérateurs différentiels, à coefficients constants et leur notion de fonction de transfert, à une classe beaucoup plus grande d'opérateurs regroupant notamment les opérateurs intégrro-différentiels fractionnaires.

1.2.2 Opérateurs fractionnaires

► Intégrateur fractionnaire

A partir de la convolution correspondant à n intégrations successives et causales, on définit par extension l'intégration d'une entrée u à un ordre quelconque $\alpha \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ par la formule classique de Riemann-Liouville (Voir chapitre 3 de [62]):

$$I^\alpha u(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} u(\tau) d\tau \quad (1.1)$$

Où Γ est la fonction Gamma "extension de la factorielle " définie par l'expression:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad (1.2)$$

La primitive d'ordre $\alpha > 0$ quelconque de u causale, localement intégrable est donnée par:

$$I^\alpha u(t) \triangleq (Y_\alpha * u)(t) \quad \text{où le noyau} \quad Y_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (1.3)$$

La transformée de Laplace de Y_α pour $\alpha > 0$ est:

$$\mathcal{L}[Y_\alpha](p) = p^{-\alpha} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(p) > 0 \quad (1.4)$$

Ainsi le symbole (fonction de transfert) de l'opérateur intégrateur fractionnaire est $p^{-\alpha}$. Cet opérateur élémentaire intervient fréquemment dans les phénomènes dynamiques de type mémoire longue, du fait de la décroissance lente de sa réponse impulsionnelle qui est une fonction puissance du temps.

Exemple : Le noyau de l'intégrateur fractionnaire d'ordre $\alpha = 1/2$ d'une fonction

$$u(t) \in L_{Loc}^1 \text{ est donnée par : } Y_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (1.5)$$

► Dérivation fractionnaire au sens des distributions causales

L'idée de la dérivation fractionnaire de fonctions causales (ou de signaux) est d'obtenir une formule inverse de celle de l'intégration fractionnaire définie par (1.1) soit :

$$u = I^\alpha (D^\alpha u) \quad (1.6)$$

Ceci est un problème assez délicat, "parmi les techniques solutions à ce problème, on utilise les opérateurs de Volterra, opérateurs convolutifs appliqués sur toute fonction (non nécessairement causale), causalité au sens large" [63], c'est pourquoi, cette inversion est effectuée dans un cadre plus général des distributions causales (\hat{D}_+), [64]. Ainsi dans (\hat{D}_+), qui est une algèbre de convolution "propriété dite des supports convolutifs," on a

l'associativité du produit de convolution, et l'inverse convolutif d'une distribution existe et est unique [65]: ce qui permet une utilisation directe de la réponse impulsionnelle h d'un système linéaire causal.

La dérivée au sens des distributions causales de $u(t) \in \dot{D}_+$ est définie par:

$$D^\alpha u \triangleq Y_{-\alpha} * u \quad \text{où} \quad Y_{-\alpha} * Y_\alpha = \delta \quad (1.7)$$

$Y_{-\alpha}$ est l'inverse convolutif de Y_α dans \dot{D}_+ .

La distribution causale $Y_{-\alpha}$ n'est pas une fonction L^1_{Loc} .

La transformée de Laplace de $Y_{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$ est :

$$\mathcal{L}[Y_{-\alpha}] = p^\alpha \quad \text{pour} \quad \mathcal{Re}(p) > 0 \quad (1.8)$$

► **Dérivation fractionnaire douce, au sens de Caputo**

Pour une fonction u causale et continue à droite en $t = 0$;

$$d^\alpha u \triangleq D^\alpha u - u(0^+)Y_{1-\alpha} \quad (1.9)$$

Définition 1.1 : Pour $0 < \alpha < 1$, nous dirons que u est de classe \mathcal{C}_α^n si toutes les fonctions dérivées α séquentiellement jusqu'à l'ordre n existent et sont continues, même en $t = 0$ soit:

$$(d^\alpha)^{oK} u \in \mathcal{C}^o \quad \text{pour} \quad 0 \leq K \leq n \quad [66].$$

En résumé, les dérivateurs fractionnaires peuvent s'exprimer par composition, dans le cadre des distributions (au sens des parties finies de Hadamards) avec des dérivateurs ordinaires (d'ordre $n \in \mathbb{N}$).

1.2.3 Opérateurs de Volterra

On introduit la définition (1) ci-dessous qui va jouer un rôle fondamental dans la suite, en permettant de geler le présent t , après introduction de l'histoire, représentée par une nouvelle variable temporelle s :

Définition 1.2 : La fonction $u(t, \cdot)$ définie sur \mathbb{R}_s par:

$$\mathbf{u}(t, s) := \begin{cases} u(t - s) & \text{si } t > s > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.10)$$

est appelée historique de u à l'instant t .

Etant donné un noyau (temporel) $\mathbf{h}(t, s)$ et h défini par $h(t, s) \triangleq \mathbf{h}(t, t - s)$, l'opérateur causal $u \mapsto \int_0^t \mathbf{h}(t, s)u(s)ds$, de Symbole $H(t, p) = \mathcal{L}_s h(t, s)$ est noté $H(t, \frac{d}{dt})$. Pour tout $t > 0$ on a alors:

$$H\left(t, \frac{d}{dt}\right)u(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(t, p)\hat{u}(p)] \quad \text{où} \quad \hat{u}(p) := \mathcal{L}u(t) \quad (1.11)$$

Dans le cas d'un opérateur convolutif, $h(t, s) = h(s)$ est la réponse impulsionnelle et

$$H(t, p) = H(p).$$

Etant donné un opérateur de Volterra \mathcal{H} définie sur toute fonction causale u par:

$$\mathcal{H}u(t) = \int_0^t h(t, s)u(t - s)ds \quad (1.12)$$

Cet opérateur s'écrit encore:

$$\mathcal{H}u(t) = \int_0^\infty h(t, s)u(t - s)ds \quad (1.13)$$

Ce qui permet de considérer \mathcal{H} sur toute fonction (non nécessairement causale). La réponse impulsionnelle h s'exprime en fonction du noyau " \mathbf{h} " de l'opérateur \mathcal{H} :

$h(t, s) = \mathbf{h}(t, t - s)$, et l'équation (1.13) s'écrit:

$$\mathcal{H}u(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{h}(t, s)u(s)ds = \int_{-\infty}^t h(t, t - s)u(s)ds \quad (1.14)$$

L'opérateur peut alors être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel causal (mais non strictement causal) sur $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ et s'écrit:

$$\mathcal{H} = H(t, \partial_t) \text{ et } H(t, p) = \mathcal{L}_s h(t, s)$$

Etant donné $H(t, \partial_t)$ un opérateur de Volterra non linéaire " avec noyau à mémoire longue," on considère le problème dans \mathbb{R} :

$$x(t) = H(t, \partial_t)f(t, x(t)) = \int_0^t h(t, s)f(s, x(s))ds \quad (1.15)$$

De telles équations apparaissent naturellement dans le cadre des équations différentielles fractionnaires

$$\frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = f(t, x(t)) , \quad x(0) = x_0 , \quad t > 0 \quad (1.16)$$

avec $0 < \alpha < 1$ et $\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha$ l'opérateur de dérivation fractionnaire sur $\tilde{D}(\mathbb{R}_t^{*+})$, défini par:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha u(t) = I_t^{1-\alpha} \left(\frac{du(t)}{dt}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{u}(s)}{(t-s)^\alpha} ds \quad (1.17)$$

En effet avec $\partial_t^{-\alpha} := I_t^\alpha$, l'équation (1.16) s'écrit de manière équivalente:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t, x(\tau)) d\tau \\ &= x_0 + \partial_t^{-\alpha} f(t, x(t)) \end{aligned} \quad (1.18)$$

Au moyen de changement de fonction:

$$Z(t) = x(t) - x_0, \quad Z(t) = \partial_t^{-\alpha} \tilde{f}(t, Z(t)) \quad (1.19)$$

1.2.4 Systèmes fractionnaires

Les systèmes différentiels fractionnaires (linéaires et à coefficients constants dans le temps), ou, systèmes pseudo-différentiels entrée $u(t)$ - sortie $y(t)$ sont de la forme:

$$\sum_{k=0}^K a_k \left(\frac{d}{dt}\right)^{\alpha_k} y(t) = \sum_{l=0}^L b_l \left(\frac{d}{dt}\right)^{\beta_l} u(t). \quad (1.20)$$

Correspondant, par transformée de Laplace, au symbole:

$$H(p) = \frac{\sum_{l=0}^L b_l p^{\beta_l}}{\sum_{k=0}^K a_k p^{\alpha_k}}. \quad (1.21)$$

Si $\beta_l = l\alpha_1$ et $\alpha_k = k\alpha_1$ alors le système fractionnaire (1.20) est dit d'ordre commensurable

Etude de la stabilité

En posant $\sigma = p^\alpha$ on définit R telle que $H(p) = R(\sigma)$. Il suffit alors de décomposer la fraction rationnelle R en éléments simples $(\sigma - \lambda)^{-m}$, de définir par transformée de Laplace inverse les éléments de base $\mathcal{E}_\alpha^{*m}(\lambda, t)$ correspondants, et de caractériser leur stabilité à l'aide d'une analyse asymptotique. La fonction $\mathcal{E}_\alpha^{*m}(\lambda, t)$ est la solution fondamentale de l'opérateur $\left(\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha - \lambda\right)^m$; elle fait partie de la famille des fonctions de Mittag Leffler, ensemble de fonctions spéciales hypergéométriques. Cette fonction joue exactement le rôle du polynôme exponentiel causal $\mathcal{E}_\alpha^{*m}(\lambda, t) = Y_m(t) \exp(\lambda t)$ dans le cas de l'ordre entier $\alpha = 1$.

A l'aide de ces fonctions on obtient le résultat de structure:

$$h(t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M r_{nm} \mathcal{E}_\alpha^{*m}(\lambda_n, t) \quad (1.22)$$

avec
$$R(\sigma) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M r_{nm} (\sigma - \lambda_n)^{-m}$$

Une analyse asymptotique fine des fonctions $\mathcal{E}_\alpha^{*m}(\lambda, t)$ permet d'en déduire le résultat fondamental pour la stabilité entrée bornée-sortie bornée lorsque $R = Q/P$ avec P et Q deux polynômes premiers entre eux et $0 < \alpha < 1$:

$$\text{stabilité EBSB} \Leftrightarrow |\arg \sigma| > \alpha \frac{\pi}{2}, \quad \forall \sigma \in \mathbb{C}, P(\sigma) = 0 \quad (1.23)$$

Dans ce cas la réponse impulsionnelle possède l'asymptote:

$$h(t) \sim K t^{-1-\alpha} \text{ quand } t \rightarrow \infty$$

1.2.5 Classe d'opérateurs d'hystérésis différentiels

Les phénomènes d'hystérésis sont difficiles à prendre en compte en Automatique : leur modélisation est délicate et la commande des systèmes à hystérésis est un problème largement ouvert.

Dans le langage courant, l'hystérésis correspond à l'apparition "d'un retard" dans l'évolution d'un phénomène physique par rapport à un autre. C'est donc un phénomène dû à un effet de mémoire. Les équations d'évolution (équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles servent classiquement à modéliser ces effets.

Parmi les systèmes à hystérésis on cite:

— Systèmes mécaniques en présence de frottements secs. Les problèmes peuvent être : la compensation des frottements lorsqu'ils limitent les performances de régulateurs classiques, ou leur maximisation comme dans le cas des problèmes d'adhérence au sol d'une automobile. Le point de vue adapté est de modéliser ces frottements par des opérateurs d'hystérésis dissipatifs.

— Systèmes électrochimiques. Des phénomènes d'hystérésis apparaissent en liaison avec les modèles de pots catalytiques et sondes de richesse des gaz d'échappement de moteur thermiques

— Systèmes biomécaniques. Ici les phénomènes d'hystérésis correspondent à un comportement élasto-plastique de fibres musculaires.

La définition de ces phénomènes sur l'intervalle de temps $[0, T]$, $y = \mathcal{H}(u)$ est un opérateur d'hystérésis s'il est causal et si son graphe est invariant par changement de temps (du type $s = \varphi(t)$).

$$\begin{cases} \mathcal{H}(u \circ \varphi) = \mathcal{H}(u) \circ \varphi, & \text{presque partout sur } [0, T]. \\ \text{pour tout difféomorphisme croissant } \varphi \text{ sur } [0, T]. \end{cases}$$

Cela signifie, par exemple, que si u étant une fonction périodique, $\mathcal{H}(u)$ en est une aussi, alors dans un diagramme $u \mapsto \mathcal{H}(u)$ on voit apparaître des cycles dont la forme est indépendante de la période de u . Par exemple $\mathcal{H}u = \text{sign}(\dot{u})$ est un opérateur multivalué d'hystérésis, modèle du frottement de coulomb scalaire, qui conduit à des cycles d'hystérésis rectangulaires, évidemment indépendants de l'amplitude $|\dot{u}|$ de la vitesse.

D'autres exemples d'opérateurs d'hystérésis sous forme d'équation d'état et d'une équation de sortie sont donnés dans [67].

1.2.6 Autres exemples d'opérateurs pseudo-différentiels:

Des exemples types d'"OPD" sont donnés dans [59] et [40] citons:

- Toute fonction de transfert rationnelle est le symbole d'un opérateur pseudo- différentiel.
- $\ln\left(\tau \frac{d}{dt}\right)$; $\sin \tau \left(\frac{d}{dt}\right)$; $\left|\frac{d}{dt}\right| = \sqrt{-\frac{d^2}{dt^2}}$; $\exp\left(-\sqrt{\tau \frac{d}{dt}}\right)$; $\left(\frac{d^2}{dt^2} + k^2\right)^\alpha$; $\tanh \sqrt{\tau \frac{d}{dt}}$
- L'opérateur : $K(\partial_t, \partial_y) = 1/\sqrt{\partial_t^2 - \partial_y^2}$ apparaît naturellement par exemple lors des conditions aux limites transparentes pour modèles de propagation [68,69,70].
- $\frac{\tanh \sqrt{\partial_t}}{\sqrt{\partial_t}}$ Cet opérateur intervient dans les phénomènes de pertes fer dans les bobinages électriques.

En revanche l'opérateur "retard" de symbole $\exp(\tau p)$ n'est pas pseudo-différentiel (réponse impulsionnelle non régulière).

1.2.7 Problèmes liés au calcul fractionnaire

Les difficultés rencontrées lors de l'étude des systèmes contenant des opérateurs intégral-différentiels fractionnaires proviennent essentiellement du fait que ces opérateurs, sont héréditaires et à noyaux singuliers. Cette singularité en 0, souvent de la forme $1/t^\alpha$, nécessite un pas d'intégration très petit et un domaine d'intégration très étendu. En effet la voie directe basée sur le calcul de l'intégrale de convolution est par nature pénalisante sur le plan de la mémoire, alors, dans ce contexte, où on doit décrire des comportements dynamiques non standards, à mémoire longue, la simulation est encore plus lourde et demande un très grand espace de stockage en mémoire.

En plus le problème de définition des conditions initiales dans l'étude des systèmes différentiels fractionnaires conduit à, des solutions comportant un grand nombre de fonctions spéciales compliquées, ce qui ne facilite ni la caractérisation des propriétés analytiques importantes des solutions, ni la simulation numérique de celles-ci.

Ainsi les notions de représentation et de réalisation diffusive d'"OPD" qui sont à la fois simples et efficaces permettent de combler ces lacunes et obtenir une réalisation locale en temps se prêtant bien à une utilisation en domaine théorique, que pratique.

1.3 Etude des "OPD" sous représentation diffusive

1.3.1 Introduction à la représentation diffusive

Le principe fondamental de la représentation diffusive consiste à exprimer une grande variété d'opérateurs pseudo-différentiels causaux sous forme d'un système dynamique linéaire entrée-sortie de type diffusif dans un espace d'état fonctionnel.

► **Equation de diffusion "Equation de la chaleur"**

On considère le système entrée-sortie de type diffusion monodimensionnelle, avec entrée $u(t)$ ponctuelle en $x = 0$ et mesure (sortie) $y(t)$ en ce même point:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x) = \partial_x^2 \varphi(t, x) + 2u(t)\delta(x), & x \in \mathbb{R}, \\ y(t) = \varphi(t, 0) = \langle \delta, \varphi \rangle_x. \end{cases} \quad (1.24)$$

Par transformation de Fourier spatiale on obtient:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \psi(t, \xi) + 2u(t), & \xi \in \mathbb{R}, \\ y(t) = \int_{\xi} \psi(t, \xi) d\xi = \langle \mathbf{1}, \psi(t, \cdot) \rangle. \end{cases} \quad (1.25)$$

Pour une condition initiale nulle $\varphi(0, x) = 0$ on montre facilement, par utilisation de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur que:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * u.$$

Soit encore, en considérant l'opérateur d'intégration fractionnaire:

$$y = I^{1/2} u = \partial_t^{-1/2} u.$$

L'équation de la chaleur (ou de diffusion) permet donc de réaliser des transferts entrée-sortie non rationnels (de type pseudo différentiel). Evidemment cette réalisation repose sur l'introduction d'une variable d'état φ ou ψ en dimension infinie.

Des transferts plus généraux peuvent être réalisés de même, en introduisant dans (1.24) une distribution convenable $T(t, x)$ sur \mathbb{R} (distribution tempérée en général localement régulière [40,71]), ainsi on aura:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, x) \varphi(t, x) dx = \langle T, \varphi \rangle_x.$$

► **Réalisation diffusive ordinaire de $H(t, \partial_t)$**

Un opérateur pseudo différentiel admettant une réalisation diffusive, en admet généralement une infinité, de par l'arbitraire du choix de la réalisation d'état et du couple

d'opérateurs d'entrée-sortie. Parmi ces réalisations, celles qui apparaissent le plus naturellement sont :

— La réalisation avec entrée ponctuelle:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x) = \partial_x^2 \varphi(t, x) + u(t)\delta(x), & \varphi(0, \cdot) = 0 \\ H(t, \partial_t)u = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t, x)\varphi(t, x)dx \end{cases} . \quad (1.26)$$

— La réalisation avec sortie ponctuelle:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x) = \partial_x^2 \varphi(t, x) + u(t)T(t, x), & \varphi(0, \cdot) = 0 \\ H(t, \partial_t)u = \varphi(t, 0) \end{cases} \quad (1.27)$$

— La réalisation équilibrée:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, x) = \partial_x^2 \varphi(t, x) + u(t)v(t, x), & \varphi(0, \cdot) = 0 \\ H(t, \partial_t)u = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t, x)\varphi(t, x)dx \end{cases} . \quad (1.28)$$

Ce n'est que dans le cas, de l'opérateur différentiel d'ordre $\frac{1}{2}$ qu'existe une réalisation diffuse équilibrée, avec entrée et sortie ponctuelles.

► **Représentation au moyen de la transformation de Laplace "Fourier"**

La représentation diffuse $\mu(t, \xi)$ d'un opérateur pseudo-différentiel de symbole $H(t, p)$ est définie, lorsqu'elle existe [40], comme solution de l'équation intégrale (au sens des distributions) :

$$H(t, p) = \int_0^\infty \frac{\mu(t, \xi)}{p + \xi} d\xi , \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (1.29)$$

$$\text{tel que } \int_0^\infty \frac{|\mu(t, \xi)|}{1 + \xi} d\xi < +\infty \quad (\text{i.e condition imposée dans [63]}).$$

Définition 1.3 : La représentation diffuse $\mu(t, \xi)$ est la transformée de Laplace inverse du noyau (respectivement de la réponse impulsionnelle h dans le cas convolutif où $\mu(t, \xi) := \mu(\xi)$) associé à l'opérateur $H(t, \frac{d}{dt})$ (respectivement $H(\frac{d}{dt})$). Le produit de composition de deux opérateurs (respectivement le produit ordinaire des fonctions de transfert dans le cas convolutif) correspond alors à un produit particulier (noté #) entre les "RD" respectives.

Cas constant

$$\mu = \mathcal{L}^{-1}h \Leftrightarrow h(t) = \int_0^\infty \mu(\xi)e^{-\xi t} d\xi \tag{1.30}$$

La représentation diffusive est donc une utilisation "à contre sens" de la transformée de Laplace dans laquelle t joue le rôle de la variable de Laplace.

représentation diffusive	$\xrightarrow{\mathcal{L}_\xi}$	réponse impulsionnelle	$\xrightarrow{\mathcal{L}_t}$	Symbole .
$\mu(\xi)$		$h(t) \equiv H\left(\frac{d}{dt}\right)$		$H(p)$
$\mu \# v$		$h * k$		$H(p).K(p)$

Où le symbole "#" désigne le produit défini par:

$$\mu \# v = -v \left(\mu * pv \frac{1}{\xi} \right) - \mu \left(v * pv \frac{1}{\xi} \right) \tag{1.31}$$

Et $pv\left(\frac{1}{\xi}\right)$: désigne la distribution tempérée au sens de la "valeur principale" [40].

Muni du produit "#" l'espace Δ des représentations diffusives constantes (espace de Banach de distributions tempérées), est une algèbre de Banach (commutative sans diviseur de zéro).

L'opérateur défini par $y = H\left(t, \frac{d}{dt}\right)u$, dans le cas général peut alors s'exprimer sous la forme concrète de réalisation diffusive :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(0, \xi) = 0 \\ y(t) = \int_0^\infty \mu(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi = \langle \mu, \psi \rangle_\xi. \end{cases} \tag{1.32}$$

La sortie $y(t)$, dans le cas convolutif, s'écrit ainsi :

$$y(t) = (h * u)(t) = \mathcal{L}\mu * u = \langle \mu, e^{-\xi \cdot} * u \rangle = \langle \mu, \psi \rangle, \text{ (Théorème de Fubini [72])}$$

Le système entrée-sortie stable (1.30), déduit de la définition de ψ , est une réalisation d'état (de dimension infinie) de l'opérateur $u \rightarrow y$, de transfert $H(t, p)$, qui peut se mettre sous la forme abstraite :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + Bu \\ y = CX \end{cases} \tag{1.33}$$

Où A est un opérateur dissipatif à dimension infinie, B est un opérateur de contrôle et C un opérateur d'observation.

En effet le système (1.32) est déduit par transformation de Fourier de l'équation de diffusion à laquelle a été introduite une distribution tempérée. Par des transformations convenables ce système peut se mettre sous d'autres formes :

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = -4\pi^2 \xi^2 \psi(t, \xi) + \mu(t, \xi)u(t), & \psi(0, \xi) = 0 \\ y(t) = \int_\xi \psi(t, \xi) d\xi. \end{cases} \tag{1.34}$$

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = -\xi^2 \psi(t, \xi) + \mu(t, \xi) u(t), & \psi(0, \xi) = 0 \\ y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\xi} \psi(t, \xi) d\xi. \end{cases} \quad (1.35)$$

Du point de vue entrée-sortie les deux systèmes (1.26) et (1.32) sont équivalents. La réalisation diffusive (1.26) (équation de diffusion), moins simple du point de vue des approximations numériques, s'avère en revanche incontournable, dès que l'on quitte le cadre des systèmes linéaires temps invariant [73] : ceci est une conséquence de nombreuses propriétés mathématiques et physiques que possèdent les équations de diffusion, et que ne possède pas la forme canonique (1.32) qui est simplement la version "diagonalisée" (par transformation de Fourier) de (1.26). Chacune des formulations, spatiale (1.26) ou fréquentielle (1.32) permet de substituer à l'opérateur $H(t, \frac{d}{dt})$ une "EDP" ordinaire entrée-sortie, de telle sorte que par augmentation d'état, le système obtenu n'ait plus de composantes non standard. En revanche, la dimension de l'espace d'état associé à la variable d'état ψ (respectivement φ) est infinie.

1.3.2 Classe des intégrateurs fractionnaires

La représentation diffusive d'un intégrateur fractionnaire, de symbole $p^{-\alpha}$,

$0 < \operatorname{Re}(\alpha) < 1$ s'explique très simplement:

$$\mu_{\alpha}(\xi) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{1}{\xi^{\alpha}} \quad (1.36)$$

De façon plus générale, l'intégrateur d'ordre $\alpha + n$, $n \in \mathbb{N}$, admet pour représentation diffusive:

$$\mu_{\alpha}(\xi) = \frac{|\sin(\pi\alpha)|}{\pi} \operatorname{pf} \frac{1}{\xi^{\alpha+n}} \quad (1.37)$$

Où $\operatorname{pf} \frac{1}{\xi^{\alpha+n}}$ désigne la distribution associée à la fonction $\frac{1}{\xi^{\alpha+n}}$ ("partie finie" au sens de Hadamard) ; dans le cas: $n = 0$, cette subtilité disparaît, du fait que $\frac{1}{\xi^{\alpha}}$ est localement intégrable. De même, l'intégrateur (ordinaire) d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ admet pour représentation diffusive :

$$\mu_n(\xi) = \partial_{\xi}^{n-1} \delta(\xi) \quad (1.38)$$

1.3.3 Représentation diffusive étendue par dérivation

En remarquant que $\partial_t^{\alpha} = \partial_t \circ I^{1-\alpha}$, on obtient une réalisation diffusive correspondant à la réalisation entrée-sortie : $Z(t) = \partial_t^{\alpha} u(t) = \partial_t (I^{1-\alpha} u(t))$ (1.39)

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(0, \xi) = 0 \\ Z(t) = \int_0^\infty \mu_{1-\alpha}(\xi) [-\xi \psi(t, \xi) + u(t)] d\xi \end{cases} . \quad (1.40)$$

La représentation d'état (en dimension infinie) ainsi associée est:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases} \quad (1.41)$$

A noter qu'il n'est pas possible de séparer l'intégrale en deux, car chacun des termes, pris séparément, diverge.

1.3.4 Structure diffusive des systèmes différentiels fractionnaires

On aborde à présent, l'étude des systèmes différentiels fractionnaires (linéaires à coefficients constants dans le temps), dont la forme et la transformée de Laplace correspondante ont été données par ((1.20) et (1.21)).

En introduisant la notation $Y_\alpha(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t_+^{\alpha-1}$, et en particulier $Y_j(t) = \frac{1}{(j-1)!} t_+^{j-1}$ dans le cas: j entier, et en se limitant au cas des systèmes strictement propres ($\beta_L < \alpha_K$) on a le résultat:

La réponse impulsionnelle $h(t)$ du système (1.21) de symbole $H(p)$ possède la structure:

$$h(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{v_i} r_{ij} Y_j(t) e^{s_i t} + \int_0^\infty \mu(\xi) e^{-\xi t} d\xi \quad (1.42)$$

Où les s_i sont les pôles complexes dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ et μ est une distribution.

De plus, dans le cas d'une densité, la forme analytique de μ est donnée par:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L a_k b_l \sin((\alpha_k - \beta_l)\pi) \xi^{\alpha_k + \beta_l}}{\sum_{k=0}^K a_k \xi^{2\alpha_k} + \sum_{0 \leq k < l \leq K} 2a_k a_l \cos((\alpha_k - \alpha_l)\pi) \xi^{\alpha_k + \alpha_l}} \quad (1.43)$$

Pour la preuve, l'idée est d'appliquer le théorème des résidus à la fonction $H(p)$ qui est méromorphe dans le plan fendu $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Le terme diffusif provient alors naturellement de la discontinuité de H sur la coupure sur \mathbb{R}^- ; plus précisément, on montre:

$$\mu(\xi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2i\pi} [H(-\xi - i\varepsilon) - H(-\xi + i\varepsilon)] \quad (1.44)$$

Autrement dit: La réponse impulsionnelle h d'un système différentiel fractionnaire se décompose en une partie h_n d'ordre entier $n = \sum_{i=1}^r v_i$ et une partie h_μ de nature purement diffusive. On trouvera dans [44] et [74] un grand nombre d'exemples illustrant ce résultat de décomposition au titre d'oscillateurs non standards.

1.3.5 Exemples de représentations diffusives

Restrictions	Repr. Diffusive (ξ)	Rép. Impulsionnelle (t)	Symbole "Laplace" $(p = \partial_t)$
$\mathcal{L}\mu \in L^1_{Loc}$	$\mu = \mathcal{L}^{-1}h$	h	$H = \mathcal{L}h$
$\mathcal{L}(\xi\mu) \in L^1_{Loc}$	$-\mu\xi$	$\frac{d}{dt}h$	$pH(p)$
$0 < Re(\alpha) < 1$	$\mu_\alpha(\xi) := \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{1}{\xi^\alpha}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$	$p^{-\alpha}$
$\left. \begin{array}{l} 0 < Re(\alpha) < 1 \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right\ $	$\frac{ \sin(\pi\alpha) }{\pi} \text{pf} \frac{1}{\xi^{\alpha+n}}$	$\frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} t^{\alpha+n-1}$	$p^{-(\alpha+n)}$
$0 < Re(\alpha) < 1$	$\mu_\alpha \# \mu$	$I^\alpha h$	$p^{-\alpha} H(p)$
$\alpha > 0$	$\mu(\xi + a)$	$e^{-at} h(t)$	$H(p + a)$
—	δ	$\mathbf{1}$	p^{-1}
—	$\delta \# \mu$	$\int_0^t h(\tau) d\tau$	$p^{-1} H(p)$
$a, b \geq 0$	$\frac{1}{b-a} \delta_a + \frac{1}{a-b} \delta_b$	$e^{-at} * e^{-bt}$	$(p + a)^{-1} (p + b)^{-1}$
$a \geq 0, n \in \mathbb{N}$	$\delta_a^{(n+1)} = \delta_a^{(n)}$	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$(p + a)^{-(n+1)}$
$\left. \begin{array}{l} 0 < Re(\alpha) < 1 \\ a > 0 \\ k = \int \text{pv} \frac{\mu_\alpha}{\alpha - \xi} d\xi \end{array} \right\ $	$\mu_\alpha(\xi) \text{pv} \frac{1}{a - \xi} + k \delta_a$	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-at}$	$p^{-\alpha} (p + a)^{-1}$
$\left. \begin{array}{l} 0 < Re(\alpha) < 1 \\ a > 0 \end{array} \right\ $	$-\mu_\alpha(\xi) \text{pv} \frac{\xi}{a - \xi} - k a \delta_a$	$\frac{d}{dt} \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * e^{-at} \right)$	$p^{1-\alpha} (p + a)^{-1}$
—	$-\text{pf} \frac{1}{\xi}$	$\ln(t)$	$-p^{-1} (\gamma + \ln(p))$
$\left. \begin{array}{l} 0 < Re(\alpha) < 1 \\ a > 0 \end{array} \right\ $	$\frac{\sin(\pi\alpha) \xi^\alpha / \pi}{\xi^{2\alpha} + 2a \cos(\alpha\pi) \xi^\alpha + a^2}$	$\mathcal{E}_\alpha(-a, t)$	$(p^\alpha + a)^{-1}$
$a > 0$	$e^{-a\xi}$	$\frac{1}{t+a}$	$e^{ap} \text{Ei}(ap)$
$a > 0$	$\frac{\cos(a\sqrt{\xi})}{\pi\sqrt{\xi}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$

1.3.6 Localisation en temps d'"O.P.D" causaux

Considérons l'opérateur de convolution $u \rightarrow y$ avec u une fonction causale. L'introduction d'une nouvelle variable $s \in \mathbb{R}^+$ permet d'exprimer y à partir d'un produit scalaire (de dualité fonctionnelle sur \mathbb{R}^+) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indépendant de t :

$$y(t) = \int_0^t h(s)u(t-s)ds = \int_0^\infty h(s)\mathbf{u}(t,s) ds = \langle h, \mathbf{u}(t, \cdot) \rangle_s \quad (1.45)$$

Où $\mathbf{u}(t, s)$ est l'histoire de u définie par (1.10)

Par transformation de Laplace, à la variable temporelle s sera associée une variable fréquentielle, t étant inchangé, on obtient, ainsi, la relation synthétique:

$$y(t) = \langle h, \mathbf{u} \rangle_s = \langle \mu, \psi \rangle_\xi \quad (1.46)$$

$$\psi = \mathcal{L}u, \quad h = \mathcal{L}^*\mu, \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \partial_t \psi + \xi \psi = u \end{matrix} \quad \psi(0, \cdot) = 0$$

Pour un opérateur temporel non convolutif: $\mathcal{L}^*\mu(t, \xi) = h(t, s). \forall t > s > 0$.

Dans ce contexte apparaît clairement l'intérêt de la représentation diffusive : l'histoire $\mathbf{u}(t, \cdot)$ justifie bien la nature héréditaire de la formulation $\langle h, \mathbf{u} \rangle_s$ (deux variables temps liés), par contre la formulation $\langle \mu, \psi \rangle_\xi$, qui définit la réalisation diffusive canonique, fait intervenir deux variables temps-fréquence orthogonales et engendre en pratique de nombreuses propriétés (héritées de la réalisation d'état de l'opérateur, l'évaluation de ψ étant associée à un générateur infinitésimal), c'est là que réside l'intérêt de l'approche diffusive.

1.3.7 Γ -Représentations

► Principes généraux

On introduit une courbe fermée (éventuellement à l'infini) $\Gamma \subset \mathbb{C}^-$, paramétrée par une fonction continue, dérivable presque partout $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^-$. La courbe Γ sépare \mathbb{C} en deux domaines ouverts disjoints Ω^+ et Ω^- , $\Omega^+ \supset \mathbb{C}^{*+}$, [42,43] (Figure 1.1).

On note \mathcal{L}_γ l'opérateur de $S(\mathbb{R}_\xi^+)$ dans $S'(\mathbb{R}_s)$, défini à partir de \mathcal{L} par restriction à $-\Gamma$, c'est-à-dire :

$$(\mathcal{L}_\gamma f)(\xi) = \int_0^\infty e^{\gamma(\xi)s} f(s) ds, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (1.47)$$

L'opérateur dual \mathcal{L}_γ^* s'exprime par :

$$(\mathcal{L}_\gamma^* g)(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{\gamma(\xi)s} g(\xi) d\xi, \quad s > 0. \quad (1.48)$$

De plus pour u causale, $\psi := \mathcal{L}_\gamma \mathbf{u}$ est solution de:

$$\partial_t \psi(t, \xi) = \gamma(\xi) \psi(t, \xi) + u(t), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(0, \cdot) = 0 \quad (1.49a)$$

L'opérateur \mathcal{H} est ainsi réalisé par :

$$\mathcal{H}u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t, \xi) \psi(t, \xi) d\xi = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_{\xi} \quad (1.49b)$$

$\mu(t, \xi)$ est le γ -symbole, défini par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma}^* \mu(t, \xi) &:= h(t, s) \\ H(t, p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(t, \xi)}{p - \gamma(\xi)} d\xi \quad p \in \mathcal{C}, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Où \mathcal{C} est une courbe dans Ω^+ , enveloppant $\overline{\Omega^-}$ (typiquement, $\mathcal{C} = i\mathbb{R}$).

$$\mu(\cdot, \xi) = \frac{1}{2i\pi} H(\gamma(\xi)) \gamma'(\xi) \quad (1.51)$$

– L'ensemble $\Gamma = \{\gamma(\xi)_{\xi \in \mathbb{R}}\}$ est le spectre (continu) de l'opérateur diagonal : $\Psi \rightarrow \gamma(\xi)\psi$.

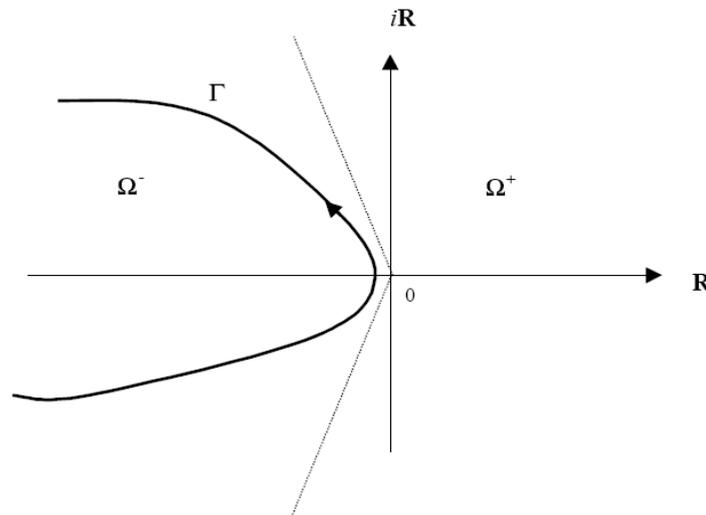


Figure 1.1 – Contour Γ -transfert diffusif.

Définition 1.4 : On appelle γ -représentation de u la fonction $\psi = \mathcal{L}_{\gamma} u$ (restriction à Γ de $\mathfrak{N}\mathfrak{D}u$) on note : $\mathfrak{N}\mathfrak{D}_{\gamma} u := (\mathcal{L}u) \circ (-\gamma)$

Où $\mathfrak{N}\mathfrak{D}$ est la résolvante de ∂_t dans l'algèbre des opérateurs de convolution causaux dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}_t)$: $\mathfrak{N}\mathfrak{D} = (\partial_t - pI)^{-1}$, $p \in \mathbb{R}^{*-} + i\mathbb{R}$.

Remarques

— En particulier, tout transfert rationnel à pôles dans $\overline{\Omega^-}$ (analytique dans Ω^+) possède un γ -symbole.

— Dans le cas dégénéré $\gamma(\xi) = -|\xi|$, $\Gamma = \mathbb{R}^-$ et le γ -symbole se réduit à la distribution causale $\mu = \mathcal{L}^{*-1}h$ (utilisation de la table de transformée de Laplace-paragraphe-1.3.5-).

— Par changement de variable $-4\pi^2\eta^2 = \xi$ et transformation de Fourier inverse par rapport à η , le système (1.49) prend la forme d'une équation aux dérivées partielles sur \mathbb{R}_x (à générateur en général non local):

$$\partial_t \varphi = K(\partial_x^2)\varphi + u \otimes \delta \quad (1.52)$$

► Γ -Réalizations

Comme pour le cas particulier où $\Gamma = \mathbb{R}^-$, l'opérateur $H(t, \partial_t)$ peut être réalisé par divers systèmes entrée-sortie, le choix d'une forme dépend de la nature du problème.

- La réalisation "canonique" :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma(\xi)\psi + u(t) \otimes \mathbf{1} \\ y = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \psi d\xi \end{cases} \quad (1.53)$$

est la plus simple pour la construction des schémas d'approximation. A noter qu'une même équation d'état permet de construire (par sortie vectorielle) plusieurs opérateurs $H(t, \partial_t)$ en parallèle. A noter aussi que $\mu(t, \xi)$ apparait linéairement:

$$y = \langle \mu, \psi \rangle = K_u \mu.$$

Ceci est utile dans certains problèmes comme l'identification et la poursuite optimale [75].

- La réalisation "en entrée" est définie par:

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma(\xi)\psi + u(t) \otimes \mu \\ y = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi d\xi \end{cases} \quad (1.54)$$

Et présente de l'intérêt dans certains problèmes de contrôle multivariable.

- La réalisation dite "équilibrée" utilisable lorsque $\mu(\xi) \geq 0$:

$$\begin{cases} \partial_t \psi = \gamma(\xi)\psi + u(t) \otimes \sqrt{\mu} \\ y = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\mu} \psi d\xi \end{cases} \quad (1.55)$$

Dans ce cas, les approches de type énergie sont particulièrement facilitées par le fait que (1.55) est de la forme abstraite:

$$\begin{cases} \partial_t X = AX + Bu \\ y = B^*X \end{cases} \quad (1.56)$$

Cette formulation permet d'unifier dans un même cadre (y compris celui des réalisations étendues par dérivation) les comportements visco-élastiques à comportement haute fréquence

de type intégrateur et dérivateur (de symboles $H(t, p) \propto K(t)p^{\alpha(t)}$, $-1 < \alpha(t) < 1$), avec existence d'une intégrale d'énergie interne définie par:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{\mu}(t, \xi)|^2 d\xi$$

A noter enfin, dans le cas $\Gamma = \mathbb{R}^-$, la réalisation dite "complètement locale" utile en analyse non linéaire, où l'entrée et la sortie sont ponctuelles, permettant l'utilisation du principe du maximum.

► *Champs d'application*

Le concept de représentation diffusive, présenté dans les paragraphes précédents, est destiné à la réalisation dynamique concrète de certains "OPD" à symbole analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, tels que les opérateurs intégréo-différentiels fractionnaires. Malgré cette restriction, cette approche (dite de première espèce) présente un grand intérêt au niveau des applications en génie électrique [75,75.bis], en physique [5,55,76,77], signal [78,79,80], automatique (contrôle robuste pseudo-invariant sous groupe de transformation [53,81,82] et contrôle passif par impédance adaptée [83,83.bis], qu'on traitera dans les chapitres qui suivent) et d'autres thématiques de recherche.

Toutes fois, la représentation diffusive (deuxième espèce) est nécessaire dans les problèmes, comme par exemples, le contrôle par absorption d'ondes 2D [70] où l'opérateur de transparence au bord du domaine s'exprime sous la forme $(\partial_t^2 - \partial_y^2)^{1/2}$, en modélisation [84] et particulièrement le contrôle robuste, où la nécessité d'inclure dans une même structure mathématique toute la palette des compensateurs admissibles, en particulier les compensateurs rationnels classiques (à pôles complexes).

1.3.8 Extensions

► *Par dérivation*

La réalisation entrée-sortie (étendue) de l'opérateur $\partial_t \circ H(\partial_t)$ est définie par:

$$u \rightarrow \langle \mu, \gamma\psi + u \rangle$$

Ce qui permet la réalisation d'opérateurs de comportement asymptotique de type ∂_t^{α} avec $\alpha < 1$, c'est-à-dire des dérivateurs d'ordre strictement positif, sous forme d'un transfert propre (ceci est une particularité des opérateurs non rationnels, clairement mis en évidence par la réalisation diffusive).

► *Par translation*

Il s'agit de réalisations intermédiaires entre les réalisations diffusives de première espèce ($\Gamma = \mathbb{R}^-$) et les Γ -réalisations générales.

On considère la réalisation d'état, avec $a \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} \partial_t \Phi = (\gamma(\xi) + a)\Phi + u \\ y = \mathcal{R}e(\langle \mu, \Phi \rangle_\xi) \end{cases} \quad (1.57)$$

Dans le cas $a = i\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Gamma = \mathbb{R}^-$, la correspondance $u \rightarrow y$ réalise l'opérateur $H(\partial_t^2 + a^2)$, ce qui permet d'accéder aux opérateurs oscillants à mémoire longue, comme par exemple $(\partial_t^2 + 1)^{-1/2}$, de réponse impulsionnelle associée à la fonction de Bessel J_0 . De tels opérateurs apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes comme la construction de conditions aux limites transparentes pour l'équation des ondes nD .

Dans le cas $a > 0$, les OPD "instables" sont accessibles dans le formalisme de la RD.

► **Représentation diffusive d'opérateurs "temps-variables"**

Etant donné un opérateur temporel (opérateur de Volterra) de symbole $H(t, p)$ défini par:

$$H(t, \partial_t)u(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(t, p)\mathcal{L}u(p)] = \int_0^t \mathbf{h}(t, s)u(s)ds = \int_0^\infty h(t, s)\mathbf{u}(t, s)ds$$

Où $\mathbf{h}(t, s)$ est le noyau de l'opérateur ($=h(t-s)$ dans le cas convolutif).

$h(t, s) := \mathbf{h}(t, t-s)$ la réponse impulsionnelle ($h(s)$ dans le cas convolutif), définie par $\mathcal{L}_s \mathbf{h}(t, s) = H(t, p)$.

Le γ -symbole $\mu(t, \xi)$ défini par l'équation (1.50) (ou symbole diffusif dans le cas $\Gamma = \mathbb{R}^-$) est tel que:

$$\mathcal{L}_\gamma^* \mu(t, \xi) = h(t, s) \quad \forall t > s > 0$$

Inversement au cas convolutif, le produit $\#$ n'est évidemment plus commutatif, ce qui induit des problèmes importants pour les applications (notamment pour la factorisation).

La réalisation canonique associée est :

$$y(t) = \langle \mu(t, \cdot), \psi(t, \cdot) \rangle_\xi$$

Exemple

considérons l'opérateur:

$$H(t, \partial_t) = \partial_t^{\alpha(t)} \quad \alpha(t) > 0.$$

De symbole diffusif déduit des tables de transformée de Laplace:

$$\mu(t, \xi) = \frac{|\sin \pi \alpha(t)|}{\pi} \text{pf } \xi^{\alpha(t)}$$

La réalisation diffusive de $y(t) = \partial_t^{\alpha(t)} u(t)$ s'exprime:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + u(t), & \psi(0, \xi) = 0 \\ y(t) = \frac{|\sin \pi \alpha(t)|}{\pi} \int_0^\infty \text{pf } \xi^{\alpha(t)} \psi(t, \xi) d\xi \end{cases}$$

► **Application de la RD à des problèmes non linéaires**

Soit un opérateur \mathcal{H} tel que \mathcal{H}^{-1} admette une réalisation diffusive μ , on considère l'équation pseudo- différentielle :

$$\mathcal{H}x = f(x, t) \quad (1.58)$$

Alors la solution $x(t)$ de (1.58) est obtenue à partir de la solution $\psi(t, \xi)$ du système différentiel (ordinaire):

$$\partial_t \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + f\left(\int_0^\infty \mu \psi d\xi, t\right)$$

$$\text{Sous la forme } x := \int_0^\infty \mu \psi d\xi \quad (1.59)$$

Avec $H(t, p) = p^{\alpha(t)}$, $\alpha(t) > 0$. (1.58) est une équation différentielle fractionnaire, ce qui nous permet de considérer de façon explicite (directement dans le domaine temporel) les systèmes différentiels fractionnaires d'ordre non constant sous la forme d'une EDP, non locale en espace.

i. Equations différentielles fractionnaires non linéaires

Considérons l'équation suivante, où f est une fonction non linéaire et $x \in \mathbb{R}$.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha x(t) = f(x(t)) + u(t), \quad x(0) = x_0, \quad t > 0 \quad (1.60)$$

Avec $0 < \alpha < 1$ et $\left(\frac{d}{dt}\right)^\alpha$ l'opérateur de dérivation fractionnaire sur $D'(\mathbb{R}_+^*)$

L'équation (1.60) peut être mise sous la forme de l'équation intégrale d'Abel-Volterra (voir paragraphe 1.2.3), qu'on peut écrire après changement de variables sous la forme:

$$z(t) = I^\alpha [\tilde{f}(z(t)) + u(t)] \quad (1.61)$$

$$\text{Où } z(t) = x(t) - x_0, \quad \tilde{f}(z) = f(z + x_0)$$

a- Formulation diffusive diagonale "forme équilibrée"

On note $\nu_\alpha(\xi) = \sqrt{\mu_\alpha(\xi)}$ où $\mu_\alpha(\xi)$ est le symbole diffusif associé à l'opérateur I^α . Dans le cas scalaire le problème (1.61) est équivalent à:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, \xi) = -\xi \psi(t, \xi) + [f(z(t)) + u(t)] v_\alpha(\xi), & \psi(0, \xi) = 0 \\ z(t) = \int_0^\infty v_\alpha(\xi) \psi(t, \xi) d\xi \end{cases} \quad (1.62)$$

L'énergie associée à cette équation est:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty |\psi(t, \xi)|^2 d\xi$$

A noter que les espaces fonctionnels associés sont indépendants de α (et plus généralement de $\mu \geq 0$)

b- Formulation par l'équation de la chaleur "forme équilibrée"

On utilise les distributions tempérées suivantes : $M_\alpha(y)$, de transformée de Fourier $m_\alpha(\eta) = 2 \sin \alpha \pi |2\pi\eta|^{1-2\alpha}$, utilisé dans la forme de sortie, et $N_\alpha(y)$ de transformée de Fourier et $n_\alpha(\eta) = \sqrt{m_\alpha(\eta)}$, utilisée dans la forme équilibrée.

Dans le cas $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, $M_\alpha(y) \propto y^{-2(1-\alpha)}$ et $N_\alpha(y) \propto |y|^{-(\frac{3}{2}-\alpha)}$ sont des fonctions de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$; pour $\alpha = \frac{1}{2}$, elles sont proportionnelles à la mesure de dirac δ , et pour $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ce sont des distributions d'ordre 1 (parties finies).

Le système (1.62) est équivalent à:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(t, y) = \partial_y^2 \varphi(t, y) + [f(z(t)) + u(t)] N_\alpha(y), & \varphi(0, y) = 0 \\ z(t) = \int_0^\infty N_\alpha(y) \varphi(t, y) dy \end{cases} \quad (1.63)$$

L'énergie associée à (1.63) est:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int |\varphi(t, y)|^2 dy$$

Pour laquelle on prouve facilement l'égalité:

$$\frac{dE(t)}{dt} = - \int |\partial_y \varphi(t, y)|^2 dy + z(t) \tilde{f}(z(t)) + z(t) u(t)$$

c- Intérêt de ces formulations diffusives

Le système est local en temps.

Une fonctionnelle énergie naturelle E est définie sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , ce qui permet d'établir la dissipativité sous conditions spécifiées sur f [85].

Ces propriétés n'existent pas sur le système original (1.60) ni sur aucune des formes d'Abel de Volterra.

Ainsi l'étude de la solution du problème (1.60) découle, simplement de la continuité de l'opérateur $\varphi \rightarrow \langle N_\alpha, \varphi \rangle_y$.

L'étude de la stabilité par exemple de (1.60) est transposée sur celle de (1.63) pour laquelle existent de nombreux outils classiques en EDP, notamment, des méthodes d'analyse fonctionnelle spécifiques des EDPs de diffusion semi-linéaires pour étudier correctement ce problème [86].

A noter que l'utilisation du principe du maximum pour les équations de diffusion [76,87] pourrait s'avérer utile dans une telle analyse.

ii. Représentation diffusive d'opérateurs de Volterra de degré n

Présentation générale

Les opérateurs de Volterra non linéaires élémentaires (de degré n) de la forme:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n : u \rightarrow y_n = \mathcal{H}_n(u) &= \int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t h_n(t, s_1, \dots, s_n) u(s_1) u(s_2) \dots u(s_n) ds_1 ds_2 \dots ds_n \\ &= \int_{[0,t]^n} h_n u^{\otimes n} ds := \langle h_n, u^{\otimes n} \rangle_t \end{aligned} \quad (1.64)$$

Sont utilisés notamment en filtrage non linéaire [84,88]. Par récurrence et sous hypothèse convenable sur h_n , on peut en chercher une réalisation diffusive sous la forme:

$$\begin{cases} \partial_t \psi = -\xi \psi + u, & \xi > 0, t > 0, \psi(0, \cdot) = 0 \\ y_n = \langle Q_n, \psi^{\otimes n} \rangle, \end{cases} \quad (1.65)$$

où $Q_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_t^+; \Delta^{\otimes n})$ est le symbole diffusif de \mathcal{H}_n .

La réalisation entrée-sortie (1.65) s'étend ensuite aisément au cas général d'un opérateur $\mathcal{H} = \sum_{n=1}^N \mathcal{H}_n$ (de degré N) par:

$$y = \sum_{n=1}^N y_n = \sum_{n=1}^N \langle Q_n, \psi^{\otimes n} \rangle \quad (1.66)$$

Parmi les applications les plus immédiates, on peut citer :

- Identification de dynamiques non linéaires (phénomènes magnétiques, électrochimiques)
- Estimation-filtrage.
- Contrôle,.....

iii. Classe d'opérateurs d'hystérésis pseudo-différentiels diffusifs

Les phénomènes d'hystérésis ont été décrits brièvement au paragraphe (1.2.5), à noter que ces phénomènes sont à mémoire longue et sont datés en temps physique propre (distance parcourue, énergie dissipée etc.....)

Considérons $H_s(p)$ le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel causal $H_s(\partial_s)$, de symbole diffusif $\mu(\xi)$. La réalisation diffusive entrée-sortie de l'opérateur:

$u_s \rightarrow y_s = H_s(\partial_s)u_s$, est décrite par le système:

$$\begin{cases} \partial_s \psi(\xi, s) = -\xi \psi(\xi, s) + u_s, & \psi(\xi, 0) = 0, \quad \xi > 0 \\ y_s = \int_0^\infty \mu(\xi) \psi(\xi, s) d\xi \end{cases} \quad (1.67)$$

Etant donné les opérateurs linéaires définis comme suit (où \mathcal{K} : espace de Hilbert et $v \subset \mathcal{K} \subset v'$):

$$\begin{aligned} A: \begin{matrix} v \rightarrow v' \\ f(\xi) \rightarrow -\xi f(\xi) \end{matrix} & \quad B: \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow v' \\ u \rightarrow u \end{matrix} & \quad C: \begin{matrix} v \rightarrow \mathbb{R} \\ f(\xi) \rightarrow \int_0^\infty \mu(\xi) f(\xi) d\xi \end{matrix} \\ P: f(\xi) \rightarrow \mu(\xi) f(\xi) & \quad Q: f(\xi) \rightarrow 2\xi \mu(\xi) f(\xi) \end{aligned}$$

Grâce à cette linéarité on peut déduire de nombreuses propriétés, en s'inspirant des techniques de l'automatique des systèmes linéaires [89]. Par exemple, la dissipativité du frottement est équivalente au caractère positif réel de la réalisation (A, B, C) ce qui s'écrit sous la forme d'un test algébrique simple qu'on peut le définir par extension en dimension infinie par:

$$\begin{aligned} A^*P + PA^* &= -Q \\ C^* &= PB \\ P = P^* > 0, Q &= Q^* > 0 \end{aligned} \quad (1.68)$$

L'énergie du système (1.67) est définie par la norme Hilbertienne :

$$\|f\|_{\mathcal{K}}^2 = \int_0^\infty \mu(\xi) f^2(\xi) d\xi \quad (1.69)$$

Par ailleurs, avec: $E_s := \frac{1}{2} \|\psi\|_{\mathcal{K}}^2$ on obtient :

$$\frac{dE_s}{ds} = -\|\sqrt{\xi} \psi\|_{\mathcal{K}}^2 + y_s(s) u_s(s) \quad (1.70)$$

Ainsi le travail est donné par l'expression :

$$\mathcal{H}(u) \dot{u} = \|\sqrt{\xi} \psi\|_{\mathcal{K}}^2 |\dot{u}| + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\psi\|_{\mathcal{K}}^2 \quad (1.71)$$

Le premier terme est positif et représente la dissipation estimée, et le second terme est la dérivée de l'énergie.

L'opérateur ainsi construit est appelé opérateur d'hystérésis pseudo-différentiel diffusif.

1.4 Conclusion

L'ensemble des représentations diffusives est une algèbre complète (algèbre de Fréchet) incluant un grand nombre d'"OPD" de grande richesse pour décrire les comportements dynamiques non standards "notamment, les OPD variant avec le temps", sous une forme unifiée par la même équation de diffusion. Sous cette forme, de nombreux outils relatifs aux équations aux dérivées partielles (analyse fonctionnelle et numérique, méthodes d'énergie) sont directement utilisables, dans le contexte des diffusions généralisées, définies par le spectre (choisi à priori) Γ .

Par ailleurs, l'opérateur pseudo- différentiel est en fait entièrement déterminé par le symbole $\mu(t, \xi)$ qui apparait linéairement comme opérateur de sortie "forme canonique". Cette linéarité est fondamentale pour les applications. Elle permet, par exemple, l'identification à partir de mesures physiques, la poursuite optimale par simple filtre de Kalman, l'extension aux opérateurs de Volterra linéaires (temps variables) par simple dépendance de μ par rapport aux temps, et enfin l'extension à une large classe de dynamiques non linéaires (notamment par opérateurs tensorielles sur φ)

Les représentations diffusives transforment les systèmes différentiels fractionnaires en des dynamiques d'ordre un, ce qui simplifie considérablement leur analyse. Elles permettent une analyse de la stabilité interne et fournissent une méthode naturelle pour approximer les solutions.

La richesse de la classe des dynamiques (pseudo-différentiels) ainsi décrites sous représentation diffusive, est à priori suffisante pour être applicable à de nombreuses situations concrètes, à noter, la réalisation de l'opérateur convolutif par des méthodes d'approximation numériques classiques qu'on abordera dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

*Approximations diffusives d'opérateurs
pseudo-différentiels*

Chapitre 2

Approximations diffusives d'opérateurs pseudo-différentiels

2.1 Introduction

Le concept de représentation diffuse (RD) permet d'obtenir des réalisations (chapitre 1) bien adaptées à la simulation numérique en régime dynamique quelconque, par le fait que les deux variables temps " t " et fréquences " ξ " sont indépendantes. Cette indépendance permet une grande souplesse pour l'approximation numérique, notamment dans le choix d'un ensemble $\{(t_n, \xi_k)\}_{n \geq 0, 1 \leq k \leq K}$ minimal où aucune contrainte sur les t_n, ξ_k n'est imposée a priori.

Du point de vue de la simulation, on peut alors mettre en œuvre des schémas d'approximation classiques, utilisant des méthodes numériques standards.

Ce chapitre est dédié aux approximations en dimensions finies des réalisations diffusives des opérateurs pseudo-différentiels traités au premier chapitre, notamment, les intégrateurs et les dérivateurs fractionnaires et en particulier ceux d'ordre $\frac{1}{2}$ dont nous ferons usage dans la suite de notre travail.

Afin de mettre en évidence l'efficacité de la représentation diffuse du point de vue simulations numériques, l'évolution d'un oscillateur du second ordre avec amortissement viscoélastique fractionnaire est présentée sous représentation diffuse.

2.2 Méthodes d'approximation

Concrètement, la réalisation numérique d'un transfert diffusif se fait à partir d'une approximation de sa réalisation diffuse. L'objectif principal repose sur la comparaison du transfert exact avec le transfert associé à l'approximation de la réalisation diffuse.

Deux voies différentes sont prises pour le calcul des paramètres μ_k qui définissent l'approximation :

—Par optimisation ; minimisation d'un écart entre les deux transferts.

—Par un calcul analytique utilisant la représentation $\mu(\xi)$.

2.2.1 Approximation par optimisation

Pour la résolution numérique du système (1.49), plusieurs discrétisations sont à envisager. On considère en premier lieu la discrétisation du contour γ , c'est-à-dire \mathbb{R}_ξ en K points ξ_k , $k = 1..K$, discrétisations d'où découle l'approximation de $\langle \mu, \psi \rangle$ par une quadrature. La fonction $\psi(t, \cdot)$ devient alors un vecteur $(\psi_1(t), \dots, \psi_K(t))^T$ où

$$\psi_K(t) = \psi(t, \gamma(\xi_k)), \quad k = 1, \dots, K$$

On a alors la réalisation d'état approchée:

$$\begin{cases} \partial_t \psi_k(t) = \gamma(\xi_k) \psi_k(t) + u(t), & \psi(0, \cdot) = 0 \\ y(t) = \sum_{k=1}^K \mu_k \psi_k(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce système est équivalent au système matriciel,

$$\begin{cases} \partial_t \psi = A\psi + Bu \\ y = C\psi \end{cases} \quad (2.2)$$

Avec $A = \text{diag}(\gamma(\xi_k))$, $B = (1, \dots, 1)^T$ et $C = (\mu_1, \dots, \mu_K)$ à optimiser. Pour ce, rappelons que le but de cette réalisation d'état est d'approcher au mieux le transfert $H(i\omega)$ par celui de la représentation d'état noté $H_C^*(i\omega)$. Le C optimal doit donc minimiser la distance L^2 entre $H(i\omega)$ et $H_C^*(i\omega)$. Ainsi :

$$H_C^*(p) = C(pI - A)^{-1}B = C \text{diag} \left[\frac{1}{p - \gamma(\xi_k)} \right] B = \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k}{p - \gamma(\xi_k)} \quad (2.3)$$

Minimiser la distance L^2 entre $H(i\omega)$ et $H_C^*(i\omega)$ s'écrit donc:

$$\min_{C \in \mathbb{C}^K} \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k}{i\omega - \gamma(\xi_k)} - H(i\omega) \right|^2 d\omega$$

Si l'on approche cette intégrale par une quadrature en L points sur les fréquences ω , on obtient:

$$\min_{C \in \mathbb{C}^K} \sum_{l=1}^L \left| \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k}{i\omega_l - \gamma(\xi_k)} - H(i\omega_l) \right|^2$$

En posant $H = [H(i\omega_l)]_{l=1..L}$, et $Q = \left[\frac{1}{i\omega_l - \gamma(\xi_k)} \right]_{l=1..L, k=1..K}$

On arrive à l'expression:

$$\min_{C \in \mathbb{C}^K} \|QC - H\|^2 \quad (2.4)$$

On reconnaît là un problème de moindres carrés dont la solution est:

$$C = Q^\dagger H$$

Avec $Q^\dagger = (Q^*Q)^{-1}Q^*$ pseudo-inverse de la matrice Q .

En fait pour éviter d'éventuels problèmes de conditionnement de Q , on ajoute un terme de pénalisation ε , pour régulariser les erreurs, on considère donc le problème:

$$\min_{C \in \mathbb{C}^K} \|QC - H\|^2 + \varepsilon \|C\|$$

De solution

$$C = Q^\dagger H + (\varepsilon I)^{-1} Q^* H$$

On a donc à présent tous les éléments pour mettre en œuvre cette réalisation d'état. Il faut ensuite discrétiser le problème en temps pour le résoudre numériquement. On sait que:

$\psi(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} B u(s) ds$. On va donc prendre u constante sur $[t, t + \Delta t]$. Cela donne:

$$\psi(t + \Delta t) \simeq e^{(t+\Delta t-t)A} \psi(t) + u(t) \int_t^{t+\Delta t} e^{A(t+\Delta t-s)} ds B$$

$$\psi(t + \Delta t) \simeq F \psi(t) + G u(t)$$

Avec $F = e^{\Delta t A}$ et $G = A^{-1}(e^{\Delta t A} - I)B$

D'où:

$$y(t + \Delta t) = C \psi(t + \Delta t) \simeq h * u(t + \Delta t)$$

On déduit le schéma d'approximation de (1.47):

$$\begin{cases} \psi^{t+\Delta t} = F \psi^t + G u^t, & \psi^0 = 0 \\ y^{t+\Delta t} = C \psi^{t+\Delta t} \end{cases} \implies y^{t+\Delta t} \simeq (H(\partial_t)u)^{t+\Delta t} \quad (2.5)$$

Choix de la paramétrisation de Γ

On peut remarquer que les transferts H associés à une réponse impulsionnelle réelle présentent une symétrie par rapport à l'axe des réels:

$$H(\bar{p}) = \overline{H(p)}$$

En notant $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ (figure (2.1)), il est commode, pour le calcul numérique, de paramétriser le chemin Γ^+ par:

$$\gamma(\xi) = \begin{cases} (a + ib)\xi, & 0 \leq \xi \leq 1 \\ a\xi + ib, & \xi > 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

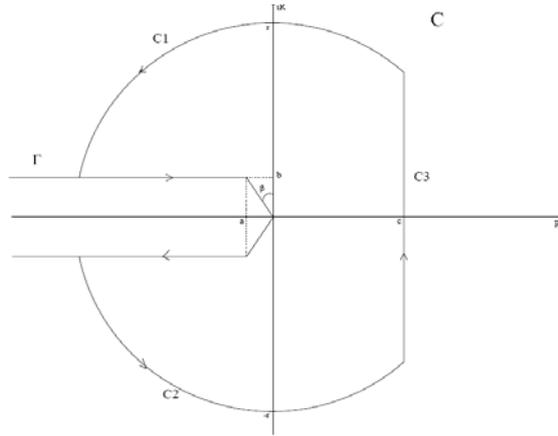


Figure 2.1 - Contour de Bromwich associé à un Γ . transfert diffusif.

2.2.2 Approximation par interpolation

► Principe

Considérons un réseau fini en variable fréquence ξ [39],

$$N = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K, \xi_{K+1}\}, \quad 0 < \xi_1 < \dots < \xi_K < \xi_{K+1}$$

Le système différentiel, en dimension finie, obtenu après discrétisation du système (1.32) est:

$$\begin{cases} \partial_t \psi_k(t) = -\xi_k \psi_k(t) + u(t), & \psi_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, K \\ y_k(t) = \sum_{k=1}^K \mu_k \psi_k(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

L'approximation consiste à approcher l'état ψ_k par une fonction affine par morceaux $\tilde{\psi}_k$, qui coïncide avec ψ_k sur le réseau de fréquences défini N . La construction de cette approximation se fait au moyen de fonctions triangles [90,91] notées Λ_k .

L'interpolation linéaire sur $(\xi_k, \psi_k(t))_{\xi_k \in N}$ est ainsi définie par:

$$\tilde{\psi}(\cdot, t) = \sum_{k=1}^K \psi_k(t) \Lambda_k \quad (2.8)$$

La sortie approchée du système (1.32) sera de la forme:

$$\tilde{y}(t) = \int_{\xi} \mu(\xi) \tilde{\psi}(\xi, t) d\xi = \int_{\xi} \sum_{k=1}^K \mu_k \psi_k(t) \Lambda_k(\xi) d\xi \quad (2.9)$$

$$\tilde{y}(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \psi_k(t) \quad (2.10)$$

Où
$$\lambda_k = \int_{\xi} \mu_k \Lambda_k(\xi) d\xi \quad (2.11)$$

► **Fonctions d'interpolation Λ_k**

Les éléments finis d'ordre un $\{\Lambda_k\}_{1 \leq k \leq K}$ sont des fonctions continues, nulles à l'extérieur du segment $[\xi_{k-1}, \xi_{k+1}]$ et affine sur chacun des segments $[\xi_{k-1}, \xi_k]$ et $[\xi_k, \xi_{k+1}]$ tel que $\Lambda_k(\xi_k) = 1$, avec $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_K < \xi_{K+1}$ (figure 2.2).

$$\Lambda_k(\xi) = \begin{cases} \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} & , \quad \xi_{k-1} \leq \xi \leq \xi_k \\ \frac{\xi_{k+1} - \xi}{\xi_{k+1} - \xi_k} & , \quad \xi_k \leq \xi \leq \xi_{k+1} \\ 1 & \xi = \xi_k \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.12)$$

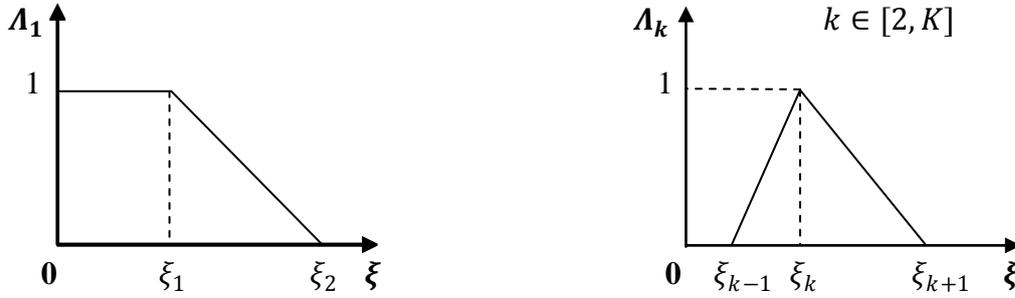


Figure 2.2 - Fonctions d'interpolation.

Le premier élément est défini par:

$$\Lambda_1(\xi) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq \xi \leq \xi_1 \\ \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} & , \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

Ainsi l'expression (2.11) devient:

$$\lambda_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_{k+1}} \mu_k \Lambda_k(\xi) d\xi \quad (2.14)$$

La représentation d'état équivalente au système (2.7) est alors:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = AX(t) + Bu(t) \\ y(t) = CX(t) \end{cases}$$

Avec $X(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_k(t), \dots, \psi_K(t))^T$, $\psi_k(0) = 0$; $A = \text{diag}(-\xi_1, \dots, -\xi_k, \dots, -\xi_K)$;

$$B = (1, \dots, 1)^T \quad \text{et} \quad C = (\mu_1, \dots, \mu_k, \dots, \mu_K).$$

La fonction de transfert approchée est donnée par:

$$\tilde{H}(p) = \sum_{k=1}^K \frac{\mu_k}{p + \xi_k} \quad (2.15)$$

► **Discrétisation temporelle**

En considérant $u(t)$ constante par morceau sur l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$, où Δt est le pas de discrétisation et $t_n = n\Delta t$, on montre que la valeur $\psi(\xi_k, t_{n+1}) := \psi_k^{n+1}$ estimée à chaque instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ est donnée par :

$$\psi_k^{n+1} = e^{-\xi_k \Delta t} \psi_k^n + \int_0^{\Delta t} e^{-\xi_k(\Delta t-s)} \mu(\xi_k) u^n ds \quad (2.16)$$

Nous obtenons ainsi un système récurrent directement programmable:

$$\begin{cases} \psi_k^{n+1} = e^{-\xi_k \Delta t} \psi_k^n + \mu_k \left[\frac{1 - e^{-\xi_k \Delta t}}{\xi_k} \right] u^n; & k=1, \dots, K \\ \psi_k^0 = 0 & n=1, \dots, N \end{cases} \quad (2.17)$$

2.2.3 Approximation diffusive étendue par dérivation

En suivant les mêmes étapes précédentes, l'approximation numérique de la représentation diffusive étendue par dérivation ($\partial_t^\alpha = I^{-\alpha} = \partial_t \circ I^{1-\alpha}$) donnée par le système (1.40) peut être présentée sous la forme récurrente :

$$\begin{cases} \tilde{z}(t) = z(n\Delta t) = \sum_{k=1}^K \eta_k \psi_k^n + \sum_{k=1}^N \lambda_k u^n \\ \psi_k^{n+1} = e^{-\xi_k \Delta t} \psi_k^n + \mu_k \left[\frac{1 - e^{-\xi_k \Delta t}}{\xi_k} \right] u^n; & k=1, \dots, K \\ \psi_k^0 = 0 & n=1, \dots, N \end{cases} \quad (2.18)$$

Où $\lambda_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_{k+1}} \mu_k \Lambda_k d\xi$ et $\eta_k = -\xi_k \lambda_k$

2.2.4 Choix des paramètres d'approximation numérique

Rappelons que la représentation diffusive d'opérateurs ou de transferts pseudo-différentiels est une approche essentiellement en dimension infinie, basée sur les réalisations aux dérivées partielles. Dans ce contexte, la notion de spectre doit être étendue au cas continu : la notion de valeur propre isolée n'est plus suffisante. De ce fait, la notion de pôle est également insuffisante pour décrire correctement les transferts, et ne présente plus aucun rôle privilégié comme dans le cas des transferts rationnels.

Bien évidemment, toute réalisation approchée en dimension finie est à nouveau interprétable en termes de pôles (et de zéro), cependant, ces pôles (en fait les $\gamma(\xi_k)$) sont fixés

de façon quasi-arbitraire sur le contour Γ , ce même dans le cas de transferts rationnels à pôles dans \mathcal{D} .

Ceci montre bien que seule la distribution μ (approchée par un vecteur de dimension finie (μ_k)) renferme toute l'information sur le transfert entrée-sortie.

Cependant, la précision et la convergence de l'approximation nécessite un choix convenable des paramètres influents directement sur les résultats tel que le réseau de fréquences et d'autres paramètres à définir par la suite.

Le choix du maillage s'effectue suivant les critères:

- Bande fréquentielle désirée, où l'approximation devra être précise.
- Nombre de points K , qui constitue un compromis entre précision et volume de calcul.
- Répartition des ξ_k qui peut se faire de façon très variée, suivant:
 - Une séquence arithmétique : $\xi_{k+1} = \xi_k + r_a$.
 - Une séquence polynomiale : $\xi_k = k^{r_p} \xi_1$.
 - Une séquence géométrique : $\xi_{k+1} = r_g \xi_k$ où r_g est la raison de la séquence.

La bande fréquentielle utile est en pratique déterminée par des considérations physiques concernant le problème étudié. C'est une donnée extérieure.

Le nombre de points K sera concrètement de l'ordre de quelques dizaines. Les résultats expérimentaux confirmeront que ce nombre est suffisant pour obtenir des approximations de qualité suffisante.

Néanmoins, il ne doit pas être exclus que certaines zones fréquentielles peuvent avantageusement être privilégiées par une densité de ξ_k supérieure : ceci est à considérer en fonction des problèmes étudiés. Par contre, une séquence arithmétique conduit à une description exclusivement pauvre dans les basses fréquences.

A noter que dans le cas de la "RD" 2^{ème} espèce, les valeurs $\gamma(\xi_k)$ sont à fixer en fonction de la plage de fréquences utiles, suivant deux progressions géométriques de raisons différentes sur les parties harmonique et diffusive ; "la partie harmonique nécessite plus de points pour éviter les oscillations".

Avec une séquence géométrique la relation entre les deux pôles extrêmes $\xi_{min} = \xi_1$ et $\xi_{max} = \xi_K$ est :

$$\xi_K = r^{K-1} \xi_1 \quad (2.19)$$

La raison r est ainsi donnée par :

$$r = \left(\frac{\xi_K}{\xi_1} \right)^{\frac{1}{K-1}} \quad (2.20)$$

Il est clair que la qualité de l'approximation dépend de la qualité de reconstitution de l'état $\tilde{\psi}(\cdot, t)$ par le biais des fonctions d'interpolation. Cette reconstitution doit être effectuée sur l'ensemble du domaine de fréquences. Des éléments simples d'ordre un ont été choisis comme fonctions d'interpolation assurant une régularité de la vitesse de convergence de la méthode.

2.2.5 Convergence de l'approximation

Du point de vue analytique, la convergence de la méthode a été présentée avec suffisamment de détails dans [92].

Ainsi, pour un choix convenable des paramètres d'approximation ($\Delta t, \xi_{min}$ et r suffisamment petits et ξ_{max} assez grand) et pour $u \in L^2(0, T, \mathbb{R})$ donné on a:

$$\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^2(0, T, \nu_\alpha)} \rightarrow 0$$

$$\|y - \tilde{y}\|_{L^2(0, T, \mathbb{R})} \rightarrow 0$$

Où ν_α est l'espace de Hilbert approprié à l'état ψ et l'état approché $\tilde{\psi}$.

2.3 Approximation numérique de $I^{1/2}$ et $D^{1/2}$

Nous pouvons montrer que pour une mesure convenable " $\mu = 2$ ", l'équation de diffusion en variable Fourier (1.34), monodimensionnelle, sur \mathbb{R}_ξ , réalise la relation $y = I^{\frac{1}{2}}u$. Ainsi la représentation diffusives étendue par dérivation réalise la relation:

$$z(t) = D^{\frac{1}{2}}u = \partial_t \circ I^{\frac{1}{2}}u(t)$$

Dont la représentation diffusives est:

$$\begin{cases} \partial_t \psi(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \psi(\xi, t) + 2u(t) \\ z(t) = \int_{\xi} (-4\pi^2 \xi^2 \psi(\xi, t) + 2u(t)) d\xi \end{cases} \quad (2.21)$$

Sous approximation fonctionnelle de l'état $\psi(t, \xi)$ décrite auparavant (2.2.2), la sortie $y(t)$ de l'intégrateur $I^{\frac{1}{2}}$ sera:

$$y(t) = \sum_{k=1}^K \lambda_k \psi_k(t) \quad (2.22)$$

Où $\lambda_k = \int_{\xi_{k-1}}^{\xi_{k+1}} \Lambda_k d\xi$ (intégrales des fonctions affines par morceaux)

Et la sortie $z(t)$ du dérivateur $D^{\frac{1}{2}}$ sera de la forme:

$$z(t) = \sum_{k=1}^K \eta_k \psi_k(t) + 2u(t) \quad (2.23)$$

Où $\eta_k = -4\pi^2 \xi_k^2 \lambda_k$.

En remplaçant dans la relation (2.17), ξ_k par " $4\pi^2 \xi_k^2$ " et μ par "2", nous obtenons ainsi pour $I^{\frac{1}{2}}$ et $D^{\frac{1}{2}}$ deux systèmes récurrents directement programmables.

2.3.1 Simulation numérique

La discrétisation de ξ est faite suivant une suite géométrique " $\xi_{k+1} = r\xi_k$ " pour différents paramètres caractérisant le réseau de fréquences $N = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K\}$, dans le but de déterminer l'effet du choix de ces paramètres sur la qualité d'approximation numérique, tout en se basant sur la comparaison des caractéristiques des réponses fréquentielles (ou impulsionnelles) approximées avec celles des transferts idéaux connus.

Les coefficients λ_k (intégrales des fonctions affines par morceaux) sont:

$$\lambda_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \quad (2.24)$$

$$\lambda_k = \frac{\xi_{k+1} - \xi_{k-1}}{2} \quad \text{pour } k \in [2, K]. \quad (2.25)$$

Le pas Δt doit être choisi suffisamment petit pour garantir la stabilité de la méthode.

2.3.2 Résultats de simulation

Notons que, dans une bande d'approximation utile, les opérateurs fractionnaires de fonctions de transferts $H(p) = p^\alpha$ sont caractérisés par une phase constante ($\alpha \times 90^\circ$) et une amplitude de pente ($\alpha \times 20\text{dB/dec}$).

Pour une discrétisation de $K = 10$ points sur l'intervalle : $\xi_1 = 0,025$ et $\xi_{10} = 16$, ainsi : $r = 2,0502$, la figure (2.3a) présente la réponse impulsionnelle idéale « en rouge » de l'intégrateur fractionnaire $I^{\frac{1}{2}}$ c.à.d. $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ avec celle approchée par approximation diffusive (en coordonnées log-log). Les deux courbes sont confondues sur une bande proche de trois décades, ce qui justifie que l'approximation a été correctement réalisée dans cette bande. Les caractéristiques (gain, phase) du diagramme de Bode correspondant, figure (2.3b), sont très proches de celles du transfert idéal : (-10dB/dec et -45°) dans la bande d'approximation utile.

Les figures (2.4a) et (2.4b) présentent les diagrammes de Bode respectivement de l'intégrateur $I^{\frac{1}{2}}$ et du dérivateur $D^{\frac{1}{2}}$, pour $K=30$, $\xi_1 = 10^{-2}$ et $\xi_{10} = 10^4$. Les caractéristiques (gain, phase) sont très proches de celles des transferts idéaux : ($-10dB/dec$ et -45°) respectivement ($+10dB/dec$ et $+45^\circ$) dans la bande d'approximation utile.

Néanmoins, il existe un compromis entre la largeur de la bande d'approximation utile, le choix de ξ_{\min} et ξ_{\max} et la répartition du réseau de fréquences $\{\xi_k\}_{1 \leq k \leq K}$. Une répartition pauvre entraîne des ondulations autour de la valeur exacte. La figure (2.5) présente une mauvaise approximation d'un intégrateur fractionnaire, suite à un mauvais choix de ces paramètres.

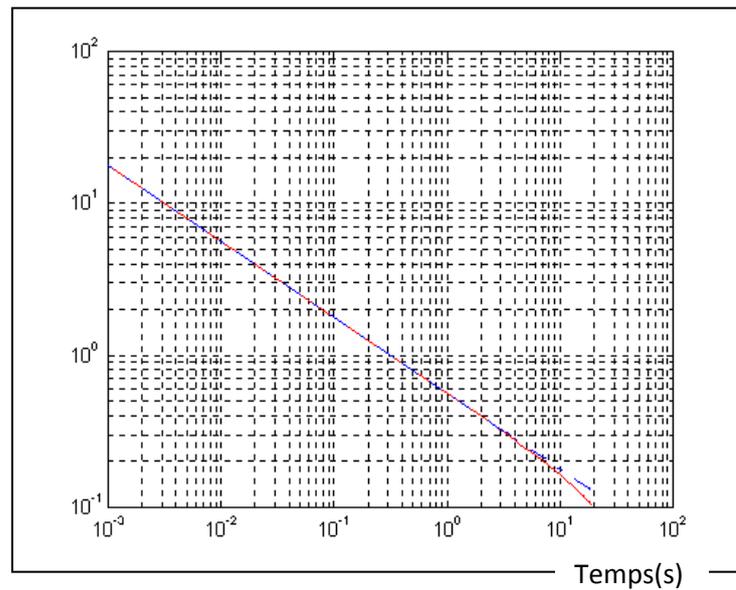


Figure 2.3 (a)—Réponses impulsionnelles : exacte et approchée par RD de l'Intégrateur Fractionnaire.

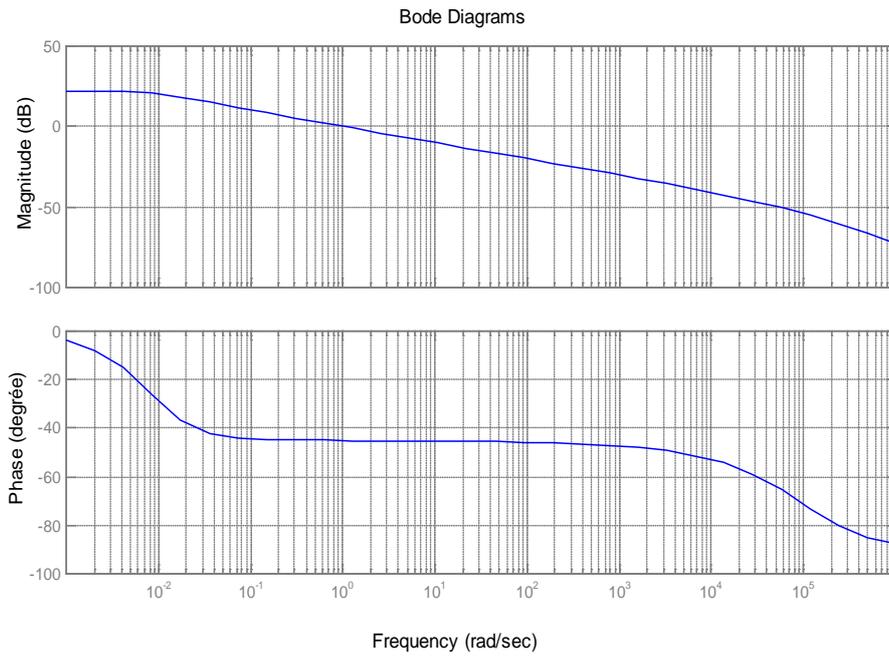


Figure 2.3 (b) - Diagramme de Bode d'un intégrateur fractionnaire d'ordre $1/2$ approché par représentation diffusive, $K = 10$.

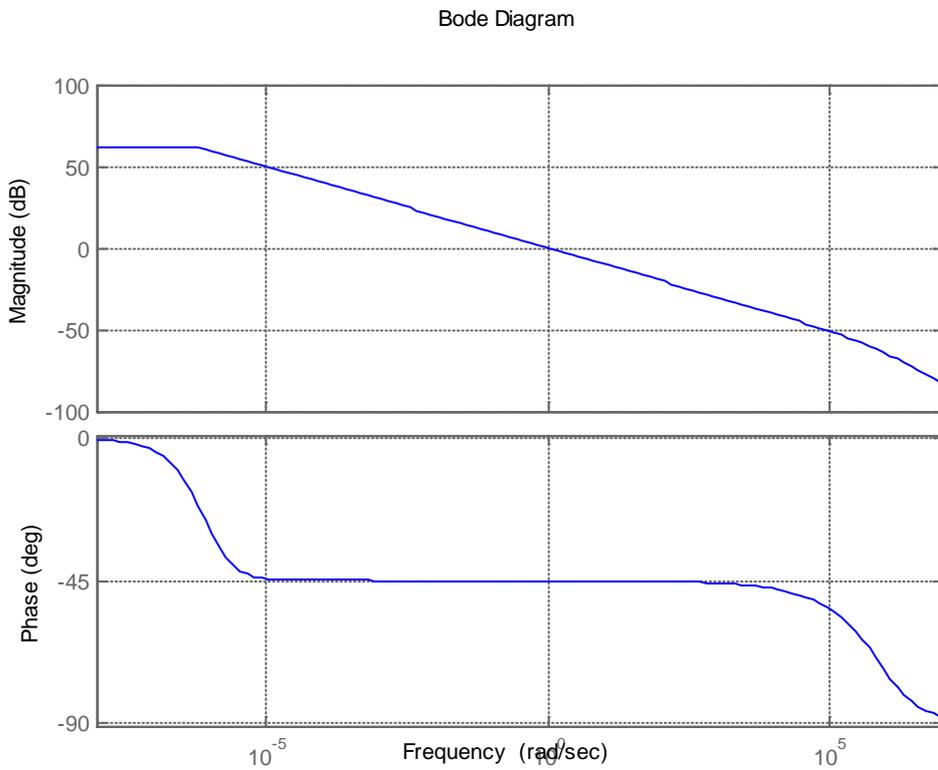


Figure 2.4(a) - Diagramme de Bode d'un intégrateur fractionnaire d'ordre $1/2$ approché par représentation diffusive, $K = 30$.

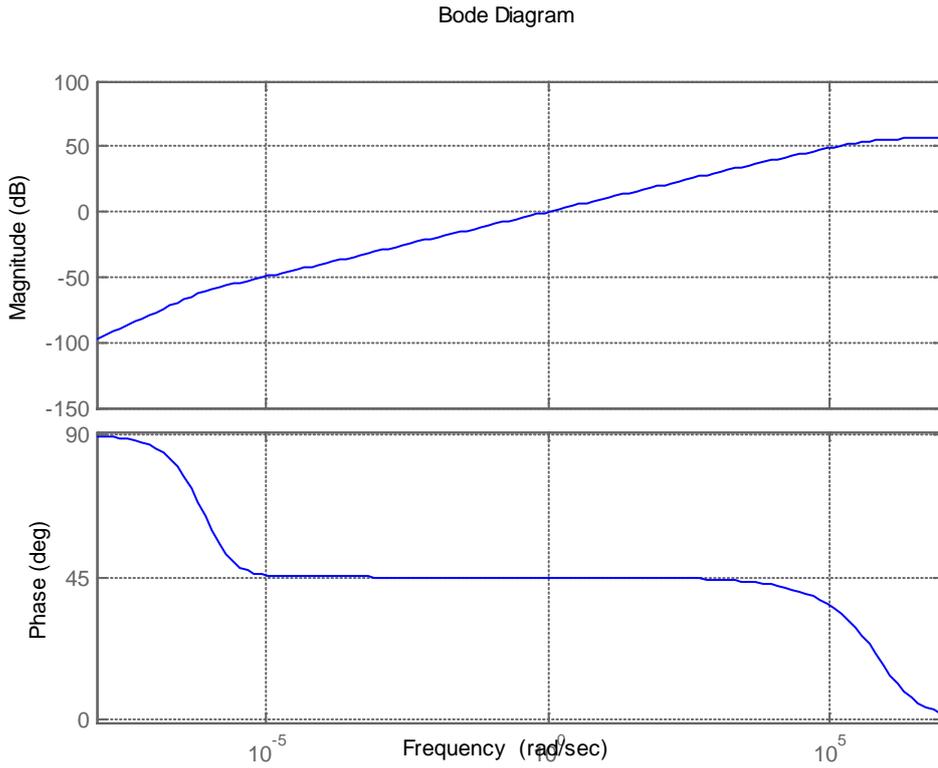


Figure 2.4 (b) - Diagramme de Bode d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2 approché par représentation diffusive, $K = 30$.

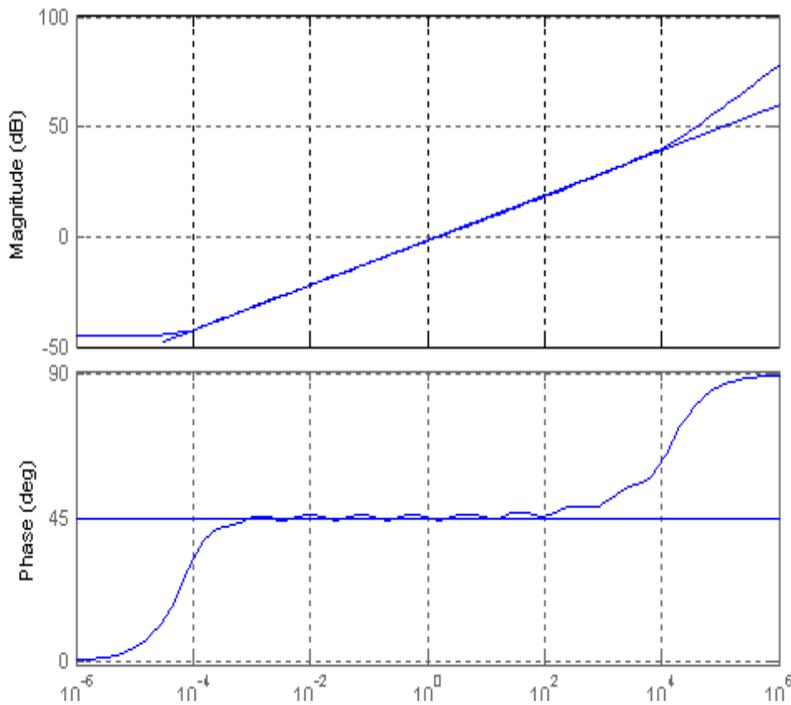


Figure 2.5 - Diagramme de Bode d'une mauvaise approximation d'un dérivateur fractionnaire d'ordre 1/2.

La figure (2.6) présente l'approximation diffusive du transfert $H(p) = \ln(p)$, réalisation étendue par dérivation, avec $K=20$, $\xi_1 = 10^{-2}$ et $\xi_{10} = 10^3$.

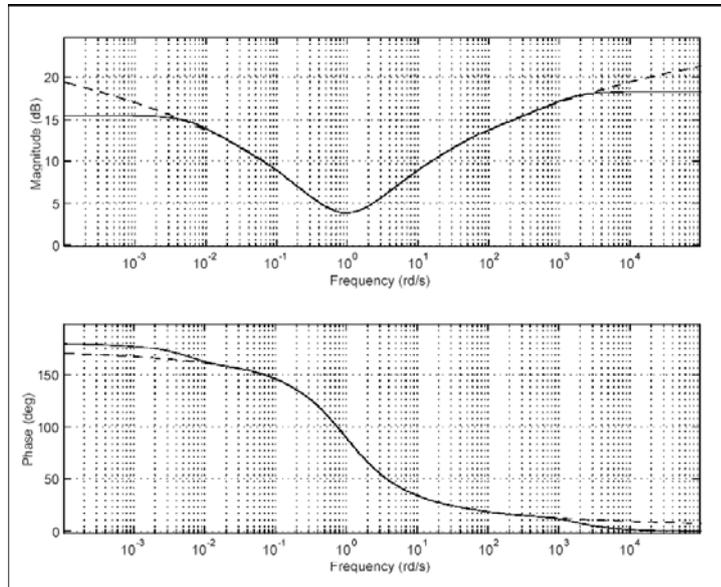


Figure 2.6 – Réponse fréquentielle de $\ln(\partial_t)$: exacte (- -), approchée (-).

2.4 Application de la "RD" de seconde espèce

Application à un transfert fractionnaire.

Les représentations diffusives de seconde espèce permettent de réaliser des transferts analytiques sur $\mathbb{C} - \bar{\mathcal{D}}$ (chapitre 1), ce qui englobe les transferts diffusifs de première espèce. On considère à titre d'exemple le transfert $H(p) = p^{-\alpha}$, avec $\alpha = 1/2$, qui appartient à la classe des transferts diffusifs de première espèce. A noter qu'une autre valeur $\alpha \in [0,1]$ étant bien utilisable sans aucune modification.

La littérature a montré que si on réalise un transfert fractionnaire par approximation diffusive de deuxième espèce ($tg(\beta) = 1/10$) avec le même nombre de ξ_k d'une réalisation de première espèce (figure 2.7), le résultat obtenu est nettement moins bon (figure 2.8).

La réalisation de première espèce est très bonne sur le domaine d'optimisation $[10^{-3}, 10^2]$, (oscillation de ± 1 degré sur la phase par rapport au transfert exact). Pour obtenir une qualité presque analogue, (oscillation de ± 2 degrés sur la phase), il faut augmenter le nombre de ξ_k sur la partie harmonique ($K_1 = 25$), (figure 2.9).

Une pente de 10 pour la partie harmonique est élevée et pénalisante. Avec une pente de 1 ($\beta = \pi/4$), il suffit de prendre $K_1 = 8$ et $K_2 = 5$ pour obtenir une qualité similaire (figure 2.10).

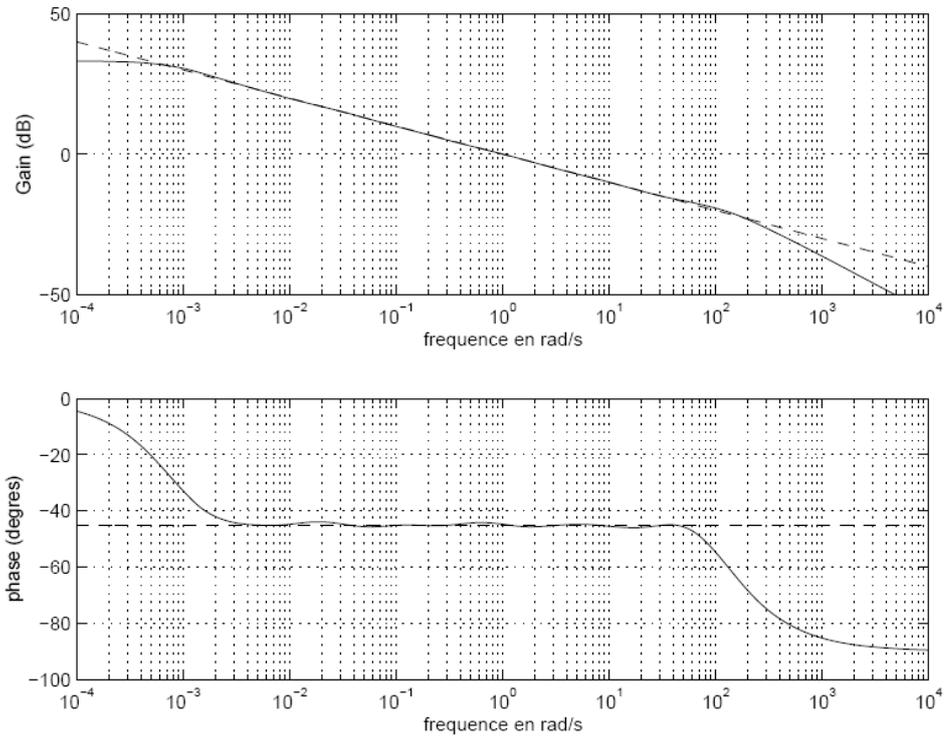


Figure 2.7 - Approximation diffusive de première espèce d'un transfert fractionnaire avec $K=10$.

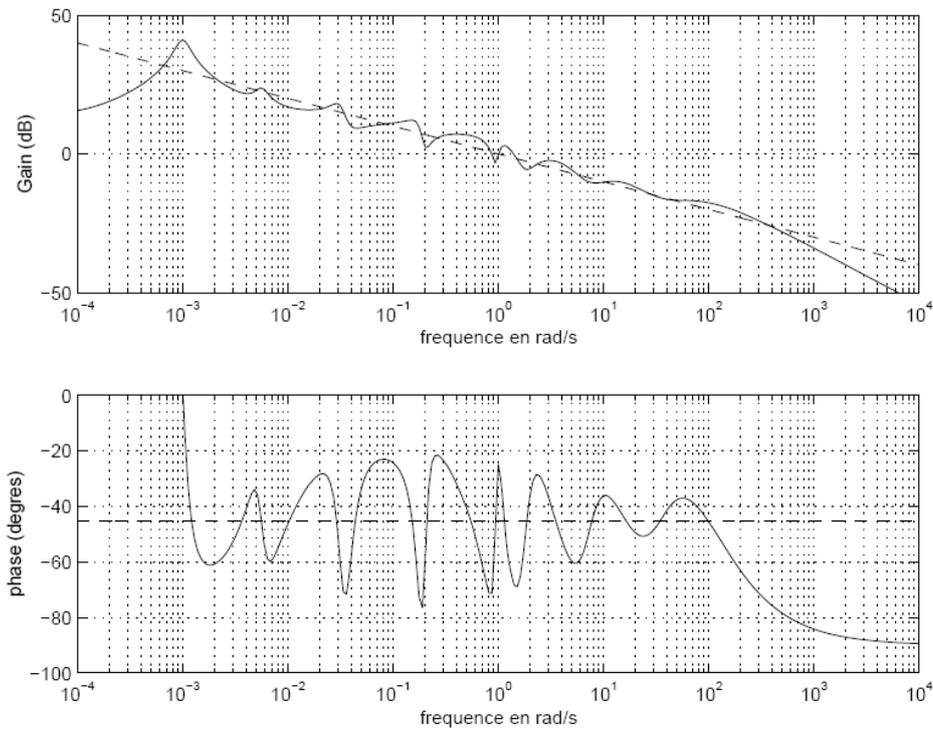


Figure 2.8 - Approximation Γ -diffusive d'un transfert fractionnaire avec $K_1=5$ et $K_2=5$.

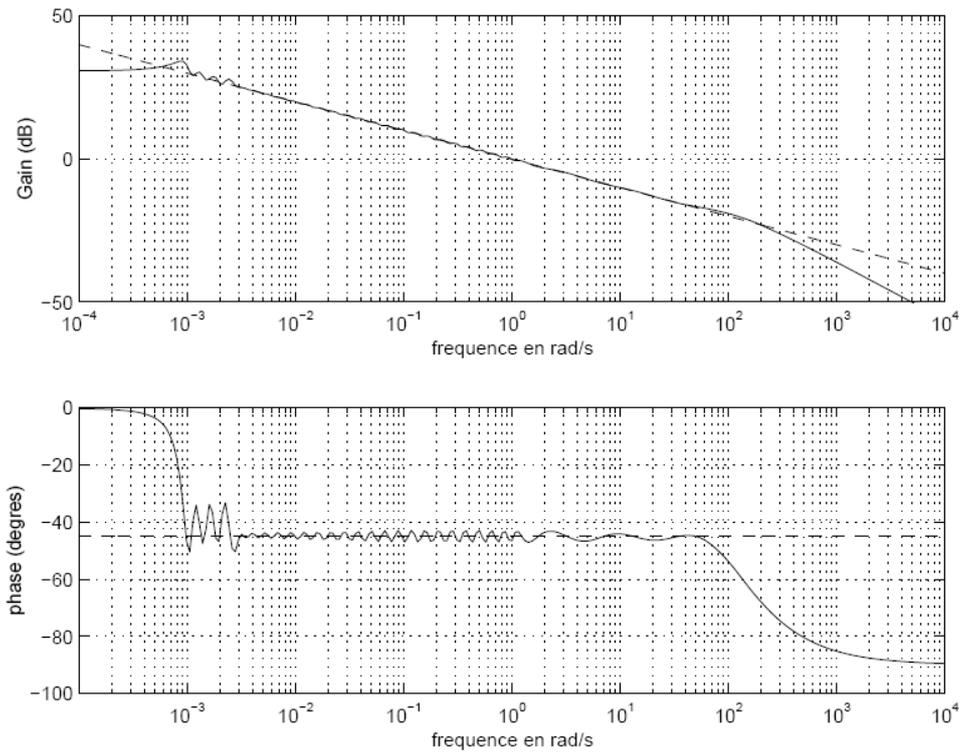


Figure 2.9 - Transfert fractionnaire avec $K_1=25$ et $K_2=5$.

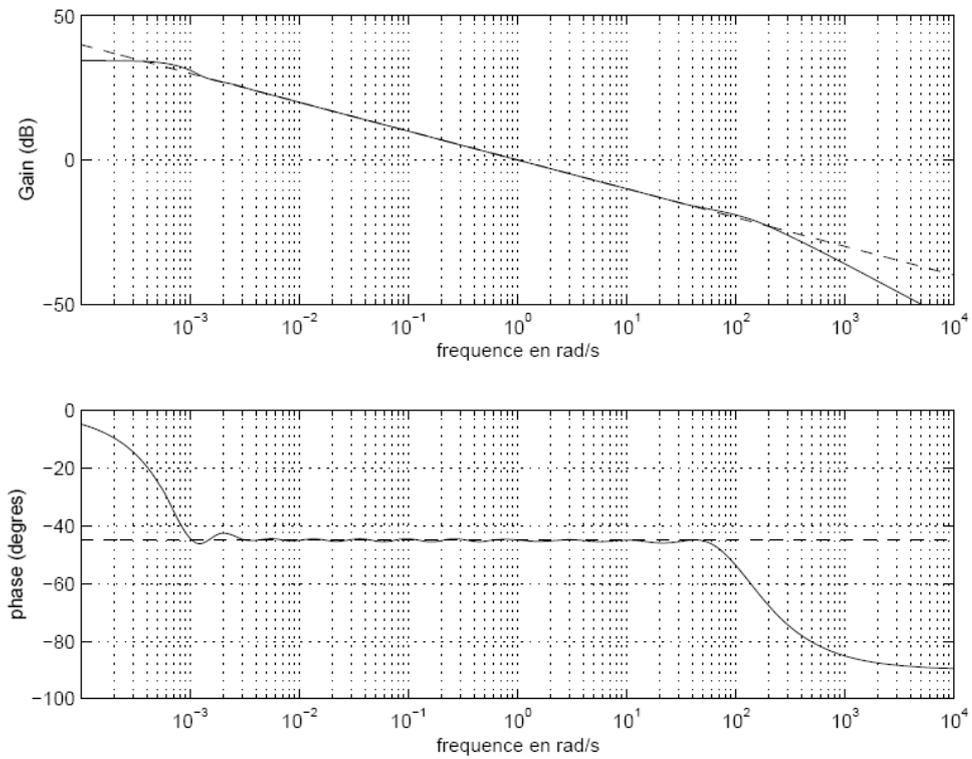


Figure 2.10 - Transfert fractionnaire avec $K_1=8$, $K_2=5$ et $\text{tg}(\beta)=1$.

Les Γ -réalisations, enrichissent la classe des opérateurs réalisables et proposent en contrepartie plus de points de maillage, d'où une dimension plus élevée et un volume de calcul plus grand.

2.5 Exemple de simulation numérique d'équations différentielles fractionnaires

Afin de mettre en évidence l'efficacité de la représentation diffuse du point de vue simulations numériques, considérons un oscillateur du second ordre avec amortissement viscoélastique fractionnaire :

$$\mathcal{H}(X) := \lambda \partial_t^{-\alpha} X', \quad 0 < \alpha < 1, \quad \lambda > 0. \quad (2.26)$$

L'oscillateur est décrit par l'équation différentielle fractionnaire :

$$\partial_t^2 X = -\lambda \partial_t^{1-\alpha} X - f(X) \quad (2.27)$$

En appliquant la représentation diffuse étendue par dérivation abordée au premier chapitre (section 1.3.3), l'amortissement viscoélastique fractionnaire (2.26) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \psi = -\xi \psi + \partial_t X, & \psi_0 = 0 \\ \mathcal{H}(X) = -\lambda \int_0^\infty \frac{\sin(\mu(\xi))}{\pi \xi^\alpha} \psi d\xi \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\text{Où } \mu(\xi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi \xi^\alpha}.$$

Le modèle (2.27) peut alors, se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t^2 X = -\lambda \int_0^\infty \frac{\sin(\mu(\xi))}{\pi \xi^\alpha} \psi d\xi - f(X) \\ \partial_t \psi = -\xi \psi + \partial_t X \end{cases} \quad (2.29)$$

Paramètres d'approximation diffuse de l'intégrateur $\partial_t^{-\alpha}$

Avec : $\alpha=0,75$

$K=25$

$\xi_1=0,001$

$\xi_{25}=50000$

$\xi_{k+1} = r \xi_k, r = 2,093102.$

La valeur de $K=25$ a été choisie pour avoir plus de précision. Généralement une valeur plus faible est suffisante.

Les valeurs $\{\mu_k\}_{1 \leq k \leq 25}$ obtenue sont données par le tableau (2.1).

Le modèle (2.29) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{dt} = X_2 \\ \frac{dX_2}{dt} = -f(X_1) - \lambda C\psi \\ \frac{d\psi}{dt} = A\psi + BX_2 \end{cases} \quad (2.30)$$

Où : $A = \text{diag}(-\xi_1, \dots, -\xi_k, \dots, -\xi_K)$, $B = (1, \dots, 1)^T$, $C = (\mu_1, \dots, \mu_k, \dots, \mu_K)$, $X_1 := X$.

Tableau 2.1 : Approximation diffusive $\{\mu_k\}$ de $\partial_t^{-0.75}$.

μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7
0,43463	0,32584	0,16799	0,02225	0,07070	0,06959	0,09374
μ_8	μ_9	μ_{10}	μ_{11}	μ_{12}	μ_{13}	μ_{14}
0,10293	0,13561	0,14745	0,19909	0,20862	0,29512	0,29128
μ_{15}	μ_{16}	μ_{17}	μ_{18}	μ_{19}	μ_{20}	μ_{21}
0,44231	0,39891	0,67268	0,52850	1,04661	0,64882	1,69943
μ_{22}	μ_{23}	μ_{24}	μ_{25}			
0,74395	1,87083	3,89598	3,38926			

Résultats de simulation obtenus pour : $\lambda = 2$ et $f(X) = X$.

Les figures (2.11) et (2.12) présentent respectivement la réponse fréquentielle et le lieu pôle-zéro de l'approximation numérique de l'intégrateur $\partial_t^{-0.75}$.

Les diagrammes de Bode montrent que la phase reste constante (67.5°) sur une plage de six décades et le gain décroît avec une pente de $(0.75 \times 20 \text{dB/dec})$. Ces propriétés coïncident avec celles d'un transfert idéal de $\partial_t^{-0.75}$, sur une bande $[10^{-2}, 10^4]$ suffisante pour l'approximation numérique de l'oscillateur.

L'évolution du système est présentée par les figures (2.13), (2.14) et (2.15). Le comportement viscoélastique à mémoire longue est nettement visible.

Après quelques oscillations générées par la composante élastique de $\mathcal{H}(X)$, $X(t)$ décroît lentement et tend vers zéro sous l'effet viscoélastique de l'amortissement pseudo-différentiel.

Diagramme de Bode.

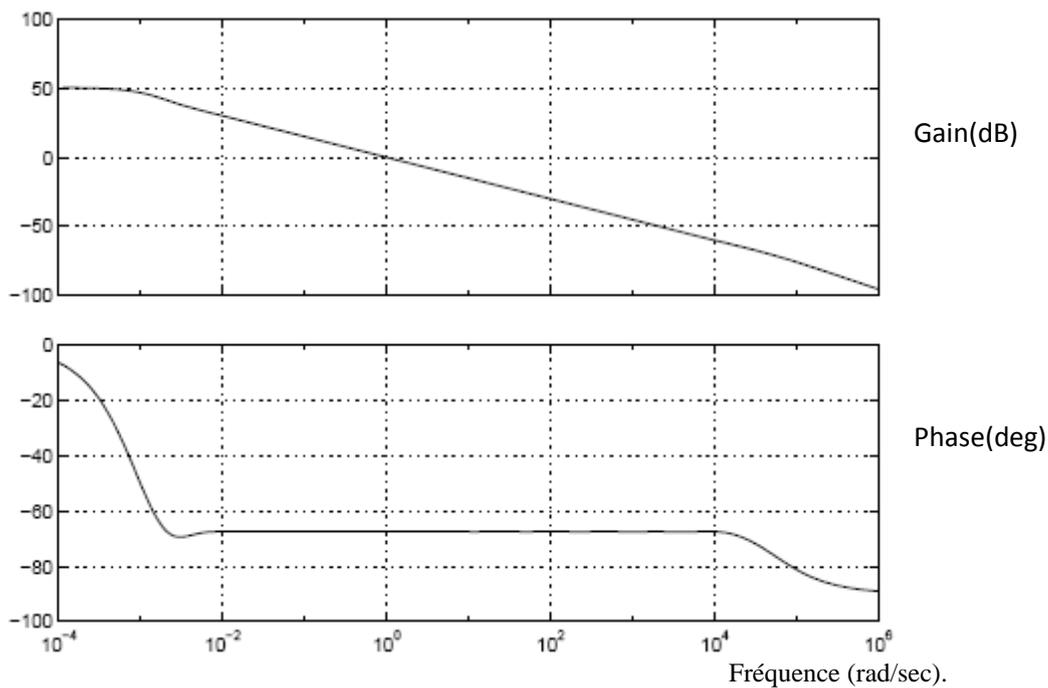


Figure 2.11 – Réponse fréquentielle de l'approximation $\partial_t^{-0.75}$.

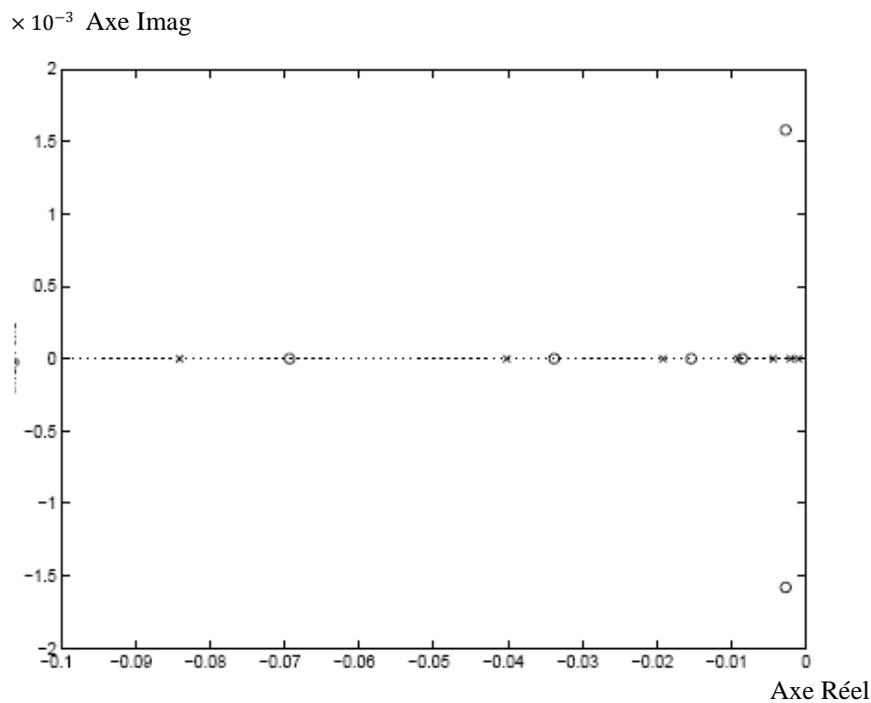


Figure 2.12 – Lieu Pôle-zéro (diffusif) de l'approximation $\partial_t^{-0.75}$.

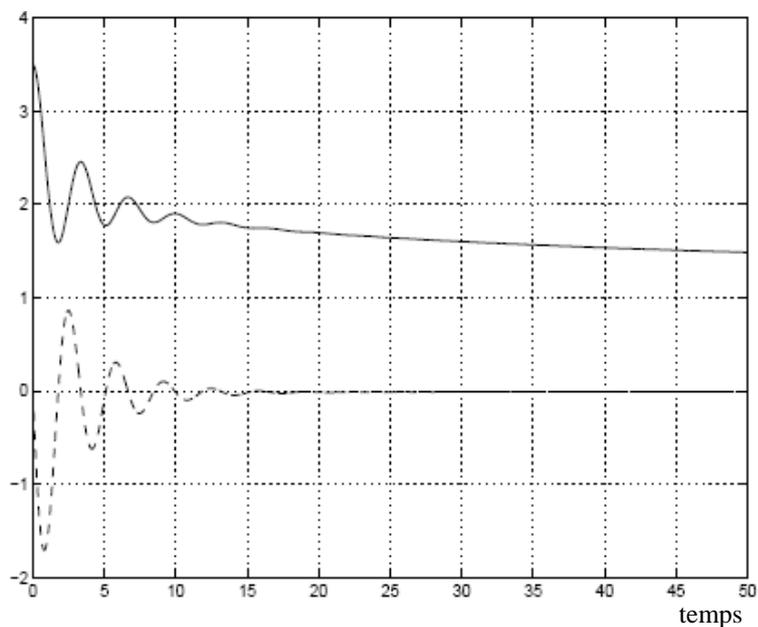


Figure 2.13 – Evolution de X (-) et la pulsation dX (- -).

Pulsation dX

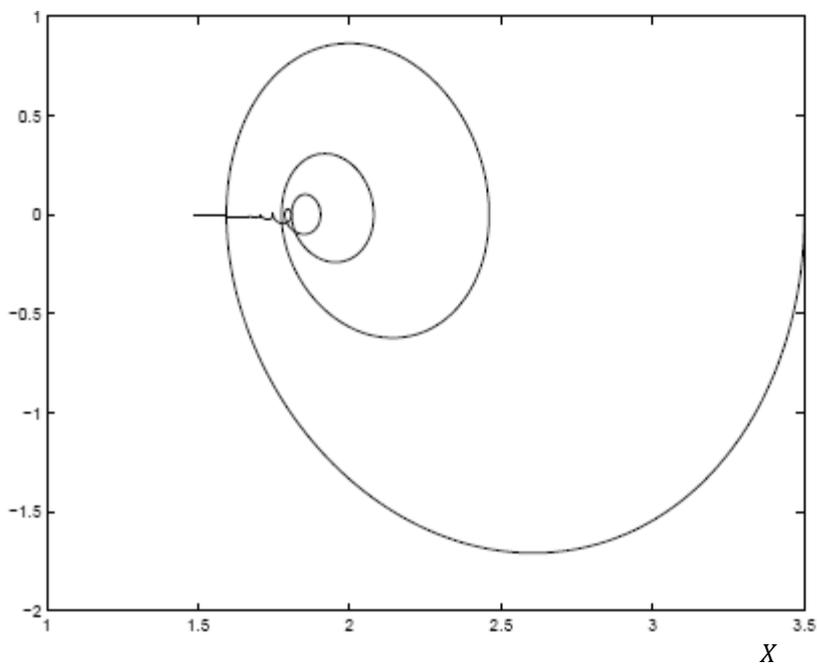


Figure 2.14 – Plan de phase (dX, X) .

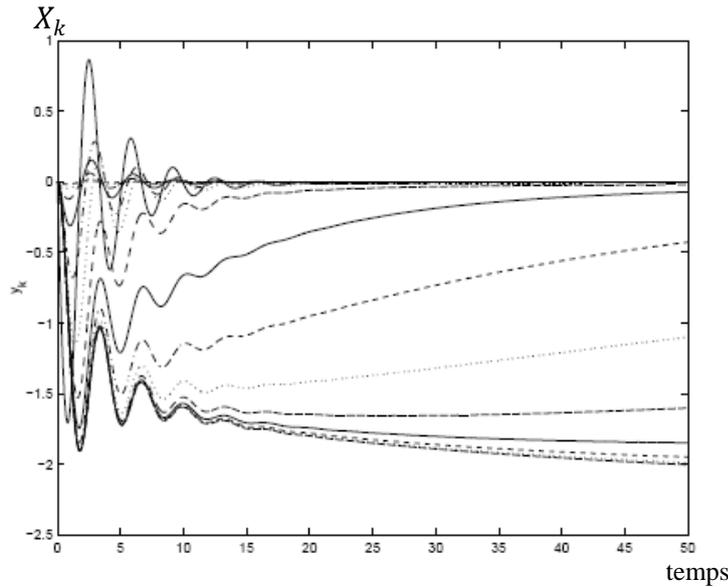


Figure 2.15 – Evolution des composantes diffusives.

2.6 Conclusion

L'application des représentations diffusives aux opérateurs différentiels fractionnaires génère différentes réalisations de dimension infinie sur un espace d'état Hilbertien dont la troncature en dimension finie produit des approximations convergentes. Celles-ci ont été présentées sur un intégrateur et un dérivateur d'ordre $\frac{1}{2}$ et illustrées par des simulations.

Lors de cette simulation, on a pu constater que la qualité des résultats obtenus dépend du choix des paramètres d'approximation numérique.

Le choix du réseau de fréquences est important pour les performances de l'algorithme de simulation, il doit couvrir la bande utile où on désire réaliser correctement l'approximation, mais, avec une répartition convenable qui répond au compromis entre temps de calcul et qualité de simulation.

Avec un réseau de $K = 30$ points, on a pu obtenir une bande assez large, où les caractéristiques des opérateurs ($I^{\frac{1}{2}}$ et $D^{\frac{1}{2}}$) simulés sont très proches de celles des transferts idéaux. De ce fait, ces systèmes simulés peuvent être couplés à des différents systèmes pour différentes applications de contrôle par exemple.

La dimension K de l'approximation reste généralement faible pour n'importe quel choix de la bande utile. Avec quelques dizaines de points on peut avoir une qualité acceptable selon le problème auquel seront couplés ces opérateurs, ce qui autorise la mise en œuvre concrète sur calculateur.

L'application des réalisations diffusives : première et deuxième espèces aux opérateurs fractionnaires de fonction de transfert p^α où $|\alpha| < 1$, a montré que :

La réalisation de première espèce est la plus adaptée du point de vue temps de calcul. Les Γ -réalisations, enrichissent la classe des opérateurs réalisables et proposent en contrepartie une dimension plus élevée, ce qui augmente le temps de calcul.

Les résultats de simulation de l'exemple d'un oscillateur du second ordre, ont montré nettement le comportement viscoélastique de l'amortissement, ce qui met en évidence l'efficacité et la convergence de l'approximation diffuse de l'opérateur fractionnaire $\partial_t^{-0.75}$ et d'une façon générale des opérateurs fractionnaires de transfert $H(p) = \frac{1}{p^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$.

En résumé, ces simulations ont montré l'efficacité et la souplesse de l'outil représentation diffuse sous approximation numérique.

Chapitre 3

*Application de l'approche diffusive
à la stabilisation d'un bras flexible*

Chapitre 3

Application de l'approche diffusive à la stabilisation d'un bras flexible

3.1 Introduction

Ce chapitre présente une approche de contrôle basée sur l'absorption d'ondes, pour la stabilisation d'un bras flexible décrit par le modèle d'Euler Bernoulli. Cette structure représente un système à paramètres distribués faiblement amortis.

Les bras flexibles possèdent un grand nombre de modes de vibration propres significatifs. Les fréquences propres associées sont de façon générale très sensibles, de sorte que les contrôles basés sur l'approche modale sont trop peu robustes dès que le niveau de performance requis est élevé. Ainsi le traitement de ce problème par l'approche active présente généralement des inconvénients majeurs aux hautes fréquences.

Dans notre travail, nous proposons une approche passive qui consiste à exploiter les propriétés locales de propagation des vibrations, pour construire un contrôle absorbant réalisant une adaptation d'impédance au niveau de l'extrémité articulée du bras.

Le principe de l'absorption par adaptation d'impédance, consiste à simuler le prolongement infini du bras, de telle sorte que les coefficients de réflexion soient nuls (adaptation totale) ou minimaux (adaptation partielle, dans le cas d'une articulation). Dans le cas de notre application, bras flexible articulé décrit par l'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli, cette adaptation d'impédance fait apparaître un opérateur héréditaire de type pseudo-différentiel (intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$).

La stabilisation est ainsi réalisée par un feedback diffusif absorbant, le système global dissipatif (stable) est de la forme $\frac{dX}{dt} = Ax$, où A est un générateur d'un semi-groupe dissipatif dans l'espace d'état incluant des variables diffusives.

Le comportement vibratoire du bras est approché sur la base de l'approximation modale. Une telle méthode est très efficace pour approcher la réponse des structures dynamiques et permet sous conditions aux limites non autonomes d'obtenir un système de dimension finie.

Enfin, nous présentons les résultats de simulation de l'ensemble, pour montrer l'efficacité du contrôle absorbant diffusif réalisé.

3.2 Dynamique du bras

Considérons un bras flexible articulé à une extrémité et libre à l'autre (figure 3.1), où u est le couple appliqué au point d'articulation qui sert à stabiliser le bras.

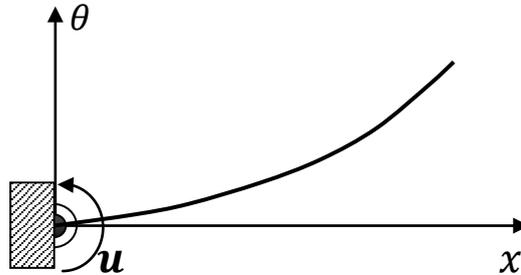


Figure 3.1 - Bras flexible articulé.

La dynamique du bras est décrite par l'équation aux dérivées partielles de la poutre vibrante d'Euler-Bernoulli [38, 39, 93]. Le modèle idéal, normalisé, s'écrit sous la forme:

$$\partial_t^2 \theta(x, t) + \partial_x^4 \theta(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1] \quad (3.1)$$

Où $\theta(x, t)$ est la déflexion du bras en x à l'instant t .

Avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} \theta(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = u(t) \\ \partial_x^2 \theta(1, t) = 0 \\ \partial_x^3 \theta(1, t) = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Et les conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ \partial_t \theta(x, 0) = \theta_1(x) \end{cases} \quad (3.3)$$

L'énergie du bras est définie par [94]:

$$E_\theta(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((\partial_x^2 \theta)^2 + (\partial_t \theta)^2) dx \quad (3.4)$$

Associée à l'espace de Hilbert :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_b &= H(0, 1) \times L^2(0, 1), \\ H(0, 1) &= \{h \in L^2(0, 1); h', h'' \in L^2(0, 1), h(0) = h'(0) = 0\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Avec le produit scalaire:

$$((e, f)|(g, h))_{\mathcal{H}_b} = \int_0^1 (e'' g'' + fh) dx \quad (3.6)$$

Avec les conditions initiales définies ci-dessus et des conditions aux limites nulles (cas autonome où $u(t) = 0$), la dérivée de l'énergie mécanique du bras est nulle, ainsi, le modèle décrit représente un système mécanique non dissipatif et passif au sens de la définition donnée dans [94,95]:

En intégrant $\frac{dE_\theta(t)}{dt}$ deux fois par parties on obtient:

$$\frac{dE_\theta(t)}{dt} = [\partial_x^2 \theta(x, t) \partial_t \partial_x \theta(x, t) - \partial_t \theta(x, t) \partial_x^3 \theta(x, t)]_0^1 = 0$$

3.3 Contrôle par absorption d'onde

3.3.1 Principe

Le but de notre travail est de trouver un contrôle $u(t)$ pour lequel la stabilisation du bras est réalisée en temps fini, pour n'importe quel état initial (θ_0, θ_1) . Ce contrôle est réalisé en exploitant uniquement les propriétés locales de propagation des vibrations au niveau de l'extrémité articulée du bras.

Le mouvement vibratoire des structures flexibles peut être interprété par la superposition de propagation des ondes progressives et réfléchies, car sous conditions limites aux extrémités, les ondes sont réfléchies et changent de signe (Figure 3.2).

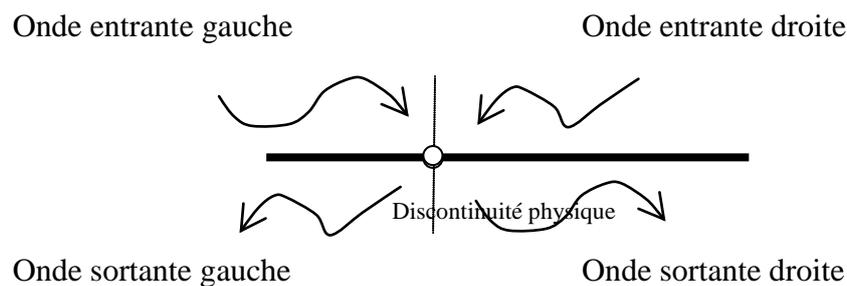


Figure 3.2 - Décomposition des ondes lors d'une discontinuité.

Le principe du contrôle est basé sur l'absorption des ondes réfléchies aux frontières. Pour empêcher toute réflexion, l'articulation (discontinuité physique) doit être absorbante au maximum. Pour cela le contrôle absorbant consiste à simuler le prolongement du bras réel vers $-\infty$, de telle sorte que les coefficients de réflexion soient nuls ou minimaux, (figure 3.3).

L'énergie locale du système sera alors, transférée par propagation à $-\infty$, celle du bras réel diminue progressivement et tend vers zéro.

Une telle simulation est basée alors sur les caractéristiques locales du domaine frontière. Le modèle dit local permet d'exprimer l'effet des ondes incidentes sur celles réfléchies, à partir duquel un couple de contrôle convenable $u(t)$ permettra une propagation sans réflexion comme si le domaine de la portion frontière (articulation) se prolongeait indéfiniment vers $-\infty$.

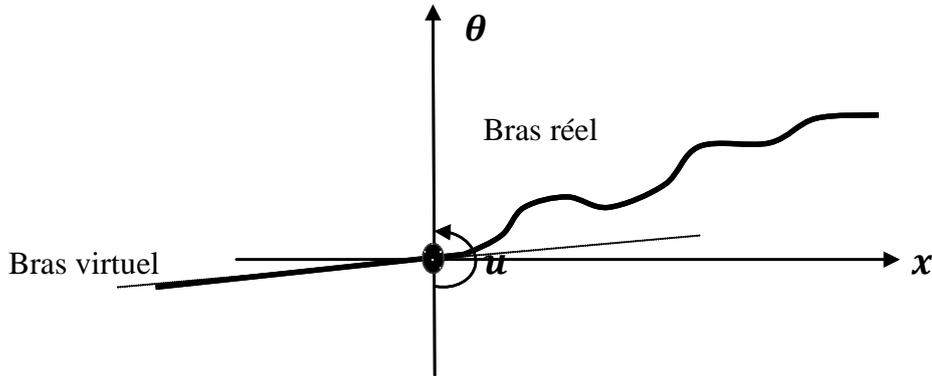


Figure 3.3 - Système bras réel et bras virtuel.

3.3.2 Dynamique du bras en coordonnées de modes d'ondes

Pour la synthèse du contrôle absorbant, il est nécessaire de décrire la dynamique du bras en termes d'ondes propagatives.

Introduisons le vecteur d'état:

$$y = (\theta, \partial_x \theta, \partial_x^2 \theta, \partial_x^3 \theta)^T \quad (3.7)$$

Où, $\partial_x \theta$ est la pente, $\partial_x^2 \theta$ est le moment réfléchissant interne et $\partial_x^3 \theta$ est la force tranchante.

La transformée de Fourier par rapport au temps de l'équation (3.1) est:

$$-\omega^2 \hat{\theta}(x, t) + \partial_x^4 \hat{\theta}(x, t) = 0 \quad (3.8)$$

Pour simplifier, on prendra les mêmes notations pour les variables dépendantes du temps et leurs transformées de Fourier.

La représentation d'état de l'équation (3.8) est:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \quad (3.9)$$

Ce système est diagonalisé par la transformation:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} & i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \\ -\omega & \omega & -\omega & \omega \\ i\omega^{\frac{3}{2}} & -\omega^{\frac{3}{2}} & -i\omega^{\frac{3}{2}} & \omega^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} W = P(\omega)W \quad (3.10)$$

Cette diagonalisation peut être interprétée en termes d'ondes propagatives où chaque terme du nouveau vecteur d'état W est l'amplitude d'un mode d'onde.

Les amplitudes de ces modes varient selon le système:

$$\frac{dW}{dx} = \begin{bmatrix} -i\sqrt{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{\omega} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} W \quad (3.11)$$

On note dans l'ordre, les composantes du vecteur d'état W :

$$W = (a_1, a_2, b_1, b_2)^T \quad (3.12)$$

Où a_1 et a_2 sont les amplitudes des modes d'ondes incidents à l'extrémité articulée du bras et b_1 et b_2 sont ceux des modes d'ondes réfléchis à la même extrémité (Figure 3.4). Les amplitudes a_2 et b_2 sont ceux des ondes stationnaires, elles varient exponentiellement avec x et contribuent peu à la dynamique du bras [38].

Les termes de la matrice de l'équation (3.11) sont les coefficients de propagation dont la forme est:

$$Y(\omega) = \alpha(\omega) + ik(\omega) \quad (3.13)$$

La partie réelle $\alpha(\omega)$ est le coefficient d'atténuation spatial et la partie imaginaire $k(\omega)$ est le nombre d'ondes.

Ces coefficients de propagation vont par paire ($Y_j; -Y_j$), correspondant à des modes d'onde similaires, se propageant dans des directions opposées.

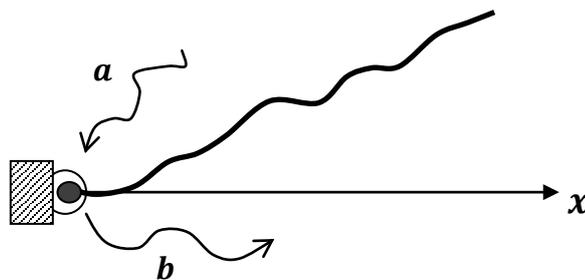


Figure 3.4 - Ondes: incidentes et réfléchies à l'extrémité articulée.

3.3.3 Synthèse du contrôle

Notons le contrôle appliqué en $x = 0$, pour stabiliser la structure flexible par:

La force de contrôle: $v = \partial_x^3 \theta$ et le moment de contrôle: $u = \partial_x^2 \theta$.

Le problème qui se pose est:

Ayant une extrémité articulée (amortisseur visqueux où la force de contrôle v n'intervient pas), peut-on trouver une matrice d'adaptation d'impédance, uniquement sous le contrôle u .

En fonction du vecteur d'état $y(0, \omega)$ les conditions aux limites peuvent être exprimées par:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y(0, \omega) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Et en coordonnées des modes d'ondes par:

$$\begin{bmatrix} -\omega & \omega & -\omega & \omega \\ i\omega^{\frac{3}{2}} & -\omega^{\frac{3}{2}} & -i\omega^{\frac{3}{2}} & \omega^{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} W(0, \omega) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

On cherche à exprimer les ondes réfléchies en fonction des ondes incidentes, alors, le système (3.15) peut être mis sous la forme:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i+1}{i-1} & \frac{-2}{i-1} \\ 2i & \frac{-i-1}{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega(i-1)} & \frac{-1}{\omega^{\frac{3}{2}}(i-1)} \\ i & -1 \\ \frac{1}{\omega(i-1)} & \frac{1}{\omega^{\frac{3}{2}}(i-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Ou :

$$b = S_{OL} a + B F_{ext} \quad (3.17)$$

Avec S_{OL} la matrice de réflexion en boucle ouverte et F_{ext} le vecteur de forces de contrôle.

Ce système montre bien que les modes d'ondes b sont produits par la réflexion des modes d'ondes a qui arrivent à l'extrémité du bras. Ainsi il n'est pas nécessaire d'observer les vibrations tout le long du bras pour réaliser l'adaptation d'impédance, il suffit de connaître les vibrations arrivant au bout pour avoir un contrôle sur les ondes réfléchies indépendamment de la vibration globale. Pour pouvoir construire un contrôle en fonction de ces caractéristiques locales, le système (3.17) doit être écrit en boucle fermée utilisant un compensateur en fonction des variables du système considéré.

Dans notre travail, on s'est limité à l'utilisation des absorbeurs d'ondes linéaires du type :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C(\omega) \begin{bmatrix} \theta \\ \partial_x \theta \end{bmatrix}_{x=0} \quad \text{où } C \text{ est la matrice du compensateur} \quad (3.18)$$

En écrivant u et v dans les coordonnées du vecteur d'état transversal W à l'aide du système (3.10) on obtient:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} P(\omega) W \quad (3.19)$$

D'où :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} & i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} W \quad (3.20)$$

Pour écrire les modes d'ondes b en fonction des modes d'ondes a , on décompose ce système comme suit:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} b \right\} \quad (3.21)$$

En utilisant (3.16) et (3.21) le système en boucle fermée s'écrit sous la forme:

$$b = S_{CL} a \quad (3.22)$$

Où S_{CL} est la matrice de réflexion en boucle fermée avec:

$$S_{CL} = \left\{ I - BC \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\omega} & \sqrt{\omega} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ S_{OL} + BC \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} \end{bmatrix} \right\} \quad (3.23)$$

Le compensateur qui annule S_{CL} (adaptation d'impédance) est appelé dans la littérature micro-onde contrôleur à impédance adapté. Ainsi, la performance du contrôle dépend de la technique adaptée pour la conception de ce compensateur.

Rappelons que la conception d'un tel compensateur dépend des caractéristiques locales de propagation, alors, elle dépend aussi de la nature de l'extrémité, où, on doit appliquer le contrôle.

Dans les cas simples, la poutre prise comme modèle par exemple, où, le contrôle est réalisable par l'application d'une force et d'un moment, la matrice du compensateur est donnée par:

$$C(\omega) = -B^{-1} S_{OL} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i\sqrt{\omega} & -\sqrt{\omega} \end{bmatrix}^{-1} \quad (3.24)$$

D'où:

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} -i\omega & -(1+i)\sqrt{\omega} \\ (i-1)\omega^{\frac{3}{2}} & i\omega \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Avec :

$$\sqrt{i\omega} = \frac{(1+i)\sqrt{\omega}}{\sqrt{2}}$$

$C(\omega)$ prend la forme:

$$C(\omega) = \begin{bmatrix} -i\omega & -\sqrt{2}i\omega(i\omega)^{-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{2}(i\omega)^{\frac{3}{2}} & i\omega \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Dans le cas des systèmes plus complexes, plaques vibrantes par exemple ou amortissement viscoélastique, une étude systématique de l'impédance d'adaptation est nécessaire pour l'application d'un contrôle convenable et efficace.

Dans notre travail, la présence d'une articulation en $x = 0$ peut être interprétée comme un amortisseur visqueux de constante très élevée, ce qui entraîne $\partial_t \theta(0, t) = 0$ et $\theta(0, t) = 0$, ainsi, la force n'intervient plus dans l'équation d'état et le contrôle se réduit à un moment de la forme:

$$u(\omega) = -\frac{\sqrt{2}i\omega}{\sqrt{i\omega}} \partial_x \theta(0, \omega) \quad (3.27)$$

Qui s'écrit dans le domaine temporel:

$$u(t) = -\sqrt{2}I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) = C_p I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) \quad (3.28)$$

Où $I^{\frac{1}{2}}$ est l'opérateur d'intégration fractionnaire défini dans le premier chapitre et simulé sous représentation diffusive dans le deuxième.

Nous constatons alors, que le contrôle fait apparaître un opérateur fractionnaire, d'où la nécessité de l'emploi de l'outil représentation diffusive.

3.3.4 Système global

Le système global est alors constitué d'un bras articulé, qu'on cherche à stabiliser sous un contrôle passif qui se résume par un opérateur fractionnaire $C_p I^{\frac{1}{2}}$ couplé au système bras. La boucle de retour définie par la relation ($u(t) = C_p I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t)$) a pour entrée $\partial_t \partial_x \theta(0, t)$ et pour sortie le moment de contrôle $u(t) = \partial_x^2 \theta(0, t)$ appliqué à l'extrémité articulée (Figure 3.5).

Ce système s'écrit:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta(x, t) + \partial_x^4 \theta(x, t) = 0, & x \in [0, 1] \\ \theta(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(1, t) = 0, & \partial_x^3 \theta(1, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = C_p I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) \end{cases} \quad (3.29)$$

Le schéma bloc de ce système est:

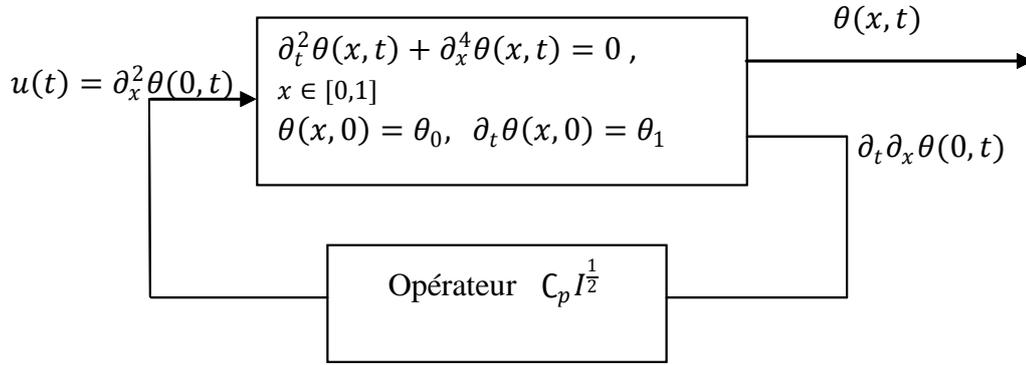


Figure 3.5 - Contrôle d'un bras flexible articulé par retour fractionnaire.

3.4 Contrôle diffusif

3.4.1 Réalisation diffusive du contrôleur

Rappelons que, l'application des représentations diffusives aux opérateurs différentiels fractionnaires génère différentes réalisations de dimension infinie sur un espace d'état Hilbertien. La réalisation adoptée pour l'opérateur $I^{\frac{1}{2}}$ est celle présentée dans le deuxième chapitre. Par conséquent, la réalisation diffusive du contrôleur dont l'équation est : $u(t) = \partial_x^2 \theta(0,t) = C_p I^{\frac{1}{2}} \partial_t \partial_x \theta(0,t)$, peut être présentée par le système:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(\xi,t) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi,t) = 2\partial_t \partial_x \theta(0,t) \\ u(t) = \partial_x^2 \theta(0,t) = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,t) d\xi \end{cases} \quad (3.30)$$

3.4.2 Système couplé : bras articulé et intégrateur fractionnaire

En utilisant les systèmes : (3.1), (3.2) et (3.30), on obtient le système global représenté par la figure (3.5) et défini sous la forme:

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta(x,t) + \partial_x^4 \theta(x,t) = 0, x \in [0,1] \\ \theta(0,t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(1,t) = 0, \partial_x^3 \theta(1,t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0,t) = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi,t) d\xi \\ \partial_t \varphi(\xi,t) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi,t) = 2\partial_t \partial_x \theta(0,t); \\ \varphi(\xi,0) = \varphi_0(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (3.31)$$

Ce système peut être mis sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = AX$, où A est un générateur infinitésimal d'un semi groupe dissipatif [96] dans l'espace d'état et $X = (\theta, \partial_t \theta, \varphi)^T$.

3.4.3 Energie et stabilité du système global

La fonctionnelle-énergie du système global est définie par [97]:

$$E_X(t) = E_\theta(t) - C_p E_\varphi(t) \quad (3.32)$$

Associée à l'espace de Hilbert : $\mathcal{H} := \mathcal{H}_b \times (L^2(\mathbb{R}))^2$.

Où $E_\theta(t)$ est l'énergie mécanique du bras:

$$E_\theta(t) = \frac{1}{2} \|\partial_t \theta\|_{L^2(0,1)}^2 + \frac{1}{2} \|\partial_x^2 \theta\|_{L^2(0,1)}^2 \quad (3.33)$$

Et $E_\varphi(t)$ est l'énergie associée à la variable diffusive:

$$E_\varphi(t) = \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 d\xi \quad (3.34)$$

Stabilité

Sous l'hypothèse $C_p \leq 0$ (hypothèse vérifiée) le système global (3.31) est dissipatif dans le sens:

$$\forall X(t) \in \mathcal{H}, \quad E_X(t) \geq 0, \quad \text{et} \quad \frac{dE_X(t)}{dt} \leq 0 \quad (3.35)$$

Où $X(t)$ est solution du système (3.31).

Preuve:

$$\frac{dE_X(t)}{dt} = \frac{dE_\theta(t)}{dt} - C_p \frac{dE_\varphi(t)}{dt}$$

$$\frac{dE_\theta(t)}{dt} = \partial_x^2 \theta(0, t) \partial_t \partial_x \theta(0, t) \quad (\text{En integrant deux fois par parties}),$$

en utilisant la forme équilibrée du système (3.30):

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(\xi, t) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi, t) = \sqrt{2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = C_p \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, t) d\xi \end{cases}$$

on déduit:

$$\frac{dE_\theta(t)}{dt} = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(\xi, t) \partial_t \varphi(\xi, t) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi^2(\xi, t)] d\xi$$

$$\begin{aligned}
\frac{dE_\theta(t)}{dt} &= C_p \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\partial_t \left(\frac{\varphi^2(\xi, t)}{2} \right) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi^2(\xi, t) \right] d\xi \\
&= C_p \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 \xi^2 \varphi^2(\xi, t) d\xi + \frac{1}{2} C_p \partial_t \|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&= C_p \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 \xi^2 \varphi^2(\xi, t) d\xi + C_p \frac{dE_\varphi(t)}{dt}
\end{aligned}$$

alors,

$$\frac{dE_X(t)}{dt} = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} 4\pi^2 \xi^2 \varphi^2(\xi, t) d\xi \leq 0 \quad (\text{Puisque } C_p < 0).$$

A partir de (3.35) et en utilisant la théorie des semi-groupes [98], on cite le théorème:

- Pour tout $X(0) := X_0 \in \mathcal{H}$ le problème de Cauchy (3.31), admet une solution faible, unique, dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{H})$; en outre, $\forall t \geq 0, E_X(t) \leq E_X(0) = \frac{1}{2} \|X_0\|_{\mathcal{H}}^2$.

Alors, si $\varphi_0 = 0$, l'énergie mécanique du bras satisfait la propriété:

$$\forall t \geq 0, E_\theta(t) \leq E_\theta(0) \tag{3.36}$$

Comportement asymptotique du problème (3.31)

Sous l'hypothèse $C_p \leq 0$, la fonctionnelle de Lyapounov $E_X(t)$ a pour propriété [92,99]:

- Si X est solution de (3.31), alors:

$$\frac{dE_X}{dt} \equiv 0 \Rightarrow X \equiv 0 \tag{3.37}$$

Alors, on peut prouver que les trajectoires $\{(\theta, \partial_t \theta)\}_{t \geq 0}$ sont relativement compact dans \mathcal{H}_b . Ainsi, en appliquant le principe d'invariance de Lasalle [72,100] on obtient:

$$\|(\theta, \partial_t \theta)\|_{\mathcal{H}_b}^2 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Le système global est, alors, asymptotiquement stable.

3.5 Simulation numérique du système global

3.5.1 Principe

La méthode utilisée consiste à décomposer le bras avec des conditions aux limites autonomes suivant ses modes propres de vibration et d'adapter ensuite la vibration trouvée à des conditions aux limites non autonomes.

D'après le principe de superposition modale, la déflexion du bras (solution de l'équation $(\partial_t^2 \theta(x, t) + \partial_x^4 \theta(x, t) = 0)$ peut être exprimée sous la forme:

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \Phi_i(x) \quad (3.38)$$

Où $\{\Phi_i(x)\}$ sont les fonctions propres de l'opérateur $(-\partial_x^4)$. Elles constituent une base orthonormée vérifiant:

$$(\Phi_i, \Phi_j) = \int_{\Omega} \Phi_i(x) \Phi_j(x) dx = \delta_{ij} \quad (3.39)$$

Où δ_{ij} est l'opérateur de Kronecker.

Les modes propres, ainsi obtenus, n'ont pas la même importance pour décrire le comportement vibratoire de la structure. Il suffit donc de conserver que les valeurs propres les plus significatives. L'équation (3.38) devient alors:

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i(t) \Phi_i(x) \quad (3.40)$$

$$\text{Avec} \quad \alpha_i(t) = \int_{\Omega} \theta(x, t) \Phi_i(x) dx \quad (3.41)$$

Où Ω est le domaine de définition de x et N est le nombre de modes conservés.

3.5.2 Approximation modale du bras avec conditions aux limites autonomes

► Fonctions et valeurs propres de l'opérateur $(-\partial_x^4)$

Notons par λ les valeurs propres associées aux vecteurs propres Φ tels que:

$$-\partial_x^4 \Phi = \lambda \Phi \quad (3.42)$$

Φ vérifiant les conditions aux limites autonomes.

Posons $\lambda = -\mu^4$ et cherchons Φ et μ tels que les conditions aux limites soient vérifiées:

$$\begin{cases} -\partial_x^4 \Phi = -\mu^4 \Phi \\ \Phi(0) = 0, \quad \partial_x^3 \Phi(0) = 0 \\ \partial_x^2 \Phi(1) = 0, \quad \partial_x^3 \Phi(1) = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

Cherchons la solution du système (3.43) sous la forme:

$$\Phi(x) = e^{px}$$

$$\text{Alors :} \quad -\partial_x^4 \Phi = -\mu^4 \Phi \Leftrightarrow p^2 = \mu^2 \text{ ou } p^2 = -\mu^2. \quad (3.44)$$

$$\text{Ainsi :} \quad p_1 = \mu, p_2 = -\mu, p_3 = i\mu, p_4 = -i\mu \quad (3.45)$$

Et, les solutions sont données par:

$$\Phi(x) = a_1 e^{p_1 x} + a_2 e^{p_2 x} + a_3 e^{p_3 x} + a_4 e^{p_4 x} \quad (3.46)$$

Où, a_1, a_2, a_3, a_4 sont des constantes réelles.

Cette solution peut être mise sous la forme:

$$\Phi(x) = As_1(\mu x) + Bc_1(\mu x) + Cs_2(\mu x) + Dc_2(\mu x) \quad (3.47)$$

Où :

$$\begin{cases} s_1(\mu x) = \sin(\mu x) + sh(\mu x) \\ c_1(\mu x) = \cos(\mu x) + ch(\mu x) \\ s_2(\mu x) = -\sin(\mu x) + sh(\mu x) \\ c_2(\mu x) = -\cos(\mu x) + ch(\mu x) \end{cases} \quad (3.48)$$

A, B, C, D sont des constantes réelles à déterminer à partir des conditions aux limites:

Les dérivées de la fonction $\Phi(x)$ sont:

$$\partial_x \Phi(x) = \mu [Ac_1(\mu x) + Bs_2(\mu x) + Cc_2(\mu x) + Ds_1(\mu x)] \quad (3.49)$$

$$\partial_x^2 \Phi(x) = \mu^2 [As_2(\mu x) + Bc_2(\mu x) + Cs_1(\mu x) + Dc_1(\mu x)] \quad (3.50)$$

$$\partial_x^3 \Phi(x) = \mu^3 [Ac_2(\mu x) + Bs_1(\mu x) + Cc_1(\mu x) + Ds_2(\mu x)] \quad (3.51)$$

A partir des conditions aux limites autonomes on déduit:

$$\Phi(0) = 2B = 0 \Rightarrow B = 0 \quad (3.52)$$

Sans contrôle, $u = \partial_x^2 \Phi(0) = 0$:

$$\partial_x^2 \Phi(0) = 2\mu^2 D = 0 \Rightarrow D = 0 \quad (3.53)$$

La condition $\mu = 0$ correspond à un mode rigide.

De l'extrémité libre : $\partial_x^2 \Phi(1) = \partial_x^3 \Phi(1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu^2 [As_2(\mu) + Cs_1(\mu)] = 0 \\ \mu^3 [Ac_2(\mu) + Cc_1(\mu)] = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

Une solution non triviale est obtenue en ayant:

$$\begin{vmatrix} s_2(\mu) & s_1(\mu) \\ c_2(\mu) & c_1(\mu) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cos \mu \cdot sh \mu - \sin \mu \cdot ch \mu = 0 \quad (3.55)$$

Les solutions μ_i sont l'intersection des courbes: $tg \mu$ et $th \mu$. Une approximation de la solution par un processus itératif a été donnée par Gérardin [94]:

$$\begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \mu_i = (4i + 1) \frac{\pi}{4}, \quad i \geq 1 \end{cases} \quad (3.56)$$

$\mu_0 = 0$ correspond à un mode rigide.

Les fréquences propres sont données par le tableau (3.1):

Tableau 3.1 - Fréquences propres du bras flexible articulé.

μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	μ_6	μ_7	μ_8	μ_9	μ_{10}
0	3,926	7,068	10,210	13,351	16,493	19,634	22,776	25,918	29,059	32,201

Et les fonctions propres sont:

$$\Phi_i(x) = C \left[\frac{A}{C} (\sin(\mu_i x) + sh(\mu_i x)) + (-\sin(\mu_i x) + sh(\mu_i x)) \right], i \geq 1 \quad (3.57)$$

Le rapport A/C peut être calculé à partir du système (3.54) :

$$\frac{A}{C} = - \frac{\sin \mu_i + sh \mu_i}{-\sin \mu_i + sh \mu_i} \quad (3.58)$$

$$\frac{\Phi_i(x)}{c_i} = - \frac{\sin \mu_i + sh \mu_i}{-\sin \mu_i + sh \mu_i} (\sin(\mu_i x) + sh(\mu_i x)) - \sin(\mu_i x) + sh(\mu_i x) \quad (3.59)$$

Les coefficients c_i sont, ainsi déduit, après normalisation de $\Phi_i(x)$. Les valeurs de ces coefficients vérifiant $\int_0^1 \Phi_i^2(x) dx = 1$ sont: $c_i \simeq 1$.

Les valeurs propres de l'opérateur $(-\partial_x^4)$ sont :

$$\lambda_i = -\mu_i^4 \quad (3.60)$$

Où les μ_i , solutions de (3.55) sont données par le tableau (3.1).

► **Solutions de l'équation $\partial_t^2 \theta = -\partial_x^4 \theta$**

D'après le principe de superposition $\theta(x, t)$ peut-être exprimé sous la forme (3.38)

On cherche une solution faible de l'équation $\partial_t^2 \theta = -\partial_x^4 \theta$:

$$(\partial_t^2 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} = (-\partial_x^4 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} \quad j = 1 \dots \infty \quad (3.61)$$

Comme les fonctions $\{\Phi_j\}$ sont orthonormées, on a:

$$(\partial_t^2 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} = \partial_t^2 \alpha_j$$

Et $(-\partial_x^4 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (-\partial_x^4 \Phi_i, \Phi_j)_{L^2(0,1)} = \alpha_j \lambda_j \quad (3.62)$

On doit donc trouver les solutions des équations du second ordre:

$$\partial_t^2 \alpha_j(t) = \lambda_j \alpha_j(t), \quad j = 1 \dots \infty \quad (3.63)$$

Avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} \alpha_j(0) = (\theta_0, \Phi_j)_{L^2(0,1)} \\ \partial_t \alpha_j(0) = (\theta_1, \Phi_j)_{L^2(0,1)} \end{cases} \quad (3.64)$$

On pose $\alpha_j(t) = A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t$ et on détermine ω_j à partir de l'équation (3.63):

$$\omega_j^2 = -\lambda_j = \mu_j^4 \quad (3.65)$$

Les conditions initiales déterminent les constantes:

$$\begin{cases} A_j = \alpha_j(0) \\ B_j = \frac{1}{\omega_j} \partial_t \alpha_j(0) \end{cases}$$

La solution est alors:

$$\theta(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(t) \Phi_i(x)$$

où
$$\alpha_i(t) = \alpha_i(0) \cos \mu_i^2 t + \frac{1}{\mu_i^2} \partial_t \alpha_i(0) \sin \mu_i^2 t \quad (3.66)$$

et
$$\Phi_i(x) = -\frac{\sin \mu_i + sh \mu_i}{-\sin \mu_i + sh \mu_i} (\sin(\mu_i x) + sh(\mu_i x)) - \sin(\mu_i x) + sh(\mu_i x)$$

On constate que :

- La fréquence temporelle est le carré de la fréquence spatiale.
- Les Φ_i étant des fonctions propres d'un opérateur symétrique, elles forment une base topologique orthonormée de $L^2(0,1)$.

3.5.3 Approximation modale du bras avec conditions aux limites non autonomes

Décomposons la vibration suivant la base des Φ_i selon l'équation (3.38), où, les fonctions $\Phi_i(x)$ vérifient les conditions aux limites autonomes et les α_i sont à déterminer. Les conditions aux limites sont représentées par le système (3.2).

On introduit comme précédemment une solution faible de l'équation (3.38):

$$(\partial_t^2 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} = (-\partial_x^4 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} \quad j = 1 \dots \infty$$

En intégrant deux fois par parties on obtient:

$$(-\partial_x^4 \theta, \Phi_j)_{L^2(0,1)} = \lambda_j \alpha_j(t) + \Phi_j'(0)u(t)$$

On obtient une suite d'équations différentielles du second ordre:

$$\partial_t^2 \alpha_j(t) = \lambda_j \alpha_j(t) + \Phi_j'(0)u(t), \quad j = 1 \dots \infty \quad (3.67)$$

Avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} \alpha_j(0) = (\theta_0, \Phi_j)_{L^2(0,1)} \\ \partial_t \alpha_j(0) = (\theta_1, \Phi_j)_{L^2(0,1)} \end{cases}$$

► Résolution du système (3.67)

Pour transformer (3.67) en un système du premier ordre, on pose:

$$\begin{cases} \alpha_i^{(1)} = \alpha_i \\ \alpha_i^{(2)} = \partial_t \alpha_i^{(1)} / \omega_i \end{cases}$$

On aura le système :

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_i^{(1)} = \omega_i \alpha_i^{(2)} \\ \partial_t \alpha_i^{(2)} = -\omega_i \alpha_i^{(1)} + \frac{\Phi_i'(0)}{\omega_i} u \end{cases} \quad (3.68)$$

Donc, on doit simuler deux équations différentielles du premier ordre à coefficients constants pour chaque mode de vibration.

Le système s'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \partial_t \alpha_i^{(1)} \\ \partial_t \alpha_i^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_i \\ -\omega_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^{(1)} \\ \alpha_i^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Phi_i'(0)}{\omega_i} \end{bmatrix} u \quad (3.69)$$

Ou :

$$\partial_t X_i = A_i X_i + B_i u \quad (3.70)$$

Avec $X_i = [\alpha_i^{(1)} \quad \alpha_i^{(2)}]^T$

La solution est de la forme:

$$X_i(t) = e^{tA_i} X_i(0) + \int_0^t e^{(t-\tau)A_i} B_i u(\tau) d\tau \quad (3.71)$$

Or, pour ce genre de matrice A_i , e^{tA_i} est facilement calculable. Il s'agit de la matrice de rotation:

$$e^{tA_i} = \begin{bmatrix} \cos\omega_i t & \sin\omega_i t \\ -\sin\omega_i t & \cos\omega_i t \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

► Discrétisation en temps

Notons $t_n = n\Delta t$, en considérant u constante par morceaux sur les intervalles $[t_n, t_n + \Delta t]$, pourvu que Δt soit assez petit, X_i peut être évalué pas à pas:

$$X_i(t_n + \Delta t) = e^{\Delta t A_i} X_i(t_n) + \left(\int_0^{\Delta t} e^{(\Delta t - \tau) A_i} d\tau \right) B_i u \quad (3.72)$$

Avec:

$$\int_0^{\Delta t} e^{(\Delta t - \tau) A_i} d\tau = \begin{bmatrix} \frac{\sin\omega_i \Delta t}{\omega_i} & \frac{1 - \cos\omega_i \Delta t}{\omega_i} \\ \frac{\cos\omega_i \Delta t - 1}{\omega_i} & \frac{\sin\omega_i \Delta t}{\omega_i} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

D'où:

$$X_i(t_n + \Delta t) = \begin{bmatrix} \cos\omega_i \Delta t & \sin\omega_i \Delta t \\ -\sin\omega_i \Delta t & \cos\omega_i \Delta t \end{bmatrix} X_i(t_n) + \begin{bmatrix} \frac{\sin\omega_i \Delta t}{\omega_i} & \frac{1 - \cos\omega_i \Delta t}{\omega_i} \\ \frac{\cos\omega_i \Delta t - 1}{\omega_i} & \frac{\sin\omega_i \Delta t}{\omega_i} \end{bmatrix} B_i u(t_n) \quad (3.74)$$

$i = 1 \dots \infty$

Le nombre d'équations découplées obtenues (3.74) est infini. Pour la simulation numérique on prendra un nombre de modes N , (les modes les plus significatifs), assurant des erreurs d'approximation acceptables.

Notons $X_i^n = X_i(t_n)$ et $X_i^{n+1} = X_i(t_n + \Delta t)$, le système (3.74) s'écrit alors, sous la forme:

$$X_i^{n+1} = \begin{bmatrix} \cos\omega_i \Delta t & \sin\omega_i \Delta t \\ -\sin\omega_i \Delta t & \cos\omega_i \Delta t \end{bmatrix} X_i^n + \begin{bmatrix} \frac{\sin\omega_i \Delta t}{\omega_i} & \frac{1 - \cos\omega_i \Delta t}{\omega_i} \\ \frac{\cos\omega_i \Delta t - 1}{\omega_i} & \frac{\sin\omega_i \Delta t}{\omega_i} \end{bmatrix} B_i u^n \quad (3.75)$$

$$i = 1 \dots N, \quad n = 0 \dots M$$

Avec : $M = T/\Delta t$ où T est le temps de simulation.

A noter que les deux matrices figurant dans la relation (3.75) ne dépendent que du choix du pas Δt . Elles sont donc indépendantes du temps. On ne devra les calculer qu'une seule fois pour chaque mode, ce qui évite un très grand temps de calcul.

En fonction des variables α_i et $\partial_t \alpha_i$, le système d'équations récurrentes explicites obtenu est:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^{n+1} \\ \frac{\partial_t \alpha_i^{n+1}}{\omega_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_i \Delta t & \sin \omega_i \Delta t \\ -\sin \omega_i \Delta t & \cos \omega_i \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^n \\ \frac{\partial_t \alpha_i^n}{\omega_i} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos \omega_i \Delta t}{\omega_i^2} \Phi_i'(0) \\ \frac{\sin \omega_i \Delta t}{\omega_i^2} \Phi_i'(0) \end{bmatrix} \mathbf{u}^n \quad (3.76)$$

Ou:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i^{n+1} \\ \partial_t \alpha_i^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_i \Delta t & \frac{\sin \omega_i \Delta t}{\omega_i} \\ -\omega_i \sin \omega_i \Delta t & \cos \omega_i \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i^n \\ \partial_t \alpha_i^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1 - \cos \omega_i \Delta t}{\omega_i^2} \Phi_i'(0) \\ \frac{\sin \omega_i \Delta t}{\omega_i} \Phi_i'(0) \end{bmatrix} \mathbf{u}^n \quad (3.77)$$

$$i = 1 \dots N, n = 0 \dots M$$

Avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} \alpha_i(0) = \int_0^1 \theta_0(x) \Phi_i(x) dx \\ \partial_t \alpha_i(0) = \int_0^1 \theta_1(x) \Phi_i(x) dx \end{cases} \quad (3.78)$$

Où $\theta_0(x)$ est la position initiale et $\theta_1(x) = \partial_t \theta(x, 0)$ est la vitesse initiale

On en déduit alors, la déflexion du bras à chaque instant $t_n = n\Delta t$ et en chaque point $x \in [0,1]$:

$$\theta^n(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i^n \Phi_i(x) \quad (3.79)$$

De la même manière, on peut déterminer:

- La vitesse de la déflexion:

$$\partial_t \theta^n(x) = \sum_{i=1}^N \partial_t \alpha_i^n \Phi_i(x) \quad (3.80)$$

- La dérivée de la pente de déflexion:

$$\partial_t \partial_x \theta^n(x) = \sum_{i=1}^N \partial_t \alpha_i^n \Phi_i'(x) \quad (3.81)$$

- La dérivée de la pente de déflexion pour $x = 0$:

$$\partial_t \partial_x \theta^n(0) = \sum_{i=1}^N \partial_t \alpha_i^n \Phi_i'(0) \quad (3.82)$$

- L'énergie du bras:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial_t \alpha_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \omega_i^2 \quad (3.83)$$

La vitesse de la pente calculée pour $x = 0$, " $\partial_t \partial_x \theta(0, t)$ ", définit alors l'entrée de la boucle de retour dont la sortie est le contrôle appliqué au bras:

$$u(t) = C_p I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) .$$

Sous approximation fonctionnelle de l'état $\varphi(\xi, t)$ décrite au chapitre (2.2.2), la sortie $u(t)$ du système (3.30) sera: $u^n = C_p \sum_{k=1}^K \lambda_k \varphi_k^n$, $n = 0 \dots M$. Alors le système global en temps discret de dimension finie est de la forme abstraite $X^{n+1} = AX^n$, où le vecteur d'état $X^n = (\theta^n, \partial_t \theta^n, \varphi^n)^T$ est de dimension $(2M + 2K)$.

3.5.4 Simulation numérique

► Choix des paramètres de simulation

Le choix des conditions initiales est arbitraire, du fait que le contrôle doit être efficace pour toute perturbation appliquée à n'importe quelle position du bras.

Le choix des paramètres de simulation dépend de la qualité d'approximation désirée. Le but de notre travail dans ce chapitre est d'assurer l'efficacité du contrôle, ainsi, les paramètres doivent être choisis de telle façon à bien visualiser l'effet de ce dernier:

Le temps de simulation doit être suffisamment long afin de visualiser la propagation des ondes les plus lentes.

Le pas Δt doit être choisi suffisamment petit pour pouvoir visualiser les modes de fréquences hautes, mais convenable, pour assurer la stabilité de l'approximation numérique de l'ensemble.

Les fréquences minimale et maximale du réseau de fréquences de l'intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$ (boucle de contrôle) sont déterminées, respectivement, par le temps d'analyse (ou le mode le plus bas) et le mode d'ordre plus élevé considéré.

Le nombre de fonctions propres estimé suffisant, pour visualiser clairement l'effet du contrôle sur le bras est de 10.

► Interprétation des résultats de simulation

Les figures (3.6) et (3.7) montrent l'évolution du bras dans le cas autonome $u = 0$, et mettent en évidence le comportement vibratoire complexe dû à la propagation des ondes élastiques avec des vitesses non constantes.

La figure (3.10) représente l'énergie du bras autonome qui est constante dans le temps, c'est un système conservatif.

Les figures (3.8) et (3.9), montrent l'effet du contrôle absorbant d'onde sur le bras. Notons que le temps de simulation est: $t_s = 4s$. On remarque qu'il n'y a presque aucune réflexion. La représentation en 2D (figure 3.9), montre que la propagation est très différente de celle du cas autonome. La représentation en 3D (figure 3.8), met en évidence la stabilisation parfaite du bras.

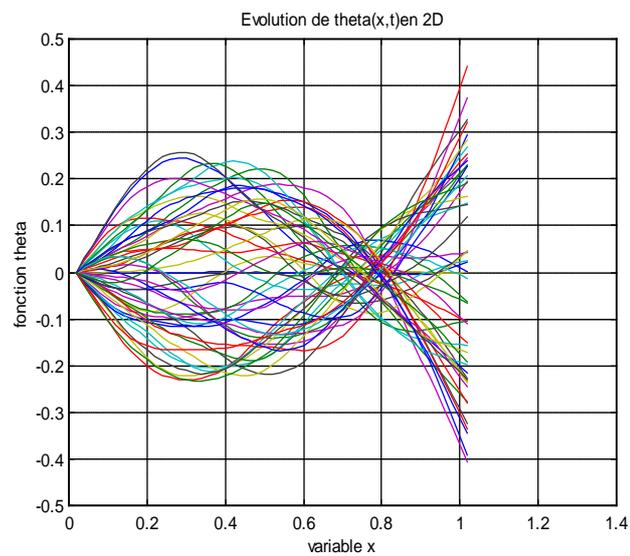


Figure 3.6 - Comportement en 2D du bras autonome.

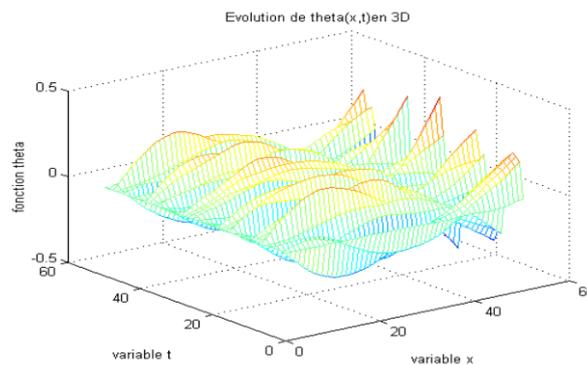


Figure 3.7 - Comportement en 3D du bras autonome.

La figure (3.11) montre bien que l'énergie mécanique du bras est décroissante, le système global est dissipatif. La décroissance rapide de l'énergie au début, justifie bien l'efficacité du contrôle pour les hautes fréquences.

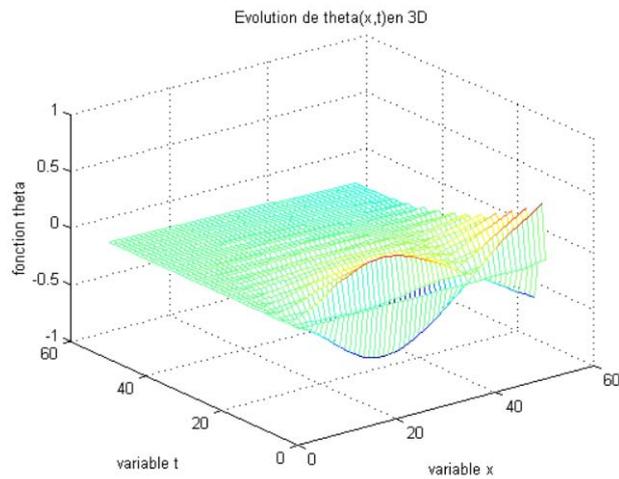


Figure 3.8 - Comportement en 3D du bras contrôlé.

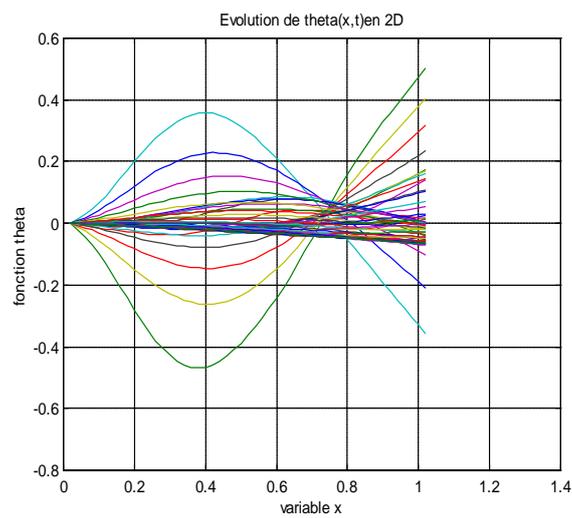


Figure.3.9 - Comportement en 2D du bras contrôlé.

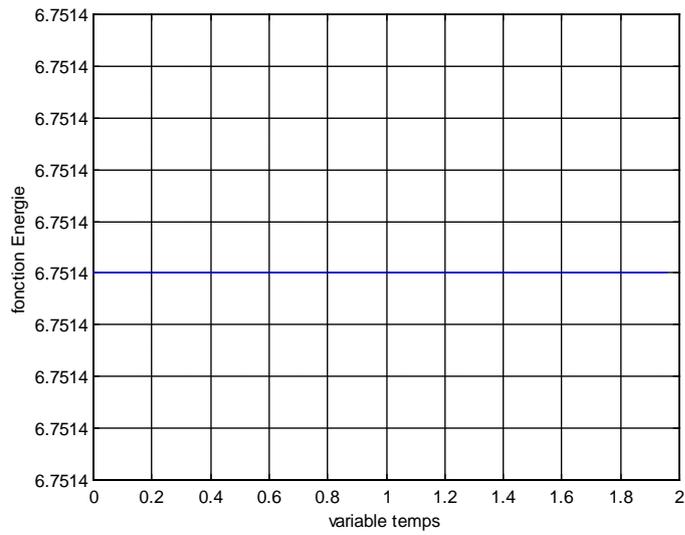


Figure 3.10 - Energie du bras dans le cas autonome.

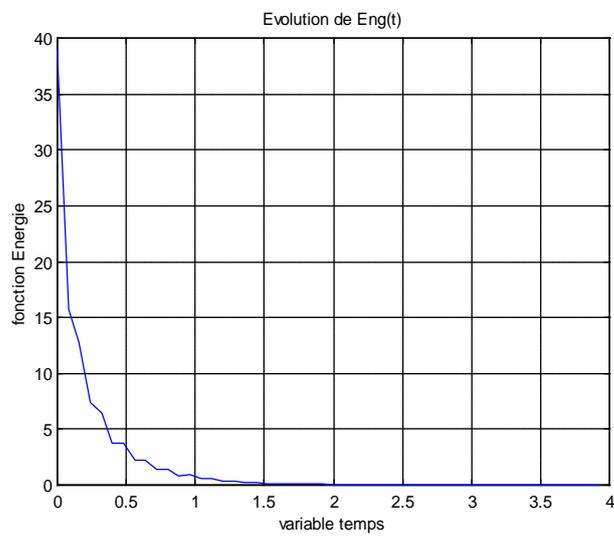


Figure 3.11 - Energie du bras dans le cas contrôlé.

3.6 Conclusion

L'approche de contrôle proposée dans ce chapitre est basée essentiellement sur le comportement entrée-sortie particulier d'un système à base d'une équation de diffusion convenable.

La réalisation simple et stable du feedback diffusif absorbant, nous a permis d'exprimer le système bouclé sous forme standard inconditionnellement dissipative. En outre, la simulation numérique de l'opérateur d'impédance adaptée sous réalisation diffusive est simple et précise.

Par cette étude nous venons de montrer que l'approche adoptée est une méthode de construction de contrôles passifs présentant d'excellentes propriétés d'absorption en exploitant la nature propagative du système.

Notons que, l'énergie du système en boucle fermée décroît ce qui n'est pas le cas pour un contrôle actif où l'énergie du système n'est généralement pas décroissante, ce qui constitue un risque d'instabilité en boucle fermée.

Les résultats obtenus après simulation numérique illustrent bien l'efficacité de l'approche.

Chapitre 4

*Contrôle optimal passif d'un bras flexible
articulé par impédance à mémoire*

Chapitre 4

Contrôle optimal passif d'un bras flexible articulé par impédance à mémoire

4.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est d'élaborer de manière complètement passive un contrôle optimal actif d'un bras flexible pour l'amener à une position d'équilibre désirée. Cette commande est conçue à travers un système diffusif, simulant une poutre semi-infinie à gauche et prolongeant virtuellement le bras flexible. C'est la condition initiale de cette diffusion qui détermine la conception du contrôle en couple assurant la stabilisation et le contrôle optimal du bras, dans le cas de poursuite d'une consigne de référence portant sur son mode rigide. Par ailleurs, les propriétés de propagation de la poutre doivent garantir en principe une excellente stabilisation par absorption frontière des modes vibrants non contrôlés (on rappelle que le contrôle actif ne doit porter, à cause des erreurs de modèle, que sur un nombre réduit de modes).

Des simulations numériques sont présentées pour montrer l'efficacité et la robustesse du contrôle optimal diffusif réalisé.

4.2 Présentation du problème

On considère l'équation de la poutre d'Euler-Bernoulli, pouvant pivoter autour du point $(0,0)$, avec extrémité libre en $x = 1$, définie sur le domaine $[0,1]$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \theta(x,t) + \partial_x^4 \theta(x,t) = 0, \quad x \in [0,1] \\ \theta(0,t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(1,t) = 0 \\ \partial_x^3 \theta(1,t) = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

avec contrôle en couple en $x = 0$:

$$\partial_x^2 \theta(0,t) = u(t), \quad (4.2)$$

destiné à amener le système à l'état d'équilibre désiré:

$$\theta_d = kx, \quad \partial_t \theta_d = 0 \quad (4.3)$$

Etant donnée une fonction de coût $J(u, k)$, le problème de contrôle optimal s'écrit par exemple:

$$\min\{J(u, k), u \in L^2(0, T)\}, \quad (4.4)$$

Avec la contrainte définie par le système (4.1), couplé à un système diffusif dont la sortie est le contrôle en couple $u(t)$. La solution supposée exister sera notée $u^*(t)$. L'objectif est d'engendrer cette solution, supposée calculée à priori, donc connue, par un système passif couplé au bras et correctement initialisé.

Le contrôle passif du bras flexible est réalisé en simulant le prolongement de ce bras vers $-\infty$, dans une position initiale avec vitesse initiale nulle comme indiqué par la figure (4.1):

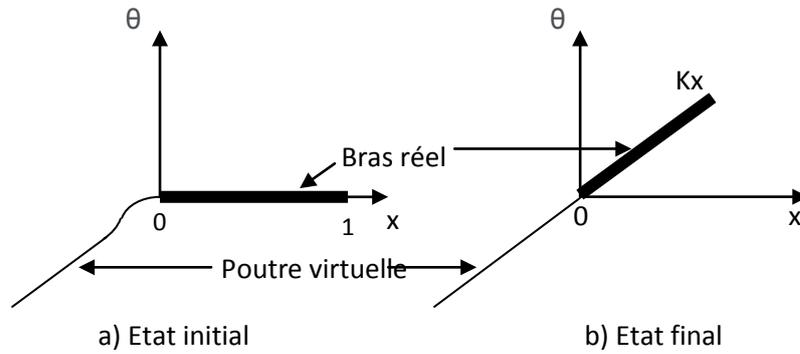


Figure 4.1- Bras + poutre virtuelle simulée par contrôle diffusif.

L'ensemble est défini par le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t^2 \theta(x, t) + \partial_x^4 \theta(x, t) = 0, \quad x \in]0, 1[\\ \partial_t^2 \theta_v(x, t) + \partial_x^4 \theta_v(x, t) = 0, \quad x < 0 \\ \partial_x^2 \theta(1, t) = 0 \\ \partial_x^3 \theta(1, t) = 0 \\ \theta(0, t) = \theta_v(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = \partial_x^2 \theta_v(0, t) \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Le contrôle en couple par impédance adaptée présenté dans le chapitre 3, simulant le prolongement du bras vers $-\infty$, est donné par la relation:

$$\partial_x^2 \theta(0, t) = -\sqrt{2} I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) = C_p I^{1/2} \partial_t \partial_x \theta(0, t) \quad (4.6)$$

La réalisation diffusive de cette relation est:

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(\xi, t) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi, t) = 2\partial_t \partial_x \theta(0, t) \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, t) d\xi \end{cases} \quad (4.7)$$

4.3 Condition initiale de la diffusion

Le problème de la réalisation du contrôle $u^*(t)$ par la condition initiale de la diffusion s'interprète comme un problème d'observation d'état initial contraint. Pour cela considérons le système global (chapitre3):

$$\begin{cases} \partial_t^2 \theta(x, t) + \partial_x^4 \theta(x, t) = 0, \quad x \in [0, 1] \\ \theta(0, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(1, t) = 0, \quad \partial_x^3 \theta(1, t) = 0 \\ \partial_x^2 \theta(0, t) = C_p \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, t) d\xi \\ \partial_t \varphi(\xi, t) + 4\pi^2 \xi^2 \varphi(\xi, t) = 2\partial_t \partial_x \theta(0, t); \\ \varphi(\xi, 0) = \varphi_0(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \end{cases} \quad (4.8)$$

et sa sortie définie par le couple (4.6), appliqué par la poutre virtuelle au bras réel en $x = 0$, où l'ensemble peut s'écrire sous la forme abstraite classique: $\frac{dX}{dt} = AX$ dont la stabilité asymptotique est évidemment assuré par dissipativité, sachant que le seul état d'équilibre est 0.

Considérons l'opérateur H défini par:

$$\begin{aligned} H: X &\rightarrow L^2(\mathcal{R}_t^+) \\ H: \hat{\varphi}_0(\xi) &\rightarrow u^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

où $X = \{0\} \times \{0\} \times L_0^2(\mathcal{R}_\xi)$ est le sous espace d'états initiaux et $u^*(t)$ est le contrôle optimal souhaité.

Afin de mieux maîtriser le comportement asymptotique du système (c'est à dire au-delà de l'instant T_0 correspondant au temps d'optimisation), qui dans le cas du contrôle réalisé par la poutre virtuelle est garanti par la contrainte d'asymptote oblique, qui assure que l'état d'équilibre est bien $\theta_d = kx$, nous prévoyons un prolongement nul du contrôle optimal au-delà de T_0 , donc:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*(t), & 0 < t < T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases} \quad (4.10)$$

et on pose le problème "optimal" sous l'une des deux formes suivantes:

$$\bullet \min_{\hat{\varphi}_0} \|H\hat{\varphi}_0 - \bar{u}\|_{L^2(\mathcal{R}_t^+)}^2 \quad (4.11a)$$

$$\bullet \min_{\hat{\varphi}_0} \left\{ \|X_{\hat{\varphi}_0} - X_d\|_{L^2(\mathcal{R}_t^+)}^2, H\hat{\varphi}_0 = \bar{u} \right\} \quad (4.11b)$$

dont la solution fait appel au pseudo-inverse de H :

$$\hat{\varphi}_0 = H^+ \bar{u} \quad (4.12)$$

Plus généralement, la résolution de ce problème passe par la minimisation d'un critère qui peut porter sur la position finale, l'énergie finale ou instantanée du bras,...

Ce problème peut s'écrire sous la forme:

$$\min_{\hat{\varphi}_0} \{J(X_\theta)\} \quad (4.13)$$

4.4 Critère d'optimisation

Dans le but de montrer l'efficacité de l'approche et comme résultat préliminaire à ce crucial problème (d'optimisation), qui sera approfondi dans un prochain travail, nous considérons le critère qui permet de satisfaire les deux conditions suivantes:

- D'une part, il faut que l'énergie du système global (bras + diffusion) soit nul ou presque nul pour $t = T_0$ (où T_0 désigne le temps d'optimisation). Cela permettra de garantir une stabilité au système (vu sa nature passive et dissipative).
- D'autre part, la position du bras doit être la plus proche possible de la position désirée au bout du temps $t = T_0$.

La résolution de ce problème consiste à minimiser une fonctionnelle regroupant l'énergie et la position du bras, avec une pondération " k_1, k_2 " reflétant l'importance accordée à chacune de ces deux conditions. Formellement, cela se traduit par l'expression suivante:

$$\min_{\hat{\varphi}_0} \{k_1 \|X(T_0)\|^2 + k_2 \|\theta^r(x, T_0) - \theta_d^r\|^2\} \quad (4.14)$$

où $\theta^r(x, T_0)$ et θ_d^r désignent respectivement le mode rigide du bras à l'instant T_0 et celui désiré.

4.5 Simulation numérique et discussion des résultats

Les simulations sont effectuées en considérant $k_1 = k_2 = 1$ dans (4.14) et un temps d'optimisation $T_0 = 2s$ pour différents temps de simulations T_s et différentes pentes désirées.

4.5.1 Algorithme

Le schéma bloc du système global est représenté par la figure (4.2). Les principales étapes de la méthode proposée sont présentées comme indiqué ci-dessous dans l'algorithme suivant:

```

Input  $\partial_t \theta(x, 0) = \theta_1, \theta(x, 0) = \theta_0$ 
Construct the  $X_e$  state of the global system
Initialization  $\hat{\varphi}_0$ 
For t=0 to  $T_0$ , calculate  $\hat{\varphi}_0$  such as
     $\min_{\hat{\varphi}_0} \{J(X_\theta)\}$ 
     $t = t + \Delta T_0$ 
End For
For t=0 to  $T_s$ ,:
    Calculate  $\theta(x, t)$ 
    Calculate  $\partial_t \partial_x \theta(0, t)$ 
    Calculate  $u(t) = \partial_x^2 \theta(0, t)$  % By diffusive representation
     $t = t + \Delta T_s$ 
End For
End

```

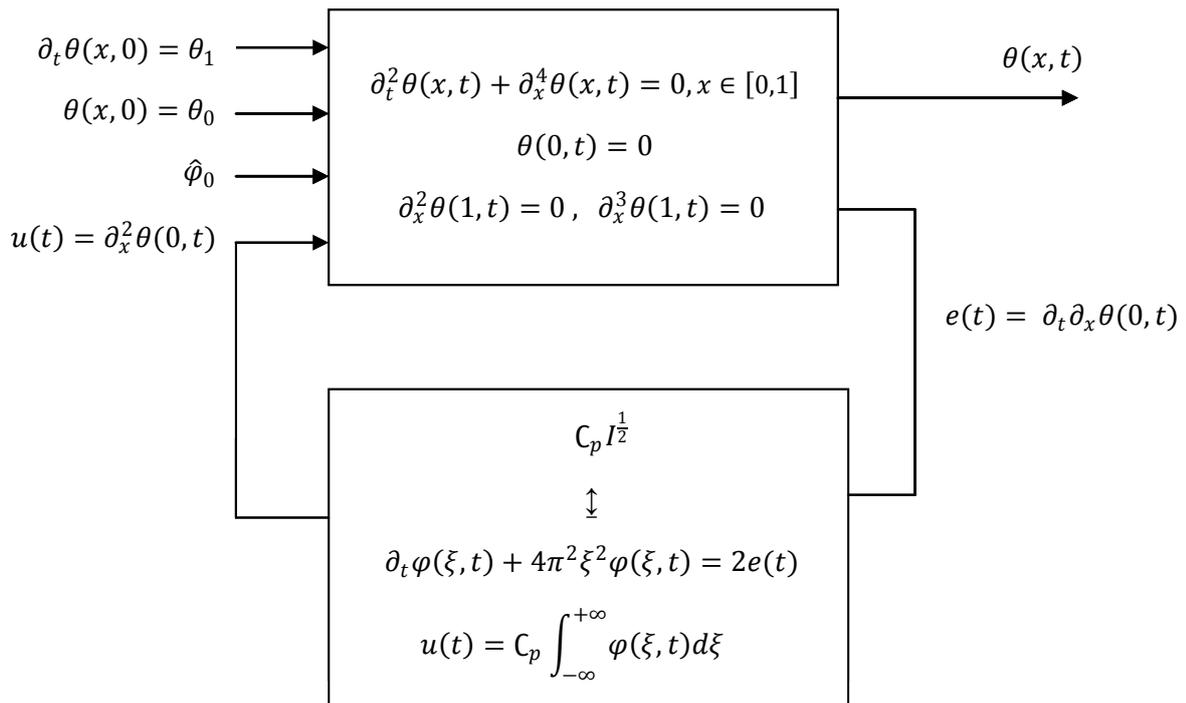


Figure 4.2 - Schéma bloc du système global.

4.5.2 Discussion

Les figures (4.3) et (4.4) présentent l'évolution en 2D et 3D du bras dans le cas de poursuite d'une consigne préalablement fixée sur le mode rigide et montrent clairement l'effet du contrôle diffusif sur le bras qui évolue jusqu'à la position finale, où il se stabilise en un

temps proche du temps d'optimisation de la condition initiale. En considérant la robustesse, cependant, nous notons que les résultats pour les deux cas où $p = 0,5$ et $p = 1$ sont identiques (modulo un facteur de multiplicité en amplitude égal à 2, correspondant au rapport des deux pentes $p = 1$ et $p = 0,5$).

La figure (4.5) représente les positions initiale et finale du bras en deux dimensions sur laquelle nous constatons que la forme du bras à l'état final est droite (ne comporte plus de vibrations), le bras est parfaitement stabilisé après avoir subi un fort couple initial.

Les figures (4.6) et (4.7) illustrent, respectivement, l'évolution de l'extrémité du bras $\theta(1, t)$ et du contrôle optimal $u^*(t)$. Comme précédemment, on note que les résultats pour les deux cas où $p = 0,5$ et $p = 1$ sont identiques (modulo un facteur de multiplicité en amplitude égal à 2).

La figure (4.8) montre que l'évolution de l'énergie mécanique du bras est globalement décroissante, ce qui illustre l'aspect dissipatif du système global. L'accroissement de cette énergie à l'instant de démarrage est dû à l'énergie introduite par le système diffusif (introduite par le couple initial calculé en fonction de la condition initiale de diffusion). Encore une fois, nous notons que les résultats pour les deux cas où $p = 0,5$ et $p = 1$ sont identiques (modulo un facteur de multiplicité en grandeur).

Les figures (4.8) et (4.9) montrent que pour différents cas, l'évolution de l'énergie du bras est la même sur l'intervalle de temps commun pour des modes rigides souhaités identiques. Le même phénomène est observé pour toutes les courbes, ce qui prouve la robustesse de l'approche.

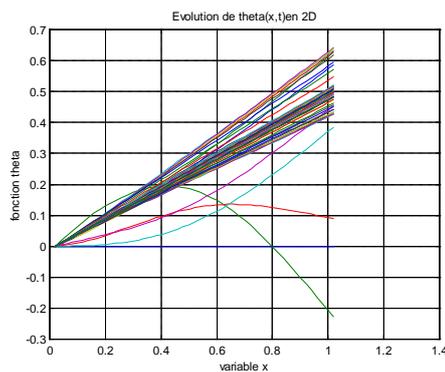
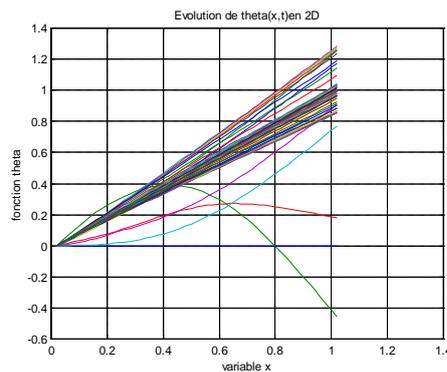
a/ Cas $p = 0.5$ b/ Cas $p = 1$

Figure 4.3- Comportement en 2D du bras contrôlé.

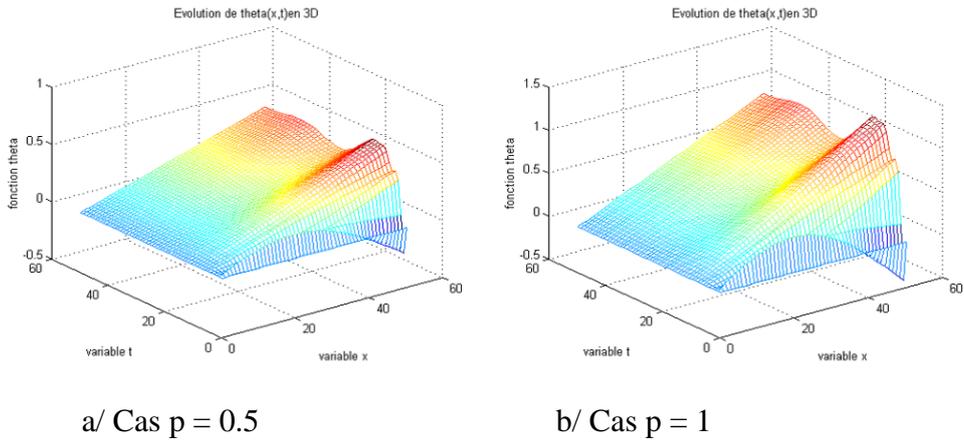


Figure 4.4 - Comportement en 3D du bras contrôlé.

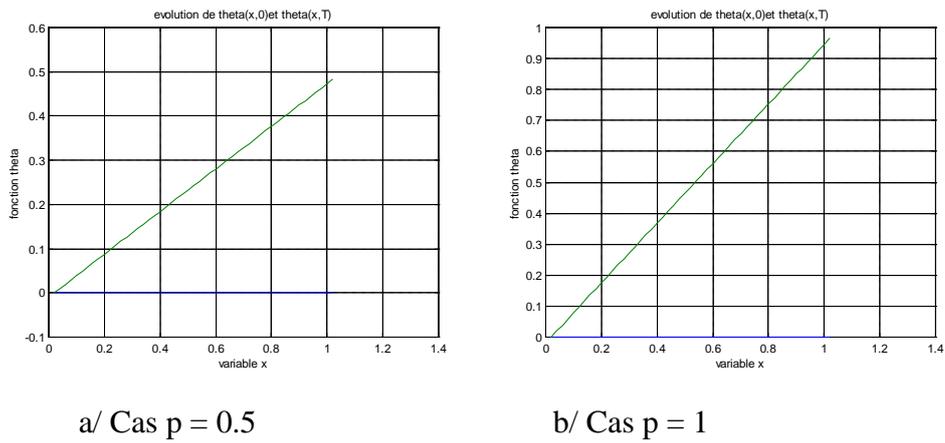


Figure 4.5 - Positions Initiale et finale du bras.

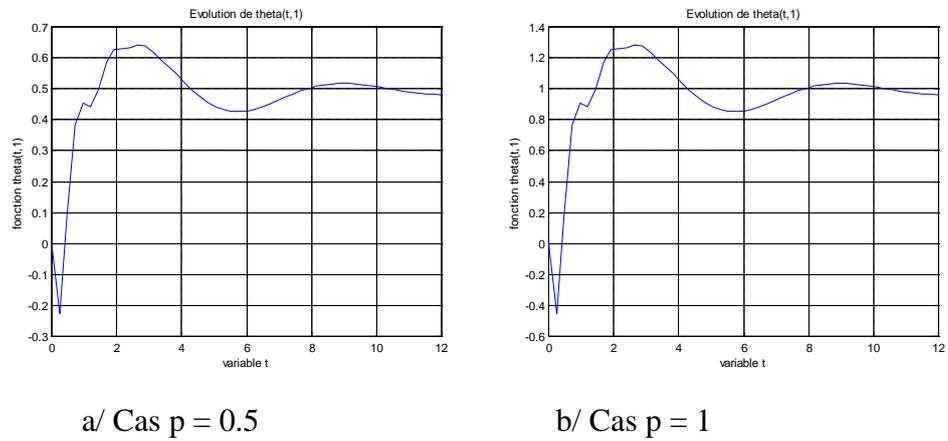
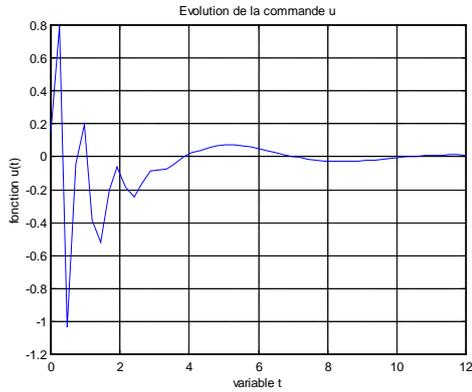
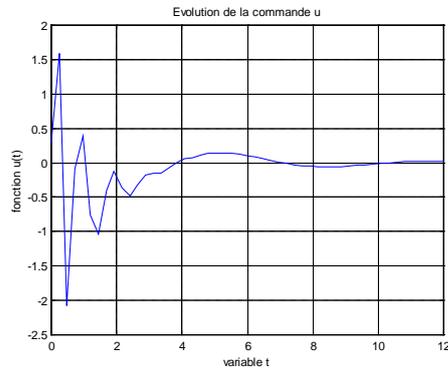


Figure 4.6 – Evolution de l'extrémité libre du bras $\theta(1, t)$.

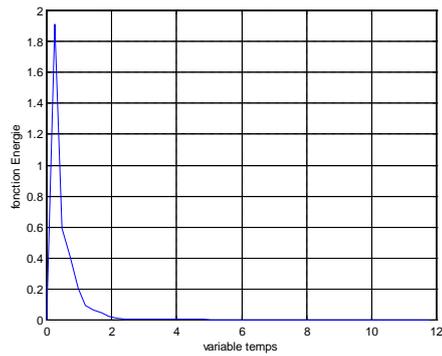


a/ Cas $p = 0.5$

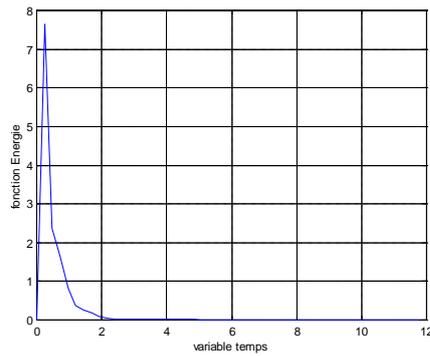


b/ Cas $p = 1$

Figure 4.7 – Evolution du contrôle optimal $u^*(t)$.

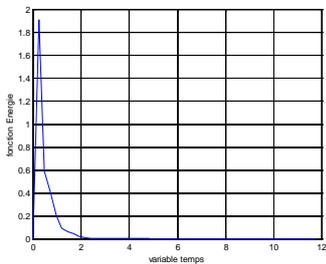


a/ Cas $p = 0.5$

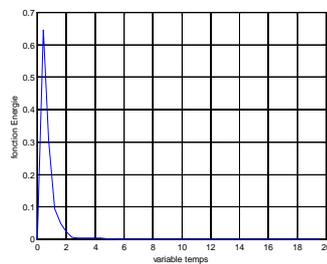


b/ Cas $p = 1$

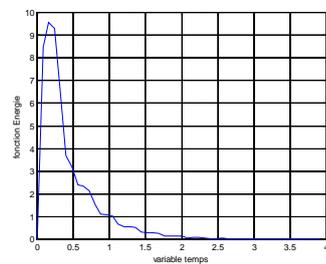
Figure 4.8 – Evolution de l'énergie mécanique du bras.



a/ Cas $T_s = 12s$



b/ Cas $T_s = 20 s$



c/ Cas $T_s = 4 s$

Figure 4.9 – Evolution de l'énergie mécanique du bras.

4.6 Conclusion

Les résultats obtenus mettent en évidence la robustesse de l'approche. En effet:

- Pour différents temps de simulation, le comportement du bras est le même sur l'intervalle de temps commun pour des modes rigides désirés identiques.
- Pour des modes rigides désirés différents, le comportement du bras est identique à un coefficient de multiplicité près. Ce coefficient est proportionnel au rapport des pentes de ces modes.

A travers cette étude et grâce au concept «représentation diffusive», nous avons prouvé que l'approche adoptée est une méthode de conception de contrôles optimaux actifs «passifiés» présentant en prime des propriétés d'absorption excellentes du fait de l'exploitation de la nature propagative du système. L'augmentation temporaire de l'énergie du bras est contrôlée car elle résulte de l'association d'un système passif auxiliaire. Globalement, l'énergie du système en boucle fermée diminue, ce qui n'est pas le cas pour un contrôle actif où l'énergie du système n'est généralement pas décroissante, ce qui constitue un risque d'instabilité en boucle fermée.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Dans le cadre de ce travail, on a pu appliquer l'approche diffusive dans plusieurs problèmes de nature non standard, ce qui met en évidence la souplesse et l'efficacité de cette approche du point de vue approximations numériques.

L'application des réalisations diffusives : première et deuxième espèce (Γ -réalisations) aux opérateurs fractionnaires de fonction de transfert p^α où $|\alpha| < 1$, a montré que :

D'une façon générale, la réalisation de première espèce est très bonne sur un domaine de fréquence assez large pour que ces opérateurs fractionnaires simulés puissent être couplés à des différents systèmes pour différentes applications. Des résultats presque analogues peuvent être obtenus par approximation diffusive de deuxième espèce, mais, avec plus de paramètres. Les Γ -réalisations, enrichissent la classe des opérateurs réalisables et proposent en contreparties une dimension plus élevée, ce qui augmente le temps de calcul.

Les opérateurs intégréo-différentiels particuliers qui sont l'intégration et la dérivation fractionnaires, servent à modéliser des dynamiques non standards dans de nombreux domaines de la physique, elles prennent alors la forme d'équations différentielles fractionnaires. L'application des représentations diffusives aux équations différentielles fractionnaires génère différentes réalisations de dimension infinie sur un espace d'état hilbertien, dont la troncature en dimension finie produit des approximations convergentes. Celles –ci ont été présentées dans ce travail par un exemple d'oscillateur avec amortissement viscoélastique dont la simulation nécessite l'approximation numérique d'un intégrateur d'ordre 0.75.

Le système global de simulation de cet oscillateur peut être interprété comme un système couplé : système ordinaire couplé à un opérateur fractionnaire (intégrateur d'ordre 0.75). Ceci conduit à un système élevé qu'on peut mettre sous la forme abstraite $\partial_t X = AX$ dans un espace de Hilbert convenable. Les résultats de simulation ont montré nettement le comportement viscoélastique de l'amortissement, ce qui met en évidence l'efficacité et la convergence de l'approximation diffusive de l'opérateur fractionnaire.

Les bras flexibles possèdent un grand nombre de modes de vibration propres significatifs, ce qui rend leurs contrôles basés sur l'approche modale peu robustes. L'approche de contrôle proposée dans ce travail, repose sur le principe de l'absorption d'ondes par adaptation d'impédance. Le bord sur lequel est appliqué le contrôle est muni de conditions aux limites de telle sorte qu'aucune réflexion n'apparaisse, les ondes sortantes se comportent

exactement comme si, le domaine de simulation était prolongé indéfiniment. Dans le cas de notre application (bras flexible articulée à une extrémité et libre à l'autre) l'adaptation d'impédance fait apparaître un opérateur héréditaire de type pseudo-différentiel, intégrateur d'ordre $\frac{1}{2}$. Bien, évidemment, de telles conditions, doivent pouvoir être réalisées par des moyens de calcul raisonnables.

L'application de la représentation diffusives à ce problème a permis la mise en œuvre en simulation numérique du contrôle, par feedback frontière absorbant conférant au système bouclé la propriété de passivité globale, donc une stabilité inconditionnelle.

La décroissance rapide de l'énergie mécanique au début de la simulation justifie bien l'efficacité du contrôle pour les hautes fréquences. A noter que l'énergie du système dans le cas d'un contrôle actif n'est généralement pas décroissante, ce qui constitue un risque d'instabilité en boucle fermée.

Le contrôle ainsi réalisé de nature diffusives présente des propriétés intéressantes quant au coût numérique des approximations et à leur stabilité. L'absence de réflexions au bord après un temps fini (à part quelques faibles ondulations de basses fréquences) traduit la validité de l'approche.

La formulation du contrôle optimal par un système diffusif, correctement initialisé, a permis de montrer que l'approche adoptée est une méthode d'élaboration de contrôles optimaux actifs "passifiés" présentant en prime des propriétés d'absorption excellentes du fait de l'exploitation de la nature propagative du système. Signalons que l'augmentation temporaire d'énergie du bras est contrôlée du fait qu'elle résulte de l'association d'un système passif auxiliaire, donc, globalement, l'énergie du système en boucle fermée décroît.

Les résultats ont montré clairement l'efficacité et la robustesse de la méthodologie de l'approche proposée en stabilisation et en poursuite. En poursuite, le problème d'optimisation nécessite une étude plus approfondie pour améliorer les résultats préliminaires présentés dans ce travail. Dans le cadre de travaux futurs, nous prévoyons, avant de concevoir des améliorations à l'approche proposée, de la valider pour le contrôle d'un bras flexible articulé.

Au-delà, des problèmes traités dans ce travail, l'extension numérique aux systèmes et opérateurs temps-variables et non linéaires, est un problème largement ouvert et particulièrement intéressant pour les applications, où l'approche diffusives devrait apporter par ses propriétés nombreuses et très proches de la physique, un éclairage nouveau et fructueux.

Références

Références

- [1] Soula.M, Vinh.T, and Chevalier.Y, (1997). Transient Responses of Polymers and Elastomers deduced From Harmonic Responses. *Journal of Sound and vibrations*, Vol 205, N°2; pp.185-203.
- [2] Lewandowski.R, Baum. M, (2015). Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model, *Arch Appl Mech* Vol. 85, pp. 1793–1814, 2015.
- [3] Matignon.D and d'Andréa-Novel.B, (1995). Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *Third international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, pp 769-771. INRIA-SIAM, Mandelieu, France.
- [4] Polack .J.-D, (1991). Time domain solution of Kirchoff's equation for sound propagation in viscothermal gases: a diffusion process. *J.d'acoustique*, 4:47-67.
- [5] Monteghetti.F, Matignon.D, Piot.E and Pasca.L, (2016). Design of broadband time-domain impedance boundary conditions using the oscillatory-diffusive representation of acoustical models. *Journal, Acoustical Society of America* 140(3), Pages: 1663–1674. <http://dx.doi.org/10.1121/1.4962277>.
- [6] Joulin.G, (1985). Point-source initiation of lean spherical flames of light reactants: an asymptotic theory. *Combustion. Sci. and Techn*, pp 99-113.
- [7] Le Méhauté.A, (1989). Fractal electrodes and constant phase angle response. *Electrochimica Acta*, vol 34, no 4.
- [8] Xu. C, Cheng. S, Wang. K, and Jiang. K, (2019). A fractional-order model for liquid metal batterie. *Energy Procedia*, 158: 4690-4695. *Innovative Solutions for Energy Transitions*.
- [9] Nasser-Eddine. A, Huard. B, Gabano. J, and Poinot. T, (2019). A two steps method for electrochemical impedance modeling using fractional order system in time and frequency domains. *Control Engineering Practice*, 86: 96-104.

- [10] Haba.T.C, Ablart.G, Camps.T, (1998). Réponse d'un échantillon métallique à structure fractale à une excitation électrique à fréquence variable. *European Physical Journal Applied Physics*. 3, 187-193.
- [11] Troncet.E, Ablart.G and Allam.L, (1998). Microwave Characterization and modeling of the surface impedance of Fractal Surface Copper. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, Vol 46, 434.
- [12] Bamberger.A, Cockburn.B, Gold-man.Y, Joly.P, M. Kern, (1989). "Numerical solutions of Maxwell's equations in conductive polarizable medium", *Comp. Meth. In Appl. Mech. Eng.*, Vol 75.
- [13] Chronopoulou.A, Frederi G. Viens, (2012). Stochastic Volatility and Option Pricing with Long-Memory in Discrete and Continuous Time. Article in *Quantitative Finance* 12(4):635-649. DOI: 10.1080/14697688.2012.664939.
- [14] Mishura .Y, (2008). *Stochastic calculus for Fractional Brownian Motion and related processes*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [15] Solhusvik.J, Lavernhe.F, Montseny.G, and Farré.J, (1997). A new low-noise CCD signal acquisition method based on a commutable band-pass filter. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, vol 44, pp: 164-173.
- [16] Kleptsyna, M. L. and Le Breton, A. (2002). Extension of the Kalman-Bucy filter to elementary linear systems with fractional Brownian noises, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 5 (3), 249-271.
- [17] Kleptsyna.M.L, Le Breton.A, Viot.M, (2004). Asymptotically optimal filtering in linear systems with fractional Brownian noises. *SORT* 28 (2) , pages: 177-190.
- [18] Chikh Salah. A, Latreche.A, (2010). Modélisation d'un phénomène financier irrégulier par le mouvement Brownien fractionnaire. <https://www.researchgate.net/publication/324965794>.
- [19] Abry.P, Gonçalvès.P, Lévy-Véhel.J (eds.), (2002). *Fractals et Lois d'échelle*, volume du traité : Information-Commande-Communication, Hermes Science.
- [20] Forriez.M, Martin.Ph, Nottale.L, (2010). Formalization of three laws of scale to quantify spatial patterns of point, line or surface: examples of fractal – no fractal transitions geography. HAL Id: hal-00419906. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00419906v1>.

- [21] Levadoux.D, (2001). Analyse pseudo-différentielle d'un formalisme intégral adapté à la résolution haute fréquence de problèmes de diffraction. JDA 2001, Toulouse, France, 25-26-27.
- [22] Fliess.M, Mounier.H, Rouchon.P and Rudolph.J, (1997). Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusinski et commande d'une poutre flexible. ESAIM Proc., t. 2, p.183-193.
- [23] Andrade.J.M, Edwards.C, (2020). LMI-Based Sliding Mode Controller Design for an Uncertain Single-Link Flexible Robot Manipulator. Portuguese Conference on Automatic Control, CONTROLO 2020: pp 696-706.
- [24] Gonçalves.J.A, Braz-César.M, Coelho.J.P. CONTROLO 2020: Proceedings of the 14th APCA International Conference on Automatic Control and Soft Computing, July 1-3, 2020, Bragança, Portugal . Lecture Notes in Electrical Engineering Series, Vol. 695; Springer. JA Gonçalves - 2020 - books.google.com.
- [25] Yang.H-J & Tan.M, (2018). Sliding Mode Control for Flexible-link Manipulators Based on Adaptive Neural Networks. International journal of Automation and Computing 15, pages 239–248.
- [26] Shuaishuai Han, Haoping Wang, Yang Tian, Nicolai Christov , (2020). Time-delay estimation based computed torque control with robust adaptive RBF neural network compensator for a rehabilitation exoskeleton. ISA Transactions. Volume 97, Pages 171-181.
- [27] Mayez Dandachli, (2019). Contrôle linéaire et non linéaire d'un robot à bras flexible. Mémoire de maîtrise en ingénierie. Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue. Repéré dans Depositum à <https://depositum.uqat.ca/id/eprint/821>.
- [28] Birs. I.R, Folea. S, Copot. D, Prodan. O, Muresan. C.I, (2016). Comparative analysis and experimental results of advanced control strategies for vibration suppression in aircraft wings. In Proceedings of the 2016 13th European Workshop on advanced Control and Diagnosis, Lille, France.
- [29] Muresan. C.I, Folea. S, Birs. I.R, Ionescu. C, (2018). A novel fractional-order model and controller for vibration suppression in flexible smart beam. Nonlinear Dyn. 93, pages:525–541.
- [30] Isabela R. Birs, Cristina I. Muresan, Silviu FoleA, Ovidiu Prodan, Levente Kovac, (2016). Vibration suppression with fractional-order PI λ D μ Controller. 978-1-4673-8692-0/16/\$31.00. IEEE.
- [31] Aghababa. M.P, (2013). A fractional-order controller for vibration suppression of uncertain structures. ISA Trans, 52, pages: 881–887.

- [32] Lu. J, Xie. W, Zhou. H, Zhang. A, (2014). Vibration suppression using fractional-order disturbance observer based adaptive grey predictive controller. *J. Vibroeng*, 16, pages: 2205–2215.
- [33] Zhao. H, Deng. W, Yang. X, Li. X, Dong. C, (2016). An optimized fractional order PID controller for suppressing vibration of AC motor. *J. Vibroeng*, 18, pages: 2205–2220.
- [34] YangQuan. Chen, Blass.Manuel. Vinagre, Dingyu. Xue, Vicente. Feliu, Alicia Monje, (2012). *Conception Fractional- Order Systems and Controls.*: Springer.
- [35] Muresan C.I, Folea S, Mois G, and Dulf E.H, (2013). Development and Implementation of an FPGA Based Fractional Order Controller for a DC Motor. vol. 23, no. 7, pp. 798-804.
- [36] Friedrichs.KO and Lax.PD, (1965), Boundary value problems for first order operators. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 18: 335-388.
- [37] Montseny.G, Audounet.J, Matignon.D, (1997). Fractional integrodifferential boundary control of the Euler-Bernoulli beam. 36th IEEE CDC Conference, San Diego (USA), pp 4973-4978.
- [38] Von Flotow.A.H and Schäfer.B (1986), Wave-absorbing controllers for flexible beam. *Journal Guidance and control and dynamics*, Vol.9, N°6, pp. 673-680.
- [39] Matsuda.K and Fujii.H (1993). H_∞ optimized wave- absorbing control : analytical and experimental results. *J. of Guidance, Control and Dynamics*, Vol 16,N:°6, pp1146 – 1153.
- [40] Montseny.G, (1998). Diffusive representation of pseudo-differential time-operators. *ESAIM: Proc.*Vol5, pp159-175,URL: <http://www.emath.fr/proc/vol.5/>.
- [41] Casenave.C, Montseny.G, (2010). Introduction to diffusive representation. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 18: 335-388.
- [42] Montseny.G, (2000). "Représentation diffusive : éléments et extensions", *comptes rendus du séminaire toulousain*, N°:1, pp. 55-72, LAAS-Toulouse.
- [43] Montseny.G, (2004). *Représentation diffusive*. Paris: Hermès-Science.
- [44] Heleschewitz.D, (2000). *Analyse et simulation des systèmes différentiels fractionnaires et pseudo-différentiels linéaires sous représentation diffusive*, Thèse de doctorat, ENST.
- [45] Audounet.J, Matignon.D, Montseny.G, (2000). Diffusive representations of fractional and pseudo-differential operators. In *Research Trends in Science and Technology*, pages 171-180, Beirut, Lebanon, March.

- [46] Sorine.M, (2000). On a class of pseudo-differential hysteresis operators: Systems theory viewpoint. In *Compte-rendu du Séminaire Représentation diffusive et applications*, pages 73-78, Toulouse, France. LAAS/CNRS.
- [47] Montseny.E,(2009).Transformations opératorielles de problèmes dynamiques et applications. Thèse, [https://tel.archives-ouvertes.fr > tel-01138477](https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01138477).
- [48] Monteghetti.F, Matignon.D, Piot.E, and Pascal.L, (2016). Time-domain simulation of an acoustic liner impedance model using the diffusive representation of operators,” in *13e Congrès Français d’Acoustique*, Le Mans, France, No. 000130, pp. 2549–2555.
- [49] Rumeau. A, (2009) Modélisation comportementale en génie électrique sous représentation diffusive : méthodes et applications. Thèse, [http://thesesups.ups-tlse.fr >](http://thesesups.ups-tlse.fr)
- [50] Carmona.P and Coutin.L, (1998). Simultaneous approximation of a family of (stochastic) differential equations. *ESAIM: Proceeding*, 5 : 69-74. URL: <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [51] Imbert.N, Mouyon.Ph, et Montseny.G, (2000). Représentation spectrale diffusive du vent turbulent 2D. Rapport interne 00203, LAAS/CNRS.
- [52] Bidan.P, (1998). Commande diffusive d’une machine électrique : une introduction. *ESAIM : Proceeding*,5 :55-68. URL: <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.5/>.
- [53] Devy Vareta F.-A, Audounet.J, Matignon.D, and Montseny.G, (2000). Pseudo-invariance by matched scaling: application to diffusive control of a flexible beam. In *Second European Conference on Structural Control*, 17 pages, Marne-La-Vallée, France. ENPC.
- [54] Casnave.C, Montseny.E, (2008). Dissipative state formulations and numerical simulation of a porous medium for boundary absorbing control of aeroacoustic waves. In *17th IFAC World Congress*, pages 13432-13437, Seoul (Korea), July 6-11.
- [55] Casnave.C, Montseny.E et Ségui.L, (2008). Formulation différentielle dissipative d’un modèle de paroi absorbante en aéroacoustique. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences-Mécanique*, 336(4): 398-403.
- [56] Garcia.G and Bernussou.J, (1998). Identification of the dynamics of a lead acid battery by a diffusive model. *ESAIM: Proceeding*, 5 :87-98.
- [57] Casnave.C (2011). Time-local formulation and identification of implicit volterra models by means of diffusive representation. *Automatica*, Elsevier, 2011, 47(10), pp.2273-2278. [Ff10.1016/j.automatica.2011.08.007](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.007). [ffhal-00828124f](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2011.08.007).

- [58] Laudebat.L, Bidan.P and Montseny.G (2004). Modeling and optimal identification of pseudo-differential electrical dynamics by means of diffusive representation - Part I: modeling. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I* 51(9): 1801-18013.
- [59] Alinhac.S and Gérard.P (1991). Opérateurs-pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser, collection "Savoirs Actuels". EDP Sciences : Editions du CNRS.
- [60] Schwartz.L (1966). *Théorie des distributions*, Hermann, Paris.
- [61] Hörmander.L(1994). *Fourier integral operators*. Springer-Verlag.
- [62] Miller.K.S and Ross.B (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*. New York: John Wiley and Sons.
- [63] Koeller.R.C, (1984). Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. *J. Appl. Mech.*, 51 : 299-307.
- [64] Schwartz.L, (1965). *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Coll. Enseignement des sciences. Hermann.
- [65] Gasquet.G and Witomski.P (1990). *Analyse de Fourier et applications, filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Edition Masson.
- [66] Bagley.R.L and Calico.R.A, (1991). Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures. *J.Guidance,Control and dynamics*, 14(2):304-311.
- [67] Bliman.P.A and Sorine.M (1995). Dry friction models for automatic control. In proc, of the 3rd European control Conference, Rome.
- [68] Engquist.B and Majda.A (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Of Comp*, Vol 31, pp 629-651.
- [69] Levadoux.D and Montseny.G, (2003). Diffusive formulation of the impedance operator on circular boundary for 2D wave equation. Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation, Jyvaskyla, Finland.
- [70] Montseny.G, Audounet.J, Matignon.D, (2000). Perfectly absorbing boundary feedback control for wave equations: a diffusive formulation. 5th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves Propagation Phenomena, INRIA-SIAM, Santiago de Compostella, Spain.
- [71] *Comptes rendus du séminaire Toulousain*, (2000). Représentation diffusive et applications. LAAS/ CNRS, N°:1-Nov. URL: www.Laas.fr/st-rda/.

- [72] Brésis.H, (1992). Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson.
- [73] Audounet.J and Montseny.G, (2000). Analyse asymptotique d'équations de Volterra à mémoire longue sous formulation diffusive. Comptes rendus du séminaire Toulousain, N°:1, pp 7-14, LAAS-Toulouse.
- [74] Dauphin.G, Heleschewitz.D, Matignon.D, (2000). Extended diffusive representations and application to non-standard oscillators. In Mathematical Theory of Networks and Systems symposium (Perpignan, France), MTNS, p.10.
- [75] Laudebat.L, (2003).Modélisation et identification sous représentation diffusive de comportements dynamiques non rationnels en génie électrique. Thèse de doctorat en Génie électrique. <http://www.theses.fr/2003TOU30220>.
- [75.bis] Saadaoui.Y, Zegnini.B et Bouderbala.A, (2019). Application de la représentation diffusive dans l'identification de phénomène de relaxation d'un diélectrique. 11^{ème} Conférence Nationale sur la haute Tension CNHT2019At: Oran. Projects: mise a la terrest insulation materials in power systems with the application of artificial intelligence like LS-SVM for more optimization.
- [76] Audounet.J, Giovan gigli.V, RoqueJoffre.J.M (1998). A threshold Phenomenon in the propagation of a point-source initiated flame. Physical D, pp 295-316.
- [77] Montseny.G, Bidan.P, Audounet.J, Matignon.D, (2000). Représentation diffusive d'opérateurs pseudo-différentiels, application en électromagnétisme. JMET 2000, Toulouse (France).
- [78] Carmona.P, Coutin.L, Montseny.G (1998). Application of a representation of long-memory Gaussian processes. Stochastic Processes and their applications.
- [79] Imbert.N, Montseny.G, Mouyon.P (1999). Simulation et reconnaissance de vents turbulents par représentation diffusive. Contrat de collaboration LAAS/CNRS-ONERA/CERT-DGA/SPA et pour L'Aerospatiale A/BTE/EG, Toulouse.
- [80] Lavernhe.F, Montseny.G, Audounet.J (2001). Markovian diffusive representation of $\frac{1}{j^\alpha}$ -noises and application to fractional stochastic differential models. IEEE Trans. On signal processing 49.
- [81] Audounet.J, Devy Vareta. P.-A, and Montseny. G, (2001). Pseudo-Invariant Diffusive Control. Proceedings of the 14th Annual International Symposium of Mathematical Theory of Networks and Systems.

- [82] Boudjehem.B, Chaabi.L, Tebbikh.H, (2006). Pseudo-invariant diffusive robust control and application for a DC motor. Proceedings of the 5th WSEAS International Conference on Signal Processing, Robotics and Automation, pp 125-130.
- [83] Tebbikh.H, Montseny.G, (1999). Stabilisation et contrôle optimal pseudo-différentiel d'un bras souple : étude préliminaire. Rapport LAAS.
- [83.bis] Tebbikh.H, Montseny.G, Boudjehem.B, (2000). Opérateurs pseudo-différentiels et stabilisation des structures vibrantes. 2^{ème} Col.Nat. de mathématique, Tebessa, Algérie
- [84] Bidan.P, Lebey.T, Montseny.G, Neacsu.C, Saint-Michel.J (2001). Transient Voltage distribution in motor windings fed by inverter: Experimental study and modeling. IEEE Trans, on Power Electronics. 16(1), 92-100.
- [85] Teman.R, (1988). Infinite dimensional dynamical systems in mechanics and physics. Vol.68 de Applied Mathematical Sciences, Springer Verlag.
- [86] Audounet.J, Matignon.D, Montseny.G (2000). Semi-linear diffusive representation for non-linear fractional differential systems. Second nonlinear Control Network (NCN) Workshop, June 5 - 9, Paris, France.
- [87] Audounet.J, Roquejoffre.J.M, (1998). An asymptotic fractional differential model of spherical flame. ESAIM: Proc. Vol 5, pp 15-27.
- [88] Monin.A, Salut.G, (1996). IIR Volterra filtering with application to bilinear systems", IEEE Trans. On signal processing, Vol 44, n°9, pp 2209-2221.
- [89] Bliman. P-A and Sorine.M (1995). Easy-to use realistic dry friction models for automatic control. In Proc. Of the 3rd European control conference, Rome.
- [90] Sainsaulieu.L (1996). Calcul scientifique. Masson.
- [91] Teuliere.V (1995). Réalisation diffusive d'opérateurs héréditaires de type pseudo-différentiel, application à l'absorption d'ondes bidimensionnelles", DEA Automatique informatique industrielle, LAAS, France.
- [92] Montseny.G, Audounet.J and Matignon.D, (1998). Diffusive wave absorbing feedback controls for the boundary stabilization of a flexible beam. Conference Paper in Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control.
- [93] Graff.K.F (1973). Wave motion in elastic solids. Dover publication, New York.

- [94] Gérardin.M et Rixen.D (1993). Théorie des vibrations-Application à la dynamique des structures. Edition Masson.
- [95] Nijmeijer.H and Vander Schaft.A (1990). Non linear dynamical control systems", Springer-Verlag, NY.
- [96] Mbodje.B (1995). Analyse et contrôle de certains modèles viscoélastiques via une réalisation héréditaire des opérateurs intégro-différentiels", Thèse de l'U. Paul Sabatier.
- [97] Matignon.D, Audounet.J, and Montseny.G, (1998). Energy decay for wave equations with damping of fractional order. In Proc. Fourth international conference on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena, pages 638-640, Golden, Colorado, Inria-Siam.
- [98] Hille.E and Phillips.R.S, (1957). Functional Analysis and Semi-groups, volume31. American Mathematical Society Collection, Providence.
- [99] Kalman.R.E, (1963). Lyapunov functions for the problem of Lur'e in Automatic control. Proc. Natl. Acad. Sci, 42(2): 201-205.
- [100] LaSalle.J.P, (1983). The Stability and Control of Discrete Processes, volume 62. Springer-Verlag in Applied Mathematical Sciences.