

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université 8 Mai 1945 Guelma



Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique  
Laboratoire : Mécanique et Structures (LMS)

**THÈSE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**DOCTORAT EN 3<sup>ème</sup> CYCLE**

Domaine : Sciences et Technologies      Filière : Génie Mécanique  
Spécialité : Génie Mécanique et Matériaux avancés

**Présentée par**

**Bilal BOUSSAHA**

*Intitulée*

**Étude de la lubrification par film comprimé d'une prothèse de  
genou humain**

Soutenue le : .....

Devant le Jury composé de :

<b>Mr Smaïl BOUTABBA</b>	Professeur	Université 8 Mai 1945 Guelma	Président
<b>Mr Mustapha LAHMAR</b>	Professeur	Université 8 Mai 1945 Guelma	Directeur
<b>Mr Hamid BOUCHERIT</b>	Professeur	Université 8 Mai 1945 Guelma	Co-directeur
<b>Mr Mohamed Rafik SARI</b>	Professeur	Université Badji Mokhtar-Annaba	Examineur
<b>Mr Ahmed BELBAH</b>	M. C. A.	Université 8 Mai 1945 Guelma	Examineur

**Année Universitaire : 2020/2021**

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة 8 ماي 1945 قالمة



الكلية العلوم والتكنولوجيا  
القسم الهندسة الميكانيكية  
مخبر: الميكانيك والهياكل

## أطروحة

### لنيل شهادة الدكتوراه في الطور الثالث

الميدان: علوم وتكنولوجيا  
الشعبة: الهندسة الميكانيكية  
الاختصاص: الهندسة الميكانيكية والمواد المتقدمة

من إعداد:

بلال بوساحة

## بعنوان

# دراسة تزييت فيلم مضغوط لطرف اصطناعي لركبة الإنسان

بتاريخ: .....

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

السيد إسماعيل بوطبة	بروفيسور	بجامعة 8 ماي 1945 قالمة	رئيسا
السيد مصطفى لحمر	بروفيسور	بجامعة 8 ماي 1945 قالمة	مشرفا
السيد حميد بوشريط	بروفيسور	بجامعة 8 ماي 1945 قالمة	مشرفا مساعدا
السيد محمد رفيق ساري	بروفيسور	بجامعة باجي مختار - عنابة	ممتحنا
السيد احمد بلباح	أستاذ محاضر	بجامعة 8 ماي 1945 قالمة	ممتحنا

السنة الجامعية: 2021/2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



سورة النحل الآية ﴿78﴾

Au nom d'Allah, le Clément, le Miséricordieux

﴿ Allah vous a fait naître des entrailles de vos mères, dépourvus de tout savoir. Il vous a dotés de l'ouïe, de la vue et de l'intelligence. Lui en serez-vous reconnaissants ? ﴾ 78

Le Coran, Sourate XVI L'abeille, Verset 78, Donnée à la Mecque.

---

# Dédicaces



Je dédie ce modeste travail :

À ceux qui sont la source de mon inspiration et mon courage, à qui je dois de l'amour et de la reconnaissance,

À ma très chère mère qui m'a toujours aidé et soutenu tout au long de mon parcours, que Dieu le tout puissant puisse te préserver et t'accorder santé, longue vie et bonheur,

À mon très cher père décédé,

À mes Chères Sœurs et mon frère et leurs enfants : Malak Hor El-Aïn, Rashid, Baraa, Elias, Abdullah, ...,

À toute ma famille : mon grand-père, mes oncles (Noureddine, Sassi, Hassan, Fouad) et mes tantes...,

À tous mes amis : Kalkoul D., Athamnia M. ...,

À tous les personnes qui m'aiment,

À tous ceux qui me sont chers.

A decorative wreath of blue and purple flowers and leaves, framing the text.

---

---

# Avant-propos

**J**e tiens tout d'abord à remercier **ALLAH** le tout-puissant de nous avoir donné la force et le savoir de réaliser ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mon directeur de thèse Monsieur **Mustapha LAHMAR**, Professeur au département de Génie Mécanique, Université 8 Mai 1945 Guelma, pour le soutien moral, pour la confiance, pour les conseils judicieux qu'il m'a généreusement donnés, et la passion de la recherche qu'il m'a transmise.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à Monsieur **Hamid BOUCHERIT**, Professeur au département de Génie Mécanique, Université 8 Mai 1945 Guelma, pour ses précieux conseils et orientations en tant que co-directeur de thèse.

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur **Benyebka BOU-SAÏD**, Professeur à l'INSA de Lyon, pour ses conseils tout au long de ce travail, pour ses suggestions et ses discussions fructueuses.

J'adresse également mes sincères remerciements à Monsieur **Smaïl BOUTABBA**, Professeur au département de Génie Mécanique, Université 8 Mai 1945 Guelma, pour son aide administrative précieuse en tant que responsable du CFD, et pour avoir accepté de présider le jury de soutenance.

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à Monsieur **Mohamed Rafik SARI**, Professeur au département de Génie Mécanique, Université Badji Mokhtar Annaba, pour l'intérêt qu'il a porté à cette recherche et d'avoir accepté d'examiner ce travail et de participer à ce jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Ahmed BELBAH**, Maître de Conférences au département de Génie Mécanique, Université 8 Mai 1945 Guelma, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

J'adresse ma profonde reconnaissance à tous les **membres**, les **thésards**, et les **techniciens** du Laboratoire de Mécanique et Structures (**LMS**) de l'Université 8 mai 1945 Guelma, et à sa tête Monsieur le Professeur **Nouredine OUELAA**, directeur du laboratoire.

Je remercie tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin pour mener à bien et à compléter ce travail.

---

---

# Résumé

La conception de prothèses articulaires efficaces et durables est basée sur une bonne connaissance du comportement tribologique, des performances des matériaux constituant ces prothèses, et une meilleure modélisation du comportement rhéologique du fluide assurant la lubrification de l'articulation par effet d'écrasement. Le meilleur fluide lubrifiant est celui qui possède des caractéristiques physiques et rhéologiques très proches du fluide synovial naturel dont le comportement est incontestablement non Newtonien.

La configuration géométrique de l'articulation artificielle ou de la prothèse est constituée de deux disques formant les deux premiers corps du tribosystème dont les faces sont parfaitement parallèles séparées par un troisième corps qui peut être soit un film fluide non Newtonien (mécanisme de lubrification HD ou PHD traditionnelle) ou une matrice poreuse imbibée par un fluide Newtonien (nouveau mécanisme de lubrification XPHD bio-inspiré).

Trois mécanismes de lubrification de la prothèse ont été investigués : la lubrification hydrodynamique (HD) traditionnelle par écrasement d'un film lubrifiant non Newtonien à couple de contraintes entre deux disques imperméables, la lubrification porohydrodynamique (PHD) par écrasement d'un film lubrifiant à couple de contraintes en présence d'un milieu poreux, et la lubrification ex-porohydrodynamique (XPHD) d'inspiration biomimétique simulant le mode de lubrification réel du joint articulaire.

Ce dernier mécanisme constitue une nouvelle solution technologique révolutionnaire en rupture totale avec la solution technologique classique. L'idée essentielle consiste à remplacer les revêtements de surface et le film de fluide mince par une matrice poreuse mince (par exemple, une mousse en polyuréthane) imbibée par un fluide.

Le problème de lubrification XPHD est décrit à l'aide d'une seule équation de pression similaire à l'équation de Reynolds dérivée à partir des équations de Darcy-Brinkman et de continuité alors que le problème de lubrification PHD est gouverné par deux équations, à savoir : l'équation de Reynolds modifiée obtenue à partir des équations de mouvement du micro-continuum de V. K. Stokes couplée avec l'équation de Darcy à l'interface film fluide-couche poreuse. La méthode itérative du point fixe avec facteur de sous-relaxation a été utilisée pour trouver une solution du problème de lubrification PHD.

L'analyse effectuée dans le cadre de la lubrification PHD a montré que les effets des couples de contraintes dus à la présence de microparticules dispersées dans un solvant permettent d'améliorer d'avantage les performances HD de la prothèse (pression, capacité de charge). Ces effets sont accentués dans le cas d'un fluide hautement concentré ou lorsque le bord du disque poreux est étanche.

L'analyse effectuée à charge constante imposée dans le cadre de la lubrification XPHD a permis de mettre en évidence l'efficacité irréfutable du nouveau mode de lubrification XPHD en matière de capacité de charge et du temps d'écrasement largement plus long par comparaison au mode de lubrification traditionnel (PHD).

**Mots clés :** Biotribologie/Prothèse de genou/Milieu poreux/Lubrification XPHD/Lubrification PHD/Micro-continuum de V. K. Stokes/Fluide à couples de contraintes/Suspension/Écrasement de film/Equation de Reynolds modifiée/Modèle de Darcy-Brinkman/Modèle de Krieger-Dougherty/Disque étanche/Méthode des différences finies/Méthode du point fixe sous-relaxée/Méthode de Gauss-Seidel sur-relaxée.

---

---

# Abstract

The design of efficient and durable joint prostheses is based on a good knowledge of the tribological behaviour and performance characteristics of prosthesis' materials, and a better modeling of the fluid rheological behavior ensuring the joint lubrication by the squeezing effect. The best lubricating fluid is that which has physical and rheological characteristics similar to the synovial fluid where the behavior is unquestionably non Newtonian.

The geometric configuration of the artificial joint or prosthesis consists of two discs forming the two first bodies of the tribosystem whose the faces are perfectly parallel separated by a third body which can be either a non Newtonian fluid film (HD lubrication mechanism or Traditional PHD) or a porous matrix imbided with a Newtonian fluid (new bio-inspired XPHD lubrication mechanism).

Three prosthesis lubrication mechanisms were investigated: traditional hydrodynamic lubrication (HD) by squeezing out a non Newtonian lubricating film with a couple of stresses between two impermeable discs, porohydrodynamic lubrication (PHD) by squeezing out a couple stresses lubricating film in the presence of a porous medium, and biomimetic-inspired ex-porohydrodynamic lubrication (XPHD) simulating the actual mode of lubrication of the articular joint.

This last mechanism constitutes a new revolutionary technological solution which is in total rupture with the traditional technological solution. The key idea is to replace the surface coatings and the thin fluid film by a thin porous matrix (e.g. polyurethane foam) imbided with a fluid.

The XPHD lubrication problem is described using a single pressure equation similar to the Reynolds equation derived from the Darcy-Brinkman and continuity equations, while the PHD lubrication problem is governed by two equations, namely: the modified Reynolds equation obtained from the momentum equations of the V.K. Stokes micro-continuum coupled with the Darcy' s equation at the fluid film-porous layer interface. The iterative fixed point method with sub-relaxation factor was used to find a solution to the PHD lubrication problem.

The analysis carried out in the context of PHD lubrication has shown that the effects of couple stresses due to the presence of micro-particles dispersed in a solvent permit to substantially improve the HD performance of the prosthesis (pressure, load carrying capacity). These effects are more pronounced in the case of a highly concentrated fluid or when the edge of the porous disc is sealed.

The analysis carried out at imposed constant load within the framework of the XPHD lubrication made it possible to demonstrate the irrefutable effectiveness of the new XPHD lubrication mode in terms of load carrying capacity and the squeezing time considerably longer compared to the traditional (PHD) lubrication mode.

**Keywords:** Biotribology / Knee prosthesis / Porous medium / XPHD lubrication / PHD lubrication / V. K. Stokes micro-continuum / Couple stress fluid / Suspension / Squeeze film / Modified Reynolds equation / Darcy-Brinkman model / Krieger-Dougherty model / sealed disc / Finite difference method / Under-relaxed fixed point method / Over-relaxed Gauss-Seidel method.

---

## ملخص

يعتمد تصميم الأطراف الاصطناعية الفعالة والمتينة على المعرفة الجيدة بعلوم التآكل وأداء المواد المكونة لها، وكذلك نمذجة أفضل سلوك لتدفق السائل مما يضمن تزييت المفصل أثناء تأثير الضغط. أفضل سائل تزييت هو الذي له خصائص فيزيائية وريولوجية غير نيوتونية مشابهة للسائل الزليلي.

يتكون الشكل الهندسي للمفصل الاصطناعي أو الطرف الاصطناعي من قرصين متوازيين تمامًا مفصولين عن طريق جسم ثالث يكون إما فيلمًا سائلًا غير نيوتونيًا (آلية تزييت HD أو PHD التقليديتان) أو مصفوفة مسامية مشبعة بسائل التزييت النيوتوني (آلية تزييت XPHD).

تم دراسة ثلاث آليات لتزييت الأطراف الاصطناعية: الأول هو التزييت الهيدروديناميكي (HD) التقليدي عن طريق ضغط فيلم التزييت الغير نيوتوني ذا عزم دوران إجهادي بين قرصين غير مساميين، أما الثاني فهو عبارة عن تزييت porohydrodynamic (PHD) عن طريق ضغط فيلم التزييت باستخدام سائل ذا عزم دوران إجهادي في وجود وسط مسامي، والثالث عبارة عن تزييت ex-porohydrodynamique (XPHD) المستوحى من المحاكاة الحيوية ويحاكي الوضع الفعلي لتزييت المفاصل.

تشكل هذه الآلية الأخيرة حلاً تكنولوجيًا ثوريًا جديدًا في قطعة كاملة عن الحل التكنولوجي التقليدي. الفكرة الأساسية هي استبدال الطبقة السطحية وطبقة فيلم السائل الرقيقة مع مصفوفة مسامية رقيقة (على سبيل المثال، رغوة البولي يوريثان) مغموسة في سائل.

يتم وصف مشكلة تزييت XPHD باستخدام معادلة ضغط واحدة مشابهة لمعادلة رينولدز، ومشتقة من معادلات دارسي-برينكمان والاستمرارية. بينما تخضع مشكلة التزييت PHD لمعادلتين وهما: معادلة رينولدز المعدلة التي تم الحصول عليها من معادلات حركة الاستمرارية الدقيقة لفيجاي كومانر ستوكس إلى جانب معادلة دارسي في الطبقة المسامية. وقد تم استخدام طريقة النقطة الثابتة التكرارية مع عامل الاسترخاء الفرعي لإيجاد حل لمشكلة تزييت PHD.

أظهر التحليل الذي تم إجراؤه في سياق تزييت PHD أن تأثيرات عزم دوران الإجهاد بسبب وجود الجسيمات الدقيقة المنتشرة في المذيب تجعل من الممكن زيادة تحسين الأداء الهيدروديناميكي للطرف الاصطناعي (الضغط، وسعة الحمل). هذه التأثيرات تتزايد في حالة وجود سائل شديد التركيز أو عند إغلاق حافة القرص المسامي.

أتاح التحليل الذي تم إجراؤه في حالة التزييت XPHD عن طريق فرض حمل الثابت، إمكانية إثبات الفعالية التي لا يمكن دحضها لنمط التزييت الجديد (XPHD) من حيث سعة الحمل ووقت الضغط الأطول بكثير مقارنة بنمط التزييت التقليدي (PHD).

**الكلمات الرئيسية:** علم الاحياء- التآكل / ركة اصطناعية / وسط المسامي / تزييت XPHD / تزييت PHD / الاستمرارية الدقيقة لفيجاي كومانر ستوكس / سائل عزم دوران الإجهاد / التعليق / سحق فيلم / معادلة رينولدز المعدلة / نموذج دارسي-برينكمان / نموذج Krieger-Dougherty / قرص مغلق الحافة / طريقة الفروق المحدودة / طريقة النقطة الثابتة غير المسترخية / طريقة Gauss-Seidel المفرطة في الاسترخاء.

# Table des matières

Nomenclature .....	1
Liste des figures et tableaux.....	4
Introduction générale.....	8
<b>Chapitre I</b>	
<b>Anatomie, physiologie, et conception du genou humain</b>	
I.1 Introduction.....	11
I.2 Anatomie du genou .....	11
I.3 Le liquide synovial : rôle, composition, et comportement.....	13
I.4 Le cartilage articulaire.....	16
I.4.1 Structure.....	16
I.4.2 Composition.....	18
I.4.3 Comportement mécanique.....	19
I.4.4 Perméabilité .....	21
I.5 Mécanismes (modes) de lubrification des articulations du genou humain pendant un cycle de marche.....	22
I.6 Prothèses du genou.....	27
I.6.1. Les compartiments articulaires qu'elles remplacent .....	27
I.6.2. Le mode de fixation .....	28
I.6.3. Le mode de stabilisation.....	28
I.6.4. La contrainte .....	28
I.6.5. Les matériaux des implants .....	29
I.7 Conclusion.....	29
I.8 Références.....	31
<b>Chapitre II</b>	
<b>Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluides à couples de contraintes</b>	
II.1 Introduction .....	36
II.2 Équations de base de la mécanique du micro- continuum de V. K. Stokes.....	37
II.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cartésiennes .....	40
II.3.1. Hypothèses de la théorie de Reynolds.....	40
II.3.2. Analyse dimensionnelle des équations de mouvement pour un écoulement en film mince.....	41

II.3.3. Détermination du champ de vitesse.....	43
II.3.4. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée.....	45
II.4 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques.....	46
II.4.1. Analyse dimensionnelle des équations de mouvement pour un écoulement de film mince.....	46
II.4.2. Détermination du champ de vitesse.....	48
II.4.3. Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée.....	49
II.5 Calcul des différents paramètres de performance.....	50
II.5.1. Champ de pression dans le film.....	50
II.5.2. Action du fluide sur les parois du contact.....	50
II.5.3. Capacité de charge (la portance) .....	52
II.5.4. Force de frottement .....	52
II.5.5. Vitesse moyenne de l'écoulement.....	52
II.5.6. Débits de fuite.....	53
II.5.7. Puissance dissipée.....	54
II.6 Conclusion .....	55
II.7 Références .....	56

### Chapitre III

#### **Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigides imperméable**

III.1 Introduction.....	57
III.2 Caractérisation rhéologique de l'effet de la concentration en suspension.....	58
III.2.1 Modèle d'Einstein.....	58
III.2.2 Modèle de Batchelor et Green.....	59
III.2.3 Modèle de Ball et Richmond.....	59
III.2.4 Modèle de Phan-Thien et Pham.....	59
III.2.5 Modèle de Krieger-Dougherty.....	59
III.3 Équations de Reynolds modifiée entre deux surfaces rigides imperméables.....	60
III.3.1 Hypothèses relatives à l'écoulement par effet d'écrasement.....	60
III.3.2 Conditions aux limites sur les vitesses et la pression.....	62
III.3.3 Équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques....	63
III.4 Calcul des performances hydrodynamiques d'un film fluide écrasé entre deux surfaces rigides imperméables.....	63

III.4.1	Champ de pression du film de compression.....	63
III.4.2	Capacité de charge.....	63
III.4.3	Vitesse radiale moyenne.....	63
III.4.4	Débits de fuite au bord libre du disque.....	64
III.4.5	Contrainte de cisaillement.....	64
III.4.6	Force de frottement.....	64
III.4.7	Puissance dissipée.....	64
III.5	Étude paramétrique.....	65
III.5.1	Profils de pression.....	65
III.5.2	Profils de vitesse radiale et débit de fuite.....	69
III.5.3	Contraintes de cisaillement visqueuses.....	72
III.6	Conclusion.....	76
III.7	Références.....	77

#### Chapitre IV

#### Lubrification par film comprimé d'une prothèse de genou en présence de milieux poreux étanche et non étanche

IV.1	Introduction .....	79
IV.2	Caractéristiques générales et modélisation des milieux poreux.....	82
IV.2.1.	Définitions.....	82
IV.2.2.	Paramètres caractéristiques.....	83
IV.2.3.	Modèles d'écoulements à travers des milieux poreux.....	86
IV.3	Équations gouvernantes du problème de lubrification direct.....	89
IV.3.1.	Équations générales dans le film fluide.....	89
IV.3.2.	Équations générales dans milieu poreux.....	90
IV.4	Équation de Reynolds modifiée.....	92
IV.4.1.	Conditions aux limites.....	92
IV.4.2.	Champ de vitesse.....	92
IV.4.3.	Équation de Reynolds modifiée.....	93
IV.5	Résolution du problème de lubrification par film comprimé en présence d'un milieu poreux : problème direct.....	93
IV.5.1.	Approche numérique.....	93
IV.5.2.	Approximation de Morgan-Cameron pour une couche poreuse mince.....	97
IV.6	Performances hydrodynamiques.....	98

IV.6.1. Capacité de charge.....	98
IV.6.2. Débits de fuite au bord du disque.....	98
IV.6.3. Contrainte de cisaillement.....	98
IV.6.4. Force de frottement.....	99
IV.6.5. Puissance dissipée.....	99
IV.7 Validation & étude paramétrique.....	99
IV.7.1. Validation.....	100
IV.7.2. Étude paramétrique.....	101
IV.8 Conclusion .....	114
IV.9 Références.....	115

### Chapitre V

#### Lubrification Ex-Poro-hydrodynamique (XPHD) d'une prothèse de genou

V.1 Introduction.....	118
V.2 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cartésiennes.....	119
V.2.1 Équations de base.....	119
V.2.2 Conditions aux limites.....	120
V.2.3 Champ de vitesse.....	121
V.2.4 Débit volumique.....	121
V.2.5 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée.....	122
V.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique.....	123
V.3.1 Équation de base.....	124
V.3.2 Conditions aux limites associées à l'équation de Darcy-Brinkman et l'équation de Reynolds modifiée.....	124
V.3.3 Détermination du champ de vitesse.....	124
V.3.4 Vitesse moyenne et débit volumique.....	125
V.3.5 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques.....	125
V.4 Équations de mouvement et d'équilibre du disque supérieur et schéma de résolution.....	127
V.4.1 Prise en compte de l'inertie du disque mobile.....	127
V.4.2 Inertie du disque négligée : équation d'équilibre du disque supérieur.....	129
V.5 Étude paramétrique.....	130
V.6 Conclusion.....	136

V.7 Références.....	137
Conclusion générale.....	138
Annexe A.....	141
Annexe B.....	142
Annexe C.....	148
Publications.....	151

# Nomenclature

## Symboles latins

$\vec{c}$	:	Vecteur couple de volume par unité de masse, $[N \cdot m / Kg]$
$c$	:	Compacité, $[-]$
$D_p$	:	Diamètre caractéristique des pores, $[m]$
$D_{ij}$	:	Tenseur des taux de déformation symétrique, $[s^{-1}]$
$F_z$	:	Composante axiale de la portance hydrodynamique, $[N]$
$F_f$	:	Force de frottement, $[N]$
$f$	:	Fréquence du mouvement sinusoïdal, $[Hz]$
$\vec{g} = g_i \vec{e}_i$	:	Vecteur force de volume par unité de masse, $[N/kg]$
$H^*$	:	Épaisseur du disque poreux inférieur, $[m]$
$h$	:	Épaisseur du film fluide, $[m]$
$\tilde{h}$	:	Épaisseur sans dimension du film fluide $= \frac{h}{h_0}$ , $[-]$
$h_0$	:	Épaisseur du film initiale, $[m]$
$h_a$	:	Amplitude du mouvement sinusoïdal, $[m]$
$\tilde{h}_a$	:	Amplitude du mouvement sinusoïdal sans dimension $= \frac{h_a}{h_0}$ , $[-]$
$k$	:	Perméabilité du disque inférieur, $[m^2]$
$k_r$ et $k_z$	:	Paramètres de perméabilité de la matrice poreuse anisotrope, $[m^2]$
$\ell$	:	Paramètre des couples de contraintes $= \sqrt{\eta/\mu_s}$ , $[m]$
$\tilde{\ell}$	:	Paramètre des couples de contraintes sans dimension $= \ell/h_0$ , $[-]$
$\vec{M} = M_{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$	:	Tenseur des couples de contraintes d'ordre 2, $[N/m^2]$
$p$	:	Pression dans le fluide, $[Pa]$
$p^*$	:	Pression du film fluide dans le milieu poreux, $[Pa]$
$\mathcal{P}$	:	Puissance dissipée, $[W]$
$Q_r$	:	Débit volumique de fuite à $r = R$ selon la direction $\vec{e}_r$ s'écrivent, $[m^3/s]$
$Q_x$ et $Q_z$	:	Débit de fuite suivant $\vec{x}$ et $\vec{z}$ , $[m^3/s]$
$Re$	:	Nombre de Reynolds, $[m]$
$r, \theta$ et $z$	:	Variables d'espace en coordonnées cylindriques, $[m]$
$R$	:	Rayon des disques, $[m]$
$\tilde{r}$	:	Rayon de disque sans dimension $= r/R$ , $[-]$
$T_{ji}$	:	Tenseur des contraintes total, $[N/m^2]$
$t$	:	Temps, $[s]$
$\tilde{t}$	:	Temps sans dimension $= ft$ , $[-]$
$t_f$	:	Temps d'écrasement, $[s]$
$u, v$ et $w$	:	Composantes de la vitesse de l'écoulement, $[m/s]$
$\langle u \rangle, \langle v \rangle, \langle w \rangle$	:	Vitesses moyennes de l'écoulement, $[m/s]$
$U_s$	:	Vitesse de glissement à l'interface ( $z = 0$ ), $[m/s]$

## Nomenclature

$u^*, v^*$ et $w^*$	:	Composantes de vitesse dans le matrice poreux, $[m/s]$
$\vec{V}$	:	Vecteur vitesse du fluide, $[m/s]$
$\vec{V}^*$	:	Vecteur vitesse dans la matrice poreux, $[m/s]$
$V_p$	:	Volume des pores, $[m^3]$
$V_t$	:	Volume total, $[m^3]$
$V_s$	:	Volume du solide, $[m^3]$
$W$	:	Capacité de charge (portance HD), $[N]$
$W_{sq}$	:	Vitesse d'écrasement, $[m/s]$
$\tilde{W}_{sq}$	:	Vitesse d'écrasement sans dimension $= \frac{W_{sq}}{fh_0}$ , $[-]$
$W_0$	:	Poids du disque supérieur ( $W_0 = mg$ ), $[N]$

### Lettres grecques

$x, y$ et $z$	:	Variables d'espace en coordonnées cartésiennes, $[m]$
$\tau_{rz}$	:	Contrainte de cisaillement, $[Pa]$
$\tau$	:	La tortuosité d'un milieu poreux, $[-]$
$\bar{\tau}^{(s)}$	:	Tenseur des contraintes d'ordre 2 symétrique, $[N/m^2]$
$\delta_{ij}$	:	Symbole de Kronecker ou tenseur unité, $[-]$
$\rho$	:	Masse volumique du fluide, $[kg/m^3]$
$\lambda$	:	Coefficient de viscosité de dilatation du fluide, $[Pa \cdot s]$
$\mu'$	:	Viscosité effective ou seconde viscosité, $[Pa \cdot s]$
$\mu_s$	:	Viscosité effective du fluide suspendant, $[Pa \cdot s]$
$\mu_{bf}$	:	Viscosité du fluide de base, $[Pa \cdot s]$
$\eta$	:	Constante du matériau responsable de la propriété de couple de contrainte $[N \cdot s]$
$\phi$	:	Fraction volumique des particules dans le fluide de base, $[-]$
$\Phi$	:	Fonction de dissipation visqueuse, $[W \cdot m^{-3}]$
$\omega$	:	Vecteur tourbillon ou taux de rotation, $[s^{-1}]$
$\varepsilon_{ijk}$	:	Tenseur de permutation d'ordre trois antisymétrique, $[-]$
$\varepsilon$	:	Porosité du milieu poreux, $[-]$
$\alpha_r$ et $\alpha_z$	:	Paramètres de perméabilité de la matrice poreuse anisotrope dans les directions r et z, respectivement, $[m^4/N \cdot s]$
$\beta_r$ et $\beta_z$	:	Rapports entre la taille de la microstructure et la taille des pores, $[-]$

### Acronymes & Abréviations

HA	Acide Hyaluronique
HD	Lubrification Hydrodynamique
PHD	Lubrification Poro-Hydrodynamique
XPHD	Lubrification Ex-Poro-Hydrodynamique
Sq	Squeeze

## Liste des figures

Fig.I.1.	Représentation schématique des principaux composants d'une articulation du genou humain.....	12
Fig.I.2.	Le réseau polymère des molécules d'acide hyaluronique et protéines présentes dans le fluide synovial.....	14
Fig.I.3.	Structure moléculaire de l'acide hyaluronique.....	15
Fig.I.4.	Variation de la viscosité du fluide synovial avec la concentration de l'acide hyaluraunique.....	15
Fig.I.5.	Représentation des différentes zones du cartilage.....	17
Fig.I.6.	La dispersion des matières dans le tissu du cartilage.....	18
Fig.I.7.	Représentation schématique d'un protéoglycanes .....	19
Fig.I.8.	Réponse d'indentation typique du cartilage articulaire.....	20
Fig.I.9.	Aspect d'une surface articulaire saine montrant: a) chondrocytes en saillie sous-jacente à la surface ; b) ondulations.....	21
Fig.I.10.	Division du cycle de marche.....	23
Fig.I.11.	Diagrammes de charge et de vitesse de glissement pendant un cycle de marche pour le genou humain.....	24
Fig.I.12.	Représentation des différents mécanismes de lubrification pour le genou humain.....	25
Fig.I.13.	Constataions opérationnelles et radiographie de l'implantation d'une prothèse totale de genou.....	27
Fig.I.14.	Constataions opérationnelles et radiographie de l'implantation d'une prothèse unicompartimentaires de genou.....	28
Fig.I.15.	Constataions opérationnelles et radiographie de l'implantation d'une prothèse à charnières.....	28
Fig.I.16.	Constataions opérationnelles de l'implantation d'une prothèses à glissement.....	29
Fig.II.1.	Schéma général d'un contact en coordonnées cartésiennes .....	42
Fig.II.2.	Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cartésiennes (Paroi inferieure ( $S_1$ ) confondue avec le plan du référentiel ( $O, x, z$ )) .....	44

Fig.II.3.	Schéma du contact hydrodynamique en coordonnées cylindriques.....	47
Fig.II.4.	Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cylindriques (Paroi inférieure ( $S_1$ ) confondue avec le plan du référentiel ( $O, r, \theta$ )) .....	48
Fig.II.5.	Action du fluide sur les parois d'un contact.....	51
Fig.II.6.	Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme rectangulaire.....	53
Fig.II.7.	Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme cylindrique.....	54
Fig.III.1.	Comparaison du modèle de viscosité de Krieger-Dougherty avec le modèle de viscosité conventionnel d'Einstein sur une plage de fractions volumiques.....	60
Fig.III.2.	Configuration de l'articulation du genou en écrasement axisymétrique du film.....	62
Fig.III.3.	Variations temporelles de l'épaisseur du film et de la vitesse d'écrasement normalisées.....	62
Fig.III.4.	Profils de pression pour différentes valeurs du paramètre des couples des contraintes $\tilde{\ell}$ avec $\phi = 0$ et $f = 1$ Hz.....	67
Fig.III.5.	Profils de pression pour différentes valeurs de la fraction volumique $\phi$ avec $\tilde{\ell} = 0.2$ et $f = 1$ Hz.....	68
Fig.III.6.	Profils de pression pour différentes valeurs de la fréquence du mouvement sinusoïdal $f$ exprimée en [Hz] pour $\tilde{\ell} = 0.2$ et $\phi = 10\%$ ...	69
Fig.III.7.	Profils de la vitesse radiale $u$ et du débit de fuite $Q_r$ au bord du disque pour différentes valeurs du paramètre des couples de contrainte $\tilde{\ell}$ et de la concentration en particules $\phi$ avec $f = 1$ Hz.....	70
Fig.III.8.	Profils de la vitesse radiale $u$ et du débit de fuite $Q_r$ pour différentes valeurs de la fréquence d'oscillation $f$ avec $\tilde{\ell} = 0.2$ et $\phi = 0.1$ .....	71
Fig.III.9.	Profils des contraintes de cisaillement au bord.....	74
Fig.III.10.	Évolutions de la force de frottement $F_f$ et de la capacité de charge $W$ pendant un cycle d'oscillation.....	76
Fig.IV.1.	Structure d'un milieu poreux.....	82
Fig.IV.2.	Exemples de structure d'un milieu poreux : a) cartilage articulaire ; b) coussinet poreux.....	83
Fig.IV.3.	Les espaces vides dans un milieu poreux.....	83

Fig.IV.4.	Représentation de la tortuosité d'un milieu poreux.....	84
Fig.IV.5.	Comparaison entre les valeurs expérimentales des perméabilités mesurées à l'eau et à l'huile ISO VG 46 pour différentes porosités.....	86
Fig.IV.6.	Modèle géométrique (3-D) .....	90
Fig.IV.7.	Grille des différences finies axisymétriques du film fluide et du milieu poreux.....	94
Fig.IV.8.	Schéma itératif pour la résolution des équations de Reynolds et de Darcy.....	97
Fig.IV.9.	Comparaison des profils axisymétriques de pression et de vitesse radiale calculés par la méthode itérative du point fixe relaxée et l'approche analytique de Morgan-Cameron : (a) Profils de pression ; (b) profils de vitesse radiale.....	101
Fig.IV.10.	Profils de pression axisymétriques calculés pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ pour les configurations étanche ( <i>sealed</i> ) et non étanche ( <i>unsealed or free</i> ) à $\tilde{t} = 0.3$ et pour $\phi = 0$ .....	102
Fig.IV.11.	Zones de pression (lignes isobares) dans les milieux fluide et solide pour les configurations étanche et non étanche déterminées à $\tilde{t} = 0.3$ et pour $\phi = 0$ .....	103
Fig.IV.12.	Profils axisymétriques de vitesse radiale au bord $u(r = R)$ calculées pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ dans le cas des configurations étanche et non étanche à $\tilde{t} = 0.3$ et pour $\phi = 0$ .....	104
Fig.IV.13.	Lignes de courant et champs de vitesse moyenne axisymétriques de l'écoulement dans les milieux fluide et solide pour les configurations étanche et non étanche à $\tilde{\ell} = 0.2$ , $\tilde{t} = 0.3$ , et $\phi = 0$ .....	105
Fig.IV.14.	Variations des contraintes de cisaillement au bord $\tau_{rz}(r = R, z)$ calculées pour différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte $\tilde{\ell}$ dans le cas des configurations étanche et non étanche à $\tilde{t} = 0.3$ et pour $\phi = 0$ .....	106
Fig.IV.15.	Profils de pression axisymétriques calculés pour différentes valeurs de la fraction volumique $\phi$ et des temps d'écrasement et	108

	d'arrachement dans le cas des configurations étanche et non étanche ( $\tilde{\ell} = 0.2$ ) .....	
Fig.IV.16.	Profils de vitesse axisymétriques calculés pour différentes valeurs de la fraction volumique $\phi$ et des temps d'écrasement et d'arrachement dans le cas des configurations étanche et non étanche ( $\tilde{\ell} = 0.2$ ).....	109
Fig.IV.17.	Profils des contraintes de cisaillement axisymétriques calculés pour différentes valeurs de la fraction volumique $\phi$ , et des temps d'écrasement et d'arrachement dans le cas des configurations étanche et non étanche ( $\tilde{\ell} = 0.2$ ) .....	110
Fig.IV.18.	Variations de la pression maximale pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ dans le cas des configurations étanche et non étanche avec $\phi = 0$ .....	111
Fig.IV.19.	Variations de la contrainte de cisaillement pariétale au bord du disque $\tau_{rz}(r = R, z = 0)$ pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ et les deux configurations.....	111
Fig.IV.20.	Évolutions de la force de frottement $F_f$ pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ pour les deux configurations étanche et non étanche avec $\phi = 0$ .....	112
Fig.IV.21.	Fig. IV.21 Évolutions de la capacité de charge $W$ pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ et pour les configurations étanche et non étanche avec $\phi = 0$ .....	112
Fig.IV.22.	Variations cycliques du débit de fuite au bord $Q_r$ pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ et pour les configurations étanche et non étanche avec $\phi = 0$ .....	113
Fig.IV.23.	Puissances dissipées pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes $\tilde{\ell}$ et pour les configurations étanche et non étanche à $\tilde{t} = 0.3$ et pour $\phi = 0$ .....	113

Fig.V.1.	Écrasement d'une matrice poreuse imbibée en coordonnées cartésiennes.....	120
Fig.V.2.	Écrasement axisymétrique d'une matrice poreuse imbibée.....	123
Fig.V.3.	Représentation de l'action du fluide sur la face inférieure du disque supérieur dans le cas où les contraintes tangentielles pariétales négligées.....	128
Fig.V.4.	Profils de pression axisymétriques pour diverses valeurs de la porosité $\varepsilon$ avec $W_0 = 300 N$ .....	132
Fig.V.5.	Positions instantanées du disque supérieur pour diverses porosités $\varepsilon$ avec $W_0 = 300 N$ .....	132
Fig.V.6.	Profils de vitesse radiale axisymétrique à $r = R$ pour diverses porosités $\varepsilon$ avec $W_0 = 300 N$ .....	133
Fig.V.7.	Évolution de la vitesse d'écrasement au cours du temps pour diverses porosités $\varepsilon$ avec $W_0 = 300 N$ .....	133
Fig.V.8.	Profils de pression axisymétriques pour diverses valeurs de la charge imposée $W$ avec $\varepsilon = 0.32$ .....	134
Fig.V.9.	Positions instantanées du disque supérieur pour différentes charges imposées $W$ avec $\varepsilon = 0.32$ .....	135
Fig.V.10.	Profils de vitesse radiale axisymétriques à $r = R$ pour différentes charges imposées $W$ avec $\varepsilon = 0.32$ .....	135
Fig.V.11.	Évolution de la vitesse d'écrasement au cours du temps pour différentes charges imposées $W$ avec $\varepsilon = 0.32$ .....	136

## Liste des tableaux

Tableau III.1.	Données géométriques et physiques du problème direct.....	64
Tableau IV.1.	Quelques propriétés de la roche de sable et de la mousse en polyuréthane.....	85
Tableau IV.2.	Valeurs typiques de la perméabilité de quelques matériaux poreux usuels.....	85
Tableau IV.3.	Données géométriques et physiques.....	100
Tableau V.1.	Données géométriques et physiques.....	130

---



# Introduction générale

---



# Introduction générale

L'articulation du genou humain est un élément de machine incroyable du point de vue mécanique et tribologique. C'est l'une des plus grandes articulations synoviales ou diarthroses du corps humain qui nous aide à accomplir trois fonctions : un grand mouvement, une marche continue, et la course. Par conséquent, il est capable de supporter le poids corporel grâce à sa construction mécanique solide et parfaite, et à l'ingénierie exquise du cartilage et des tendons. Cela le rend très sensible et vulnérable aux blessures que toute autre articulation.

La lubrification de l'articulation du genou par le fluide synovial (la synovie) est un processus nécessaire afin de réduire le frottement et l'usure entre les surfaces du cartilage pendant les activités quotidiennes. Le mécanisme de lubrification fournit un film protecteur qui permet de séparer les deux surfaces cartilagineuses, et il existe différents mécanismes de lubrification dans un cycle de marche, à savoir : la lubrification limite, hydrodynamique, élasto-hydrodynamique (EHD), film comprimé (*squeeze film*), suintement (*weeping*), et la lubrification mixte.

Le fluide synovial (la synovie) est un lubrifiant biologique naturel fortement visqueux sécrété dans la cavité articulaire par la membrane synoviale remplissant quatre fonctions principales : la lubrification, l'amortissement des chocs, la nutrition du cartilage de l'articulation, et l'élimination des déchets métaboliques (CO<sub>2</sub>, acide lactique). Les principaux composants de fluide synovial sont : l'acide hyaluronique, la lubricine, les lipides, les sels minéraux, et l'eau.

L'acide hyaluronique, constituant majeur du liquide synovial qui lui confère son pouvoir lubrifiant, est un polymère (polysaccharide) de haute masse molaire. Sa présence rend incontestablement le comportement rhéologique du liquide synovial non Newtonien. Dans la présente étude, le fluide synovial est modélisé comme un fluide polaire à couples de contraintes en se basant sur les principes de la théorie du micro-continuum de Vijay Kumar Stokes.

Les propriétés lubrifiantes uniques ne sont pas seulement dues au fluide synovial, mais sont le résultat d'une interaction synergique complexe entre celui-ci et le cartilage

articulaire. Du point de vue mécanique et rhéologique, le comportement du cartilage est complexe, car la structure tissulaire est une combinaison de composants partiellement poreux, visqueux, et élastiques. Il y a lieu donc de modéliser le cartilage osseux dont le module d'élasticité d'Young est très faible comme un milieu poroélastique voire poroviscoélastique.

L'objectif principal de cette recherche est de comprendre et de maîtriser ces contacts bio-tribologiques complexes et d'exploiter ces connaissances en vue de concevoir des prothèses articulaires efficaces et durables.

Les concepts élémentaires, les définitions de base qui décrivent l'anatomie, la physiologie et le cycle de marche de l'articulation du genou humain y compris les mécanismes de lubrification rencontrés et les prothèses artificielles du genou sont présentés dans le premier chapitre essentiellement dédié à la bibliographique.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation détaillée des équations générales de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes dans le cas d'écoulements de films minces visqueux en régime isotherme et laminaire. Dans ce chapitre, l'équation de base de la lubrification par film comprimé appelée équation de Reynolds modifiée est dérivée en coordonnées cartésiennes et cylindriques à partir des équations de mouvement et de continuité d'un fluide non Newtonien à couples de contraintes. Les expressions permettant de calculer les performances d'un contact hydrodynamique y sont aussi établies.

Le chapitre trois est consacré à la lubrification articulaire par effet d'écrasement ou de compression d'un film de fluide suspendant entre deux surfaces imperméables rigides. Les effets non Newtoniens dus à la présence des couples de contraintes dans le lubrifiant modélisant le fluide synovial ainsi que l'influence de la concentration en particules sont étudiés dans le cas d'un contact formé de deux disques schématisant les cartilages osseux en mouvement oscillatoire.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de l'écrasement d'un film non Newtoniens à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu poreux. L'écoulement dans le milieu poreux supposé anisotrope est décrit par l'équation de Darcy modifiée tenant en compte la présence des microparticules dans le solvant.

Les distributions de pression dans le film lubrifiant et dans la matrice poreuse sont obtenues à partir de la résolution numérique de l'équation de Reynolds modifiée couplée à l'interface à l'équation de Darcy modifiée à l'aide de la méthode itérative du point fixe relaxée. Les deux équations gouvernantes sont discrétisées par la méthode des différences finies et les systèmes d'équations algébriques résultants sont résolus par la méthode itérative de Gauss-Seidel avec facteur de sur-relaxation. Les résultats graphiques commentés relatifs aux effets de la rhéologie du lubrifiant (la synovie) et de la porosité du cartilage y sont présentés.

Le cinquième et dernier chapitre est dévolu à la présentation du principe et de la théorie d'un nouveau mode de lubrification Ex-Poro-Hydrodynamique (en abrégé XPHD) bio-inspiré simulant le mode de lubrification réel rencontré dans l'articulation du genou qui peut être considéré comme une solution technologique innovante alternative au mode classique de lubrification par film comprimé décrit dans le chapitre précédent. La théorie de ce mode de lubrification, basée sur les mêmes hypothèses simplificatrices exploitées par Osborne Reynolds pour la dérivation de son équation en 1886, à partir des équations de Darcy-Brinkman au lieu des équations de Navier-Stokes.

Enfin, une conclusion générale sera présentée pour récapituler l'essentiel des résultats obtenus dans le cadre de cette recherche suivie par les prolongements possibles de la présente investigation.

---



# Chapitre I

Anatomie, physiologie, et conception  
du genou humain

---



# Chapitre I

## Anatomie, physiologie, et conception du genou humain

### I.1 Introduction

L'articulation fémoro-tibiale du genou humain est une articulation complexe formée principalement de deux extrémités osseuses appelées cartilages osseux séparés par le fluide synovial. Cette articulation peut être considérée comme un tribosystème ou un triplé tribologique constitué de deux corps solides qui sont les cartilages séparés par un troisième corps appelé fluide synovial. Ainsi, une bonne connaissance de son anatomie et une très bonne compréhension de sa fonctionnalité sont indispensables afin d'améliorer les performances et la longévité des joints artificiels.

Le cartilage osseux est par définition un matériau poreux compliant lui permettant de contribuer à réduire le frottement et l'usure dans le contact fémoro-tibial. D'autre part, le fluide synovial ressemblant au blanc d'œuf a un comportement rhéologique non Newtonien. Considéré comme une suspension, le fluide synovial est composé principalement d'un solvant appelé sérum qui est un fluide Newtonien dans lequel sont dispersés des molécules de l'acide Hyaluronique. La structure poreuse du cartilage requiert également une bonne connaissance des caractéristiques des milieux poreux ainsi que les lois fondamentales décrivant l'écoulement d'un fluide au sein d'un milieu poreux ou poro-élastique.

Dans ce chapitre, essentiellement bibliographique, on présente quelques caractéristiques anatomiques de base de diarthroses et certaines des caractéristiques rhéologiques des deux principaux tissus articulaires, à savoir le cartilage osseux ou articulaire et le liquide synovial appelé aussi dans la littérature médicale la synovie.

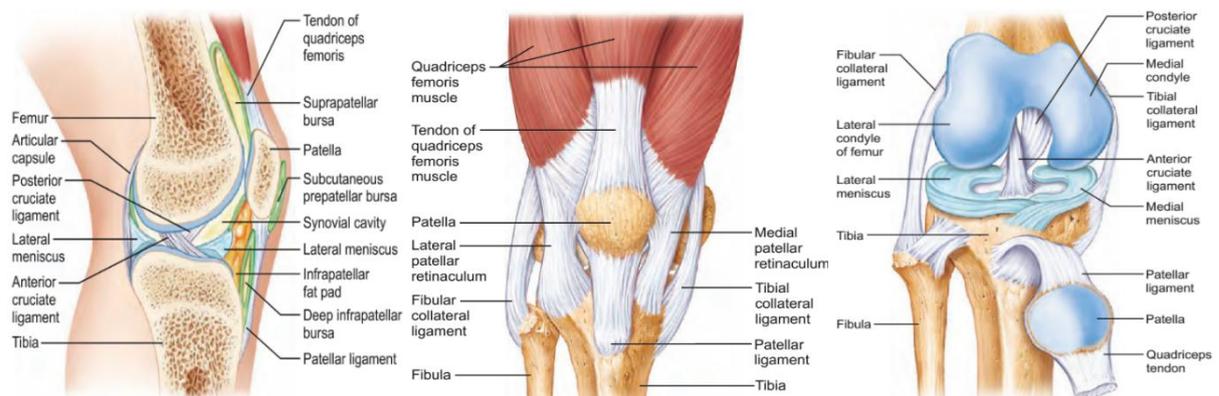
### I.2 Anatomie du genou

Comme il est clairement illustré dans la **figure I.1**, le genou humain est l'une des articulations les plus importantes de notre squelette. Il est situé dans la terminaison de la tendresse du quadriceps, muscle devant la cuisse, qui est le plus puissant de l'organisme. Ainsi, il suit le tendon quadricipital qui est situé au sommet de celui-ci et est prolongé vers

le bas par le tendon rotulien. L'enveloppe fibreuse qui couvre l'articulation du genou est en continuité avec ces deux tendons. Il est maintenu latéralement par deux types de ligaments appelés aileron interne et aileron externe. L'articulation du genou joue un rôle de protection du tendon du quadriceps, mais elle augmente aussi le bras de levier de celui-ci, donc sa force sur le tibia. Son ablation fait perdre environ 30% de la force au quadriceps.

Les articulations sont formées entre les os pendant la croissance du squelette. Celles qui permettent divers degrés de mouvement relatif des os sont appelées articulations diarthroses ou articulations synoviales, elles sont différentes des articulations fibreuses et cartilagineuses. Elles sont considérées comme des systèmes bio-tribologiques de loin les plus complexes et les plus sophistiquées qui existent. La hanche, le genou, l'épaule, et les articulations des doigts sont des exemples familiers de ce type de joint.

L'articulation du genou est non seulement une des plus grands joints dans le corps, mais aussi est sans doute de la plus importante, la plus forte, et la plus complexe dans le corps humain. La **figure I.1** représente schématiquement certains des principaux composants d'une articulation du genou humain. Les extrémités des os sont regroupés au sein d'une enceinte fibreuse appelée la capsule articulaire. La doublure intérieure de cette capsule articulaire est appelée membrane synoviale. Les extrémités des os sont couvertes par une mince couche de cartilage articulaire, un tissu conjonctif relativement rigide.



**Fig. I.1 Représentation schématique des principaux composants d'une articulation du genou humain**

La cavité articulaire, formée par les surfaces cartilagineuses et la synovie, contient une petite quantité de fluide communément connue sous le nom de liquide synovial. Les ligaments, les tendons, et les autres tissus mous à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité

articulaire assurent la stabilité de l'articulation et le maintien de l'alignement approprié pendant le mouvement.

La fonction de l'articulation du genou est de permettre la flexion et l'extension de la jambe lors de la marche. Ainsi, cette articulation est nécessaire pour effectuer des mouvements complexes répétés à des vitesses variables et de supporter de grandes charges à fluctuations rapides dont l'amplitude est environ égale à cinq fois le poids corporel [1], sans oublier sa grande aptitude d'absorption de chocs. Dans des conditions normales, le genou fournit ces services sans remplacement et sans entretien tout au long des habitudes sept ou huit décennies de la vie. La capacité de l'articulation du genou de fournir un mouvement lisse et à faible friction, avec une faible abrasion des surfaces d'appui dans toutes les conditions de charge et de vitesse, est le résultat d'une interaction dynamique complexe entre les composantes formant l'articulation.

### I.3 Le liquide synovial : rôle, composition, et comportement

Le corps humain, qui comprend 187 articulations synoviales ou diarthroses, produit pour son fonctionnement plusieurs substances biologiques lubrifiantes parmi lesquelles le liquide synovial (ou synovie) synthétisé par les cellules de la membrane synoviale (les synoviocytes) pour éviter les frottements et nourrir les chondrocytes (cellules du cartilage), et le liquide lacrymal (les larmes) sécrété au niveau des yeux par les glandes lacrymales.

Etymologiquement, la synovie est un mot d'origine latine (synovia). C'est un fluide visqueux clair ou jaunâtre, semblable en apparence à du blanc d'œuf (ovum en latin) ou de la salive. Il est présent seulement en quantités infimes. Le genou humain contient de 0,2 ~ 0,3 ml de liquide synovial [2], alors que la cheville de bœuf en contient environ 25 ml.

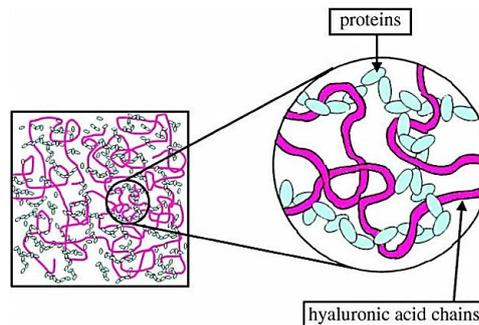
Le liquide synovial, présent aussi dans les cartilages articulaires, fournit un film fortement visqueux qui réduit la friction entre les cartilages dans le cas de surcharge. Le liquide synovial est forcé entre les cartilages lorsque le joint est sollicité en compression favorisant ainsi l'infiltration du sérum (solvant) dans les pores des cartilages articulaires comme l'eau dans une éponge. Il est prêt à être pressé de nouveau à chaque fois que le joint est chargé (mis sous pression). Ce processus de lubrification par suintement est appelé en anglais « *weeping* » **figure I.12**.

Les principaux composants du liquide synovial sont :

- ❖ les protéines sériques (environ 20 *mg/ml*),
- ❖ l'acide hyaluronique **HA** (ou hyaluronate de sodium) qui confère au liquide synovial son pouvoir lubrifiant (environ 3 *mg/ml*),
- ❖ les lipides (environ 3 *mg/ml*),
- ❖ la lubricine (glycoprotéine) (~0,02 *mg/ml*) [3], et
- ❖ l'eau (environ 85%) [4].

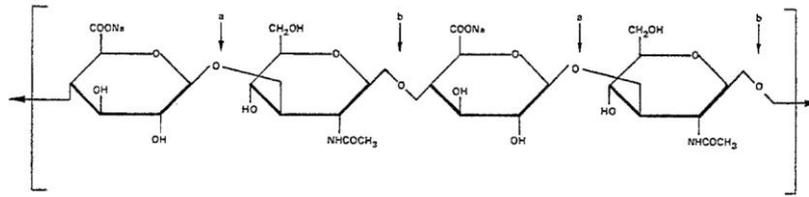
Les fonctions du liquide synovial comme lubrifiant commun des éléments nutritifs pour le cartilage, et il contient également des cellules phagocytaires qui débarrasse la cavité articulaire de microbes et de débris cellulaires.

La complexe protéique d'acide hyaluronique (**HAP**) est une macromolécule de polysaccharide non ramifiée dont le dimère de base est un disaccharide composé d'acide glucuronique liée avec de la glucosamine. Le poids moléculaire moyen du complexe **HAP** est d'environ deux millions. En solution, cette macromolécule est un polyélectrolyte qui enroule en une conformation sphérique ou ellipsoïdale occupant un domaine solvant beaucoup plus grand que le volume de la chaîne polymérique elle-même **figure I.2**. La présence de ces macromolécules confère à la synovie des propriétés rhéologiques non-Newtoniennes comme la pseudoplasticité, l'élasticité, et la thixotropie [5, 1].



**Fig. I.2 Le réseau polymère des molécules d'acide hyaluronique et protéines présentes dans le fluide synovial [6]**

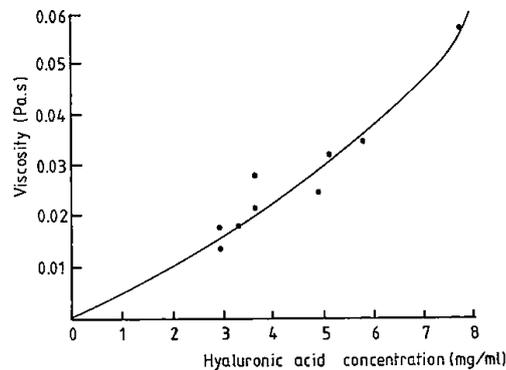
La concentration du polymère à longue chaîne (acide hyaluronique(**HA**)) **figure I.3**, est de l'ordre de 3,5 *mg/g*, donnant un poids moléculaire d'environ  $10^6$ , la longueur linéaire des molécules de chaîne étant approximativement 1  $\mu m$  [7].



**Fig. I.3 Structure moléculaire de l'acide hyaluronique [2]**

L'acide hyaluronique désigne le polysaccharide dans le liquide synovial, il amincit et devient moins visqueux, comme il se réchauffe pendant l'activité conjointe.

La concentration de l'acide hyaluronique est importante pour les propriétés lubrifiantes qui sont directement liées à la viscosité (**figure I.4**). Dans les cas pathologiques, l'acide hyaluronique est introduit à l'aide d'injections thérapeutiques afin de faciliter la lubrification de l'articulation, et il agit comme un analgésique [5].



**Fig. I.4 Variation de la viscosité du fluide synovial avec la concentration de l'acide hyaluraunique [8]**

Dans des conditions biologiques normales, le coefficient de friction est seulement de 0,001 à 0,006 et à l'usure est proche de zéro en raison des propriétés tribologiques particulières du cartilage et le liquide synovial [9].

Les coefficients de frottement des articulations dépendent du type et de la composition du lubrifiant utilisé. Des lubrifiants contenant des protéines provoquent une augmentation du frottement par rapport aux solutions de carboxymethyl-cellulose (*CMC*) et on pense que cela provient de contact inter-facial des protéines adsorbées sur les surfaces articulaires. Cependant, il a été observé que l'augmentation de la teneur en protéines de 1,67 à 5,02 *g/dl* n'a pas entraîné une augmentation significative du frottement tandis que l'addition d'une solution d'acide hyaluronique a entraîné une diminution du coefficient de frottement [5].

En résumé, le liquide synovial dont le comportement est incontestablement non Newtonien a pour fonctions :

- ❖ de limiter la friction des os entre eux,
- ❖ d'amortir les chocs,
- ❖ de fournir des nutriments et l'oxygène nécessaires aux cellules du cartilage (chondrocytes),
- ❖ d'éliminer les déchets métaboliques et d'éventuels corps étrangers.

#### I.4 Le cartilage articulaire

Le cartilage articulaire est un tissu blanc, lisse et mou, résistant et élastique qui recouvre la surface des os des articulations synoviales. Le cartilage hyalin est le type qu'on retrouve dans le genou humain. Ses fonctions principales sont :

- ❖ d'assurer un bon glissement entre les extrémités osseuses avec un coefficient de friction très bas pour prévenir les phénomènes d'usure comme les cas pathologiques de type arthroses,
- ❖ d'absorber et de distribuer la pression, ce qui entraîne le moins de contraintes de contact possible.

Le cartilage articulaire dans des conditions physiologiques normales de l'adulte a une épaisseur d'environ 0,5 à 7 mm [10].

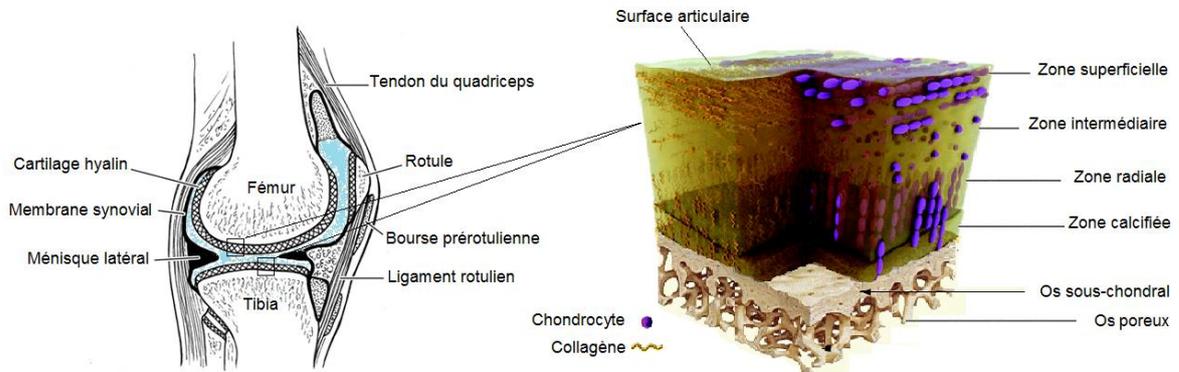
##### I.4.1 Structure

La surface du cartilage joue un rôle important dans la physiologie de ce tissu car c'est lui qui reçoit en premier les pressions, subit les forces de cisaillement, et c'est le filtre sélectif à travers lequel passe les substances nutritives venant du liquide synovial, seule source d'alimentation des chondrocytes.

À la surface du cartilage, il existe une zone acellulaire dénommée "Lamina Splendens" qui recouvre la couche superficielle. Cette zone est importante puisqu'elle permet l'accrochage de macromolécules présentes dans le liquide synovial et qui constitue ainsi une couche protectrice pour le cartilage (notamment vis-à-vis des radicaux libres). Ainsi l'acide hyaluronique recouvre cette surface, de même que certains phospholipides et la lubricine [11].

A l'échelle microscopique, le tissu du cartilage se divise morphologiquement en quatre couches illustrées à la **figure I.5**. Ces couches correspondent à des teneurs variables des

composants de la matrice et à une organisation différente des fibres de collagène dans chaque couche. Cette organisation fait penser que les fibres de collagène sont organisées en arceaux dont les extrémités s'implantent dans la couche calcifiée et dont la réflexion se fait dans les zones moyennes et superficielles, assurant une véritable « armature » au tissu cartilagineux.



**Fig. I.5 Représentation des différentes zones du cartilage [11]**

Les quatre couches qui peuvent être distinguées dans le cartilage articulaire sont [12, 13]:

**a) Couche superficielle**

où les chondrocytes sont petits et plats (allure fibroblastique), et pourraient correspondre à des préchondrocytes. Les fibres collagènes sont disposées parallèlement à la surface et cette zone est riche en fibronectine et relativement pauvre en protéoglycanes. En raison de la disposition du réseau des fibres de collagène, cette zone résiste aux forces de tension (d'environ 3 % de l'épaisseur totale du cartilage articulaire).

**b) Couche intermédiaire ou moyenne**

où les chondrocytes sont gros et sphériques; le réseau des fibres collagènes n'a pas d'orientation particulière (40 – 45 % de la totalité de la hauteur totale).

**c) Couche profonde ou radiale**

où les chondrocytes sont disposés en colonnette le long de travées de collagène épaisses et disposées de façon perpendiculaire à la surface. La concentration en protéoglycanes y est élevée (40 – 45 % de la hauteur cartilagineuse).

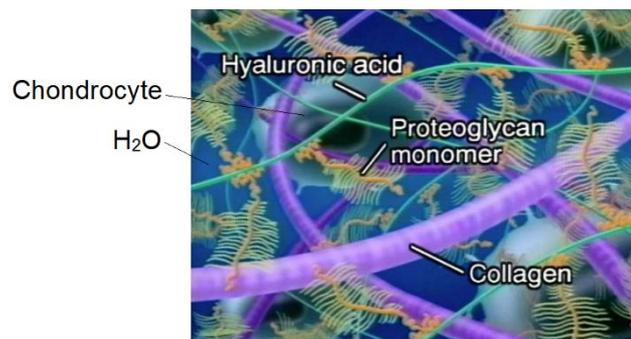
**d) Couche calcifiée (5 – 10 % de la hauteur totale du cartilage)**

qui vient au contact de la lame osseuse sous-chondrale. Cette zone est pauvre en protéoglycanes et les fibres de collagène gardent une orientation radiale mais sans continuité avec les fibres de collagène de l'os sous-jacent. La concentration en calcium y

est élevée. La couche du cartilage calcifiée est séparée de la zone profonde par une ligne de démarcation basophile et ondulée qui constitue une barrière interdisant la pénétration des vaisseaux présents dans l'os sous-chondral, mais qui laisse passer certains constituants.

#### I.4.2 Composition

Le cartilage articulaire est un matériau qui se constitue de deux phases distinctes : la phase fluide qui se compose d'eau et d'électrolytes, et la phase solide qui se compose de chondrocytes, les fibrilles de collagène, les protéoglycanes, d'autres glycoprotéines et une petite fraction des matières lipidique [1]. Le collagène est le constituant principal du composant organique du tissu qui diffère selon l'âge, le site de l'articulation et la profondeur de la surface [14, 15]. Le cartilage adulte normal contient 60 – 85% de l'eau, 15 – 22% de collagène (type II), et 4 – 7% de protéoglycanes [16]; les constituants restants étant des composants cellulaires, des glycoprotéines, des électrolytes inorganiques, et les lipides [17]. La dispersion de ces éléments matériels dans le tissu est schématiquement représentée sur la **figure I.6**. Les interactions entre les fibres de collagène et les protéoglycanes détermine l'intégrité de la matrice solide, ainsi que ses propriétés physiques et mécaniques et la densité des groupes chargés négatifs fixes est également un facteur important régissant le comportement des tissus.

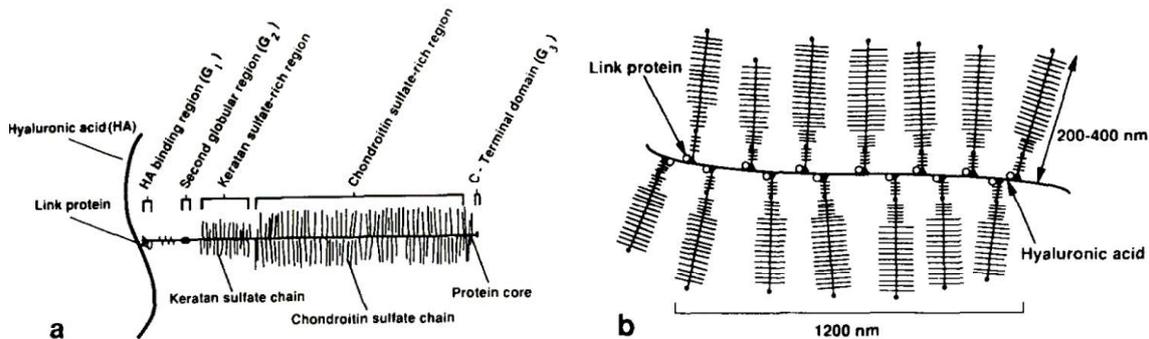


**Fig. I.6 La dispersion des matières dans le tissu du cartilage**

Les collagènes sont des protéines fibreuses insolubles de la matrice extracellulaire et du tissu conjonctif avec un haut degré d'organisation structurale. Le type prédominant dans le cartilage est le type (II) avec des traces d'autres types de collagène, y compris les types (IX) et (XI).

Les protéoglycanes (PG) **figure I.7** sont des macromolécules constituées d'un cœur de protéine à laquelle sont attachés un certain nombre de chaînes glycosaminoglycanes (GAG). Ce sont des chaînes relativement courtes unités disaccharidiques récurrentes de

hexosamines sulfatés liés à l'acide hexuronique. Différents GAG sont constitués de chaînes de différentes unités récurrentes ; ceux trouvés dans le cartilage articulaire sont la chondroïtine sulfate (CS), le kératane sulfate (KS) et l'acide hyaluronique (AH). Dans le tissu, ces macromolécules sont des fragments fortement chargés. La densité des groupes chargés fixes est importante dans la gouvernance de l'hydratation, le taux de transport de fluide, et les divers effets électrocinétiques. Ces paramètres, à leur tour régissent le fluage et le comportement de relaxation du tissu et la lubrification des diarthroses.



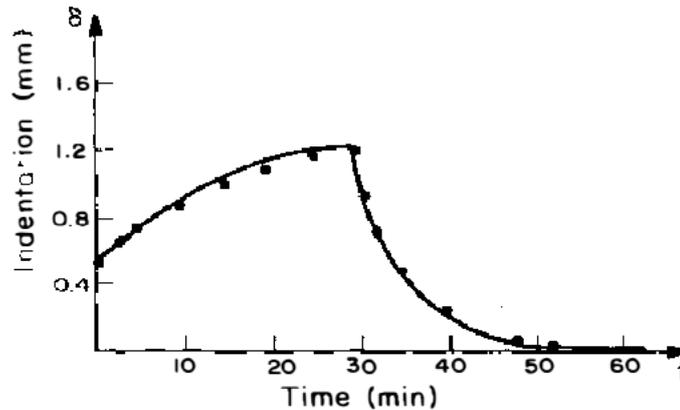
**Fig. I.7 Représentation schématique d'un protéoglycane : a) un protéoglycane monomère (PG); b) un agrégat PG formé par de nombreux monomères PG se liant à une chaîne hyaluronate de monofilament**

Le cartilage hyalin est constitué d'un seul type de cellules, les chondrocytes, qui sont enfermées dans une matrice dite « extracellulaire ». Cette forme sphérique (ou ovoïde) est de 30 à 40  $\mu m$  de diamètre. Il n'existe pas de contact intercellulaire direct au sein de la matrice cartilagineuse. Les chondrocytes occupent 1 à 10 % du volume total du cartilage mais la densité cellulaire varie selon l'âge de l'individu. La couche superficielle est la plus cellulaire et le nombre de cellules diminue avec la profondeur.

### I.4.3 Comportement mécanique

Le cartilage articulaire présente un ensemble unique de propriétés mécaniques. En général, sa structure est poreuse, anisotrope, inhomogène, viscoélastique. Les expériences d'indentation en compression donnent les courbes caractéristiques de déplacement en fonction du temps pour le cartilage ; à savoir une déformation « instantanée » lors de l'application de la charge suivie d'une phase de fluage se traduisant par une augmentation asymptotique de la déformation avec le temps sous charge constante. L'élimination de la charge à nouveau produisait une reprise « instantanée » suivie d'une lente phase de récupération (figure I.8). À la suite de ces études, un certain nombre d'investigations ont tenté de déterminer les propriétés viscoélastiques du

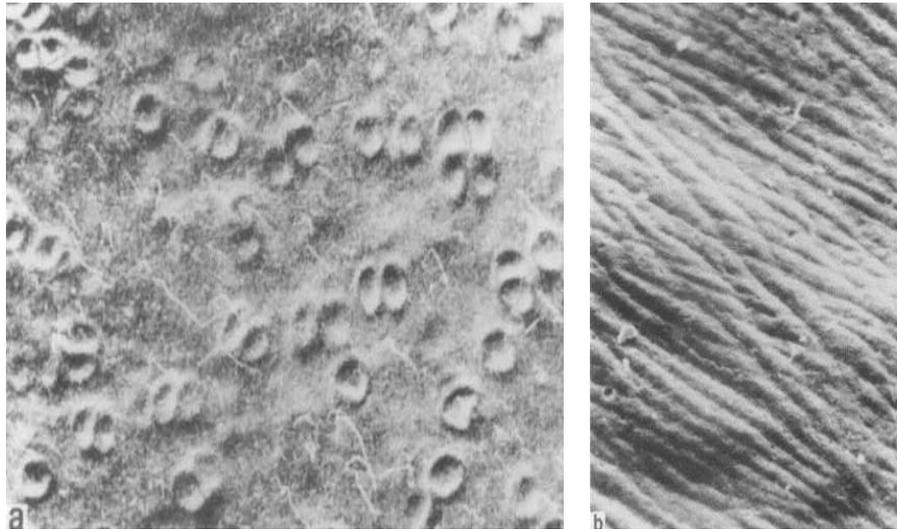
cartilage. Ces investigations comprennent les travaux de Camosso & Marotti [18], Elmore et al [19], Hayes & Mockros [20], Hayes et al [21], et Hori & Mockros [22]. A partir de ces études d'indentation et de compression limitées au fluage, ces auteurs ont conclu que le cartilage possède effectivement une réponse élastique « instantanée » lors de l'application et le retrait d'une charge. Le comportement de fluage ultérieur a atteint une valeur d'équilibre asymptotique après environ 15 *minutes* de chargement continu. La reprise a été déterminée à un rythme légèrement plus lent que le taux de déformation de fluage.



**Fig. I.8 Réponse d'indentation typique du cartilage articulaire**

Hayes et Mockros [20], et Coletti et al [23] ont été les premiers à réaliser un processus de modélisation phénoménologique pour déterminer les constantes visqueuses des tissus.

Pour évaluer si un mode de lubrification à film fluide prédit est réaliste ou non, il est nécessaire de connaître la rugosité de la surface du cartilage articulaire. Si le cartilage articulaire endommagé est rugueux et présente des microfissures, ces micro-endommagements structurels modifient les propriétés de transport des fluides du cartilage à travers la surface ainsi que la capacité de la zone de surface riche en collagène pour réaliser une contrainte de traction. Les caractéristiques de surface tertiaires sont des creux ou des saillies de cellules sous-jacentes à la surface, et elles ont généralement de 20 à 45  $\mu\text{m}$  de diamètre et 0,5 à 2,0  $\mu\text{m}$  de profondeur (**figure I.9**). Enfin, il y a apparition régulière de crêtes peu profondes quaternaires sur la surface de 1 à 10  $\mu\text{m}$  de longueur d'onde. L'amplitude de ces ondes apparaissant régulièrement est estimée à moins de 1  $\mu\text{m}$ .



**Fig. I.9 Aspect d'une surface articulaire saine montrant: a) chondrocytes en saillie sous-jacente à la surface ; b) ondulations**

Toutes ces caractéristiques de surface ont des incidences sur le mécanisme de lubrification fluide dans le joint diarthroïdiaux. En outre, les saillies de micro-surface sont susceptibles d'être écrasées au cours du chargement, ce qui donne ainsi une réserve de fluide lubrifiant piégé dans ces zones de surface. Récemment, une nouvelle théorie sur la lubrification des articulations a été proposée qui prend en considération les micro-rugosités de la surface articulaire. De l'analyse théorique, la micro-rugosité de surface semble améliorer le processus de lubrification fluide.

Le mode de chargement dominant dans les diarthroses est la compression, et le mécanisme dominant donnant lieu au cartilage un comportement viscoélastique (fluage et relaxation) en compression est le frottement dû à l'écoulement du fluide synovial. Ceci est connu comme un comportement viscoélastique du cartilage. Cependant, la matrice solide est un réseau macromoléculaire en collagène et des protéoglycanes.

#### I.4.4 Perméabilité

Les mouvements du fluide synovial au sein du cartilage et de l'autre côté de la surface articulaire sont deux phénomènes fondamentaux qui régissent la réponse mécanique du tissu ainsi que sa fonction biomécanique ; c'est-à-dire la lubrification des articulations synoviales et son intégrité biologique [24].

Torzilli et Mow [25], ont constaté que le fluide synovial peut être transporté à travers la matrice poreuse perméable à l'aide de l'application d'un gradient de pression de fluide direct à travers le tissu. Le transport du fluide est directement proportionnel au gradient

de pression et le coefficient de perméabilité peut être mesuré à l'aide d'une expérience typique de perméabilité pour les milieux poreux.

Mc Cutchen [26] a déterminé que les valeurs moyennes du rapport de ce coefficient de perméabilité à la viscosité dynamique étaient de  $0,58 \times 10^{-15} \text{ m}^4/\text{N} \cdot \text{s}$ , une telle faible valeur de perméabilité indique une résistance au frottement très élevée à l'écoulement du fluide.

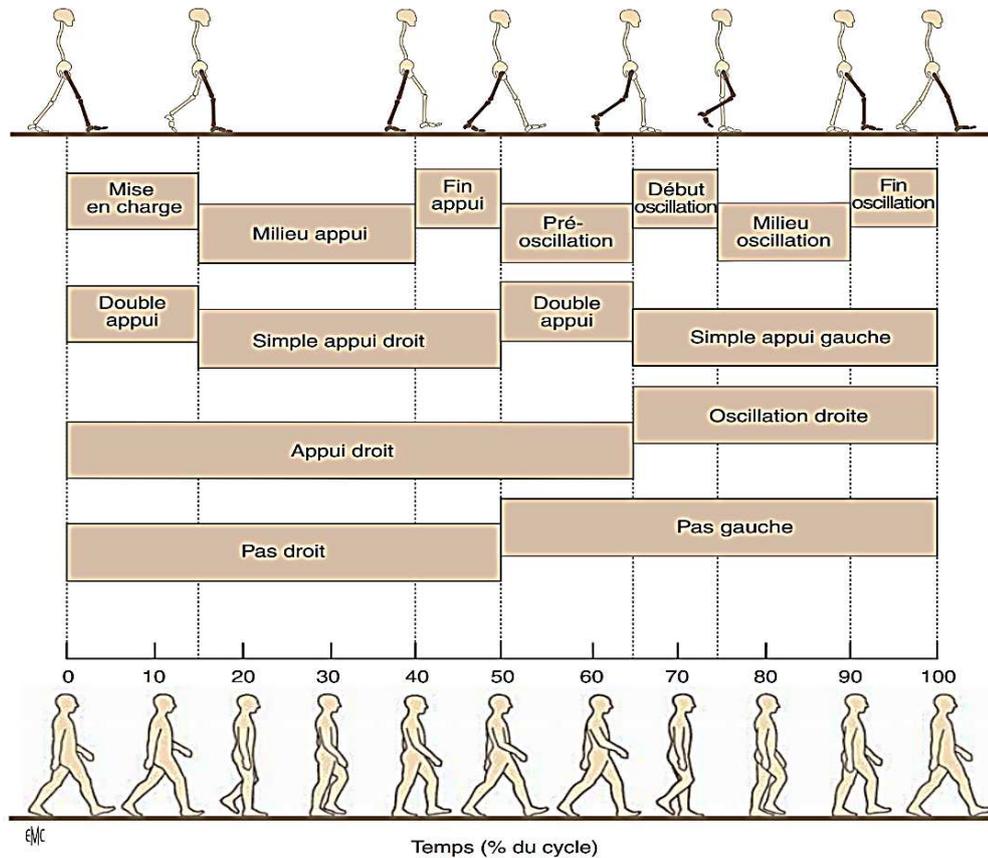
Mulholland et al [27] ont suggéré que le tissu peut en effet être anisotrope dans sa résistance à l'écoulement du fluide synovial.

Les expériences de Maroudas et al [28] ont confirmé la variation de la perméabilité avec la profondeur, en effectuant des tests de perméabilité sur des tranches de cartilage 200 – 400  $\mu\text{m}$  d'épaisseur, ils ont constaté que le coefficient de perméabilité a montré une augmentation initiale puis une diminution à partir de la surface vers la zone profonde. La diminution de la perméabilité de surface a été attribuée au réseau dense de fibres de collagène dans la couche superficielle [29], tandis que la diminution de la perméabilité de la zone profonde a été attribuée à l'augmentation de la densité de charge [17].

Edwards [30] a découvert que le fluide synovial pouvait être transporté par déformation de la matrice cartilagineuse, et l'exsudation peut être réalisée en comprimant le tissu entre deux plateaux poreux rigides, le fluide contenu dans les pores du plateau étant à la pression ambiante. Lorsque cela est fait, la matrice solide comprimée provoque une augmentation de la pression interne agissant sur le fluide à l'intérieur du tissu. Cela crée un gradient de pression à travers la surface de l'échantillon favorisant l'exsudation du fluide synovial à partir du tissu. Dans ce cas, l'écoulement du fluide dépend à la fois de la perméabilité et de l'élasticité de la matrice solide du tissu.

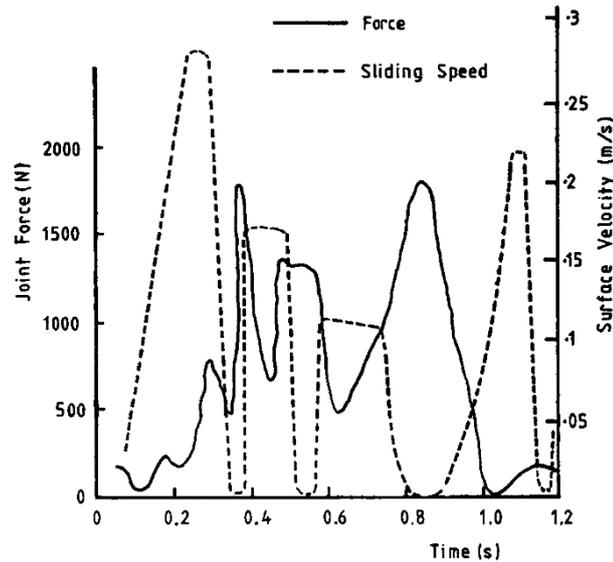
## **I.5 Mécanismes (modes) de lubrification des articulations du genou humain pendant un cycle de marche**

La description de la marche passe par l'analyse des mouvements articulaires et des actions des muscles durant les différentes phases du cycle de la marche. Il se divise d'abord en une phase d'appui (quand le pied est sur le sol) et une phase oscillante (quand le pied est en l'air). La phase d'appui représente 60% de la durée totale du cycle et la phase oscillante 40% (figure I.10).



**Fig. I.10** Division du cycle de marche [31]

Les diagrammes de charge et de vitesse de glissement mesurés dans une articulation du genou pendant un cycle de marche normale sont présentés dans la **figure I.11**. Le temps total du cycle est d'environ 1,2 s et les charges maximales valent environ 1750 N et se produisent lorsque le talon touche le sol et l'orteil quitte le sol. Juste avant l'attaque du talon et peu de temps après l'orteil, les charges se réduisent rapidement vers zéro. La vitesse de glissement dans le genou varie considérablement avec le temps dans une marche normale. Cette tendance est suivie tout au long du cycle de marche. Il convient de noter que lorsque la charge est élevée, la vitesse de glissement est faible et vice-versa.

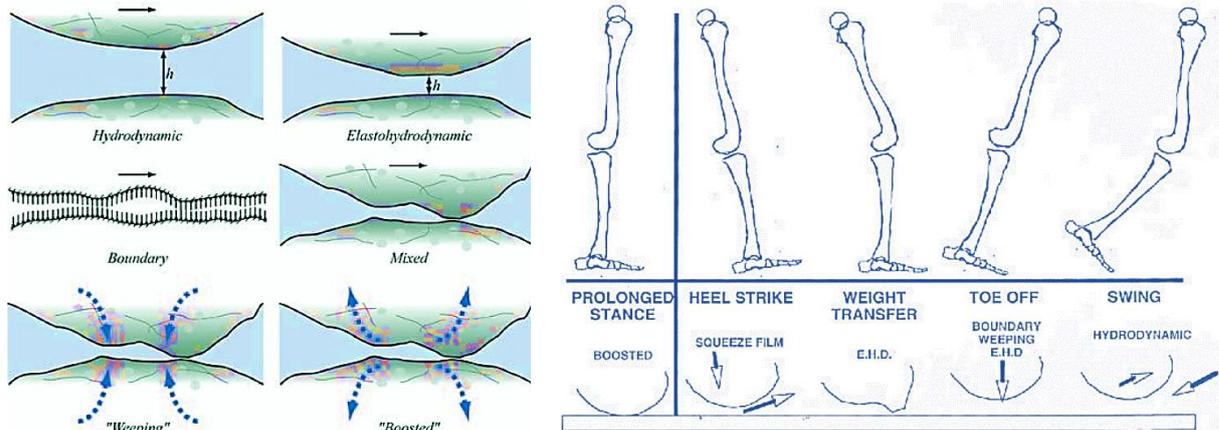


**Fig. I.11 Diagrammes de charge et de vitesse de glissement pendant un cycle de marche pour le genou humain [32]**

L'étude de la lubrification de l'articulation du genou humain pendant un cycle de marche fonctionnant dans des conditions telles que les vitesses de glissement et la viscosité du fluide sont faibles, les charges appliquées sont élevées, et les surfaces d'articulation sont complètement séparées a fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Dans ces recherches, les auteurs se sont basés sur les mécanismes de lubrification suivants :

- ❖ lubrification hydrodynamique [33, 34],
- ❖ lubrification limite (*boundary*) [35, 36],
- ❖ lubrification élastohydrodynamique (EHD) [34, 37],
- ❖ lubrification par film comprimé (*squeeze film*) [38, 39],
- ❖ *boosted lubrication* [40, 41] et lubrification par suintement (*weeping lubrication*) [42, 43, 5].

La lubrification mixte a été inventée par Murakami et al [44] pour décrire la nature du mode de lubrification des articulations synoviales. Chaque mécanisme complète l'autre, et dépend des tissus impliqués et de la charge transmise à l'articulation [45]. Les aspects importants de la lubrification des articulations humaines sont illustrés sur la **figure I.12**.



**Fig. I.12 Représentation des différents mécanismes de lubrification pour le genou humain**

[46]

La phase d'oscillation (*Swing*) [37, 33], presque non chargée, comprend une période où une très petite charge coïncide avec une vitesse de glissement élevée, lorsque le pied a quitté le sol et la jambe oscille librement de sa position postérieure à sa position antérieure, un film relativement épais de liquide synovial peut être entraîné dans l'espace entre les cartilages. Il a été démontré que cela peut générer une lubrification hydrodynamique, où les forces du film fluide sont générées par la vitesse d'entraînement ou de glissement des surfaces articulées. L'épaisseur d'un film hydrodynamique est fonction de plusieurs facteurs tels que la viscosité du fluide, la géométrie et la rugosité des surfaces articulées, la charge normale appliquée et la vitesse de glissement.

Pour la phase de position prolongée (*prolonged stance*) où la lubrification stimulé (*boosted lubrication*) [37, 40, 32], la charge a augmenté et la fraction de faible poids moléculaire du fluide synovial est forcée dans les pores du cartilage, laissant des bassins piégés de fluide synovial enrichi dans les surfaces rugueuses du cartilage. À mesure que les surfaces d'articulation se rapprochent, l'eau et les petits solutés du fluide synovial sont extraits de manière uniforme entre la région de contact et absorbés dans le cartilage articulaire. La surface articulaire agit comme une membrane d'ultrafiltration de sorte qu'une couche hautement concentrée et visqueuse est laissée à la surface du cartilage.

Lorsque le talon touche (*heel strikes*) le sol [32, 34], la charge sur le genou augmente soudainement tandis que la vitesse d'entraînement est réduite à zéro. Ici, le film épais généré commence à s'échapper et l'épaisseur du film diminue. Cependant, étant donné que la charge n'est appliquée que pendant une courte période en marche normale, le

mécanisme de la lubrification par film comprimé (*Squeeze film*) est capable de maintenir un film viable de lubrifiant tout au long de cette étape.

Au fur et à mesure que le cycle progresse, la charge sur le genou diminue et la vitesse d'entraînement augmente. Il s'agit de la phase de transfert de poids (*Weight transfer*) du cycle de marche, où les résultats théoriques et expérimentaux suggèrent une lubrification élastohydrodynamique [47, 48]. De cette façon, le film de fluide synovial séparant les surfaces articulaires peut être maintenu.

Enfin, en position de coup de pied (*Toe-off*), la charge est maximale et la vitesse d'entraînement est très faible. La probabilité de partager lubrification limite (*boundary lubrication*) [49, 50], la lubrification par suintement (*weeping lubrication*) [42, 43] et la lubrification élastohydrodynamique à ce stade du cycle de marche comme mécanisme de lubrification mixtes, et peut donc maintenir un film fluide et empêcher le contact solide-solide [45].

La lubrification par suintement (*weeping lubrication*) est liée à la capacité des surfaces articulaires à absorber une certaine quantité de liquide synovial et lorsque le cartilage est comprimé, il libère du fluide de sa structure vers l'interface et de cette manière fournit un film de fluide sur lequel se déplace l'articulation. Il y a lieu de souligner que le concept de la lubrification Ex-poro-hydrodynamique (XPHD) ou encore Ex-poro-élastohydrodynamique (XPEHD) dont la théorie sera présentée en détails dans le cinquième chapitre serait certainement inspiré de ce mode de lubrification qui est la lubrification par suintement ou en anglais « *weeping lubrication* ».

La lubrification limite est présente entre les deux surfaces du cartilage mais son épaisseur est insuffisante pour empêcher le contact d'aspérité à travers le film [51, 52]. L'effet de la lubrification limite du liquide synovial dans un système cartilage sur cartilage est que le liquide synovial adhère facilement aux surfaces du cartilage, ce qui contribue à les séparer et à diminuer les forces de friction. Le mécanisme de lubrification par contact est régi par la fraction glycoprotéique du liquide synovial, qui adhère fermement aux surfaces du cartilage articulaire. L'épaisseur de la couche moléculaire adsorbée à la surface varie de 1 à 10 nm en fonction de la taille moléculaire.

## I.6 Prothèses du genou

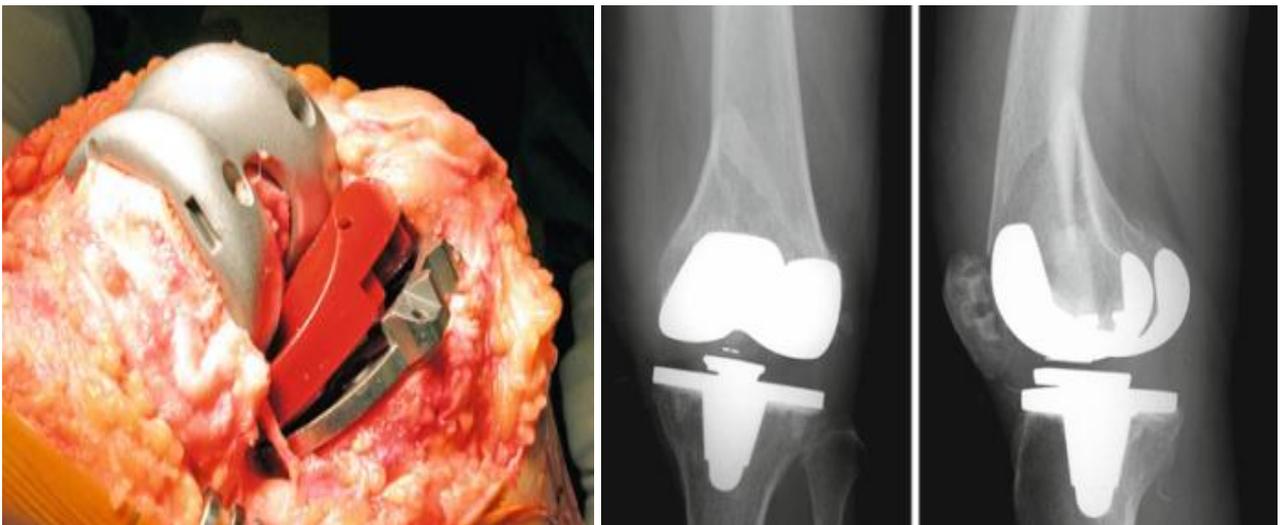
Les pathologies qui peuvent affecter le cartilage articulaire du genou sont principalement l'arthrose, et moins fréquemment l'arthrite inflammatoire. Les traitements non médicamenteux (perte de poids, exercice physique...) et les traitements médicamenteux (sérique visco-supplémentation) sont devenus inefficaces pour soulager la douleur aiguë et améliorer les restrictions de mouvement. Le remplacement de l'articulation du genou par une prothèse est la solution finale avant l'arthropathie de l'articulation du genou.

Le choix de l'implantation d'une prothèse articulaire dépend de l'extension du degré d'usure et aussi des ligaments et ménisques restants du genou.

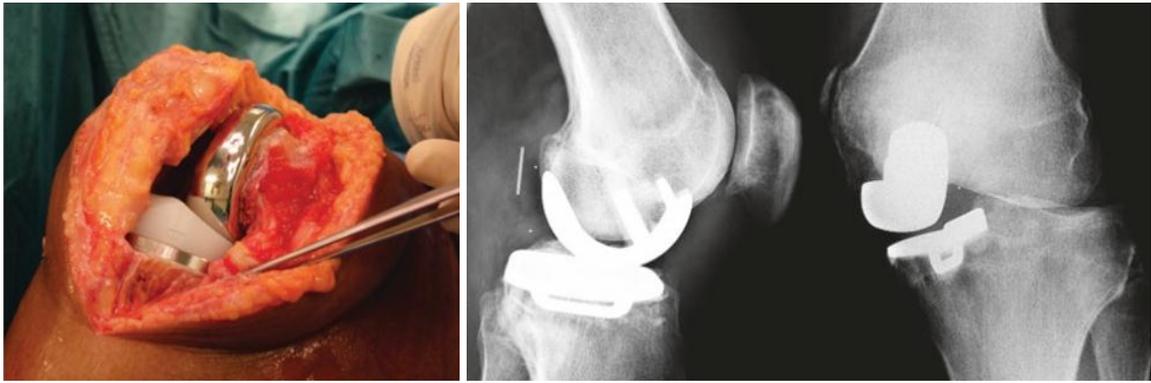
Les implants articulaires artificiels du genou sont classés selon les critères suivants :

### I.6.1 Les compartiments articulaires qu'elles remplacent

On parle de l'implantation de prothèses par une intervention chirurgicale qui supprime tout ou une partie des composants malades de l'articulation naturelle et les remplace par un équivalent artificiel. Il existe deux types de prothèses : une prothèse totale (tricompartimentales) si l'articulation est complètement changée (**figure I.13**) et une prothèse partielle (unicompartimentaire) si seulement une partie de l'articulation est changée (**figure I.14**).



**Fig. I.13 Constatations opérationnelles et radiographie de l'implantation d'une prothèse totale de genou [53]**



**Fig. I.14** Constatations opérationnelles et radiographie de l'implantation d'une prothèse unicompartimentaires de genou [54]

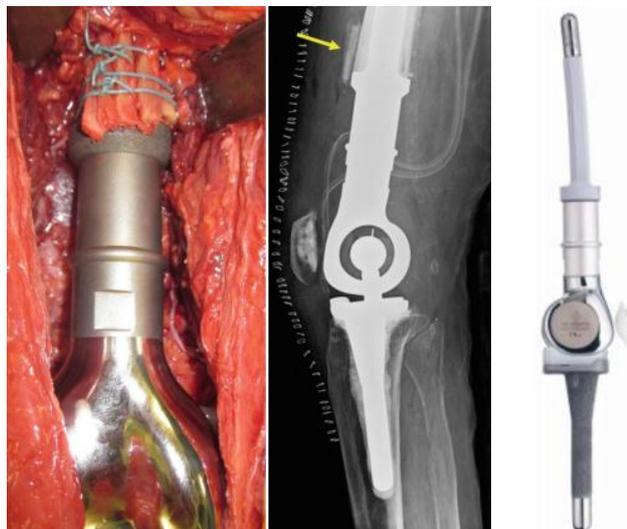
**I.6.2 Le mode de fixation :** La fixation avec ou sans ciment.

**I.6.3 Le mode de stabilisation :** maintenir ou sacrifier le ligament croisé postérieur

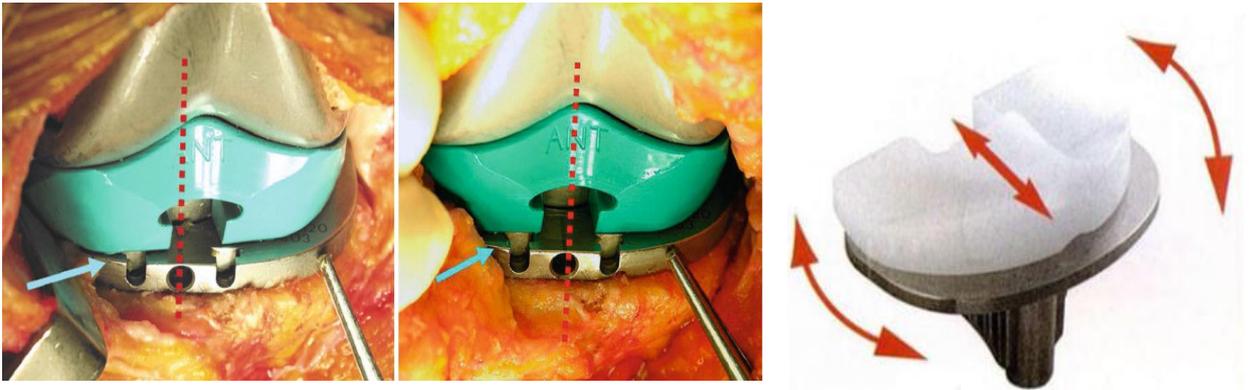
**I.6.4 La contrainte :**

Il en existe deux types :

- ❖ une prothèse à charnière (**figure I.15**) où les pièces sont contraintes par une charnière ce qui apporte une grande sécurité pour la stabilité de la prothèse,
- ❖ une prothèse à glissement (**figure I.16**) où les pièces fémorale et tibiale sont indépendantes, elle est dite "à glissement" car les pièces ne sont pas contraintes (il n'existe pas de charnière entre les deux pièces, le fémur glisse sur le tibia).



**Fig. I.15** Constatations opérationnelles et radiographie de l'implantation d'une prothèse à charnières [53]



**Fig. I.16 Constatations opérationnelles de l'implantation d'une prothèses à glissement**

[53]

### I.6.5 Les matériaux des implants

Divers matériaux ont été utilisés pour fabriquer les prothèses de genou. Pour les fémoraux on utilise des alliages de chrome-cobalt avec ou sans revêtement (hydroxyapatite), du titane, de l'inox, de l'oxyde de zirconium et des céramiques, et pour les tibiaux on utilise du polyéthylène ou polyéthylène serti dans du métal (alliage de titane, chrome-cobalt, inox).

### I.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on s'est focalisé principalement sur l'anatomie et la physiologie de l'articulation synoviale. La capacité de l'articulation synoviale à fournir un tel mouvement souple sur une large gamme de charge au cours de la vie d'un individu avec un coefficient de frottement très faible est stupéfiante.

On peut affirmer au travers cette étude bibliographique que la lubrification de l'articulation n'est pas uniquement due au liquide synovial ou au cartilage articulaire, mais à une interaction synergique complexe des deux.

La lubrification des articulations est compliquée, tout comme le rôle joué par les substances constituant le liquide synovial pour l'établissement des différents mécanismes de lubrification (limite, mixte, ...). Les trois substances du liquide synovial impliquées dans la lubrification sont [55, 56] : l'acide hyaluronique [57, 58], la Lubricine et les lipides [59]. Il a été démontré que la concentration d'HA est directement liée à l'augmentation de la viscosité dans le liquide synovial [60, 61, 62, 63]. La lubricine est un glycoprotéine présent dans le liquide synovial et sur la couche superficielle du cartilage articulaire, et joue donc un rôle important dans l'intégrité du cartilage.

Plusieurs études récentes ont montré que la lubricine est importante pour la préservation physiologique du cartilage et peut avoir des implications importantes pour le traitement ou la prévention des maladies articulaires [64, 65, 66]. Les lipides en particulier les phospholipides sont connus pour leur capacité lubrifiante.

Par conséquent, la prochaine étape de la recherche sur le composant lubrifiant de l'environnement articulaire semble consister à tester la présence de phospholipides à la surface d'appui [67, 68]. D'autres preuves soutenant un rôle du phospholipide dans la lubrification de l'articulation ouvriraient également une nouvelle voie de recherche dans le développement d'un liquide synovial artificiel efficace à utiliser à la fois dans les articulations naturelle et artificielle [69, 70, 71].

Les cartilages articulaires ont un comportement mécanique remarquable. La structure du tissu cartilagineux ainsi que la couche moléculaire du type phospholipidique et les polyélectrolytes que l'on retrouve à l'interface (cartilage/fluide) dans une articulation saine, permettent un fonctionnement tribologique avec un coefficient de frottement très faible, peu d'usure et résistent aux contraintes mécaniques [72, 73, 74, 75, 76].

L'objectif principal de cette recherche est d'utiliser les concepts de la tribologie appliquée au vivant (la bio-tribologie) en vue de concevoir des prothèses articulaires plus performantes et durables fonctionnant à faible coefficient de frottement.

## I.8 Références

- [1] V. C. Mow and W. M. Lai, "Mechanics of Animal Joints," *Annual Review of Fluid Mechanics*, pp. 247-288, 1979.
- [2] R. Collins , "A model of lubricant gelling in synovial joints," *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, vol. 33, p. 93-123, 1982.
- [3] M. C. Ionut, Recherche des assemblages moléculaires actifs en biolubrification en vue du diagnostic et de la thérapeutique précoce de pathologies articulaires, vol. 14, Thèse, L'université Claude Bernard Lyon 1, 2012, p. 235-247.
- [4] D. J. SCHNECK and J. D. BRONZINO, *Biomechanics: Principles and applications*, CRC Press LLC, 2002.
- [5] M. Flannery , E. Jones and C. Birkinshaw, "Analysis of wear and friction of total knee replacements part II: Friction and lubrication as a function of wear," *Wear*, vol. 265, pp. 1009-1016, 2008.
- [6] K. M. Oates, W. E. Krause, R. L. Jones and R. H. Colby, "Rheopexy of synovial fluid and protein aggregation," *Journal of the Royal Society Interface*, vol. 3, p. 167-174, 2005.
- [7] A. G. Ogston and J. E. Stanier, "The dimensions of the particle of hyaluronic acid complex in synovial fluid," *Biochemical journal*, vol. 49, no. 5, p. 585-590, 1951.
- [8] Y. Mahdia, Etude Biomécanique de l'Articulation du Genou Humain. Caractérisation Mécanique et Modélisation de l'Écoulement du Fluide Synovial en Ecrasement lors d'un Cycle de Marche, Thèse, L'Université 20 Août 1955, 2014.
- [9] M. S. Kung , J. Markantonis, S. D. Nelson and P. Campbell, "The Synovial Lining and Synovial Fluid Properties after Joint Arthroplasty," *Lubricants*, vol. 3, no. 2, pp. 394-412, 2015.
- [10] R. Marks, "Osteoarthritis and Articular Cartilage Biomechanics and Novel Treatment Paradigms," *Advances in Aging Research*, vol. 3, pp. 297-309, 2014.
- [11] X. Chevalier and P. Richette, "Cartilage articulaire normal anatomie, physiologie, métabolisme, vieillissement," *EMC - Rhumatologie-Orthopédie*, vol. 2, no. 1, pp. 41-58, 2005.
- [12] R. J. Minns and F. S. Steven, "The collagen fibril organization in human articular cartilage," *Journal of anatomy*, vol. 123, no. 2, p. 437-457, 1977.
- [13] T. W. Glenister, "An embryological view of cartilage," *Journal of anatomy*, vol. 122, no. 2, p. 323-330, 1976.
- [14] H. Lipshitz , R. Etheredge and M. Glimcher , "In vitro wear of articular cartilage," *The Journal of Bone and Joint surgery. American*, vol. 57, no. 4, pp. 527-534, 1975.
- [15] C. McDevitt and H. Muir, "Biochemical changes in the cartilage of the knee in experimental and natural osteoarthritis in the dog," *The Journal of Bone and Joint Surgery. British*, Vols. 58-B, no. 1, pp. 94-101, 1976.

- [16] V. C. Mow, A. Ratcliffe and A. Poole, "Cartilage and diarthrodial joints as paradigms for hierarchical materials and structures," *Biomaterials*, vol. 13, no. 2, pp. 67-97, 1992.
- [17] A. Maroudas, H. Muir and J. Wingham, "The correlation of fixed negative charge with glycosaminoglycan content of human articular cartilage," *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - General Subjects*, vol. 177, no. 3, pp. 492-500, 1969.
- [18] M. E. Camosso and G. Marotti, "The Mechanical Behavior of Articular Cartilage Under Compressive Stress," *The Journal Of Bone & Joint Surgery - Archive*, vol. 44, no. 4, pp. 699-709, 1962.
- [19] S. M. Elmore, L. Sokoloff, G. Norris and P. Carmeci, "Nature of "imperfect" elasticity of articular cartilage," *Journal of Applied Physiology*, vol. 18, no. 2, pp. 393-96, 1963.
- [20] W. C. Hayes and L. F. Mockros, "Viscoelastic properties of human articular cartilage," *Journal of Applied Physiology*, vol. 31, no. 4, pp. 562-68, 1971.
- [21] W. C. Hayes, L. M. Keer, G. Herrmann and L. F. Mockros, "A mathematical analysis for indentation tests of articular cartilage," *Journal of Biomechanics*, vol. 5, no. 5, pp. 541-551, 1972.
- [22] R. Hori and L. Mockros, "Indentation tests of human articular cartilage," *Journal of Biomechanics*, vol. 9, no. 4, pp. 259-268, 1976.
- [23] J. M. Coletti, W. H. Akeson and S. L.-y. Woo, "A Comparison of the Physical Behavior of Normal Articular Cartilage and the Arthroplasty Surface," *The Journal Of Bone & Joint Surgery - Archive*, vol. 54, no. 1, pp. 147-160, 1972.
- [24] J. M. Mansour and V. C. Mow, "Closure to "Discussions of On the Natural Lubrication of Synovial Joints: Normal and Degenerate"," *ASME J. Lubr. Technol.*, vol. 99, no. 2, p. 172-173, 1977.
- [25] P. Torzilli and V. Mow, "On the fundamental fluid transport mechanisms through normal and pathological articular cartilage during function—II. The analysis, solution and conclusions," *Journal of Biomechanics*, vol. 9, no. 9, pp. 587-606, 1976.
- [26] C. McCutchen, "The frictional properties of animal joints," *Wear*, vol. 5, no. 1, pp. 1-17, 1962.
- [27] R. Mulholland, P. Millington and J. Manners, "Some aspects of the mechanical behaviour of articular cartilage," *Annals of the Rheumatic Diseases*, vol. 34, no. Suppl 2, pp. 104-7, 1975.
- [28] A. Maroudas, P. Bullough, S. A. V. Swanson and M. A. R. Freeman, "The permeability of articular cartilage," *The Journal of Bone and Joint Surgery. British*, vol. 50, no. B(1), pp. 166-177, 1968.
- [29] H. Muir, P. Bullough and A. Maroudas, "The distribution of collagen in human articular cartilage with some of its physiological implications," *The Journal of bone and joint surgery*, vol. 52B, no. 3, pp. 554-63, 1970.
- [30] J. Edwards, "Physical Characteristics of Articular Cartilage," *Proc. Inst. Mech. Eng.*, vol. 181, no. 10, pp. 16-24, 1966.

- [31] P. Willems, B. Schepens and C. Detrembleur, "Marche normale," *Kinésithérapie-Médecine physique-Réadaptation*, pp. 26-007, 2012.
- [32] J. Dumbleton, *Tribology of natural and artificial joints*, Elsevier scientific publishing company, 1981.
- [33] M. Scherge and S. S. Gorb, *Biological Micro- and Nanotribology: Nature's Solutions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [34] A. M. Ali and A. E. Yousif, "The Role of Lubrication Mechanisms in the Knee Synovial Joints," *Al-Nahrain University, College of Engineering Journal (NUCEJ)*, vol. 11, no. 3, pp. 522-535, 2008.
- [35] F. C. LINN, "Lubrication of animal joints: I. The arthrotripsometer," *The journal of Bone & Joint Surgery*, vol. 49, no. 6, pp. 1079-1098, 1967.
- [36] B. Hills and R. Crawford, "Normal and prosthetic synovial joints are lubricated by surface-active phospholipid: a hypothesis," *The Journal of Arthroplasty*, vol. 18, no. 4, pp. 499-505, 2003.
- [37] S. M. McNary, K. A. Athanasiou and A. H. Reddi, "Engineering Lubrication in Articular Cartilage," *TISSUE ENGINEERING: Part B*, vol. 18, no. 2, pp. 88-100, 2012.
- [38] A. Unsworth, D. Dowson and V. Wright, "Some new evidence on human joint lubrication," *Annals of the Rheumatic Diseases*, vol. 34, no. 4, p. 277, 1975.
- [39] T. Gore, G. Higginson and R. E. Kornberg, "Some Evidence of Squeeze-Film Lubrication in Hip Prostheses," *Engineering in Medicine*, vol. 10, no. 2, pp. 89-95, 1981.
- [40] P. S. Walker, D. Dowson, M. D. Longfield and V. Wright, "' Boosted lubrication" in synovial joints by fluid entrapment and enrichment," *Annals of the Rheumatic Diseases*, vol. 27, no. 6, p. 512-520, 1968.
- [41] D. Dowson, M. LONGFIEL, P. S. Walker and V. Wright, "An investigation of friction and lubrication in human joints," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 182, no. 3, p. 68, 1967.
- [42] P. Lewis and C. McCutchen, "Sponge-hydrostatic and weeping bearings," *Nature*, vol. 184, p. 1284-1285, 1959.
- [43] P. Lewis and C. McCutchen, "Experimental evidence for weeping lubrication in mammalian joints," *Nature*, vol. 1285-11285, p. 1285-11285, 1959.
- [44] T. Murakami, H. Higaki, Y. Sawae, N. Ohtsuki, S. Moriyama and Y. Nakanishi, "Adaptive multimode lubrication in natural synovial joints and artificial joints," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, vol. 212, no. 1, pp. 23-35, 1998.
- [45] C. W. McCutchen, "Physiological Lubrication," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 181, no. 10, p. 55-62, 1966.
- [46] M. M. Panjabi and A. A. White, "Biomechanics in the Musculoskeletal System," *Churchill Livingstone*, pp. 151-166, 2001.

- [47] G. R. Higginson, "Elastohydrodynamic Lubrication in Human Joints," *Engineering in Medicine*, vol. 7, no. 1, p. 35–41, 1978.
- [48] V. Wright and D. Dowson, "Lubrication and cartilage," *Journal of Anatomy*, vol. 121, no. 1, p. 107–118, 1976.
- [49] R. Crockett, "Boundary Lubrication in Natural Articular Joints," *Tribology Letters*, vol. 35, p. 77–84, 2009.
- [50] T. Schmidt and R. Sah, "Effect of synovial fluid on boundary lubrication of articular cartilage," *Osteoarthritis and Cartilage*, vol. 15, no. 1, pp. 35-47, 2007.
- [51] J. Halling, *Principles of Tribology*, THE MACMILLAN PRESS LTD, 1979.
- [52] S. Wen and P. Huang, *Principles of Tribology*, Wiley, 2018.
- [53] C. Wooshin, *Knee Joint Arthroplasty*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [54] J.-N. Argenson and D. F. Dalury, *Partial Knee Arthroplasty*, Springer International Publishing, 2019.
- [55] J. A. Buckwalter, "Articular cartilage," *Instructional Course Lectures*, vol. 32, pp. 349-370, 1983.
- [56] C. W. Mcutchen, "Boundary lubrication by synovial fluid: demonstration and possible osmotic explanation," *Federation of American Societies for Experimental Biology*, vol. 25, no. 3, pp. 1061-1068, 1966.
- [57] K. Yielding, G. Tomkins and J. Bunim, "Synthesis of Hyaluronic Acid by Human Synovial Tissue Slices," *Science*, vol. 125, no. 3261, p. 1300, 1957.
- [58] S. Myers and T. Christine, "Hyaluronate Synthesis by Synovial Villi in Organ Culture," *Arthritis and Rheumatism*, vol. 26, no. 6, pp. 764-770, 1983.
- [59] J. Rabinowitz, J. Gregg and J. Nixon, "Lipid composition of the tissues of human knee joints: 11. synovial fluid in trauma," *Clinical Orthopaedics and Related Research*, vol. 190, pp. 292-298, 1984.
- [60] A. Ogston and J. Stanier, "Some effects of hyaluronidase on the hyaluronic acid of ox synovial fluid, and their bearing on the investigation of pathological fluids," *The Journal of physiology*, vol. 119, no. 2-3, pp. 253-8, 1953.
- [61] H. Chikama, "The role of protein and hyaluronic acid in the synovial fluid in animal joint lubrication," *Nihon Seikeigeka Gakkai Zasshi*, vol. 59, no. 5, pp. 559-572, 1985.
- [62] T. Laurent, U. Laurent and J. Fraser, "The structure and function of hyaluronan: An overview," *Immunology & Cell Biology*, vol. 74, no. 2, pp. a1-a7, 1996.
- [63] K. Marshall, "Intra-articular hyaluronan therapy," *Current opinion in rheumatology*, vol. 12, no. 5, pp. 468-74, 2000.
- [64] G. Musumeci, "The role of lubricin in normal and pathological joint tissue: a contemporary review," *OA Anatomy*, vol. 1, no. 1, p. 2, 2013.
- [65] G. D. Jay and K. A. Waller, "The biology of Lubricin: Near frictionless joint motion," *Matrix Biology*, vol. 39, pp. 17-24, 2014.

- [66] G. D. Jay, J. R. Torres, M. L. Warman, M. C. Laderer and K. S. Breuer, "The role of lubricin in the mechanical behavior of synovial fluid," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 104 , no. 15, pp. 6194-6199, 2007.
- [67] B. Hills, "Boundary lubrication in vivo," *Proceedings of the institution of mechanical engineers part h journal of engineering in medicine*, vol. 214, no. 1, pp. 83-94, 2000.
- [68] B. Hills, *The biology of surfactant*, Cambridge : Cambridge University Press, 1988.
- [69] B. A. Hills, "Oligolamellar lubrication of joints by surface active phospholipid," *The Journal of rheumatology*, vol. 16, no. 1, pp. 82-91, 1989 .
- [70] N. Gavryushenko, "Recommendations with respect to the improvement of lubricating qualities of synovial fluid in artificial joints," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H: Journal of Engineering in Medicine*, vol. 207, no. 2, pp. 111-114, 1993.
- [71] J. Pickard, J. Fisher, E. Ingham and J. Egan, "Investigation into the effects of proteins and lipids on the frictional properties of articular cartilage," *Biomaterials*, vol. 19, no. 19, pp. 1807-1812, 1998.
- [72] K. Kuettner, M. Aydelotte and E. Thonar, "Articular cartilage matrix and structure: a minireview," *J Rheumatol Suppl*, vol. 27, pp. 46-8, 1991 .
- [73] M. Freeman, S. Swanson and P. Manley, "Stress-lowering function of articular cartilage," *Medical and biological engineering*, vol. 13, p. 245-251, 1975 .
- [74] F. Ghadially, J. Lalonde and . J. Wedge, "Ultrastructure of normal and torn menisci of the human knee joint," *Journal of Anatomy*, vol. 136, no. 4, p. 773-79, 1983.
- [75] . D. Guerra, . L. Frizziero, M. Losi , G. Mezzadri and . I. Pasquali-Ronchetti, "Ultrastructural identification of a membrane-like structure on the surface of normal articular cartilage," *Journal of Submicroscopic Cytology and Pathology*, vol. 28, no. 3, pp. 385-393, 1996.
- [76] G. Ballantine and G. Stachowiak, "The effects of lipid depletion on osteoarthritic wear," *Wear*, vol. 253, no. 3-4, pp. 385-393, 2002 .

---



# Chapitre II

Théorie de la lubrification  
hydrodynamique par fluides à  
couples de contraintes

---



## Chapitre II

# Théorie de la lubrification hydrodynamique par fluides à couples de contraintes

### II.1 Introduction

Le sujet traité dans cette recherche ayant trait à la biotribologie qui est par définition la science du frottement, de l'usure, et de la lubrification appliquée aux systèmes biologiques ou à des phénomènes naturels [1, 2, 3]. La biotribologie est un domaine diversifié et multiphysique qui a un impact sur tous les aspects de notre vie quotidienne, des implants prothétiques aux produits de soins personnels et au patinage sur la glace. Il s'agit d'un domaine pertinent, passionnant, et en plein essor. Les nombreux sujets de recherche et d'investigations auxquels s'intéresse la bio-tribologie incluent entre autres :

- ❖ les articulations et les ligaments naturels : articulations synoviales et cartilagineuses humaines et animales,
- ❖ les remplacements de tissus artificiels : bio-échafaudages, hydrogels, peau, dentaire, os, ménisque et tendons,
- ❖ les prothèses et les implants : joints articulaires, cathéters, pompes cardiaques, stents,
- ❖ la biomimétique : matériaux, lubrifiants, et mécanismes de lubrification bio-inspirés,
- ❖ la locomotion humaine et animale; glissade et accidents; conception de la surface de la chaussée,
- ❖ la tribologie oculaire: surfaces oculaires, lentilles de contact, lubrification par des larmes,
- ❖ la tribologie cutanée: dommages et mécanismes de cloques, escarres, lubrification par la sueur,
- ❖ la tribologie dentaire: usure des dents et des implants, ancrage des implants, tribo-corrosion et fracture,
- ❖ la tribologie sportive : adhérence de l'équipement, sports de neige et de glace, conception à faible friction,

- ❖ la tribologie des phénomènes naturels: tremblements de terre; les avalanches; glissement de terrain,
- ❖ etc.

Le fluide synovial (ou la synovie) décrit en détails dans le chapitre précédent présente incontestablement un comportement rhéologique non Newtonien. C'est un liquide biologique (bio-lubrifiant) fortement visqueux intercalé entre les cartilages osseux et remplissant plusieurs fonctions. Il limite la friction des os entre eux, amortit les chocs, fournit les nutriments et l'oxygène nécessaires aux cellules du cartilage (les chondrocytes), et élimine les déchets métaboliques provenant du cartilage articulaire et d'éventuels corps étrangers. Il est sécrété ou synthétisé par les cellules de la membrane synoviale (les synoviocytes) et il est riche en acide hyaluronique. C'est ce dernier qui confère au liquide synovial son pouvoir lubrifiant.

La présence de longues chaînes moléculaires de l'acide hyaluronique qui est le constituant majeur de la synovie influe sur la rhéologie de celle-ci rendant ainsi son comportement non-Newtonien.

La littérature technique offre plusieurs modèles mathématiques de fluides non Newtoniens qui se distinguent entre eux par leur degré de complexité. Parmi ces modèles, on a retenu le modèle de fluide polaire à couples de contraintes qui a été utilisé par plusieurs auteurs [4, 5, 6, 7] qui ont mis en évidence les effets positifs des couples de contraintes sur l'amélioration de la capacité de charge des articulations par comparaison au cas du lubrifiant Newtonien.

L'objet de ce chapitre est la présentation des équations de base de la lubrification hydrodynamique à l'aide d'un fluide à couples de contraintes. L'analyse théorique est basée sur la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes dans le cas d'écoulement de films minces visqueux en régime isotherme et laminaire.

## II.2 Équations de base de la mécanique du micro- continuum de V. K. Stokes

La théorie des fluides à couples de contraintes, développée par Vijay Kumar Stokes [8] à partir des premiers travaux des frères Cosserat [9] effectués dans le cas des milieux élastiques polaires, est un cas particulier de la théorie des fluides polaires qui considère

les couples de contraintes et les couples de volume en plus des forces de surface et des forces de volume traditionnels. La théorie des fluides à couples de contraintes et les théories associées sont des modèles de fluides dont la microstructure présente dans le solvant est mécaniquement significative. Cette théorie a été largement appliquée à l'étude du comportement des films lubrifiants minces [10]. Un autre domaine d'application de la théorie des fluides à couples de contraintes est celui des fluides réels porteurs de particules métalliques chargées, et soumis à un champ électromagnétique externe qui fait tourner les particules par rapport à leurs voisines.

D'après la théorie isotherme du micro-continuum de V. K. Stokes (1966), les équations de base qui caractérisent l'écoulement de fluide à couples de contraintes compressible sont :

❖ Équation scalaire de continuité :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II-1})$$

où  $D\rho/Dt = \partial\rho/\partial t + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho \cdot \vec{V}$

❖ Équation vectorielle de mouvement :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\rho \vec{c}) + \overrightarrow{\operatorname{div}}(\overline{\overline{\tau}}^{(s)}) + \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{div}}(\overline{\overline{M}})) \quad (\text{II-2})$$

où :

$\rho$  : masse volumique du fluide,

$t$  : variable temporelle,

$\vec{V}$  : vecteur vitesse du fluide,

$D\vec{V}/Dt$  : vecteur accélération du fluide tel que  $\vec{a} = D\vec{V}/Dt = \partial\vec{V}/\partial t + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V}$ ,

$\vec{g}$  : vecteur force de volume par unité de masse,

$\vec{c}$  : vecteur couple de volume par unité de masse,

$\overline{\overline{\tau}}^{(s)}$  : tenseur des contraintes d'ordre 2 symétrique,

$\overline{\overline{M}}$  : tenseur des couples de contrainte d'ordre 2.

L'équation constitutive du fluide à couples de contraintes s'écrit en notation indicielle comme suit :

$$T_{ji} = \underbrace{-p \delta_{ij} + \lambda \operatorname{div}(\vec{V}) \delta_{ij} + 2 \mu D_{ij}}_{\tau_{ij}^{(s)} = T_{(ij)}} - \underbrace{\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} (m_{,k} + 4 \eta \omega_{k,rr} + \rho c_k)}_{T_{[ij]} = \text{partie anti-symétrique}} \quad (\text{II-3})$$

$i, j = 1, 2, 3$

où :

$p$  : pression dans le fluide

$\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker ou tenseur unité

$\lambda$  et  $\mu$  : coefficients de viscosité du fluide

$D_{ij}$  : tenseur des taux de déformation symétrique,  $D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

$\varepsilon_{ijk}$  : tenseur de permutation d'ordre trois antisymétrique

$c_k$  : vecteur des couples de volume, et  $\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = D_{\alpha\alpha} = \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}$

L'équation du tenseur des couples de contraintes est donnée par :

$$M_{rk} = \frac{1}{3} M_{nn} \delta_{rk} + 4 \eta \omega_{k,r} + 4 \acute{\eta} \omega_{r,k} \quad (\text{II-4})$$

où :

$\omega$  : vecteur tourbillon ou taux de rotation,  $\omega = \frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{V})$  ou encore  $\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$

$M_{nn} = m$  : trace du tenseur des couples de contraintes,  $M_{nn} = \operatorname{trace}(\bar{M})$

$\eta$  et  $\acute{\eta}$  : constantes matérielles responsables de la propriété des couples de contraintes.

La virgule dans les suffixes indique la différenciation covariante et  $\omega_{k,rr}$  signifie  $\omega_{k,11} + \omega_{k,22} + \omega_{k,33}$ . Ces constantes physiques doivent vérifier les inégalités suivantes :

$$\mu \geq 0; \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0; \quad \eta \geq 0; \quad |\acute{\eta}| \leq \eta \quad (\text{II-5})$$

Notons que le vecteur tourbillon et le tenseur tourbillon ou taux de rotation

antisymétrique  $W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$  sont reliés par les équations suivantes :

$$W_{ij} = \varepsilon_{ijr} \omega_r \quad ; \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{irs} W_{rs}$$

Il existe un paramètre de longueur  $\ell = \sqrt{\eta/\mu}$  qui est une mesure caractéristique de la polarité du modèle de fluide et ce paramètre est identiquement nul dans le cas de fluides non polaires ou Newtoniens.

Le régime d'écoulement étant par hypothèse isotherme (température supposée constante dans le fluide), la dérivation de l'équation d'énergie à partir du premier principe de conservation de la thermodynamique n'est alors pas nécessaire.

En reportant l'équation du comportement rhéologique dans l'équation de la dynamique et en négligeant les forces et les couples de volume pour un fluide incompressible ou isovolume, on obtient les équations générales gouvernantes (Cf. [Annexe A pour les détails](#)) suivantes :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{II-6})$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overline{\operatorname{grad}}(p) - \mu \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}}(\vec{V})) - \eta \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}}(\vec{V}))) \quad (\text{II-7})$$

Sachant que :  $\nabla^2 \vec{V} = \overline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{V})) - \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}}(\vec{V}))$ , l'équation (II-7) peut prendre la forme suivante :  $\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\operatorname{grad}} \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = -\overline{\operatorname{grad}}(p) + \mu \nabla^2 \vec{V} - \eta \nabla^4 \vec{V}$

## II.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cartésiennes

### II.3.1 Hypothèses de la théorie de Reynolds

La dérivation de l'équation de Reynolds nécessite les hypothèses suivantes :

- A. L'épaisseur du film  $h$  est très faible devant les autres dimensions du contact  $L$ , le rapport d'échelle entre ces grandeurs  $\frac{h}{L}$  doit être de l'ordre  $10^{-3}$ . Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, l'équation Reynolds ne peut s'appliquer.
- B. Le régime est laminaire ; en régime non laminaire il faudra utiliser une autre modélisation.
- C. Le milieu est continu, l'équation de Reynolds ne s'applique pas dans les zones où il y a rupture du film.
- D. Les forces massiques extérieures sont négligées, ce qui est très généralement vérifié sauf en magnétohydrodynamique.
- E. Les forces d'inertie dans le fluide sont négligeables devant les forces de viscosité et de pression, cela est vérifié dans le cas des films minces et laminaires.
- F. Il n'y a pas de glissement entre le fluide et les parois du contact ; la vitesse du fluide à la paroi est égale à celle des parois.

- G. La viscosité et la masse volumique du fluide ne varient pas à travers l'épaisseur du film.
- H. Les surfaces formant le contact sont supposées lisses et indéformables, ce qui permet de placer l'origine des axes sur cette surface.
- I. La courbure générale du film est négligée.
- J. La température ne varie pas à travers l'épaisseur du film, cette hypothèse n'est pas vérifiée ; elle est cependant très utilisée, car la résolution de l'équation Reynolds généralisée (3 – D) qui tient compte de l'effet thermique est très difficile.

### II.3.2 Analyse dimensionnelle des équations de mouvement pour un écoulement en film mince

Dans ce qui suit, on adopte les coordonnées cartésiennes classiques  $(O, x, y, z)$  pour l'écriture des équations (II-6) et (II-7) Soit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-8})$$

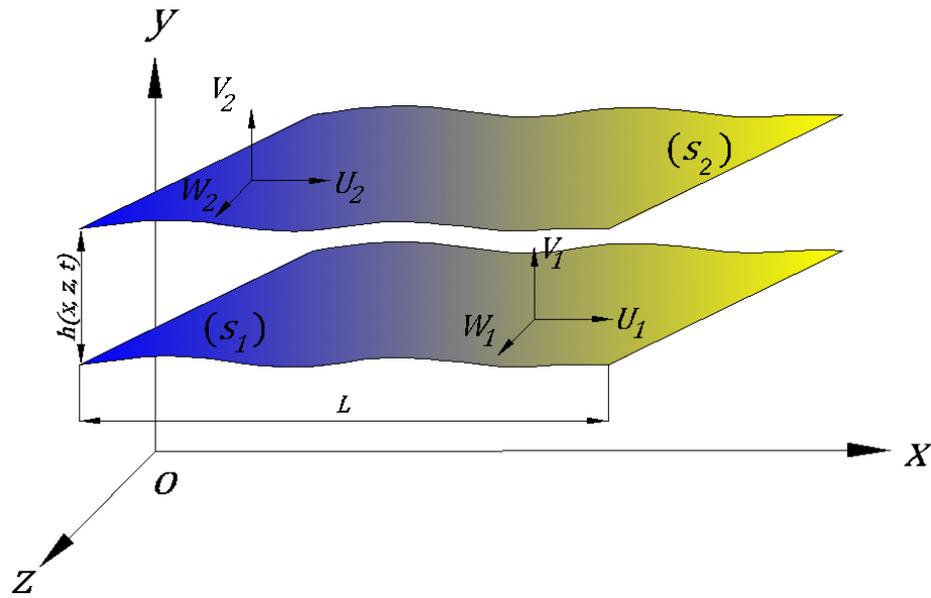
$$\rho \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{pmatrix} - \eta$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y \partial z^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial z} - \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial z^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2 \partial z} \\ - \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial z} - \frac{\partial^4 w}{\partial y \partial z^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y \partial z} \\ - \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial z} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^4 v}{\partial y^3 \partial z} - \frac{\partial^4 v}{\partial y \partial z^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \end{array} \right\} \quad (\text{II-9})$$

où :  $u, v$  et  $w$  sont respectivement, les composantes de la vitesse de l'écoulement suivant  $x, y$  et  $z$ . En coordonnées cartésiennes, l'opérateur de dérivation particulière s'exprime:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

En lubrification des films minces visqueux [11, 12], la dimension suivant l'épaisseur du film  $h$  étant très faible par rapport aux autres dimensions de l'écoulement (figure II.1). Ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes de l'équation (II-9) d'effectuer une analyse dimensionnelle (Cf. Annexe B pour les détails).



**Fig. II.1 Schéma général d'un contact en coordonnées cartésiennes**

Pour cela, on choisit les variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tilde{x} &= \frac{x}{L} & \tilde{u} &= \frac{u}{V} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} \\
 \tilde{y} &= \frac{y}{h} & \tilde{v} &= \frac{v}{\frac{Vh}{R}} & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} \\
 \tilde{z} &= \frac{z}{L} & \tilde{w} &= \frac{w}{V} & \tilde{t} &= \frac{V}{L} t
 \end{aligned}
 \tag{II-10}$$

où,  $L$  et  $V$  sont respectivement la dimension et la vitesse caractéristiques selon les axes  $(Ox)$  et  $(Oz)$ ,  $h$  et  $\frac{Vh}{L}$  celles suivant  $(Oy)$ ;  $\frac{V}{L}$ ,  $\mu_0$  et  $\eta_0$  définissent l'ordre de grandeur du temps et des coefficients de viscosité. Ce changement de variable conduit à poser  $\tilde{p} = \frac{h^2}{\mu_0 LV} p$ . Remarquons que la vitesse caractéristique  $V$  peut correspondre à la vitesse d'écrasement. Aussi, ce changement de variable met en évidence les 3 nombres sans dimension suivants :

$R_e = \frac{\rho V h}{\mu_0}$  : nombre de Reynolds relatif à l'épaisseur de film, qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide.

$\varepsilon = \frac{h}{L}$  : paramètre d'échelle, qui en lubrification est de l'ordre de  $10^{-3}$

$l_0^2 = \frac{\eta_0}{\mu_0}$  : rapport des coefficients de viscosité, généralement de l'ordre de 1

Compte tenu de ces changements de variable adimensionnelle dans l'équation (II-9), et en négligeant les termes multipliés soit par  $\varepsilon^2$  soit par  $\varepsilon^4$ , il vient (Annexe B):

$$\varepsilon R_e \begin{Bmatrix} \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} \\ 0 \\ \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \end{Bmatrix} - \tilde{\mu} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \end{Bmatrix} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ 0 \\ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-11})$$

Les termes en  $R_e$ , ou termes d'inertie, figurant dans le premier membre de l'équation ci-dessus seront négligés devant les termes de viscosité quand  $\varepsilon R_e \ll 1$ . Alors, si par hypothèse on néglige les forces d'inertie, il vient :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \end{Bmatrix} = -\tilde{\mu} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \\ 0 \\ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \end{Bmatrix} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \begin{Bmatrix} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \\ 0 \\ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \end{Bmatrix} \quad (\text{II-12})$$

Et en revenant aux variables dimensionnelles, les équations de mouvement (momentum) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{cases} \quad (\text{II-13})$$

L'intégration de ces équations en tenant compte des conditions aux limites imposées permettra de connaître les composantes du champ de vitesse de l'écoulement  $u$  et  $w$ .

### II.3.3 Détermination du champ de vitesse

Pour un écoulement bidimensionnelle (2D) en film mince visqueux, les équations de mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{cases} \quad (\text{II-14})$$

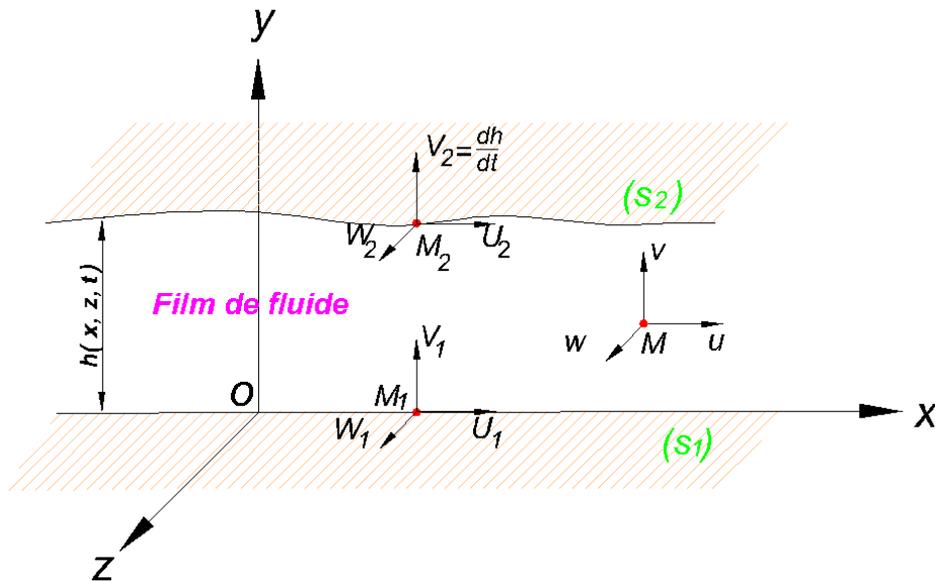
où  $p = p(x, z)$ ;  $u = u(x, y, z)$ ; et  $w = w(x, y, z)$

on remarque par ailleurs que la variable temporelle n'apparaît plus dans les équations (II-14) en raison de l'élimination du terme d'inertie.

Les conditions aux limites (figure II.2) sur les vitesses et les couples de contraintes sont :

$$\begin{aligned}
 y = 0 : \quad & u = U_1 ; \quad v = V_1 ; \quad w = W_1 ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 \\
 y = h : \quad & u = U_2 ; \quad v = V_2 = \frac{dh}{dt} ; \quad w = W_2 ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = 0
 \end{aligned}
 \tag{II-15}$$

où  $\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z}$



**Fig. II.2 Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cartésiennes**  
**(Paroi inférieure (S<sub>1</sub>) confondue avec le plan du référentiel (O, x, z))**

L'équation(II-14), est une équation différentielle linéaire d'ordre quatre à coefficients constants, la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière. Dans l'annexe C, on montre que pour un point de coordonnées (x, z) fixées les deux composantes de la vitesse d'écoulement s'expriment comme suit :

$$\begin{cases}
 u(y) = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{h}\right)y + \left(\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left[ y^2 - hy + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \\
 w(y) = W_1 + \left(\frac{W_2 - W_1}{h}\right)y + \left(\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \left[ y^2 - hy + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right]
 \end{cases}
 \tag{II-16}$$

### II.3.4 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

L'équation de Reynolds modifiée est obtenue à partir de l'intégration de l'équation de continuité (II-8) à travers l'épaisseur du film en suivant le même processus de dérivation que celui utilisé par Osborne Reynolds en 1886 [13]. Soit :

$$\underbrace{\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial u}{\partial x} dy}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial v}{\partial y} dy}_{I_2} + \underbrace{\int_0^{h(x,z,t)} \frac{\partial w}{\partial z} dy}_{I_3} = 0 \quad (\text{II-17})$$

Pour évaluer les intégrales  $I_1$  et  $I_3$ , on utilise la règle d'intégration de Leibnitz [14] qui s'écrit sous forme générale comme suit :

$$\begin{aligned} & \int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} \frac{\partial f(x,y,z,t)}{\partial x} dy \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1(x,z,t)}^{h_2(x,z,t)} f(x,y,z,t) dy + f(x,h_1,z,t) \frac{\partial h_1}{\partial x} - f(x,h_2,z,t) \frac{\partial h_2}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{II-18})$$

Soit :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u dy - U_2 \frac{\partial h}{\partial x} = \left( \frac{U_1 - U_2}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{12 \mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \left( -h^3 + 12hl^2 - 24 l^3 \tanh \left( \frac{h}{2l} \right) \right) \right) \\ I_2 = \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial x} + W_2 \frac{\partial h}{\partial z} - V_1 \\ I_3 = \frac{\partial}{\partial z} \int_0^h w dy - W_2 \frac{\partial h}{\partial z} = \left( \frac{W_1 - W_2}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{12 \mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \left( -h^3 + 12hl^2 - 24 l^3 \tanh \left( \frac{h}{2l} \right) \right) \right) \end{cases} \quad (\text{II-19})$$

Par conséquent, l'équation (II-17) devient :

$$\left( \frac{U_1 + U_2}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} - V_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{G(h,l)}{12 \mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{G(h,l)}{12 \mu} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) \quad (\text{II-20})$$

Si  $h = h(t)$ , on aura la forme suivante :

$$\frac{G(h,l)}{12 \mu} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) = \left( \frac{U_1 + U_2}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{W_1 + W_2}{2} \right) \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial t} - V_1 \quad (\text{II-21})$$

où :

$$G(h,l) = h^3 - 12hl^2 + 24 l^3 \tanh \left( \frac{h}{2l} \right) \quad (\text{II-22})$$

C'est l'équation de Reynolds modifiée écrite pour un écoulement bidimensionnel (2D) dont l'inconnue principale est la pression hydrodynamique dans le film fluide. C'est une équation aux dérivées partielles du second ordre qui n'admet généralement pas de solution analytique sauf dans le cas des contacts à géométrie simple. La résolution numérique de cette équation permettra formellement de connaître : le champ de pression, les vitesses  $u$  et  $w$ , et les contraintes de cisaillement dans le film.

## II.4 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques

### II.4.1 Analyse dimensionnelle des équations de mouvement pour un écoulement de film mince

Pour l'écriture de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques (figure II.3), on procédera de la même manière que dans le cas cartésien :

- ❖ En coordonnées cylindriques, l'équation de continuité (II-6) et de mouvement (II-7) deviennent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II-23})$$

$$\rho \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{u v}{r} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \\ \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \\ \Delta w \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} \Delta^2 u - \frac{2}{r^2} \Delta u - \frac{4}{r^2} \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{8}{r^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3 u}{r^4} \\ \Delta^2 v - \frac{2}{r^2} \Delta v + \frac{4}{r^2} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{8}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3 v}{r^4} \\ \Delta^2 w \end{pmatrix} \quad (\text{II-24})$$

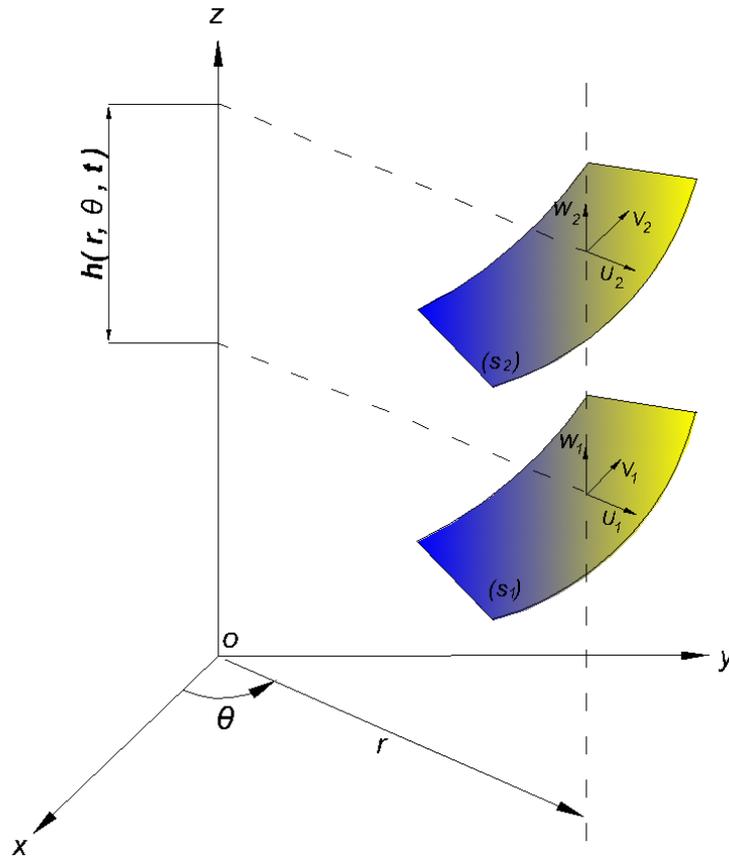
où :  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$

$\Delta(\ ) = \nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$  étant l'opérateur différentiel bien connu de Laplace.

$$\Delta^2(\ ) = \nabla^4(\ ) = \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4(\ )}{\partial \theta^4} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial z^4} +$$

$2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4(\ )}{\partial \theta^2 \partial z^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r \partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r^3} \right)$  qui est le bilaplacien.

$u$  : la composante du vecteur de vitesse d'écoulement dans la direction radiale  $r$   
 $v$  : la composante du vecteur de vitesse d'écoulement dans la direction angulaire  $\theta$   
 $w$  : la composante du vecteur de vitesse d'écoulement dans la direction axiale  $z$



**Fig. II.3 Schéma du contact hydrodynamique en coordonnées cylindriques**

❖ Les variables adimensionnelles sont cette fois-ci :

$$\begin{aligned}
 \tilde{r} &= \frac{r}{R} & \tilde{u} &= \frac{u}{W} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} & \tilde{p} &= \frac{h^2}{\mu_0 R W} p \\
 \tilde{z} &= \frac{z}{h} & \tilde{v} &= \frac{v}{W} & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} & R_e &= \frac{\rho W h}{\mu_0} \\
 \varepsilon &= \frac{h}{R} & \tilde{w} &= \frac{w R}{W h} & l_0^2 &= \frac{\eta_0}{\mu_0} & \tilde{t} &= \frac{W}{R} t
 \end{aligned}
 \tag{II-25}$$

Les équations de mouvement (*momentum*) (II-24) compte tenu de ces changements de variable et en négligeant les termes d'inertie et les termes multipliés soit par  $\varepsilon^2$  soit par  $\varepsilon^4$ , ( Cf. Annexe B pour les détails) se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

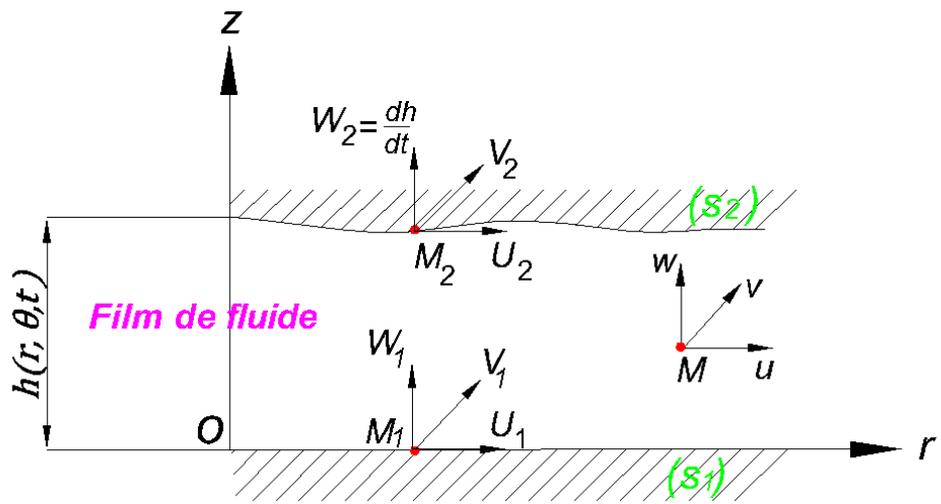
Soit en revenant aux variables dimensionnelles :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

**II.4.2 Détermination du champ de vitesse**

L'intégration des équations du système (II-27) on permettra d'obtenir les expressions des vitesses dans le fluide. Les conditions aux limites sur les vitesses (figure II.4) sont:

$$\begin{aligned} z = 0 \quad u = U_1 \quad v = V_1 \quad w = W_1 \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=0} = 0 \\ z = h \quad u = U_2 \quad v = V_2 \quad w = W_2 = \frac{dh}{dt} \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|_{z=h} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right|_{z=h} = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-28})$$



**Fig. II.4 Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cylindriques (Paroi inférieure (S<sub>1</sub>) confondue avec le plan du référentiel (O, r, θ))**

Comme en coordonnées cartésiennes, et après identifications des constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites (II-28), le champ des vitesses s'écrit :

$$\begin{cases} u = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{h}\right)z + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \\ v = V_1 + \left(\frac{V_2 - V_1}{h}\right)z + \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \end{cases} \quad (\text{II-29})$$

### II.4.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

Pour obtenir l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques, on doit intégrer l'équation de continuité à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(r,\theta,t)} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = \underbrace{\int_0^h \frac{\partial(ru)}{\partial r} dz}_{I_1} + \underbrace{\int_0^h \frac{\partial v}{\partial \theta} dz}_{I_2} + \underbrace{r \int_0^h \frac{\partial w}{\partial z} dz}_{I_3} = 0 \quad (\text{II-30})$$

La formule de Leibnitz nous permet de permuter l'opérateur de dérivation avec celui de l'intégration. Ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} I_1 = \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)h + r \left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right) \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r G(h,l)}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \right] \\ I_2 = \left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right) \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h,l)}{12\mu r} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \right] \\ I_3 = r w|_0^h = r(W_2 - W_1) = r \left( \frac{dh}{dt} - W_1 \right) = r \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_2}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} - W_1 \right) \end{cases} \quad (\text{II-31})$$

Par substitution dans l'équation (II-30), on obtient :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)h + r \left(\frac{U_1 - U_2}{2}\right) \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r G(h,l)}{12\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right) \right] + \left(\frac{V_1 - V_2}{2}\right) \frac{\partial h}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h,l)}{12\mu r} \left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) \right] \\ & + r \left( \frac{\partial h}{\partial t} + U_2 \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{V_2}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} - W_1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-32})$$

Ainsi, l'équation de Reynolds modifiée dans le cas général s'écrit en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{r G(h,l)}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{G(h,l)}{12\mu r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] \\ & = \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right)h + r \left(\frac{U_1 + U_2}{2}\right) \frac{\partial h}{\partial r} + \left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right) \frac{\partial h}{\partial \theta} + r \frac{\partial h}{\partial t} - rW_1 \end{aligned} \quad (\text{II-33})$$

## II.5 Calcul des différents paramètres de performance

Le calcul des différents paramètres de performance s'effectue selon les étapes suivantes :

- ❖ Choisir un système d'axes.
- ❖ Définition des conditions aux limites sur la vitesse des surfaces dans le système d'axes choisi.
- ❖ Ecriture une équation montrant l'épaisseur du film lubrifiant.
- ❖ Ecriture l'équation de Reynolds modifiée associée au contact étudié.
- ❖ Définition des conditions aux limites sur la pression.
- ❖ Calcul de la pression dans le film (résolution de l'équation de Reynolds modifiée).
- ❖ Calcul du débit.
- ❖ Calcul de la charge par intégration de la pression.
- ❖ Calcul de la force de frottement par intégration des contraintes de cisaillement sur les surfaces du contact.
- ❖ Calcul de la puissance dissipée dans le contact.

### II.5.1 Champ de pression dans le film

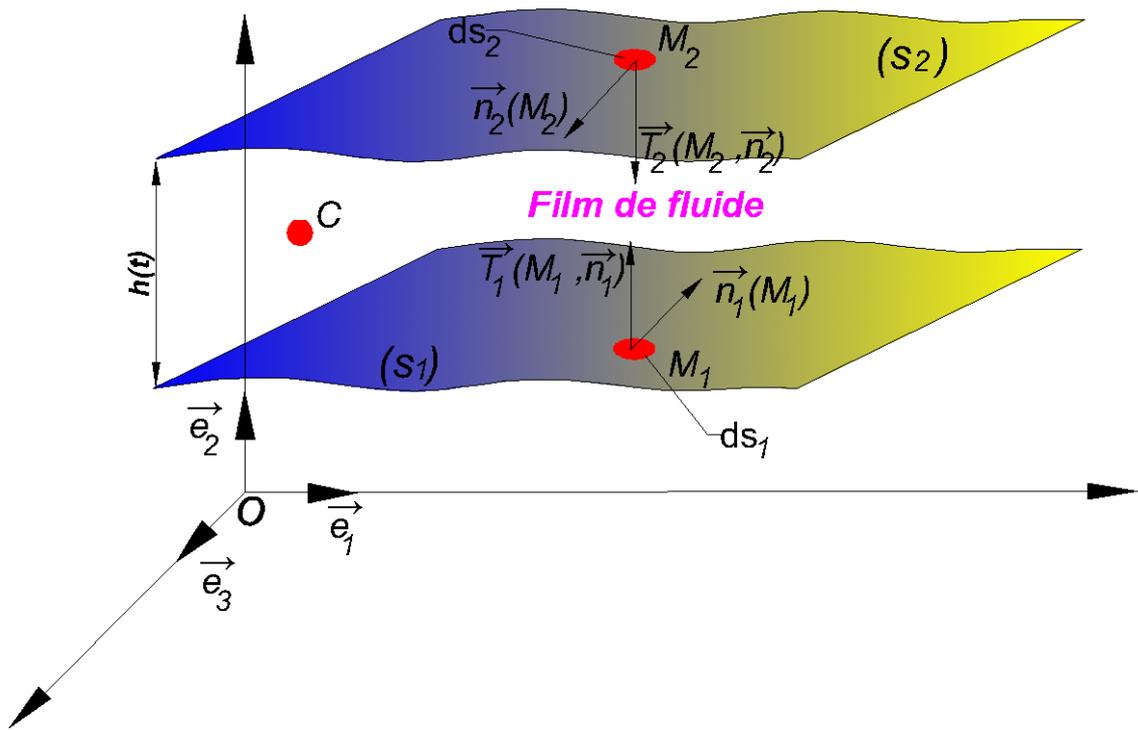
En général, le champ de pression est obtenu par intégration numérique de l'équation de Reynolds modifiée au moyen des méthodes des différences finies ou des éléments finis ou encore des volumes finis, compte tenu des conditions aux limites sur la pression. La pression calculée permettra de déduire aisément diverses caractéristiques du contact telles que la portance hydrodynamique (la capacité de charge), les débits de fuite, et la puissance dissipée.

### II.5.2 Action du fluide sur les parois du contact

L'action de contact  $\vec{T}$ , appelée le vecteur contrainte de Cauchy, exercée en un point  $M$  de la surface de contact, dépend uniquement du tenseur des contraintes  $T_{ij}$  en ce point et du vecteur normal  $\vec{n}$  (figure II.5):

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sum_{i=1}^3 T_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^3 T_{ij} n_j \vec{e}_i \quad (\text{II-34})$$

où :  $T_{ij}$  étant les composantes du tenseur des contraintes dans la base orthonormée  $\vec{e}_i$ ,  $n_j$  les composantes du vecteur normal en  $M$  orienté de la surface vers le fluide (normale extérieure).



**Fig.II.5 Action du fluide sur les parois d'un contact**

Les éléments de réduction en un point  $C$  quelconque du torseur des actions de contact du fluide sur la surface  $S$  du contact seront donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Résultante :} \quad \vec{R} = \iint_s \vec{T}(M, \vec{n}) \, ds \\ \text{Moment au point } C : \quad \vec{M}(C) = \iint_s \vec{CM} \wedge \vec{T}(M, \vec{n}) \, ds \end{array} \right. \quad (\text{II-35})$$

Aux parois du contact, le fluide lubrifiant se comporte comme un fluide Newtonien, car les couples de contraintes sont nuls aux parois, la matrice représentative du tenseur des contraintes à la paroi s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coordonnées} \\ \text{cartésiennes} \end{array} \right. [T_{ij}]_{y=0} = \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} -p & \mu \frac{\partial u}{\partial y} & 0 \\ & -p & \mu \frac{\partial w}{\partial y} \\ \text{Sym} & & -p \end{array} \right] \\ \text{Coordonnées} \\ \text{cylindriques} \end{array} [T_{ij}]_{z=0} = \begin{array}{l} \left[ \begin{array}{ccc} -p & 0 & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ & -p & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \text{Sym} & & -p \end{array} \right] \end{array} \quad (\text{II-36})$$

### II.5.3 Capacité de charge (portance HD)

Si la surface  $S$  est un plan admettant comme vecteur unitaire normal  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  dans les coordonnées cartésiennes et cylindriques, respectivement. L'intégration du champ de pression sur cette surface permet de calculer la capacité de charge  $W$  que le contact peut supporter :

$$W = \iint_S p \, ds \quad (\text{II-37})$$

### II.5.4 Force de frottement

L'intégration des contraintes de cisaillement permet de déterminer la force tangentielle exercée par le fluide sur la paroi (force de frottement) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coordonnées} \\ \text{cartésiennes} \end{array} F_f = \iint_S \tau_{xz} \, ds \right. \quad (\text{II-38})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coordonnées} \\ \text{cylindriques} \end{array} F_f = \iint_S \tau_{rz} \, ds \right.$$

### II.5.5 Vitesse moyenne de l'écoulement

Les vitesses moyennes de l'écoulement se calculent par :

#### a) Coordonnées cartésiennes

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dy \\ \langle w \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h w \, dy \end{array} \right. \quad (\text{II-39})$$

Tous calculs faits, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle u \rangle = \frac{U_2 + U_1}{2} - \frac{G(h, l)}{12 \mu h} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \langle w \rangle = \frac{W_2 + W_1}{2} - \frac{G(h, l)}{12 \mu h} \frac{\partial p}{\partial z} \end{array} \right. \quad (\text{II-40})$$

#### b) Coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} \langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u \, dz \\ \langle v \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h v \, dz \end{cases} \quad (\text{II-41})$$

Après intégration, on trouve :

$$\begin{cases} \langle u \rangle = \frac{U_2 + U_1}{2} - \frac{G(h, l)}{12 \mu h} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \langle v \rangle = \frac{V_2 + V_1}{2} - \frac{G(h, l)}{12 \mu h} \frac{\partial p}{r \partial \theta} \end{cases} \quad (\text{II-42})$$

### II.5.6 Débits de fuite

Le débit de fuite est calculé par intégration des composantes des vitesses moyennes aux bords de fuite. Dans le cas de forme rectangulaire, Les débits suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$  (figure II.6) :peuvent être calculés à l'aide d'expressions des vitesses moyennes il vient :

$$\begin{cases} Q_x = \int_0^B h u_{moy} \, dz = h \int_0^B u_{moy} \, dz = Bh \left( \frac{U_2 + U_1}{2} \right) - B \left( \frac{G(h, l)}{12 \mu} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ Q_z = \int_0^L h w_{moy} \, dx = h \int_0^L w_{moy} \, dx = Lh \left( \frac{W_2 + W_1}{2} \right) - L \left( \frac{G(h, l)}{12 \mu} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{II-43})$$

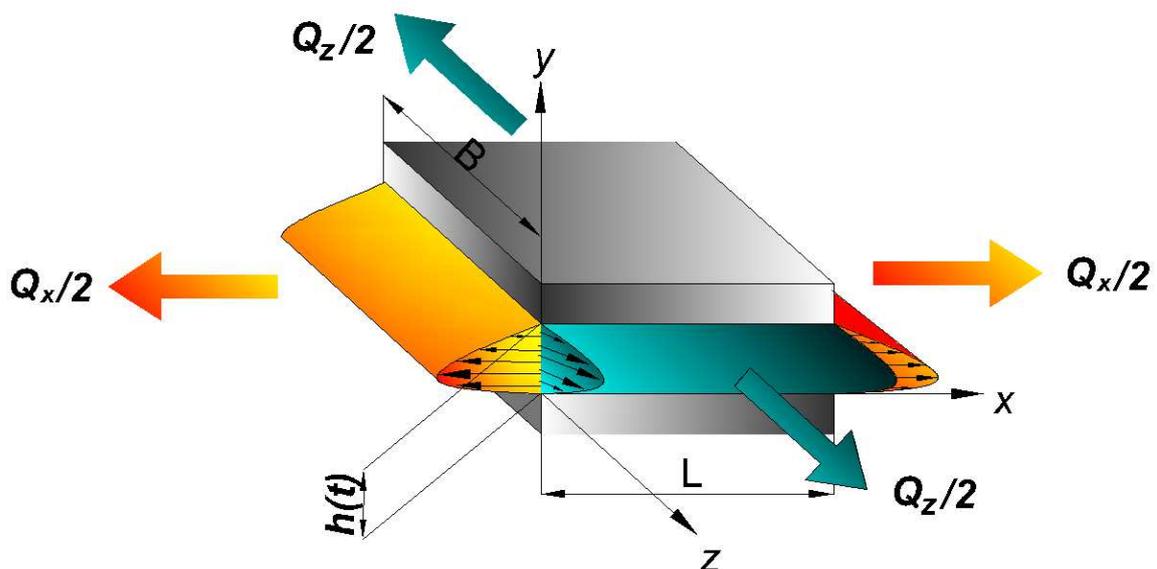
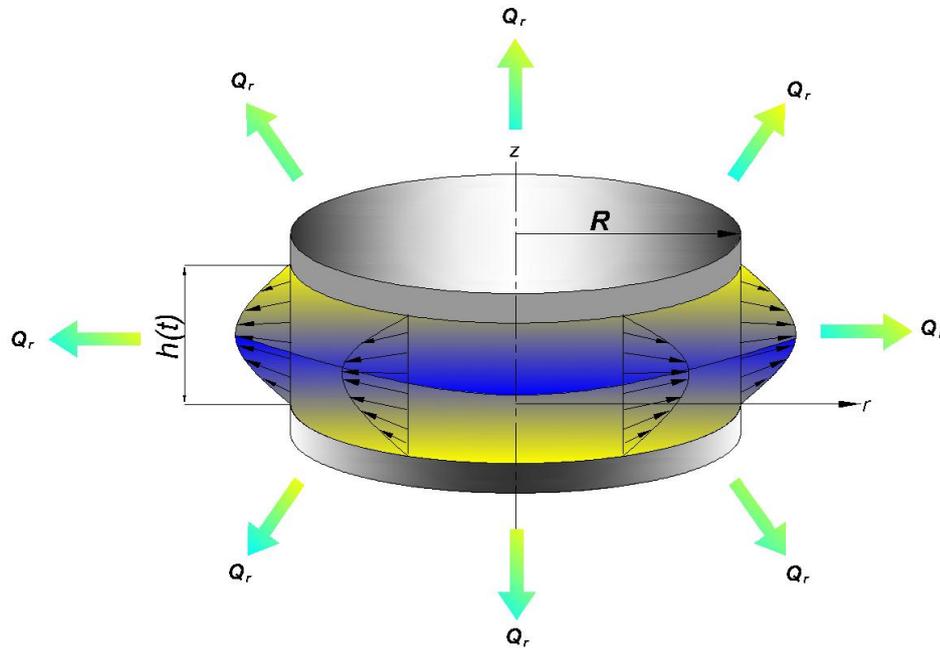


Fig. II.6 Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme rectangulaire

Et dans le cas de forme cylindrique(figure II.7): le débit de fuite à  $r = R$  selon la direction  $\vec{e}_r$  s'écrivent :

$$Q_r = \int_0^{2\pi} h u_{moy} R d\theta = 2\pi R h u_{moy} = \pi R h (U_2 + U_1) - \pi R \left( \frac{G(h, l)}{6 \mu} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R} \quad (II-44)$$



**Fig.II.7 Débit de fuite dans le cas d'un contact de forme cylindrique**

### II.5.7 Puissance dissipée

L'intégration de la fonction de dissipation visqueuse  $\Phi$  dans le volume de fluide contenu dans le contact, permet de calculer la puissance dissipée  $\mathcal{P}$  due au cisaillement du fluide :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \Phi dV \quad (II-45)$$

avec :

$$\Phi = \overline{\mathbf{T}} : \overline{\mathbf{gradV}} = (T_{(ij)} + T_{[ij]}):(D_{ij} + W_{ij}) = T_{(ij)}D_{ij} + T_{[ij]}W_{ij} \quad (II-46)$$

Dans le cas d'un écoulement de films minces, tous les gradients de vitesse sont négligeables devant  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$  et  $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$  en coordonnées cartésienne et cylindrique, respectivement. L'équation (II-46), se réduit donc à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coordonnées} \\ \text{cartésiennes} \end{array} \right. \Phi \approx \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Coordonnées} \\ \text{cylindriques} \end{array} \right. \Phi \approx \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 \quad (\text{II-47})$$

## II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les lois fondamentales de la théorie du micro continuum de V. K. Stokes pour décrire l'écoulement des fluides à couples de contraintes. A partir de ces lois, on a dérivé une équation différentielle partielle (EDP) du second ordre en coordonnées cartésiennes et cylindriques appelée équation de Reynolds modifiée qui ne contient qu'une seule inconnue principale qui est la pression dans le fluide. Enfin, on a aussi établi les relations permettant de calculer les principaux paramètres de performance d'un contact lubrifié en régime hydrodynamique telles que la capacité de charge, les débits de fuite, et la puissance dissipée.

Les équations établies dans ce chapitre seront appliquées, dans le troisième et quatrième chapitres, à l'étude de l'écrasement d'un film non Newtonien à couples de contraintes entre deux disques circulaires en présence de milieux solides imperméables et poreux.

## II.7 Références

- [1] M. J. Furey and B. M. Burkhardt, "Biotribology: Friction, wear, and lubrication of natural synovial joints," *Lubrication Science*, vol. 9, no. 3, pp. 255-271, 1997.
- [2] J. Dumbleton, *Tribology of Natural and Artificial Joints*, New York: Elsevier, 1981.
- [3] D. Dowson and Z. Jin, "Micro-Elastohydrodynamic Lubrication of Synovial Joints," *Engineering in medicine*, vol. 15, no. 2, pp. 63-65, 1986.
- [4] P. Tandon et S. Jaggi, «Wear and lubrication in an artificial knee joint replacement,» *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 23, n° 17, pp. 413-422, 1981.
- [5] E. Abdullah, «Study Effect of Film Thickness of Articular Cartilage with Couple Stress Fluid on Performance Improvement of the Human Knee Joint,» *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS)*, vol. 26, n° 11, 2016.
- [6] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," *Tribology International*, 2013.
- [7] N. Bujurke, R. B. Kudenatti and V. Awati, "Effect of surface roughness on squeeze film poroelastic bearings with special reference to synovial joints," *Mathematical Biosciences*, vol. 209, p. 76–89, 2007.
- [8] V. K. Stokes, "Couple Stresses in Fluids," *Physics of Fluids*, 1966.
- [9] E. Cosserat and F. Cosserat, "Théorie des Corps déformables," *Hermann et Fils*, vol. 81, p. 67, 1909.
- [10] B. J. Hamrock, S. R. Schmid and B. O. Jacobson, *Fundamental of fluid film lubrication*, 2 ed., Marcel Dekker, Inc., 270 Madison Avenue, New York, NY 10016, U.S.A., 2004.
- [11] A. Z. SZERI, *Fluid Film Lubrication: Theory and Design*, United Kingdom: Cambridge University Press, 2005.
- [12] E. R. Booser, *CRC Handbook of Lubrication and Tribology*, vol. 3, CRC Press, 1994.
- [13] O. Reynolds, «On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 177, pp. 157-234, 1886.
- [14] M. R. Spiegel, *Théorie et applications de l'analyse*, Mc GRAW-HILL, 1973.

---

# Chapitre III

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

---

## Chapitre III

# Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

### III.1 Introduction

L'articulation du genou possède une géométrie complexe, formé principalement de l'extrémité inférieure du fémur et l'extrémité supérieure du tibia et séparé par le fluide synovial. Les deux extrémités, condyles fémoraux et plateaux tibiaux, sont recouvertes de cartilage dont la structure est poro-élastique voire poro-viscoélastique. Le fluide synovial comme présenté précédemment présente un comportement non Newtonien, ce caractère non Newtonien est décrit par le modèle de fluide à couples de contraintes [1, 2]. Dans ce chapitre, on assimile les deux cartilages articulaires à deux disques rigides et non poreux (imperméables), et on étudie les effets des couples de contraintes dus à la présence des molécules de l'acide hyaluronique dans la synovie et de la concentration de ces particules en suspension [3, 4] sur le comportement du film lubrifiant (la synovie). Le disque inférieur est fixe tandis que le disque supérieur est mobile [5].

Le mécanisme de lubrification à film comprimé (en anglais, *squeezing lubrication*) est omniprésent dans de nombreuses applications d'ingénierie telles que les engrenages, les paliers dans les machines tournantes et alternatives, etc. L'effet d'écrasement lors de la lubrification se produit lorsqu'une pression positive apparaît dans un film fluide entre deux surfaces se rapprochant mutuellement. Ce phénomène est également appelé effet d'écrasement positive (*positive squeeze*), et le film lubrifiant est appelé film comprimé ou film écrasé. Cependant, lorsqu'une pression négative apparaît dans le film fluide entre deux surfaces s'éloignant mutuellement, ce phénomène est alors appelé écrasement négatif ou arrachement du film (*negative squeeze*). Dans ce cas, le fluide est aspiré dans l'interstice entre les deux surfaces contiguës au film.

Dans son célèbre article sur la lubrification, Osborne Reynolds [6] a affirmé que l'effet d'écrasement est un mécanisme important, avec les effets de coin (*wedge effect*) et

d'étirement (*stretching*), pour l'auto-génération de pression dans un film lubrifiant, en particulier lorsque l'effet du coin d'huile est faible devant l'effet d'écrasement. Cela est dû au fait que le film fluide visqueux ne peut pas être expulsé instantanément, il résiste donc à l'extrusion qui entraîne une accumulation de pression. De nombreux chercheurs ont étudié théoriquement et expérimentalement le phénomène de film comprimé avec un fluide Newtonien parmi eux, on cite Jackson [7], Bujurke et al. [8, 9, 10], Megat et al [11], Hlavacek [12], Ruggiero et al. [13], Alshehri and Sharma [14], B. J. Hamrock [15], Yukio Hori [16].

### III.2 Caractérisation rhéologique de l'effet de la concentration en suspension

La méthode la plus simple pour décrire la structure macroscopique d'un fluide synovial en suspension [17] est de penser qu'une suspension est une particule rigide de forme sphérique dispersée dans un solvant Newtonien. La loi de comportement rhéologique du fluide à couples de contraintes (II-7) reste la même seulement la viscosité dynamique du fluide notée  $\mu$  doit être remplacée par la viscosité effective de la suspension  $\mu_s$ . Soit :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(p) - \mu_s \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V})) - \eta \overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V}))\right)\right) \quad (III-1)$$

Les théories des suspensions diluées [18] dont les prémices remontent à 1906 avec les résultats d'Einstein, qui furent ensuite largement reprises et modifiées par plusieurs chercheurs dont les plus simples et les plus utilisées sont :

#### III.2.1 Modèle d'Einstein

Les travaux d'Einstein en rhéologie portent sur les suspensions très diluées de sphères rigides, de concentration volumique  $\phi$ , dans un solvant Newtonien de viscosité dynamique  $\mu_s$ . Einstein fut le premier à calculer l'évolution de la viscosité d'une suspension diluée en fonction de la fraction volumique des particules solides, il propose la formule valable pour tout type d'écoulement du fluide mais pour une faible concentration volumique ( $\phi \leq 1\%$ ) [19, 20, 21]:

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = 1 + [\eta]\phi \quad (III-2)$$

où :

$\mu_s$  : la viscosité effective de la suspension

$\mu_{bf}$  : la viscosité du fluide de base

$\phi$  : la fraction volumique de particules dans le fluide de base

$[\bar{\eta}]$  : la viscosité intrinsèque, dont la valeur typique pour les suspensions mono dispersées de sphères dures est de 2,5 [22].

### III.2.2 Modèle de Batchelor et Green

En 1972, Batchelor et Green, ajoutent à la formule d'Einstein un terme quadratique, pour tenir compte du mouvement brownien des particules, la formule (III-2) devient :

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = 1 + 2.5 \phi + 6.2 \phi^2 \quad (\text{III-3})$$

### III.2.3 Modèle de Ball et Richmond

En 1980, Ball et Richmond modifient le modèle de Batchelor et Green, en faisant intervenir une concentration maximale admissible ( $\phi_m \approx 0.64$  pour des sphères dans le solvant) :

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2.5 \phi_m} \quad (\text{III-4})$$

### III.2.4 Modèle de Phan-Thien et Pham

Phan-Thien et Pham, en 1987 proposent une expression plus complexe de la viscosité du fluide qui est donnée par la formule suivante :

$$\frac{\mu_s}{\mu_{bf}} = (1 - \phi)^{-2.5} \quad (\text{III-5})$$

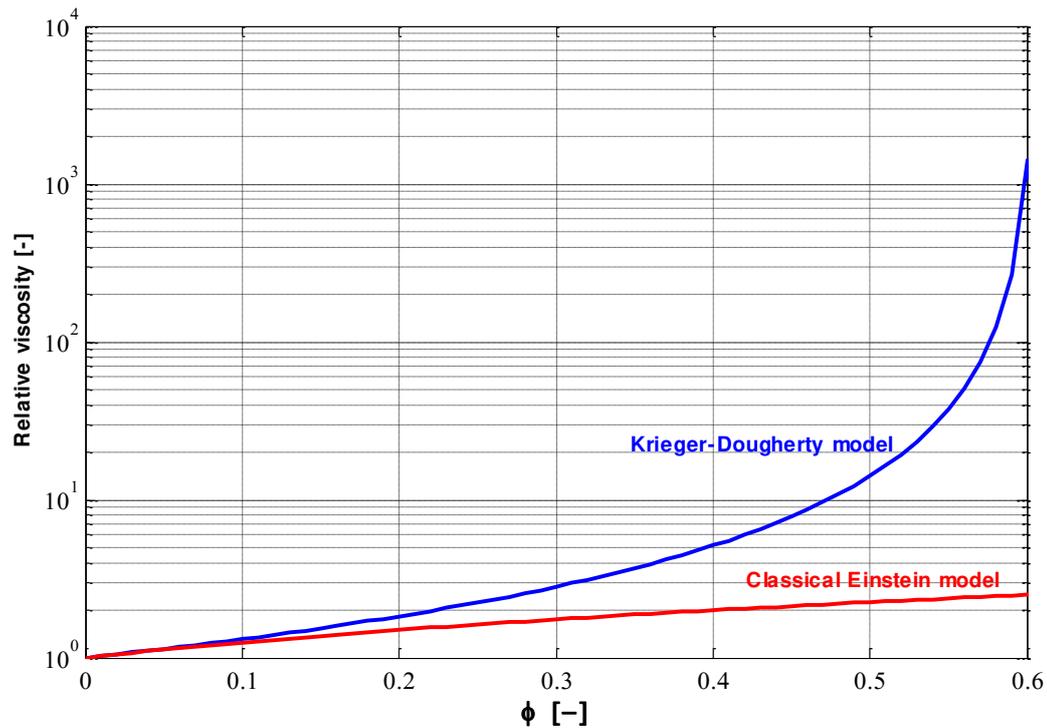
### III.2.5 Modèle de Krieger-Dougherty

Pour calculer la viscosité effective, Krieger et Dougherty [23] en 1959 ont dérivé une équation pour la viscosité dynamique couvrant toute la gamme de fractions volumiques dans le fluide de base (le solvant):

$$\mu_s = \mu_{bf} \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-[\bar{\eta}]\phi_m} \quad (\text{III-6})$$

La fraction maximale ( $\phi_m$ ) de tassement de particules qui varie de 0,495 à 0,54 dans des conditions de repos, et est d'environ 0,605 à des taux de cisaillement élevés [24, 25] .

Les variations typiques de la viscosité relative  $\mu_s/\mu_{bf}$  avec la fraction volumique  $\phi$  sont présentées sur la **figure III.1** en utilisant la relation de Krieger-Dougherty (III-6) et le modèle classique d'Einstein (III-2) [26].



**Fig. III.1** Comparaison du modèle de viscosité de Krieger-Dougherty avec le modèle de viscosité conventionnel d'Einstein sur une plage de fractions volumiques.

### III.3 Équations de Reynolds modifiées gouvernant l'écrasement d'un fluide à couples de contraintes entre deux surfaces rigides imperméables

#### III.3.1 Hypothèses relatives à l'écoulement par effet d'écrasement

Les hypothèses utilisées dans cette approche sont :

- A. Le contact articulaire du genou humain est schématisé par deux disques circulaires et parallèles de même rayon  $R$  d'axes confondus, et séparés par un film fluide d'épaisseur  $h(t)$  comme il est illustré sur la **figure III.2**.
- B. Le disque inférieur d'épaisseur  $H^*$  représente l'extrémité supérieure du tibia au contact, et le disque supérieur représente l'extrémité inférieure du fémur qui est activée pendant l'écrasement.
- C. Le fluide synovial se trouvant entre les deux disques est un fluide à couples de contraintes suspendant décrit par la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

- D. Le modèle de viscosité de Krieger-Dougherty est adopté pour le calcul de la viscosité effective de la suspension.
- E. Les propriétés physiques du fluide lubrifiant sont supposées constantes à savoir : la viscosité dynamique du solvant  $\mu$ , la masse volumique  $\rho$ , et la nouvelle constante physique  $\eta$ .
- F. L'épaisseur du film  $h(t)$  correspondant au mouvement harmonique sinusoïdal du disque supérieur est exprimée par l'équation (III-7) :

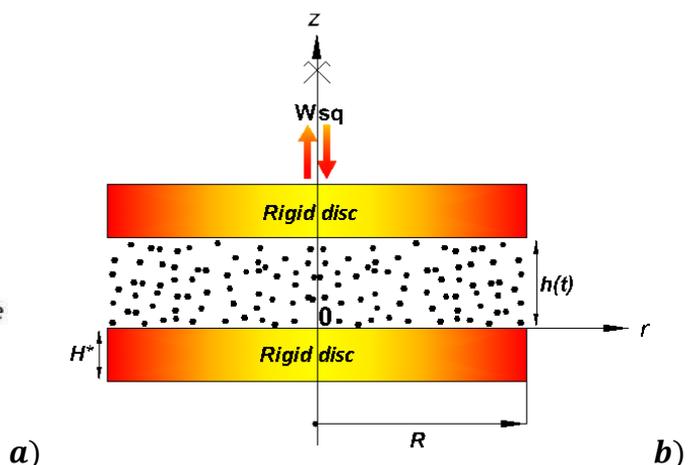
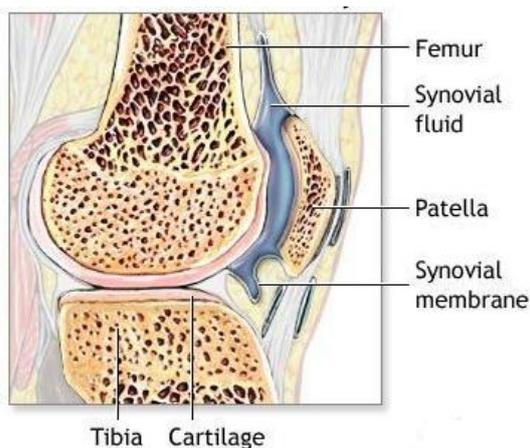
$$h(t) = h_0 + h_a(\cos(2\pi ft) - 1) \tag{III-7}$$

La vitesse du disque supérieur est alors donnée par l'équation (III-8) :

$$W_{sq} = \frac{dh}{dt} = -2\pi f h_a \sin(2\pi ft) \tag{III-8}$$

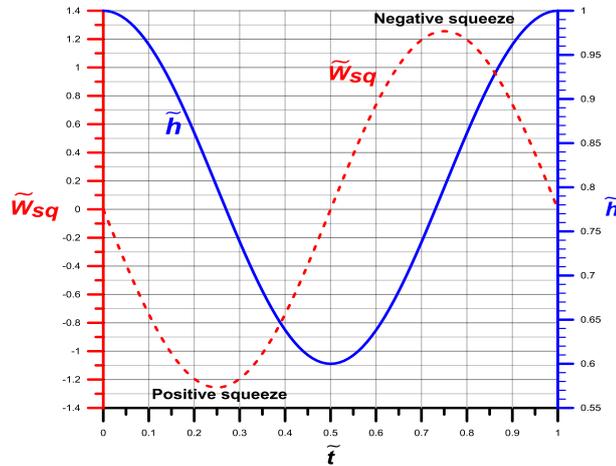
où  $h_0$  est l'épaisseur de film initiale ;  $h_a$  est l'amplitude, et  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  est la fréquence du mouvement sinusoïdal.

- G. Les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  sont utilisées pour l'écriture des équations gouvernantes.
- H. L'écoulement du fluide est supposé isotherme, incompressible et axisymétrique  $(\partial/\partial\theta = 0)$
- I. Les forces de volume, les couples de volume, et les forces d'inertie du fluide [27, 28] sont négligées.
- J. Pour dériver l'équation de Reynolds modifiée, on utilise les mêmes hypothèses présentées dans la section II.3.1
- K. Comme première approximation, les deux disques articulaires sont supposés rigides et imperméables (non poreux).



**Fig. III.2 Configuration de l'articulation du genou en écrasement axisymétrique du film**

Les variations typiques de l'épaisseur du film sans dimension  $\tilde{h} = \frac{h}{h_0}$  et de la vitesse d'écrasement sans dimension  $\tilde{W}_{sq} = \frac{W_{sq}}{fh_0}$  avec un temps sans dimension  $\tilde{t} = tf$  obtenues à partir des équations (III-7) et (III-8) pour  $\tilde{h}_a = \frac{h_a}{h_0} = 0.2$  sont illustrées sur la **figure III.3**.



**Fig. III.3 Variations temporelles de l'épaisseur du film et de la vitesse d'écrasement normalisées**

### III.3.2 Conditions aux limites sur les vitesses et la pression

Les conditions aux limites sur les vitesses au niveau du disque inférieur et du disque supérieur sont données par l'équation (III-9) :

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad u = U_1 = 0 & \quad v = V_1 = 0 & \quad w = W_1 = 0 \\ z = h & \quad u = U_2 = 0 & \quad v = V_2 = 0 & \quad w = W_2 = W_{sq} \end{aligned} \quad (III-9)$$

Les conditions aux limites sur la pression sont :

$$\begin{aligned} r = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0 & \quad (\text{champ axisymétrique}) \\ r = R & \quad ; \quad p = 0 & \quad (\text{pression relative ambiante}) \end{aligned} \quad (III-10)$$

### III.3.3 Équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques

Lorsque les conditions d'écoulement sont celles définies au paragraphe III. 3.1 du présent chapitre et compte tenu des conditions aux limites sur la vitesse (III-9), l'équation de Reynolds modifiée pour un fluide à couples de contraintes (II-33) en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  prend la forme suivante :

$$\frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] = \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-11})$$

où :  $G(h, l) = h^3 - 12hl^2 + 24 l^3 \tanh\left(\frac{h}{2l}\right)$

Si  $l = 0$ , on retrouve l'équation de Reynolds Newtonienne classique.

### III.4 Calcul des performances hydrodynamiques d'un film fluide écrasé entre deux surfaces rigides imperméables

#### III.4.1 Champ de pression du film de compression

Pour trouver la solution de l'équation de Reynolds modifiée, on intègre analytiquement l'équation (III-11) un par rapport à  $r$ . Compte tenu des conditions aux limites (III-10), on obtient la pression hydrodynamique développée dans le film :

$$p(r, t) = \frac{3 \mu_s}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} (r^2 - R^2) \quad (\text{III-12})$$

La pression du film étant connue, les caractéristiques du film de compression peuvent maintenant être calculées.

#### III.4.2 Capacité de charge

La capacité de charge du disque inférieur  $W$  est déterminée par l'équation (III-13) :

$$W = 2 \pi \int_0^R p r dr = \frac{3 \pi \mu_s R^4}{2 G(h, l)} \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-13})$$

#### III.4.3 Vitesse radiale moyenne

L'équation donnant le champ des vitesses dans le fluide (II-29) soumise aux conditions limites (III-9) et (III-10) permet d'obtenir le profil de la vitesse radiale suivant :

$$u = \frac{3 r}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} \left[ z^2 - hz + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{III-14})$$

La vitesse radiale moyenne en un point du fluide de coordonnée radiale  $r$  se calcule par la relation suivante :

$$\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u dz = -\frac{r}{2h} \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-15})$$

### III.4.4 Débits de fuite au bord libre du disque

La connaissance de la vitesse radiale moyenne en  $r = R$  permettra de calculer le débit volumique de fuite au bord du disque par l'expression suivante :

$$Q_r = \int_0^{2\pi} h \langle u \rangle R d\theta = 2\pi R h \langle u \rangle = -\pi R^2 \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-16})$$

### III.4.5 Contrainte de cisaillement

la contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_{rz}$  est donnée par:

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \mu_s \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} - \eta \left. \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right|_{z=0} = -\frac{3h \mu_s}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} r \quad (\text{III-17})$$

### III.4.6 Force de frottement

La force de frottement  $F_f$  se calcule à partir de l'intégration de la contrainte de cisaillement sur la surface du disque inférieur ( $z = 0$ ):

$$F_f = \int_0^R \int_0^{2\pi} \tau_{rz}|_{z=0} r d\theta dr = -\frac{2\pi h \mu_s}{G(h, l)} \frac{dh}{dt} r^3 \quad (\text{III-18})$$

### III.4.7 Puissance dissipée

La puissance est calculée à partir de l'intégration de la fonction de dissipation visqueuse sur le volume occupée par le fluide exprimée cette fois-ci dans le cas d'un fluide à couples de contraintes :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \Phi dV = \int_0^{2\pi} \int_0^h \int_0^R \Phi r dr dz d\theta = \frac{3\pi \mu_s R^4}{2 G(h, l)} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 \quad (\text{III-17})$$

où  $\Phi \approx \underbrace{\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}_{\text{contribution Newtonienne}} + \underbrace{\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2}_{\text{contribution non Newtonienne}}$

## III.5 Étude paramétrique

L'étude paramétrique concerne l'influence de certains paramètres contrôlant l'écoulement du lubrifiant tels que les couples de contraintes, la concentration de la suspension, et la fréquence d'oscillation sur le comportement du film durant un cycle d'oscillation.

Dans ce qui suit, les résultats graphiques issus de la résolution du problème de lubrification direct correspondent aux données géométriques et physiques reportées dans le **tableau III.1**. Les valeurs numériques de l'amplitude et de la fréquence d'oscillation ont été choisies afin d'assurer un écoulement laminaire du fluide sans cavitation.

**Tableau III.1. Données géométriques et physiques du problème direct**

Paramètres	Symboles	Valeur Numérique	Unités	Références
Viscosité dynamique du fluide de base	$\mu_{bf}$	$10^{-2}$	[Pa.s]	[29]
Rayon des deux disques	$R$	$18.7 \times 10^{-3}$	[m]	[30]
Epaisseur initiale du film fluide	$h_0$	$10^{-5}$	[m]	[31]
Amplitude d'oscillation	$h_a$	$0.2 \times 10^{-5}$	[m]	-
Constante matérielle responsable de la propriété des couples de contrainte	$\eta$	0 $4 \times 10^{-14}$ $9 \times 10^{-14}$ $1.6 \times 10^{-13}$	[N.s]	[1]
Paramètre du couple de contrainte sans dimension	$\tilde{\ell}$	0 , 0.2 , 0.3 , 0.4	[-]	-
Fraction volumique de particule	$\phi$	0 , 0.1 , 0.2 , 0.3	[-]	[32]
Fréquence de mouvement sinusoïdal	$f$	0.5 , 1 , 1.5 , 2	[Hz]	[32]

### III.5.1 Profils de pression

#### a) Effets des couples de contraintes

La **figure III.4** représente la variation de la pression  $p$  pour différentes valeurs du paramètre de couples des contraintes adimensionnel  $\tilde{\ell}$  dans le cas d'un fluide ne contenant pas de particules en suspension ( $\phi = 0$ ). Le disque supérieur est soumis à un mouvement d'oscillation de fréquence  $f = 1 \text{ Hz}$ . Il est observé que l'utilisation d'un lubrifiant non Newtonien à couples de contraintes fait augmenter les valeurs de la pression par comparaison au cas Newtonien ( $\tilde{\ell} = 0$ ). De plus, l'augmentation du paramètre des couples de contraintes entraîne une augmentation significative du pic de pression calculé au niveau de l'axe du disque et ce durant tout le cycle d'oscillation.

#### b) Effets de la concentration

Les résultats de l'étude de l'effet de la concentration de particules en suspension  $\phi$  sur la pression pour une taille de particule relative  $\tilde{\ell} = 0.2$  et une fréquence d'oscillation  $f = 1 \text{ Hz}$  sont représentés sur la **figure III.5**. On observe que la présence des particules dans le

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

lubrifiant de base entraîne une augmentation de la pression dans le film fluide et par conséquent la capacité de charge du système et ce durant le cycle complet d'oscillation. Cette augmentation est plus accentuée dans le cas d'un fluide à haute concentration. Ceci est principalement dû à l'élévation de la viscosité du fluide en raison de la présence des particules qui sont dispersées dans le fluide de base.

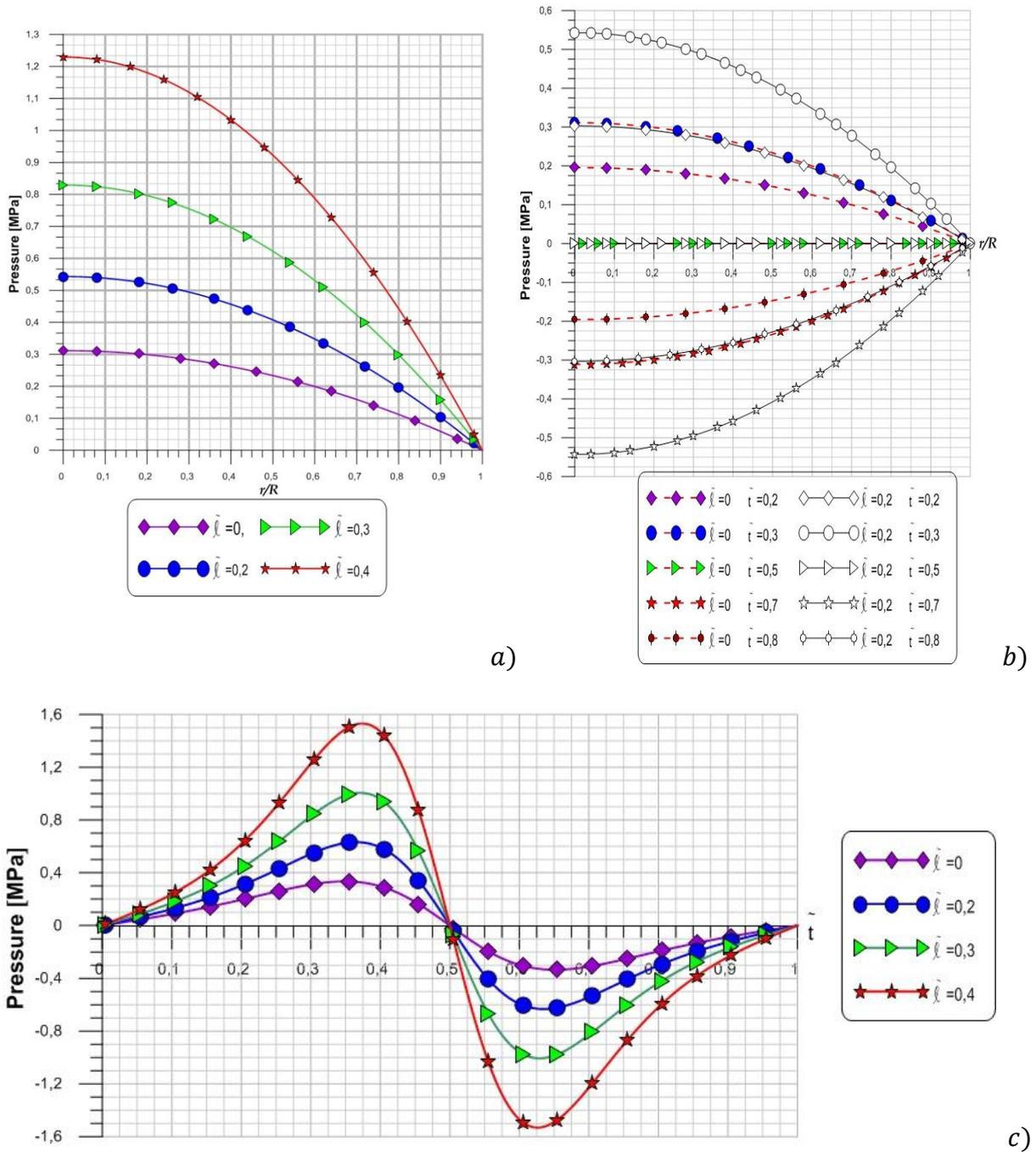


Fig. III.4 Profils de pression pour différentes valeurs du paramètre des couples des contraintes  $\tilde{l}$  avec  $\phi = 0$  et  $f = 1$  Hz

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

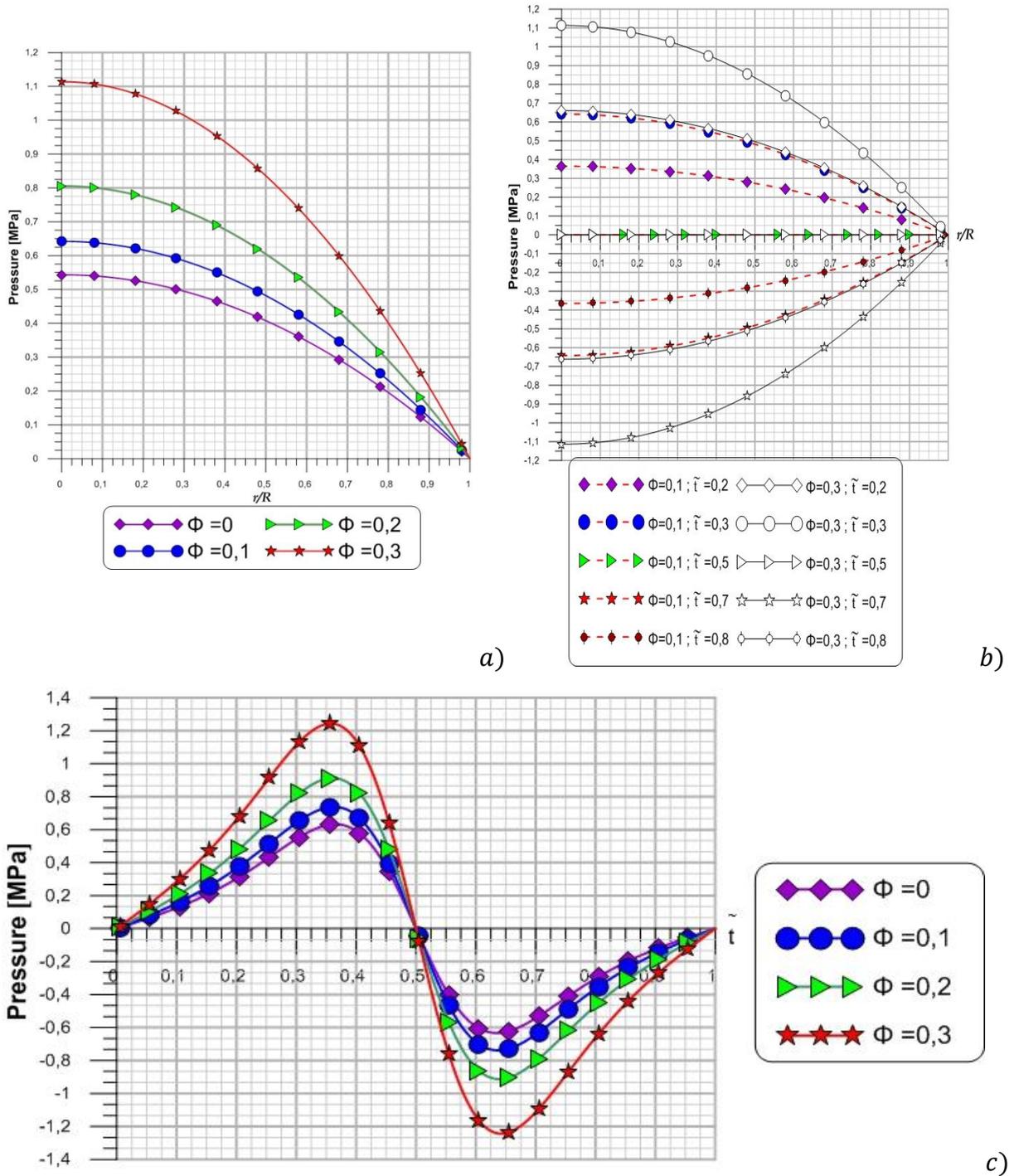


Fig. III.5 Profils de pression pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\phi$  avec  $\tilde{\ell} = 0.2$  et  $f = 1$  Hz

c) Effets de la fréquence d'oscillation

Les variations de pression pour diverses valeurs de la fréquence du mouvement sinusoïdal  $f$  pour  $\tilde{\ell} = 0.2$  et  $\phi = 0.1$  sont représentées sur la figure III.6. On observe que durant le cycle d'oscillation complet la pression dans le film fluide augmente avec la

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

fréquence  $f$ . Ceci s'explique par le fait que pour des grandes valeurs de la fréquence, le fluide lubrifiant développe une résistance plus élevée.

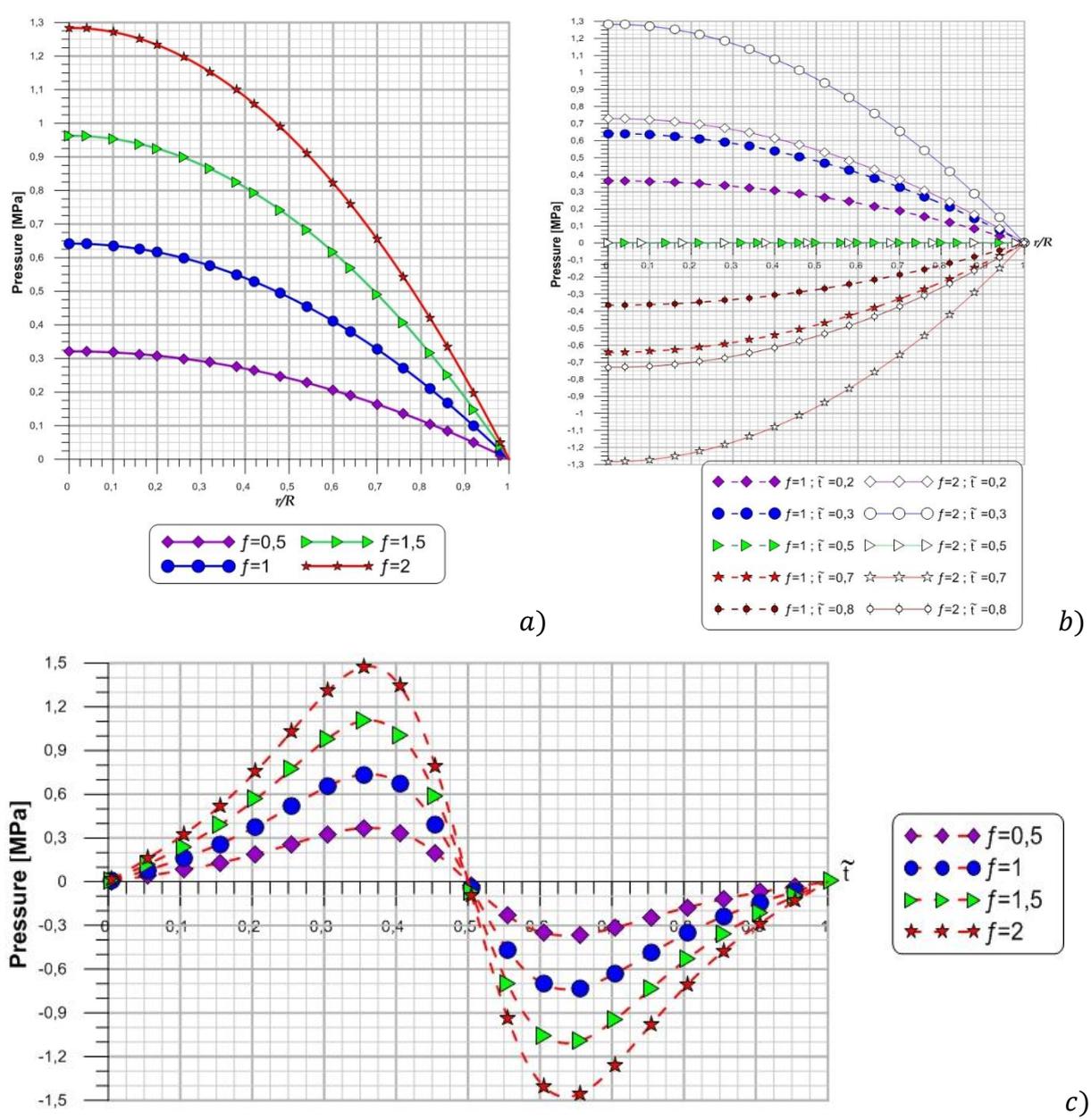


Fig. III.6 Profils de pression pour différentes valeurs de la fréquence du mouvement sinusoïdal  $f$  exprimée en [Hz] pour  $\tilde{l} = 0.2$  et  $\phi = 10\%$

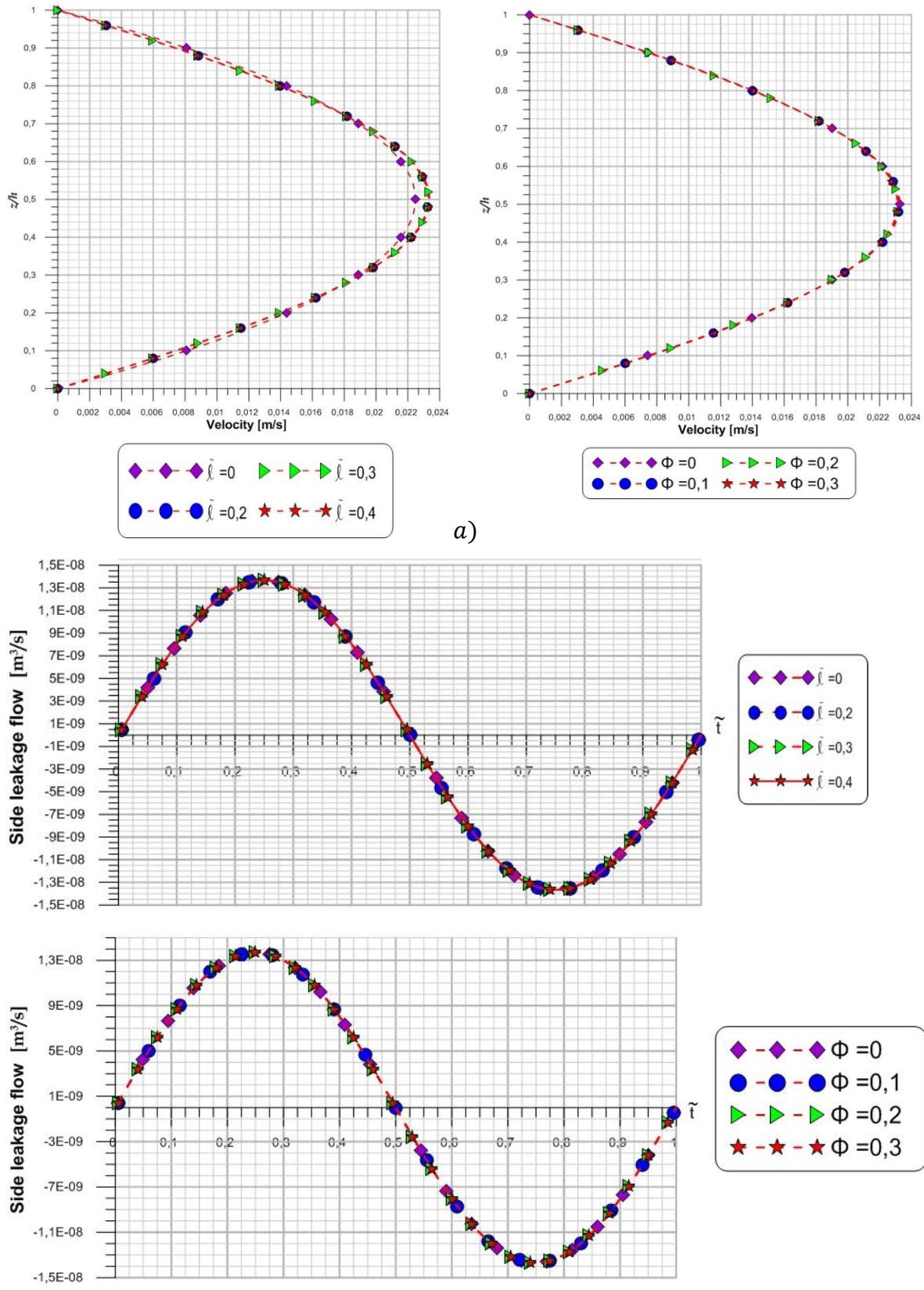
III.5.2 Profils de vitesse radiale et débit de fuite

a) Effets des couples de contraintes & de la concentration

La figure III.7 montre les profils de vitesse radiale  $u$  et le débit de fuite  $Q_r$  calculés au bord du disque ( $r = R$ ) pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  et de la concentration en particules  $\phi$ . Les calculs sont effectués pour une fréquence

d'oscillation  $f = 1 \text{ Hz}$ . On observe que les couples de contraintes et la concentration n'ont pas d'effets appréciables sur la distribution de la vitesse d'écoulement radiale à travers l'épaisseur du film et le débit de fuite. Ces résultats constituent un moyen de validation probant du code de calculs développé car en vertu du principe de conservation la valeur instantanée du débit de fuite au bord du disque ne dépend que de la vitesse d'écrasement ou d'arrachement du film et elle doit être égale au signe près à  $\pi R^2 W_{sq}(t)$  représentant la variation du volume de fluide écrasé ou arraché par unité de temps.

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

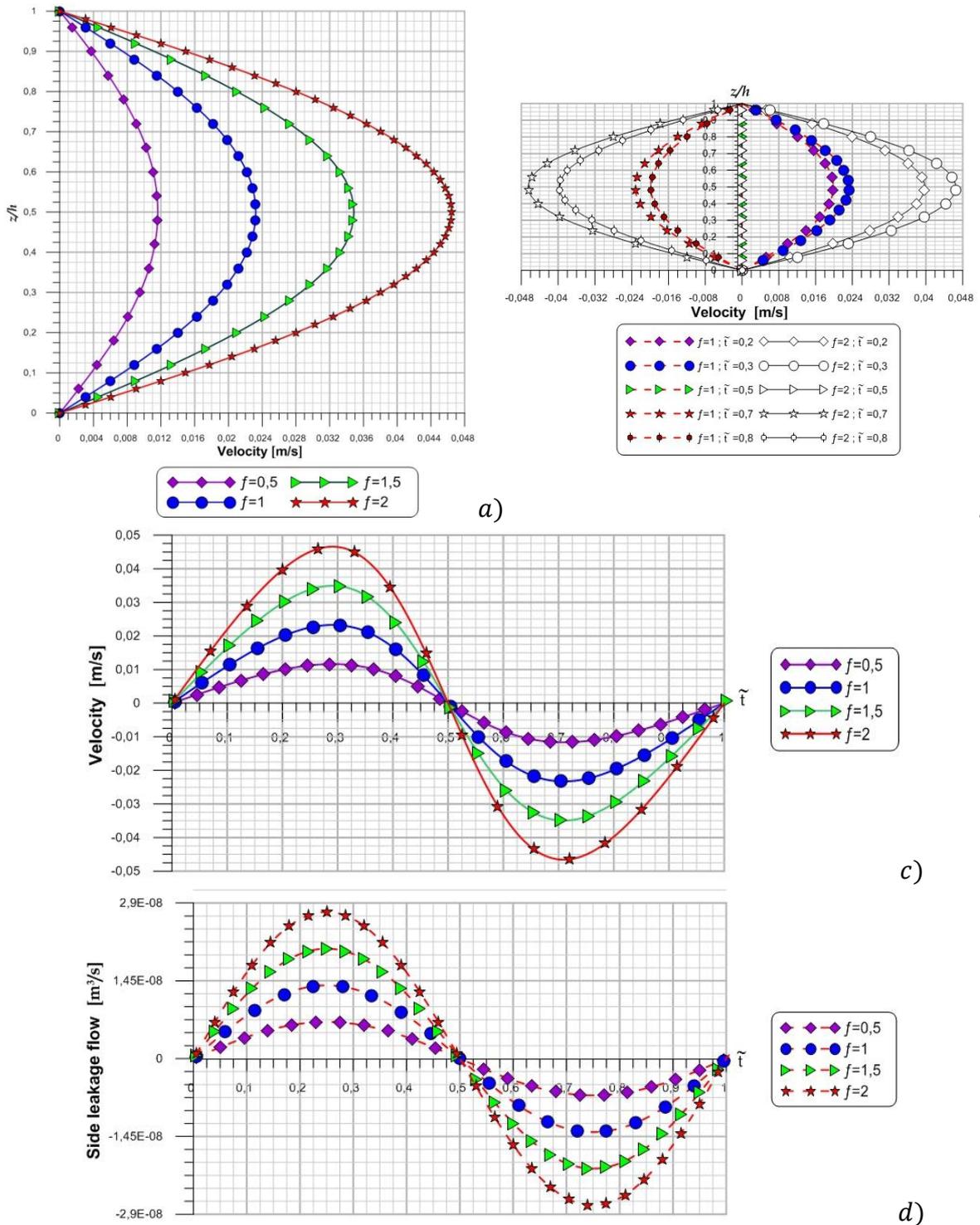


**Fig. III.7** Profils de la vitesse radiale  $u$  et du débit de fuite  $Q_r$  au bord du disque pour différentes valeurs du paramètre des couples de contrainte  $\tilde{\ell}$  et de la concentration en particules  $\phi$  avec  $f = 1$  Hz

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

b) Effets de la fréquence d'oscillation

La **figure III.8** montre que la fréquence d'oscillation affecte sensiblement les profils de vitesse radiale et par conséquent le débit de fuite au bord du disque surtout pour les valeurs de fréquence élevées.

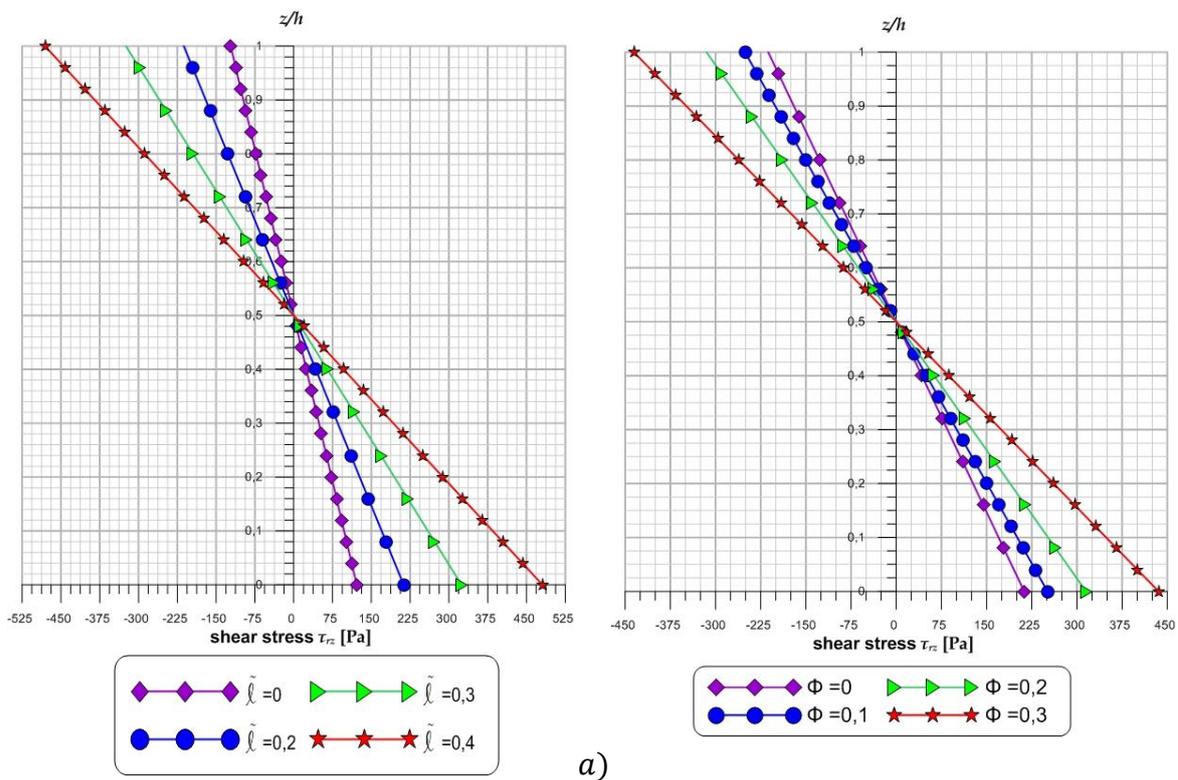


**Fig. III.8** Profils de la vitesse radiale  $u$  et du débit de fuite  $Q_r$  pour différentes valeurs de la fréquence d'oscillation  $f$  avec  $\bar{t} = 0.2$  et  $\phi = 0.1$

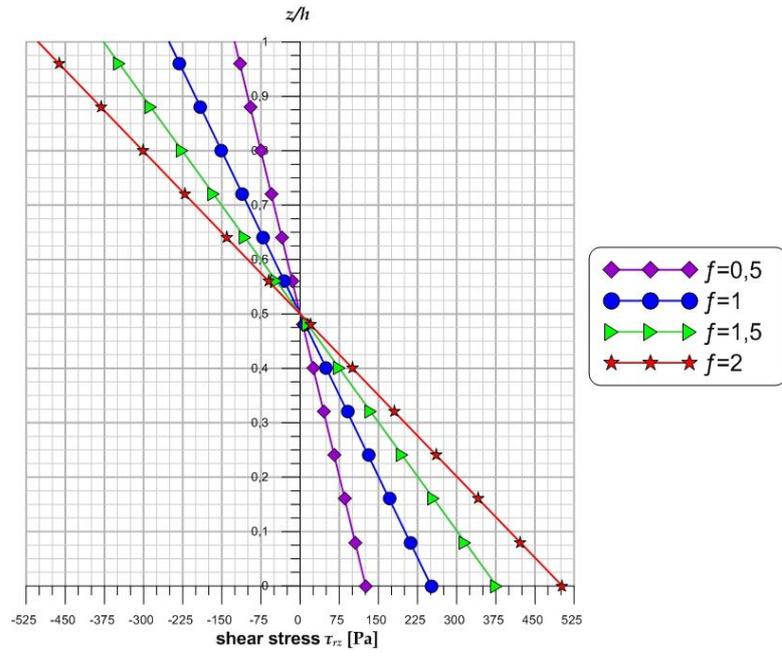
Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

III.5.3 Contraintes de cisaillement visqueuses

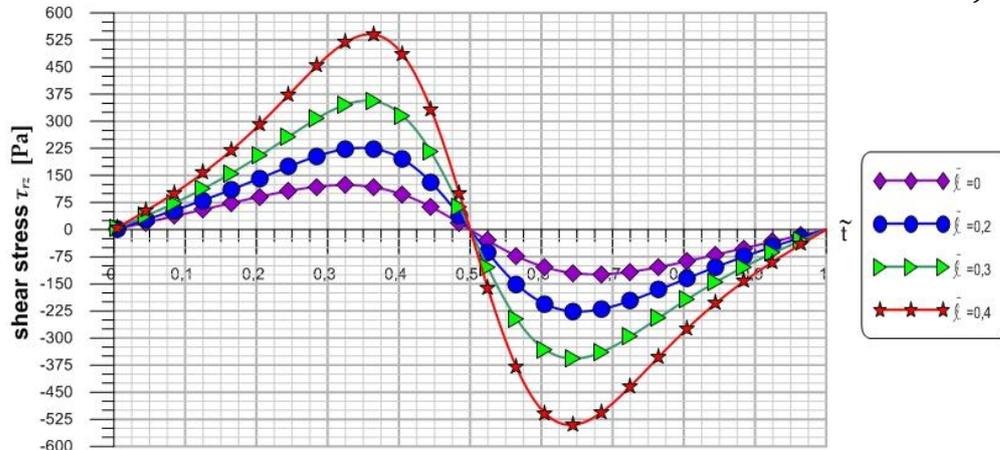
La **figure III.9** présente les effets du paramètre de couple de contraintes  $\tilde{\ell}$ , de la concentration de particules en suspension  $\phi$ , et de la fréquence du mouvement sinusoïdal  $f$  sur les distributions des contraintes de cisaillement  $\tau_{rz}$  suivant l'épaisseur du film calculées au bord du disque ( $r = R$ ). On remarque que les contraintes de cisaillement sont maximales aux parois et qu'elles sont sensiblement affectées par les trois paramètres  $\tilde{\ell}$ ,  $\phi$ , et  $f$  à l'instar de la pression qui est une contrainte normale. On remarque par ailleurs une augmentation significative des contraintes pariétales avec ces trois paramètres. Ceci se traduit naturellement par une augmentation de la capacité de charge et de la force de frottement avec ces mêmes paramètres comme il est clairement illustré sur la **figure III.10**.



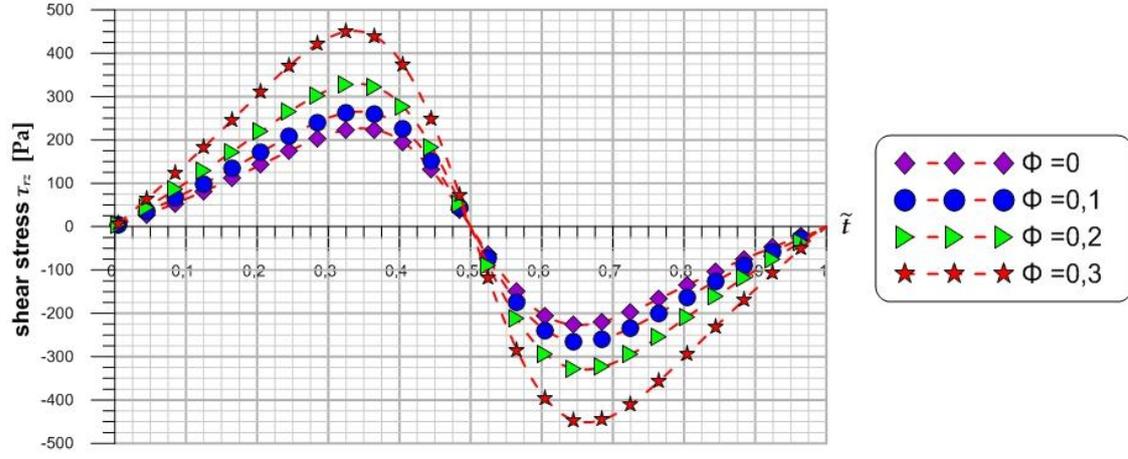
Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable



c)

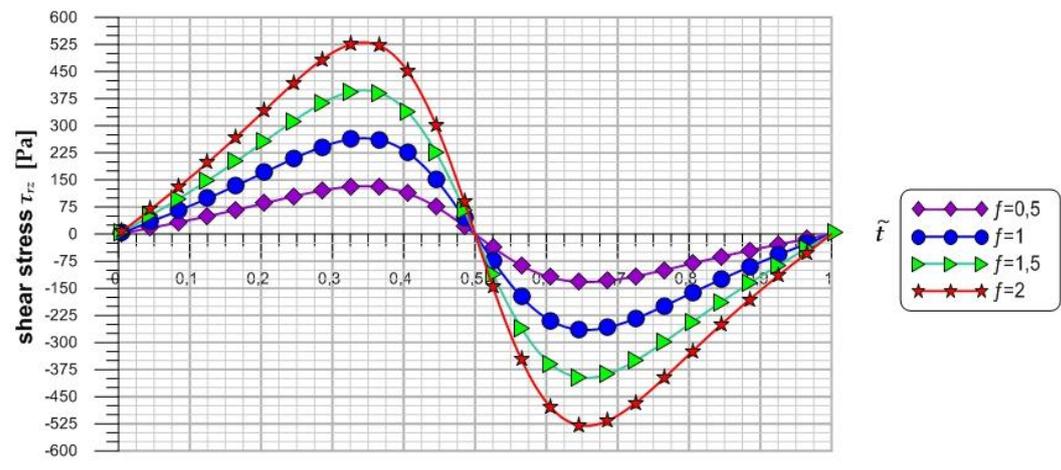


d)



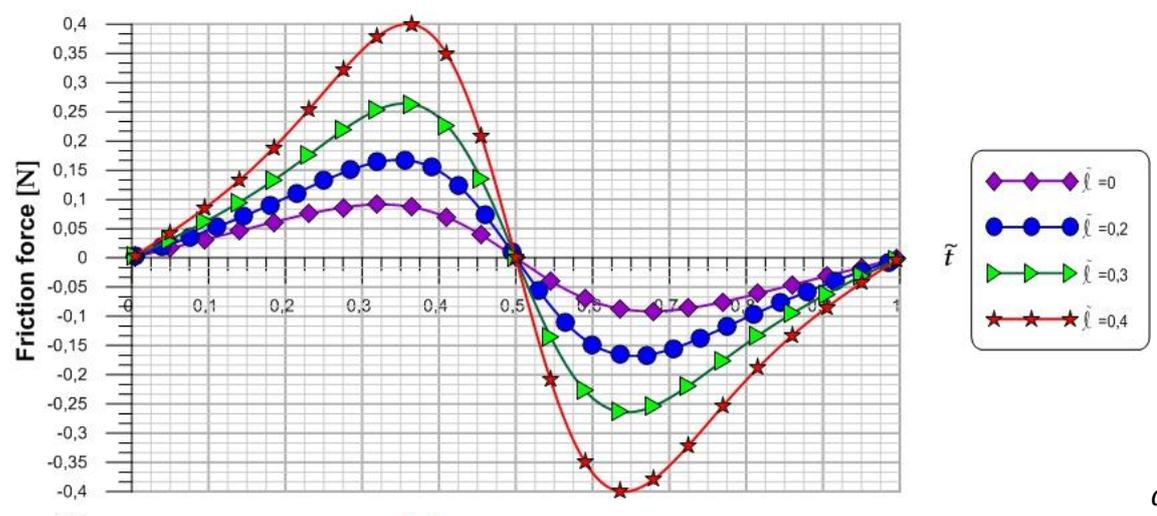
e)

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable

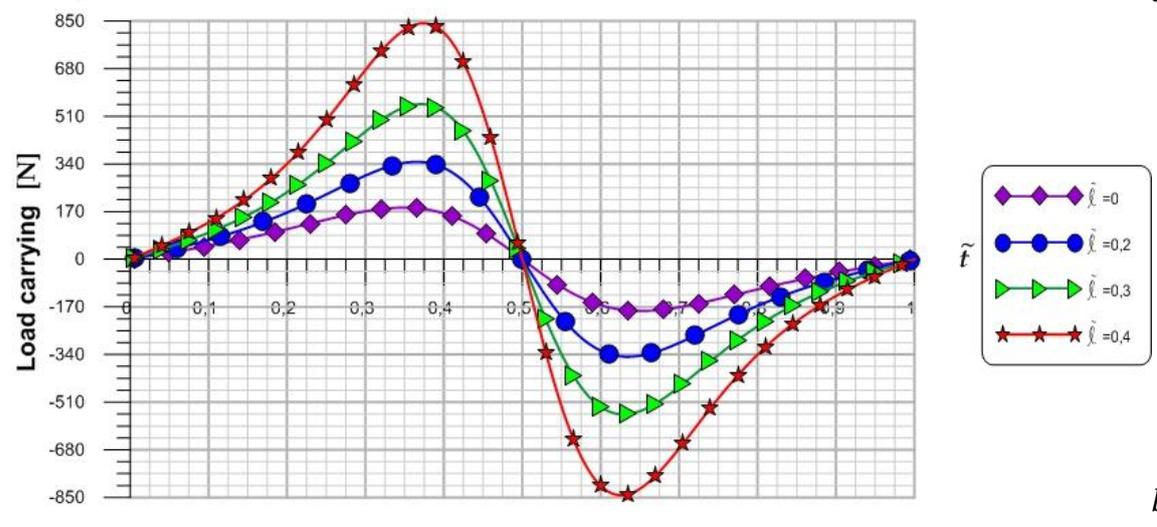


f)

Fig. III.9 Profils des contraintes de cisaillement au bord

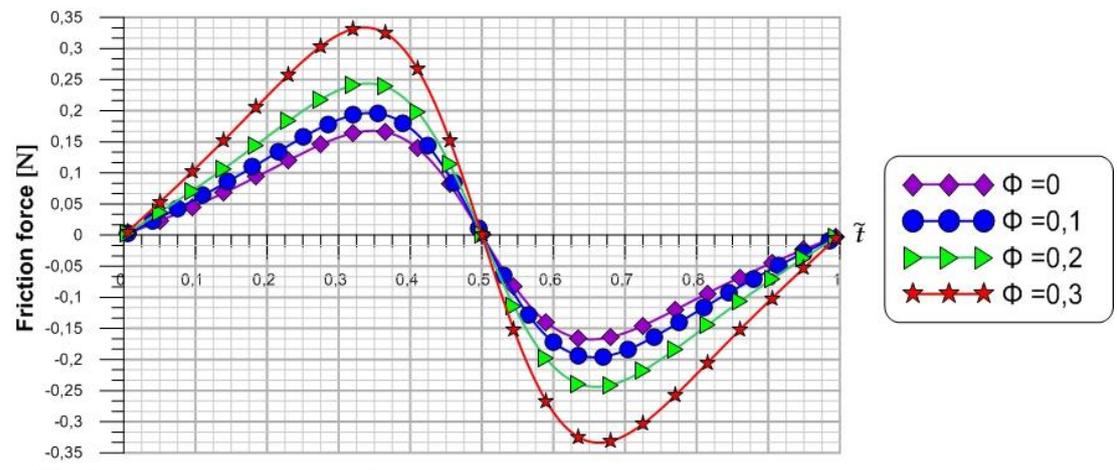


a)

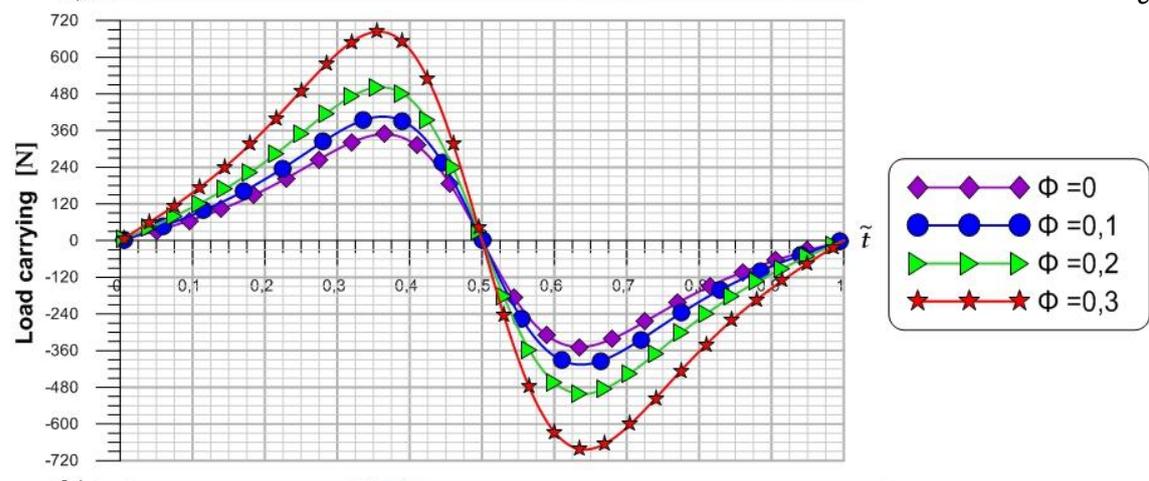


b)

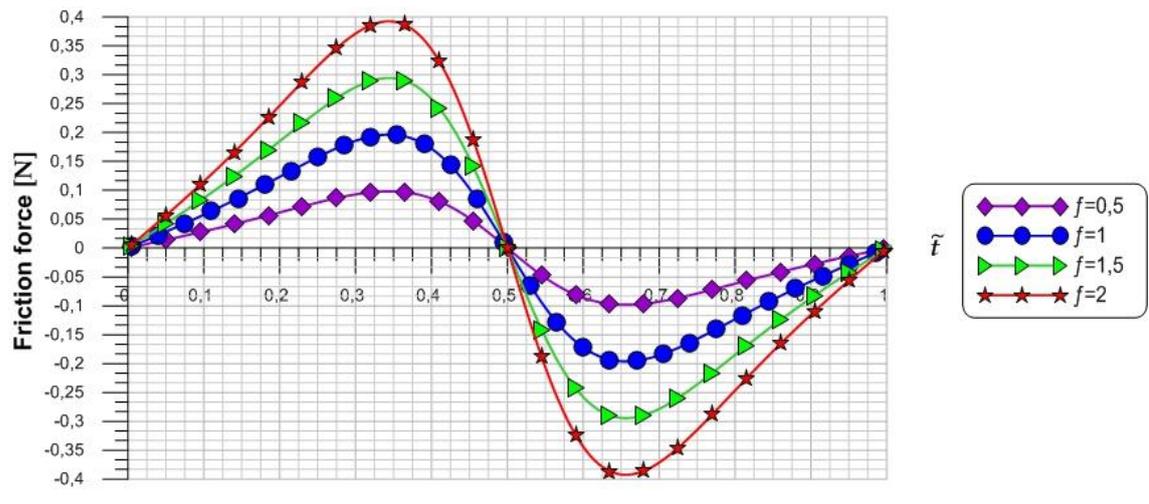
Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable



c)

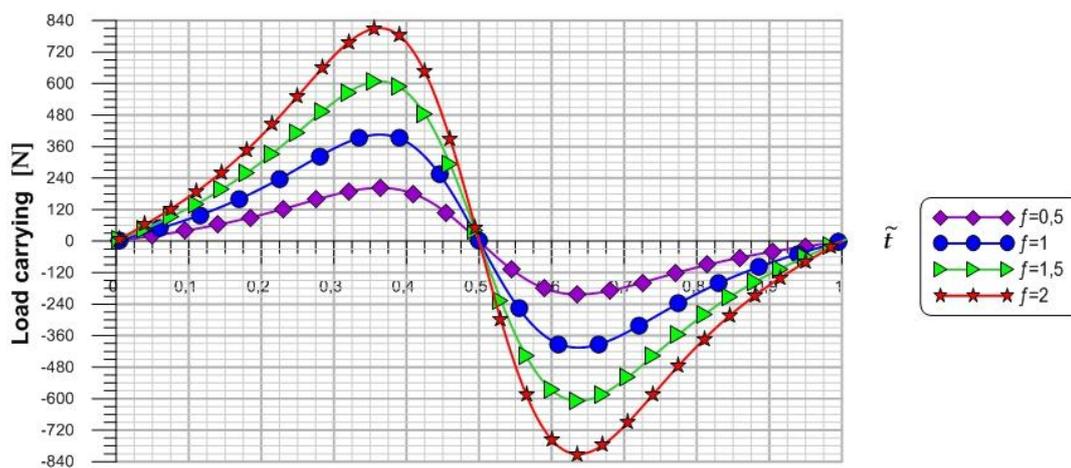


d)



e)

Écrasement d'un fluide à couples de contraintes suspendant en présence d'un milieu rigide imperméable



**Fig. III.10 Évolutions de la force de frottement  $F_f$  et de la capacité de charge  $W$  pendant un cycle d'oscillation**

III.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a mis en évidence les effets non négligeables des couples de contraintes, de la concentration des particules en suspension, et de la fréquence du mouvement sinusoïdal du disque supérieur sur les performances HD du tribosystème modélisant l'articulation synoviale du genou. L'effet non Newtonien du lubrifiant est pris en compte en utilisant la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes appliquée pour un écoulement par effet d'écrasement d'un film mince représentant le liquide synovial. Comme une première approximation, les deux disques ont été supposés rigides et imperméables (non poreux). La viscosité effective de la suspension représentant le fluide synovial, qui est un mélange de sérum et d'acide hyaluronique, a été évaluée par le modèle de viscosité plus précis de Krieger-Dougherty.

On peut conclure que la présence des couples de contraintes fait augmenter la pression  $p$  et donc la capacité de charge  $W$ , la contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_{rz}$  et par conséquent la force de frottement  $F_f$ . Cette augmentation est plus accentuée dans le cas d'un fluide suspendant ou d'un mouvement d'oscillation à haute fréquence du disque supérieur.

Ces résultats sont d'un intérêt technologique certain dans la mesure où ils fournissent des informations intéressantes pour la conception de prothèses artificielles efficaces et durables.

Dans le prochain chapitre, on étudiera le comportement d'un autre modèle de prothèse bio-inspiré comprenant un disque mobile rigide et un disque fixe poreux.

### III.7 Références

- [1] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," *Tribology International*, vol. 57, p. 156–161, 2013.
- [2] V. K. Stokes, "Couple Stresses in Fluids," *Physics of Fluids*, 1966.
- [3] J. Robinson, F. Watson, R. Bucknall et S. W. Edwards, «Activation of neutrophil reactive-oxidant production by synovial fluid from patients with inflammatory joint disease,» *Biochemical journal*, vol. 286, n° 12, p. 345–351, 1992.
- [4] S. Solomon, M. Masilamani and S. Mohanty, "Generation of three-dimensional pannus-like tissues in vitro from single cell suspensions of synovial fluid cells from arthritis patients," *Rheumatology International*, vol. 24, p. 71–76, 2004 .
- [5] J. R. Lin, «Oscillating circular squeeze films considering the combined effects of fluid inertial forces and non-Newtonian couple stresses,» *Proc. IMechE, Journal of Engineering Tribology, Part J*, vol. 222, 2008.
- [6] O. Reynolds, «On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 177, pp. 157-234, 1886.
- [7] J. D. Jackson, "A study of squeezing flow," *Applied Scientific Research, Section A*, vol. 11, no. 1, p. 148–152, 1963 January .
- [8] N. Bujurke, M. Jagadeeswar and P. Hiremath, "Analysis of normal stress effects in a squeeze film porous bearing," *Wear*, vol. 116, no. 2, pp. 237-248, 1987 May 1 .
- [9] N. Bujurke and N. Naduvinamani, "A note on squeeze film between rough anisotropic porous rectangular plates," *Wear*, vol. 217, no. 2, pp. 225-230, 1998 May 15.
- [10] N. Bujurke and R. Kudenatti, "Surface roughness effects on squeeze film poroelastic bearings," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 2, no. 174, pp. 1181-1195, 2006 March 15 .
- [11] M. Megat Ahmad, D. Gethin, T. Claypole and B. Roylance, "Numerical and experimental investigation into porous squeeze films," *Tribology International*, vol. 31, no. 4, pp. 189-199, 1998 April.
- [12] M. Hlaváček, "Squeeze-film lubrication of the human ankle joint with synovial fluid filtrated by articular cartilage with the superficial zone worn out," *Journal of Biomechanics*, vol. 33, no. 11, pp. 1415-1422, 2000 November 1 .
- [13] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate Analytical Model for the Squeeze-Film Lubrication of the Human Ankle Joint with Synovial Fluid Filtrated by Articular Cartilage," *Tribology Letters*, vol. 41, no. 2, p. 337–343, 2011 February .
- [14] M. Alshehri and S. K. Sharma, "Computational Model for the Generalised Dispersion of Synovial Fluid," *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 8, no. 2, 2017.
- [15] B. J. Hamrock, *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*, Madison, Ohio: National Aeronautics and Space Administration, 1990 August .
- [16] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, Tokyo ; New York: Springer, 2006.

- [17] S. Myers, "Suppression of hyaluronic acid synthesis in synovial organ cultures by corticosteroid suspensions," *Arthritis and Rheumatism*, vol. 28, no. 11, pp. 1275-1282, 1985.
- [18] R. Tanner, *Engineering Rheology*, Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [19] D. Thomas, "Transport characteristics of suspension: VIII. A note on the viscosity of Newtonian suspensions of uniform spherical particles," *Journal of Colloid Science*, vol. 20, no. 3, pp. 267-277, 1965.
- [20] L. T. Kein, «Approche par changement d'échelle des caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules dans un fluide à seuil,» Thèse de doctorat, l'école nationale des ponts et chaussées, 2009.
- [21] S. HALELFADL, "Caractérisation des propriétés thermo-physiques et d'échanges de chaleur des nanofluides à base de nanotubes de carbone," l'INSA de Rennes, thèse de doctorat, 2014.
- [22] M. Kole and T. Dey, "Effect of aggregation on the viscosity of copper oxide-gear oil nanofluids," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 50, no. 9, pp. 1741-1747, 2011.
- [23] I. M. Krieger and T. J. Dougherty, "A Mechanism for NonNewtonian Flow in Suspensions of Rigid Spheres," *Journal of Rheology*, vol. 3, no. 137, 1959.
- [24] C. Haisheng, D. Yulong and T. Chunqing, "Rheological behaviour of nanofluids," *New Journal of Physics*, vol. 9, p. 367, 2007.
- [25] I. Mahbubul, R. Saidur and M. Amalina, "Latest developments on the viscosity of nanofluids," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, p. 874-885, 2012.
- [26] R. Roscoe, "The viscosity of suspensions of rigid spheres," *British journal of applied physics*, vol. 3, no. 8, 1952.
- [27] M. Devekar et T. K. V. Iyengar, «Stokes' problems for an incompressible couple stress fluid.,» *Nonlinear analysis: Modeling and control*, vol. 1, n° 12, pp. 181-190, 2008.
- [28] V. K. Stokes, *Theories of Fluids with Microstructure: An introduction*, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo: Springer-Verlag, 1984.
- [29] J. Dumbleton, *Tribology of natural and artificial joints*, Elsevier scientific publishing company, 1981.
- [30] D. J. Knox, S. K. Wilson, B. R. Duffy and S. McKee, "Squeeze-Film Flow in the Presence of a Thin Porous Bed, with Application to the Human Knee Joint," *Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics*, 2012.
- [31] M. Yousfi, B. Bou-Saïd and J. Tichy, "Axisymmetric squeezing of a Phan-Thien and Tanner lubricant film under imposed constant load in the presence of a poroelastic medium," *Lubrication Science*, vol. 27, no. 8, p. 505-522, 2015.
- [32] J. Katta, Z. Jin, E. Ingham and J. Fisher, "Biotribology of articular cartilage—A review of the recent advances," *Medical Engineering & Physics*, vol. 30, no. 10, p. 1349-1363, 2008.

---

# Chapitre IV

Lubrification par film comprimé  
d'une prothèse de genou en présence  
de milieux poreux étanche et non  
étanche

---

## Chapitre IV

# Lubrification par film comprimé d'une prothèse de genou en présence de milieux poreux étanche et non étanche

### IV.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, le problème de lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement entre deux disques rigides et imperméables a été étudié en tenant compte des effets des couples de contraintes, de la concentration des particules en suspension, et de la fréquence du mouvement sinusoïdal du disque supérieur.

Le présent chapitre traite les effets d'écrasement d'un film fluide suspendant en présence d'un milieu poreux et anisotrope en rappelant tout d'abord les éléments nécessaires à la modélisation et à la formulation théorique des écoulements des fluides au sein des milieux poreux, ainsi que leur caractérisation physique.

Les études tant théoriques qu'expérimentales du problème de lubrification hydrodynamique par effet d'écrasement en présence d'un milieu poreux ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche en raison du nombre important de leurs applications en industrie et plus particulièrement en biomécanique.

Jurczak [1] a proposé des modèles de bio-roulements pour le film comprimé avec une couche poreuse pour étudier l'effet d'inertie sur le champ de pression en utilisant l'approximation de Morgan-Cameron [2] pour coupler les équations de Navier-Stokes et de Poisson. Il a conclu que la pression générée dans le fluide à couple de contrainte est supérieure à celle du fluide Newtonien. Il a également constaté que la pression diminue avec la perméabilité.

Lin et al. [3] ont utilisé la loi de Barus pour analyser les effets combinés de la piézoviscosité et des couples de contraintes sur les caractéristiques du film comprimé entre deux plaques rectangulaire large et parallèle. La solution semi-analytique, obtenue au moyen de la technique des petites perturbations, a été comparée par les auteurs à celle dérivée dans le cas du fluide Newtonien et iso-visqueux. Ils ont trouvé que la piézo-

viscosité du fluide et les couples de contraintes peuvent améliorer les performances du film comprimé en raison de la plus grande capacité de charge obtenue pour une épaisseur de film plus faible.

Nabhani et al. [4] ont présenté un nouveau modèle pour combiner les effets des fluides à couple de contraintes et des déformations élastiques de la matrice poreuse en tenant en compte l'inertie du fluide lubrifiant. Les auteurs ont utilisé le modèle généralisé de Darcy-Brinkman-Forchheimer pour décrire l'écoulement du fluide dans le disque poreux et l'approche simplifiée d'un revêtement élastique mince pour déterminer la déformation élastique due à la pression hydrodynamique à l'interface matrice poreuse-film fluide. Ils ont constaté que les couples de contraintes et la poro-élasticité du disque augmentaient le coefficient de frottement et diminuaient la capacité de charge.

Ponnuswamy and Govindaraj [5] ont analysé les performances du film comprimé pour deux disques annulaires poreux parallèles, avec un mouvement sinusoïdal du disque supérieur. Ils ont dérivé une expression analytique de la pression en utilisant les séries de Fourier-Bessel. Les résultats obtenus ont montré que la capacité de charge augmentait avec le paramètre des couples de contraintes et l'amplitude du mouvement sinusoïdal.

La littérature technique disponible révèle que la plupart des recherches effectuées considéraient essentiellement des disques poreux circulaires ou annulaires avec un bord non étanche (*unsealed edge*). D'autre part, l'approximation de Morgan-Cameron [2] qui ignore tout effet de glissement à l'interface matrice poreuse-film fluide a souvent été adoptée pour prendre en compte les effets de porosité.

De plus, le phénomène de glissement à l'interface des deux milieux poreux et le fluide a été intégré au moyen de certains modèles plus complexes tels que Beavers et al. [6] et Brinkman [7]. Une discussion élaborée sur le choix des paramètres de glissement et la validité des différentes conditions aux limites de glissement sont données dans [8].

L'objectif de ce chapitre est d'étudier le comportement non Newtonien d'un film comprimé entre un disque circulaire rigide et un disque poreux dont le bord peut être étanche ou non. La présente étude est aussi basée sur la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes qui prend en considération les couples de contraintes dus à la présence de petites particules dans le fluide porteur (le solvant).

Le disque supérieur est imperméable et mobile, tandis que le disque inférieur est supposé être un milieu poreux anisotrope stationnaire. La viscosité effective de la suspension est déterminée en utilisant le modèle de viscosité de Krieger-Dougherty pour une fraction volumique donnée de particules dans le fluide de base (le solvant).

Il convient de noter que dans des conditions de charge dynamique (c'est-à-dire pour un mouvement sinusoïdal intense), une cavitation peut se produire lorsque les surfaces supérieure et inférieure s'éloignent l'une de l'autre pendant une partie du mouvement harmonique (c'est-à-dire pour la phase d'écrasement négative) exécutée par le disque supérieur. Lorsque les surfaces contiguës au film se séparent, cela crée des dépressions à l'intérieur du film fluide qui sont inférieures à la pression atmosphérique absolue. Si la pression dans le film chute en dessous de la pression de cavitation critique, le film de fluide se rompt, c'est-à-dire cavite. La cavitation peut être gazeuse, vaporeuse ou une combinaison de celles-ci.

La compression sinusoïdale étant de faible amplitude et de faible fréquence, l'apparition de la cavitation et de la turbulence est donc peu probable.

Les équations gouvernantes, y compris l'équation de Reynolds modifiée couplée à l'équation de Darcy modifiée, sont dérivées pour un modèle de fluide non Newtonien à couples de contraintes suspendant avec une viscosité variable en considérant les effets d'interface fluide-milieu poreux. La vitesse de glissement est directement calculée au moyen de la loi de Darcy modifiée pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds de l'écoulement par compression ou écrasement; c'est-à-dire lorsque l'écoulement de compression s'effectue en régime laminaire.

Les performances hydrodynamiques du film comprimé sont déduites à partir de la solution numérique des deux équations gouvernantes couplées, Reynolds-Darcy, en utilisant la méthode des différences finies et la méthode itérative du point fixe avec facteur de sous-relaxation.

Pour une fraction volumique de particules donnée, les effets non Newtoniens du fluide lubrifiant (la synovie) sur les caractéristiques du film comprimé seront analysés pour une gamme de valeurs du paramètre des couples de contraintes sans dimension,  $\tilde{\ell} = \frac{\ell}{h_0}$ , en

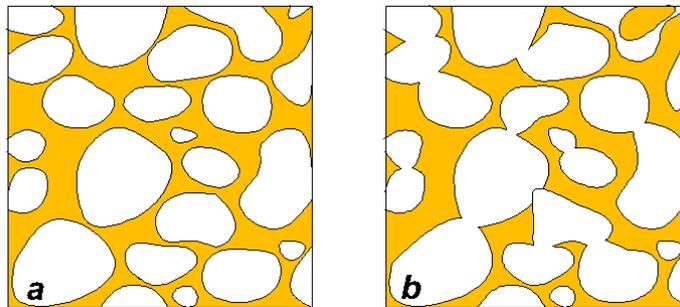
considérant le bord du disque poreux soit étanche (*sealed disc edge*) ou libre (*unsealed or free disc edge*).

## IV.2 Caractéristiques générales et modélisation des milieux poreux

### IV.2.1 Définitions

La caractérisation de la nature poreuse du cartilage, élément capital de l'articulation biologique sera particulièrement exposée ainsi que les définitions de base relatives à la modélisation de l'écoulement des fluides dans les milieux poreux.

Un milieu poreux est communément défini comme étant un milieu solide contenant une quantité suffisante de vides répartis de manière ordonnée ou chaotique, connectés ou non-connectés entre eux comme illustré sur la **figure IV.1** [9]. Les vides se caractérisent par des formes et des tailles très variées qui peuvent être classés en trois groupes, à savoir: les pores moléculaires qui sont les plus petits vides, les cavernes qui sont les plus grands vides, et les pores qui sont simplement l'espace entre les deux premiers types [10].



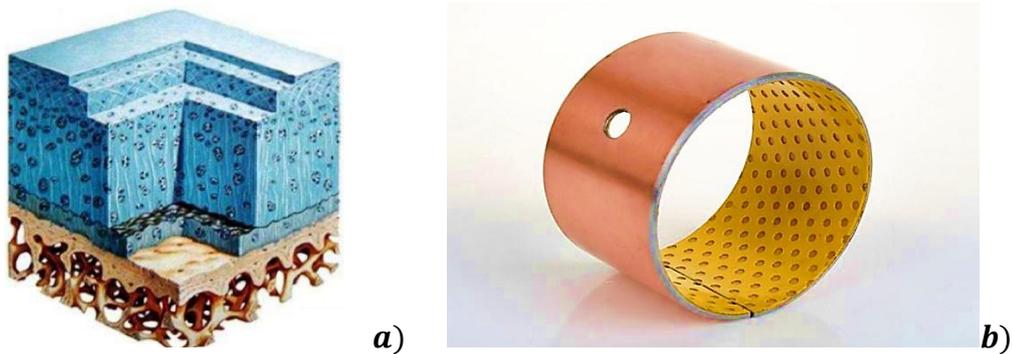
**Fig. IV.1 Structure d'un milieu poreux**

Selon la structure du matériau formant la partie solide du milieu poreux, il est possible de faire la classification suivante :

- ❖ **Le matériau granulaire** : constitué d'un grand nombre de particules solides distinctes (les grains) qui ne sont pas liés par des liaisons chimiques.
- ❖ **Le matériau cellulaire** : dont la partie solide forme des cellules distinctes ouvertes ou fermées.
- ❖ **Le matériau fibreux** : dont la partie solide est constituée de fibres plus ou moins enchevêtrées les unes dans les autres et agglomérées par un liant.

Les matériaux poreux sont omniprésents aussi bien dans le milieu naturel (les cartilages articulaires, les roches, les sols, le bois, etc.) que dans le milieu industriel où on s'aperçoit

de l'utilisation ubiquitaire des milieux poreux dans différents domaines comme l'aérospatial, l'industrie automobile, la médecine, et la bio-ingénierie **figure IV.2**.



**Fig. IV.2 Exemples de structure d'un milieu poreux :**

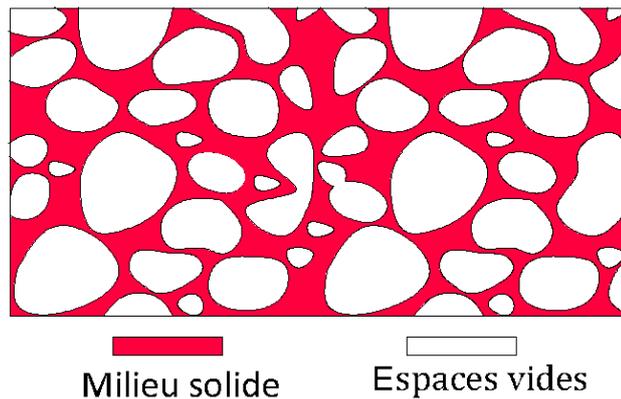
**a) cartilage articulaire ; b) coussinet poreux**

#### IV.2.2 Paramètres caractéristiques

Les milieux poreux ont différentes caractéristiques, à savoir :

##### a) La porosité

Les milieux poreux comme montrés dans la **figure IV.3** contiennent un certain pourcentage de vides qui peuvent être occupés par des fluides ce qui définit leur porosité  $\varepsilon$  [11].



**Fig. IV.3 Les espaces vides dans un milieu poreux**

Ce paramètre est défini par la relation suivante :

$$\varepsilon = \frac{V_p}{V_t} \quad (IV-1)$$

où  $V_p$  est le volume des pores et  $V_t$  est le volume total.

Les valeurs de la porosité s'échelonnent entre 0 et 1, telle que la valeur 0 représente le solide plein et la valeur 1 représente un solide complètement vide. La porosité calculée seulement à partir de l'espace poreux interconnecté est appelée la porosité effective [12].

La détermination expérimentale de la porosité est basée sur la mesure du volume des pores et le volume total afin de calculer le rapport de porosité.

### b) La compacité

La deuxième caractéristique des milieux poreux est la compacité qui est cette fois-ci le pourcentage de volume solide dans le milieu poreux. Ainsi, on peut dire que la compacité représente le taux d'occupation réel de l'espace à l'intérieur d'un milieu poreux et est calculée par la relation :

$$c = \frac{V_s}{V_t} = 1 - \varepsilon \quad (\text{IV-2})$$

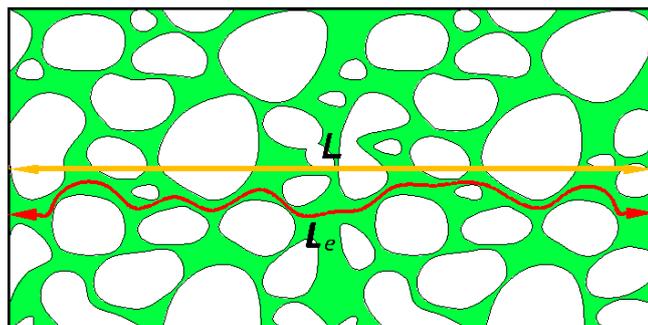
où  $V_s$  est le volume du solide.

### c) La connectivité et la tortuosité

La connectivité caractérise la topologie du volume des pores, le voisinage des pores et la présence de pores bouchés tandis que la tortuosité représente la non-rectilinéarité des trajectoires à l'intérieur du milieu poreux **figure IV.4**. Si on considère un échantillon de longueur  $L$  d'une part, et un canal de longueur effective  $L_e > L$  qui traverse cet échantillon d'une extrémité à l'autre, on peut déterminer la tortuosité comme :

$$\tau = \frac{L_e}{L} \quad (\text{IV-3})$$

Autrement dit, la tortuosité caractérise la ligne de courant d'un fluide dans le milieu poreux, par rapport à une ligne droite entre les extrémités d'écoulement dans le milieu poreux.



**Fig. IV.4 Représentation de la tortuosité d'un milieu poreux**

Dans le tableau suivant, on reporte quelques propriétés de la roche de sable (grès ou sandstone) et de la mousse en polyuréthane considérées comme des milieux poreux naturels et industriels :

**Tableau IV.1. Quelques propriétés de la roche de sable et de la mousse en polyuréthane**

Porosité $\varepsilon$ (-)	Perméabilité $k$ (m <sup>2</sup> )	Tortuosité $\tau$ (-)	Module d'Young, E (GPa)	Coefficient de Poisson, $\nu$ (-)	Masse volumique, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )
0.3	10 <sup>-10</sup> -10 <sup>-4</sup>	1.02	7.3	0.3	2300.
0.97	1.53 × 10 <sup>-10</sup>	1.60	169 × 10 <sup>-6</sup>	0.3	998.

#### d) La perméabilité

La perméabilité intrinsèque, notée  $k$ , se rapporte au milieu poreux indépendamment des caractéristiques du fluide. Elle correspond à l'interconnexion et aux caractéristiques géométriques des vides permettant à un fluide d'y circuler. La perméabilité dépend de la porosité  $\varepsilon$  et de la géométrie de la matrice solide. Elle est dimensionnellement homogène à une surface et son ordre de grandeur est donné par la section d'un pore individuel [13, 14]. La perméabilité est un paramètre physique qui caractérise la capacité du milieu poreux à conduire à travers lui un liquide sous un gradient de pression donné. L'équation dimensionnelle de la perméabilité est  $[k] = L^2$  ou encore le Darcy tel que (1 Darcy =  $0.987 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \approx 1 \mu\text{m}^2$ ).

La littérature technique offre plusieurs relations et formules pour le calcul de la perméabilité  $k$  à partir de la porosité  $\varepsilon$ . Elle peut être calculée à partir de la relation de Kozeny-Carman [15, 16, 17]:

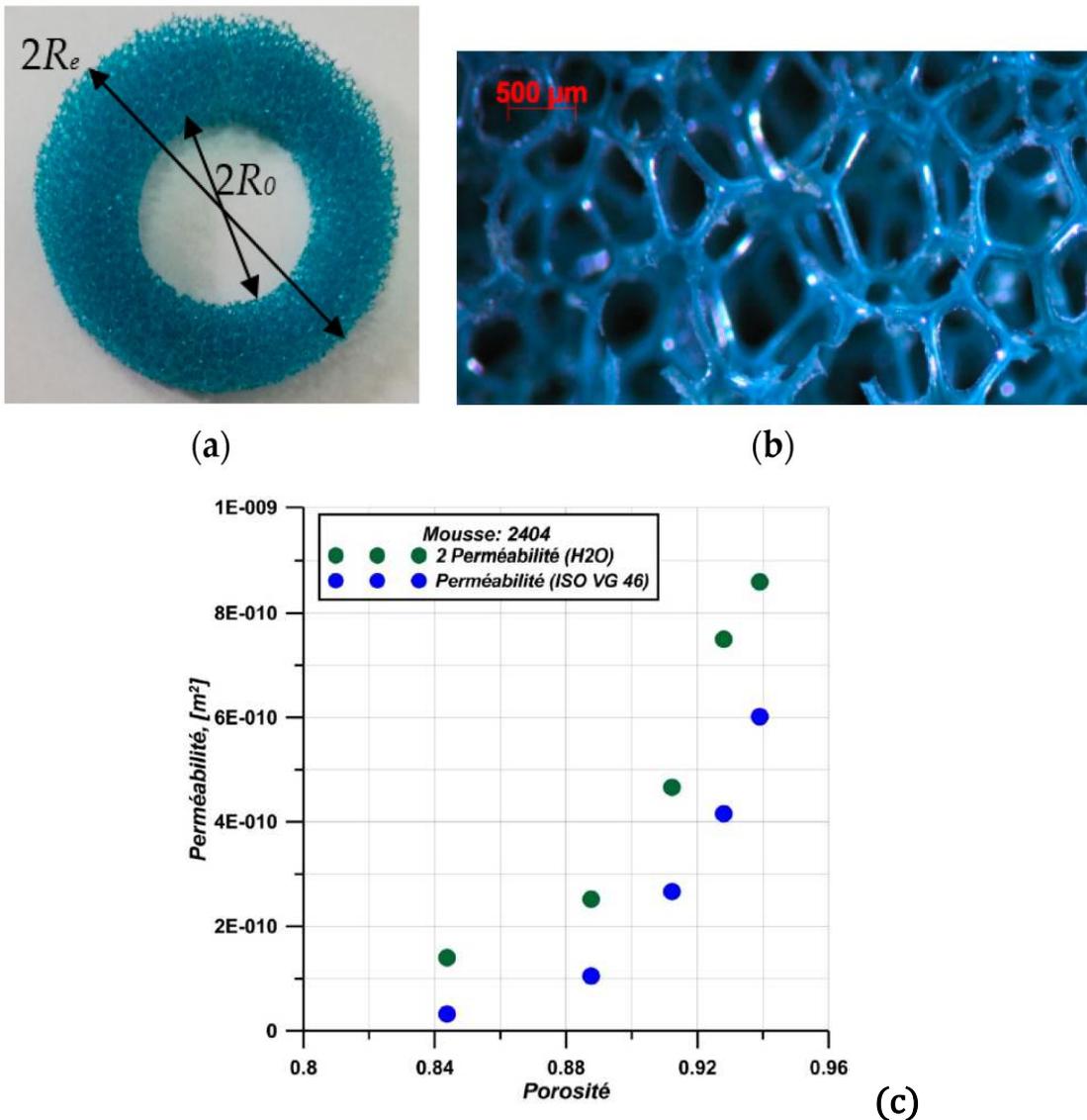
$$k = \frac{D_p^2 \varepsilon^3}{180 (1 - \varepsilon)^2} \quad (\text{IV-4})$$

où  $D_p$  est un diamètre caractéristique des pores.

**Tableau IV.2. Valeurs typiques de la perméabilité de quelques matériaux poreux usuels**

Matériau	Perméabilité $k$ [m <sup>2</sup> ]
Briques	4,8×10 <sup>-15</sup> – 2,2×10 <sup>-13</sup>
Cuir	9,5×10 <sup>-14</sup> – 1,2×10 <sup>-13</sup>
Fibres de verre	2,4×10 <sup>-11</sup> – 5,1×10 <sup>-11</sup>
Sable	2,0×10 <sup>-11</sup> – 5,1×10 <sup>-11</sup>
Cheveux artificiels	8,3×10 <sup>-10</sup> – 1,2×10 <sup>-9</sup>
Poudre d'ardoise noir	4,9×10 <sup>-14</sup> – 1,2×10 <sup>-13</sup>
Fils à tisser	3,8×10 <sup>-9</sup> – 1×10 <sup>-8</sup>

Variations typiques de la perméabilité avec la porosité de la mousse en polyuréthane imbibée à l'eau et à l'huile **figure IV.5** [18]



**Fig. IV.5 Comparaison entre les valeurs expérimentales des perméabilités mesurées à l'eau et à l'huile ISO VG 46 pour différentes porosités**

#### IV.2.3 Modèles d'écoulements à travers des milieux poreux

Pour étudier les processus d'écoulement dans un milieu poreux, il existe différents modèles qui utilisent des lois basiques de transfert de masse, d'énergie et de quantité de mouvement. Dans ce qui suit, on ne présentera que les modèles les plus utilisés :

##### a) Modèle de Darcy classique

Traditionnellement, la loi de Darcy [19, 20] a été appliquée pour les écoulements à travers des milieux poreux isotropes, cette loi a fait l'objet de validation par des essais expérimentaux, ce modèle est décrit par la formule suivante :

$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{V}^* \quad (\text{IV-5})$$

ou  $\vec{V}^* = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p^*$  , ou encore  $\vec{V}^* = -\frac{\bar{k}}{\mu} \vec{\nabla} p^*$  pour un milieu poreux anisotrope.

où  $p^*$  est la pression dans le milieu poreux,  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide,  $k$  est la perméabilité du milieu poreux et  $\vec{V}^*$  est la vitesse de filtration ou d'écoulement. Le signe moins apparaissant dans la loi de Darcy (IV-5) signifie que l'écoulement du fluide dans le milieu poreux s'effectue dans le sens des pressions décroissantes.

Ce modèle, dit aussi loi de Darcy, relie donc le gradient de pression avec la vitesse d'écoulement, mais malgré cela elle est limitée car ce modèle ne s'applique pas dans le cas où la vitesse est très élevée ou dans le cas d'un milieu ayant une porosité importante, car dans ces conditions on ne peut pas considérer une variation linéaire du gradient de pression avec la vitesse en raison de l'influence significative des effets inertiels. Il a été affirmé dans la littérature que l'application de ce modèle se limite à des écoulements caractérisés par de faibles valeurs du nombre de Reynolds modifié. Afin de caractériser la nature de l'écoulement, on introduit le nombre de Reynolds modifié dont l'expression est [12, 21, 22]:

$$R'_e = \frac{\rho V D_p}{\mu} \quad (\text{IV-6})$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide. La loi de Darcy est valable en pratique pour un nombre de Reynolds modifié qui ne dépasse pas une valeur comprise entre 1 et 10.

### b) Modèle de Darcy-Forchheimer

En dépit de sa large utilisation dans l'étude des écoulements dans les milieux poreux, le modèle de Darcy est mis en défaut lorsque le nombre de Reynolds de l'écoulement est très élevé. Dans ces conditions, les forces d'inertie deviennent prépondérantes et ne doivent pas être ignorées. Ce modèle a donc subi des modifications par certains auteurs dont le but est d'introduire un terme représentant l'inertie du fluide en écoulement. Parmi ces auteurs, Forchheimer a proposé le modèle suivant [23, 24]:

$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{V}^* - \frac{\rho c_f |\vec{V}^*|}{\sqrt{k}} \vec{V}^* \quad (\text{IV-7})$$

où  $c_f$  est le coefficient de traînée appelé parfois le coefficient de Forchheimer, qui n'est pas une constante universelle mais varie selon la nature du matériau poreux et la vitesse d'écoulement.

Le passage du modèle de Darcy au modèle de Darcy-Forchheimer se produit lorsqu'on arrive à un nombre de Reynolds modifié égal à 10, cette transition est caractérisée par l'apparition des premiers tourbillons dans l'écoulement.

### c) Modèle de Darcy-Brinkman

À l'origine, l'équation de Brinkman est une extension directe de la loi de Darcy [7], vient après que les conditions ne puissent pas être appliquées à la vitesse tangentielle ou sur sa dérivée. La loi de Darcy-Brinkman est donnée par l'équation (IV-8) :

$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{V}^* + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{V}^* \quad (\text{IV-8})$$

où  $\mu'$  est la viscosité effective ou seconde viscosité.

Le premier terme de droite est le terme de Darcy, et le second est appelé le terme de Brinkman qui présente une analogie du terme de Laplace dans l'équation de Navier-Stokes.

Il convient de noter que la correction de Brinkman est valable pour les grandes valeurs de la porosité  $\varepsilon$ .

Dans l'équation (IV-8), la viscosité effective s'exprime comme le rapport de la viscosité dynamique à la porosité :  $\mu' = \frac{\mu}{\varepsilon}$  (Cf. Chapitre V).

### d) Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer

Toujours dans le but d'obtenir une formulation universelle pour caractériser avec une précision suffisante les écoulements dans les milieux poreux, une autre correction a été faite en vue d'améliorer la loi décrivant les écoulements visqueux dans les milieux poreux. Cette correction, basée sur la fusion des trois modèles évoqués précédemment, a permis de dériver un modèle global et complet communément appelé loi de Darcy-Brinkman-Forchheimer [25, 26, 27]. Ce modèle s'exprime par l'équation vectorielle non linéaire suivante :

$$\vec{\nabla} p^* = -\frac{\mu}{k} \vec{v}^* + \mu' \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* - \frac{\rho c_f |\vec{v}^*|}{\sqrt{k}} \vec{v}^* \quad (\text{IV-9})$$

Sous forme plus générale, l'équation (IV-9) s'écrit lorsque les forces d'inertie sont prises en considération comme suit :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \overline{\text{grad}} \left( \frac{\vec{v}}{\varepsilon} \right) \right) = -\vec{\nabla} p^* - \frac{\mu}{k} \vec{v}^* + \frac{\mu}{\varepsilon} \vec{\nabla}^2 \vec{v}^* - \frac{\rho c_f |\vec{v}^*|}{\sqrt{k}} \vec{v}^* \quad (\text{IV-10})$$

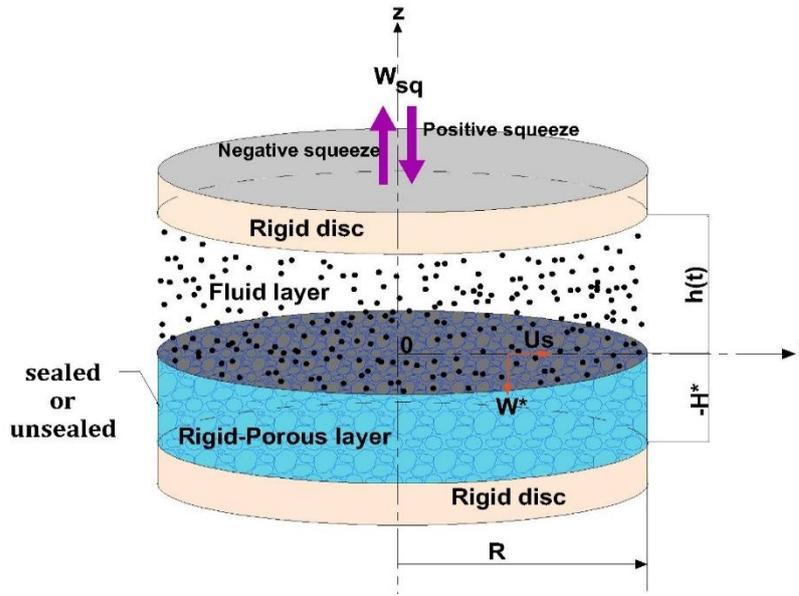
A notre connaissance et autant qu'on sache, cette équation vectorielle ne fut pas validée expérimentalement, d'autant plus d'après la littérature la justification de cette loi n'est pas suffisamment claire. Toutefois, elle représente une certaine analogie avec l'équation vectorielle de Navier-Stokes et elle est très utilisée dans les simulations numériques des écoulements de fluides Newtoniens dans les milieux poreux (approches CFD).

### IV.3 Équations gouvernantes du problème de lubrification direct

#### IV.3.1. Équations générales dans le film fluide

La configuration géométrique étudiée est celle illustrée sur la **figure IV.6**, et les propriétés physiques de l'écoulement sont celles du chapitre précédent (paragraphe III.3.1) auxquelles on rajoute les données relatives à la porosité du disque inférieur à savoir : la perméabilité  $k$  et la porosité  $\varepsilon$ . Les détails de l'étude envisagée sont résumés ci-dessous :

- A. Le disque inférieur est un milieu poreux anisotrope.
- B. La perméabilité  $k$  est constante.
- C. Le glissement de la particule de fluide à l'interface milieu poreux/film lubrifiant est pris en compte.
- D. L'écoulement à travers le disque poreux est modélisé par le modèle de Darcy modifié [28] dérivé dans le cadre de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes.
- E. Le bord du disque poreux peut être étanche ou non.



**Fig. IV.6 Modèle géométrique (3-D)**

La prise en compte de la porosité du disque inférieur introduit évidemment un changement dans l'équation de Reynolds modifiée (II-33). L'utilisation de cette équation n'est alors plus appropriée. Il est donc nécessaire de reformuler l'équation de film mince à partir des équations de Navier-Stokes (II-27) et de l'équation de continuité (II-23) pour prendre en compte la porosité et le glissement à l'interface. Pour un écoulement incompressible et axisymétrique, les équations de mouvement et de continuité se réduisent aux équations (IV-11) et (IV-13) suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu_s \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \quad (\text{IV-11})$$

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow p = p(r) \quad (\text{IV-12})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-13})$$

#### IV.3.2. Équations générales dans le milieu poreux

Comme une première approximation, le disque poreux est considéré comme un disque indéformable et anisotrope dont la perméabilité est supposée constante. L'écoulement au sein de ce disque est modélisé par l'équation de Darcy.

##### a) Équation de continuité

L'équation de continuité dans la matrice poreuse est écrite en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible et axisymétrique comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r u^*)}{\partial r} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-14})$$

où  $u^*$  et  $w^*$  sont les composantes radiale et axiale du vecteur vitesse dans la matrice poreuse.

Les composantes de vitesse dans la matrice poreuse sont données pour un écoulement laminaire et isotherme par la loi de Darcy modifiée, qui tient compte des effets des couples de contraintes [28]:

$$u^* = -\alpha_r \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-15})$$

$$w^* = -\alpha_z \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \quad (\text{IV-16})$$

où :

$\alpha_r$  : le paramètre de perméabilité suivant  $r$  de la matrice poreuse anisotrope tel que

$$\alpha_r = \frac{k_r}{\mu_s (1-\beta_r)}$$

$\alpha_z$  : le paramètre de perméabilité suivant  $z$  de la matrice poreuse anisotrope tel que

$$\alpha_z = \frac{k_z}{\mu_s (1-\beta_z)}$$

$\beta_r$  : rapport de la taille de la microstructure à celle du pore dans la direction radiale

$\beta_z$  : rapport de la taille de la microstructure à celle du pore dans la direction axiale

$\beta_r$  et  $\beta_z$  [29, 30] apparaissant dans les relations de  $\alpha_r$  et  $\alpha_z$  sont définis par les relations suivantes:

$$\beta_r = \frac{\eta/\mu_s}{k_r} \quad (\text{IV-17})$$

$$\beta_z = \frac{\eta/\mu_s}{k_z}$$

tel que  $0 \leq \beta_r, \beta_z < 1$

où  $\eta/\mu_s$  est le carré de la longueur caractéristique des particules solides en suspension dans le fluide, et  $k_r$  et  $k_z$  sont respectivement les coefficients de perméabilité dans les directions radiale et axiale.

### b) Équation de Darcy modifiée

Le champ de pression dans la couche poreuse doit satisfaire à l'équation de Darcy modifiée suivante écrite pour un fluide à couple de contrainte incompressible :

$$\alpha_r \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) + \alpha_z \frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV-18})$$

## IV.4 Équation de Reynolds modifiée

### IV.4.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur les vitesses sont :

$$z = h(t) ; \quad u = 0 \quad ; \quad w = \frac{dh}{dt} = W_{sq} ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV-19a})$$

$$z = 0 \quad ; \quad u = U_s = u^*|_{z=0} ; \quad w = w^*|_{z=0} \quad ; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{IV-19b})$$

On note que l'annulation des couples de contraintes aux parois conduit à l'annulation des dérivées secondes de la vitesse d'écoulement.

Les conditions aux limites sur la pression sont :

$$p = 0 \text{ (pression ambiante) et } \begin{cases} \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 & \text{(cas étanche)} \\ \text{ou} \\ p^* = 0 & \text{(cas non étanche)} \end{cases} \quad \text{à } r = R \quad (\text{IV-20a})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \text{ et } \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \text{ à } r = 0 \text{ (champ axisymétrique)} \quad (\text{IV-20b})$$

$$p = p^* \text{ à } z = 0 \text{ (continuité de pression)} \quad (\text{IV-20c})$$

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \text{ à } z = -H^* \text{ (substrat rigide)} \quad (\text{IV-20d})$$

$H^*$  étant l'épaisseur de la couche poreuse.

### IV.4.2 Champ de vitesse

La solution de l'équation (IV-11) soumise aux conditions aux limites (IV-19) est :

$$u(r, z) = \frac{1}{2 \mu_s} \frac{\partial p}{\partial r} \left[ z(z-h) + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2z-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] + U_s \left( 1 - \frac{z}{h} \right) \quad (\text{IV-21})$$

où  $l = \sqrt{\eta/\mu_s}$  est le paramètre des couples de contraintes,  $U_s$  est la vitesse de glissement à l'interface ( $z = 0$ ).

La vitesse de glissement à l'interface fluide-couche poreuse est donnée pour un écoulement de compression laminaire par :

$$U_s = u|_{z=0} = u^*|_{z=0} = -\alpha_r \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) \Big|_{z=0} \quad (\text{IV-22})$$

Il s'agit d'une incorporation directe de l'effet de glissement à l'interface  $z = 0$ .

La vitesse du fluide  $w$  dans la direction axiale  $z$  peut être obtenue numériquement en utilisant la méthode des différences finies à partir de la différentiation de l'équation de continuité (IV-13) par rapport à la variable  $z$  ; c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (\text{IV-23})$$

#### IV.4.3 Équation de Reynolds modifiée

En intégrant l'équation de continuité (IV-13) à travers l'épaisseur du film fluide et en tenant compte des conditions aux limites sur les vitesses (IV-19), on obtient l'équation de Reynolds modifiée suivante :

$$\frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} - w^*|_{z=0} + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial U_s}{\partial r} + \frac{U_s}{r} \right) \quad (\text{IV-24})$$

où :  $G(h, l) = h^3 - 12 l^2 h + 24 l^3 \tanh \left( \frac{h}{2l} \right)$

Pour un fluide Newtonien ( $l = 0$ ), l'équation  $G(h)$ , se réduit à :  $G(h) = h^3$

En substituant l'équation (IV-16) dans l'équation (IV-24), une forme finale de l'équation de Reynolds modifiée peut alors être dérivée :

$$\frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{dh}{dt} + \alpha_z \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} + \frac{h}{2} \left( \frac{\partial U_s}{\partial r} + \frac{U_s}{r} \right) \quad (\text{IV-25})$$

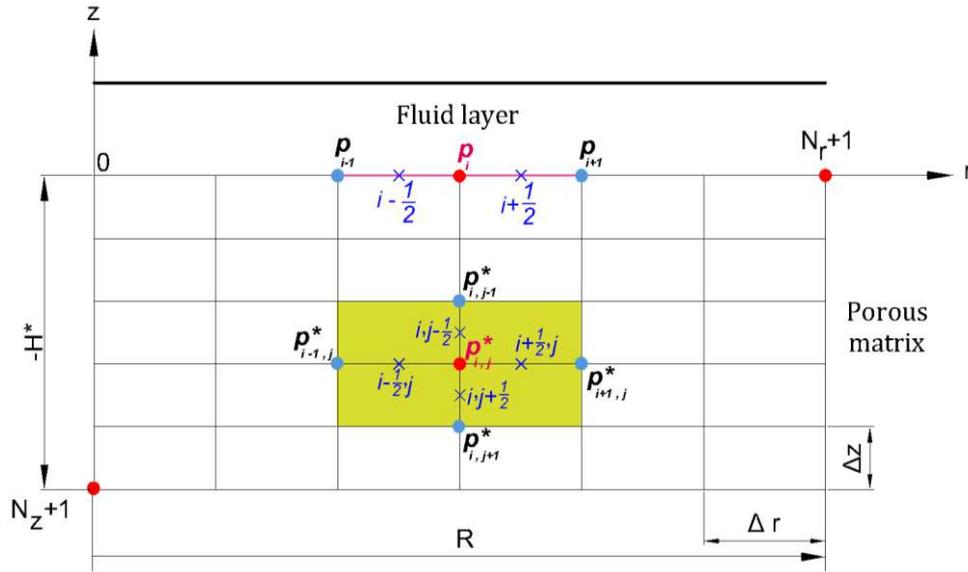
### IV.5 Résolution du problème de lubrification par film comprimé en présence d'un milieu poreux : problème direct

#### IV.5.1 Approche numérique

L'équation de Reynolds modifiée (IV-25) et l'équation de Laplace modifiée (IV-18) sont couplées à l'interface poreuse par la continuité de la pression et des vitesses, et résolues numériquement par la méthode des différences finies (figure IV.7). Cette méthode a largement fait ses preuves et est largement développée dans la littérature d'un point de vue mathématique [31, 32]. Elle consiste à discrétiser le domaine d'étude en un nombre fini de points appelés nœuds du maillage, et puis à calculer les valeurs approximatives des dérivées de la fonction inconnue, ici la pression, à l'aide des développements en séries de Taylor.

Le système d'équations algébriques linéaires obtenu pour les deux équations différentielles gouvernantes est résolu numériquement au moyen de la méthode itérative

de Gauss-Seidel avec un facteur de sur-relaxation  $\omega_{GS}$  dont la valeur varie de 1 à 2 (c'est-à-dire  $1 \leq \omega_{GS} < 2$ ) [33].



**Fig. IV.7** Grille des différences finies axisymétriques du film fluide et du milieu poreux

**a) Discrétisation de l'équation de Reynolds modifiée par différences finies**

La dérivée partielle figurant dans l'équation de Reynolds modifiée (IV-25), est discrétisée suivant le schéma suivant :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} \frac{p_{i+1} - p_i}{\Delta r} - r_{i-\frac{1}{2}} \frac{p_i - p_{i-1}}{\Delta r}}{\Delta r} \quad (IV-26)$$

où :

$$r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \quad (IV-27a)$$

$$r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \quad (IV-27b)$$

En injectant l'expression (IV-26) dans l'équation (IV-25), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{G(h, l)}{12 \mu_s \Delta r^2} \left( r_{i+\frac{1}{2}} (p_{i+1} - p_i) - r_{i-\frac{1}{2}} (p_i - p_{i-1}) \right) \\ & = \frac{dh}{dt} r_i + r_i \left( \alpha_z \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \right)_{i,1} + \frac{h}{2} \left( r_i \frac{\partial U_s}{\partial r} \Big|_{i,1} + U_{s,i,1} \right) \end{aligned} \quad (IV-28)$$

La forme finale de l'équation de Reynolds modifiée discrétisée par la méthode des différences finies est alors :

$$p_i = A_1 p_{i+1} + A_2 p_{i-1} + A_3 \quad (\text{IV-29})$$

où :

$$A_0 = \frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \left( r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} \right) / \Delta r^2 \quad (\text{IV-30a})$$

$$A_1 = \left( r_{i+\frac{1}{2}} \frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \right) / (A_0 \Delta r^2) \quad (\text{IV-30b})$$

$$A_2 = \left( r_{i-\frac{1}{2}} \frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \right) / (A_0 \Delta r^2) \quad (\text{IV-30c})$$

$$A_3 = \left( -r_i \frac{dh}{dt} - r_i \alpha_z \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) \Big|_{i,0} - \frac{h}{2} \left( r_i \frac{\partial U_s}{\partial r} \Big|_i + U_{si} \right) \right) / A_0 \quad (\text{IV-30d})$$

### b) Discrétisation de l'équation de Darcy par différences finies

Les dérivées partielles, du premier et second ordre, présentes dans l'équation de Laplace (IV-18) sont discrétisées selon un schéma centré aux différences finies d'ordre deux. On a ainsi :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} \left( p^*_{i+1,j} - p^*_{i,j} \right) - r_{i-\frac{1}{2}} \left( p^*_{i,j} - p^*_{i-1,j} \right)}{\Delta r^2} \quad (\text{IV-31})$$

$$\frac{\partial^2 p^*}{\partial z^2} = \frac{p^*_{i,j+1} - 2 p^*_{i,j} + p^*_{i,j-1}}{\Delta z^2} \quad (\text{IV-32})$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation de Laplace (IV-18), on obtient :

$$p^*_{i,j} = C_1 p^*_{i+1,j} + C_2 p^*_{i-1,j} + C_3 \left( p^*_{i,j+1} + p^*_{i,j-1} \right) \quad (\text{IV-33})$$

où :

$$C_0 = \left[ \alpha_r \left( r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} \right) / \Delta r^2 \right] + [2 r_i \alpha_z / \Delta z^2] \quad (\text{IV-34a})$$

$$C_1 = r_{i+\frac{1}{2}} \alpha_r / (C_0 \Delta r^2) \quad (\text{IV-34b})$$

$$C_2 = r_{i-\frac{1}{2}} \alpha_r / (C_0 \Delta r^2) \quad (\text{IV-34c})$$

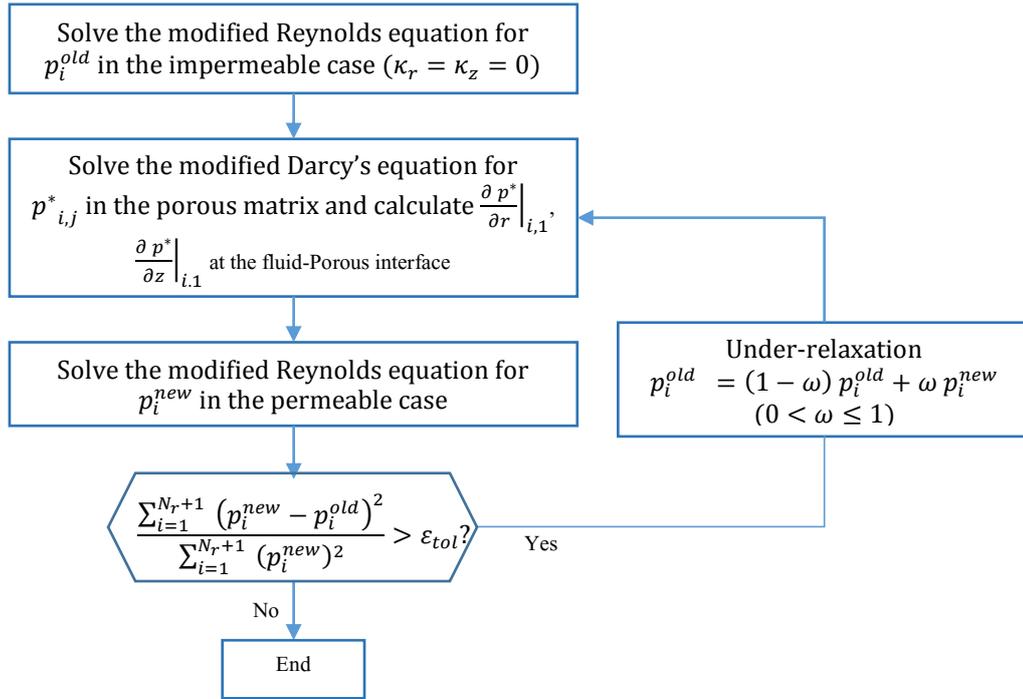
$$C_3 = r_i \alpha_z / (C_0 \Delta z^2) \quad (\text{IV-34c})$$

### c) Couplage Reynolds-Darcy : Méthode itérative du point fixe

La **figure IV.8** illustre la procédure générale du processus itératif utilisé à chaque pas de temps. Pour obtenir une solution convergente pour le système d'équations aux dérivées partielles couplées, un schéma itératif est nécessaire. Pour la première itération, l'équation de Reynolds modifiée (IV-29) est résolue pour  $p_i^{old}$  sans l'influence de la matrice poreuse. Le champ de pression hydrodynamique obtenu peut ensuite être utilisé comme condition aux limites à l'interface film fluide-disque poreux pour résoudre l'équation de Darcy modifiée (IV-33) pour  $p^*_{i,j}$  dans le domaine poreux. La pression calculée  $p^*_{i,j}$  sert à calculer les gradients de pression radiale  $\left(\frac{\partial p^*}{\partial r}\right)_{i,1}$  et axiale  $\left(\frac{\partial p^*}{\partial z}\right)_{i,1}$  soit par différences finies soit par interpolation et donc les composantes de vitesse  $u^*_{i,1}$  et  $w^*_{i,1}$  à l'interface. Il est maintenant possible de résoudre une seconde fois l'équation de Reynolds modifiée (IV-29) pour  $p_i^{new}$  en tenant compte des termes liés à la porosité apparaissant dans le second membre de l'équation de pression. Le processus de calcul revient à la résolution de l'équation de Darcy modifiée (IV-33). Cette procédure est répétée jusqu'à ce qu'une solution convergente ait été trouvée qui se traduit par l'obtention de deux champs de pression hydrodynamique successifs très proches.

Afin d'éviter les oscillations numériques et d'assurer une meilleure stabilité du processus itératif, il est important de limiter l'influence par itération de la matrice poreuse dans la résolution de l'équation de Reynolds (IV-29). Pour cela, un paramètre de sous-relaxation  $\omega$  dont la valeur s'échelonne entre 0. et 1. est introduit, qui doit être choisi de telle sorte que la convergence soit garantie avec un temps de calcul acceptable. Lorsque  $\omega = 1$ , on retrouve la méthode du point fixe classique.

Une fois la convergence du processus est obtenue, on peut calculer les performances hydrodynamiques du contact telles que la capacité de charge, la force de frottement, le débit de fuite, et la puissance dissipée.



**Fig. IV.8 Schéma itératif pour la résolution des équations de Reynolds et de Darcy**

#### IV.5.2 Approximation de Morgan-Cameron pour une couche poreuse mince

Cette approximation n'est valide que dans le cas d'une épaisseur très mince de la couche poreuse  $\left(\frac{H^*}{R} \ll 1\right)$  et lorsque la vitesse de glissement de la particule de fluide à l'interface est négligée.

En intégrant l'équation (IV-18), écrite pour un milieu poreux isotrope, par rapport à la variable  $z$  à travers l'épaisseur de la matrice poreuse, et en utilisant les conditions aux limites (IV-20d), on obtient

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = - \int_{-H^*}^0 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) dz \quad (\text{IV-35})$$

En supposant que l'épaisseur de la couche poreuse  $H^*$ , est très faible devant le rayon du disque  $R$  et l'utilisation de la condition de continuité de la pression (IV-20c) à l'interface film fluide-couche poreuse ( $z = 0$ ), l'équation(IV-35) devient

$$\frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = - H^* \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-36})$$

Par conséquent, la composante de vitesse de Darcy modifiée à l'interface ( $z = 0$ ) est donnée par l'expression :

$$w^* \Big|_{z=0} = - \alpha \frac{\partial p^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha H^* \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (\text{IV-37})$$

Compte tenu de la relation (IV-37), l'équation de Reynolds modifiée (IV-25) lorsque la vitesse de glissement à l'interface ( $z = 0$ ) est ignorée prend la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{12 \mu_s \frac{dh}{dt}}{G(h, l) + 12 \mu_s \alpha H^*} \quad (\text{IV-38})$$

En utilisant les conditions aux limites sur la pression (IV-20a) et (IV-20b), la solution analytique de l'équation (IV-38) est dérivée comme

$$p(r, t) = \frac{3 \mu_s \frac{dh}{dt} (r^2 - R^2)}{G(h, l) + 12 \mu_s \alpha H^*} \quad (\text{IV-39})$$

## IV.6 Performances hydrodynamiques

### IV.6.1 Capacité de charge

En intégrant la pression hydrodynamique sur la surface du disque pour un contact axisymétrique, on exprime ainsi la capacité de charge instantanée  $W(t)$  du film comprimé comme suit :

$$W(t) = 2\pi \int_0^R p(r, t) r dr \quad (\text{IV-40})$$

### IV.6.2 Débits de fuite au bord du disque

Le débit de fuite instantané au bord du disque est calculé par la relation suivante :

$$Q_r(t) = 2\pi R h \langle u \rangle \quad (\text{IV-41})$$

où  $\langle u \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u(r = R, z) dz$  est la vitesse radiale moyenne

La substitution de l'expression de  $u$  de l'équation (IV-15) dans l'équation du débit de fuite (IV-41), puis l'intégration sur l'épaisseur du film donne :

$$Q_r = -2\pi R \left( \frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=R} - \frac{h U_s}{2} \right) \quad (\text{IV-42})$$

### IV.6.3 Contrainte de cisaillement

Pour le fluide à couples de contraintes, la contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_{rz}$  est donnée par:

$$\tau_{rz}|_{z=0} = \mu_s \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} - \eta \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \quad (\text{IV-43})$$

En utilisant l'expression de  $u$  et des conditions aux limites, on trouve:

$$\tau_{rz}|_{z=0} = -\left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_s \frac{U_s}{h}\right) \quad (\text{IV-44})$$

#### IV.6.4 Force de frottement

La force de frottement  $F_f$  peut être calculée en intégrant la contrainte de cisaillement sur la surface du disque :

$$F_f = -2\pi \int_0^R \left(\frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial r} + \mu_s \frac{U_s}{h}\right) r dr \quad (\text{IV-45})$$

#### IV.6.5 Puissance dissipée

La perte de puissance totale peut être calculée par la relation suivante :

$$\mathcal{P} = 2\pi \left[ \underbrace{\int_0^h \int_0^R \Phi_1 r dr dz}_{\text{contribution Newtonienne}} + \underbrace{\int_0^h \int_0^R \Phi_2 r dr dz}_{\text{contribution non Newtonienne}} \right] \quad (\text{IV-46})$$

où  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont les fonctions de dissipation exprimées dans le cadre de la lubrification hydrodynamique par :

$$\Phi_1 = \mu_s \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right] \approx \mu_s \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \quad (\text{IV-47})$$

$$\Phi_2 = \eta \left[ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)^2 \right] \approx \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 \quad (\text{IV-48})$$

Après intégration par rapport à  $z$ , on obtient la forme finale de la perte de puissance totale:

$$\mathcal{P} = 2\pi \left[ \underbrace{\int_0^R \frac{G(h, l)}{12 \mu_s} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 r dr}_{\text{puissance de Hagen-Poiseuille}} + \underbrace{\int_0^R \frac{\mu_s U_s^2}{h} r dr}_{\text{puissance due au glissement}} \right] \quad (\text{IV-49})$$

On note que les expressions des fonctions de dissipation  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont obtenues à partir de l'écriture de l'équation d'énergie en appliquant le premier principe de la thermodynamique au micro-continuum de V. K. Stokes [34, 35].

### IV.7 Validation & étude paramétrique

Le modèle numérique développé est utilisé pour étudier les effets non Newtoniens du lubrifiant (synovie) assimilé à un fluide à couples de contraintes suspendant pour des valeurs données de la fraction volumique sur les caractéristiques hydrodynamiques sur

un cycle d'oscillation complet du disque supérieur. Les résultats ont été obtenus pour deux configurations du disque poreux : étanche et non étanche. Comme dans le chapitre précédent, la présence des couples de contraintes est contrôlée par le paramètre adimensionnel  $\tilde{\ell}$  variant de 0 (cas Newtonien) à 0,4.

Les données utilisées dans cette investigation sont présentées dans le **tableau IV.3**.

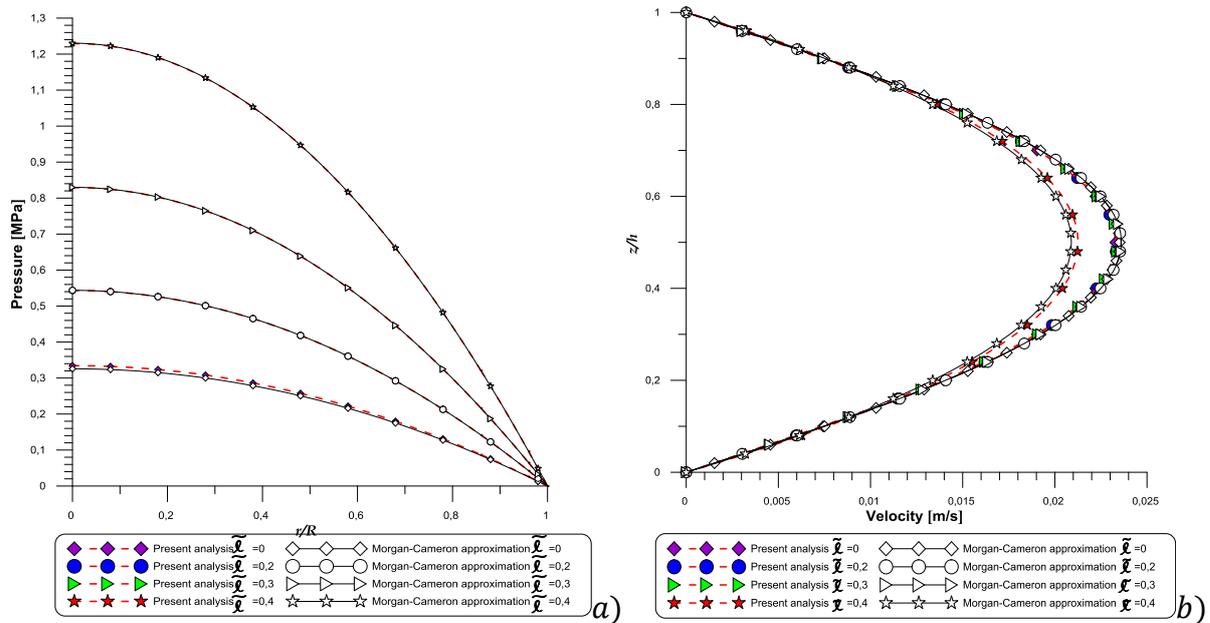
**Tableau IV.3. Données géométriques et physiques**

Paramètres	Symboles	Valeur Numérique	Unités	Références
Viscosité dynamique du fluide de base	$\mu_{bf}$	$10^{-2}$	[Pa.s]	[36]
Rayon des deux disques	$R$	$18.7 \times 10^{-3}$	[m]	[37]
Épaisseur initiale du film fluide	$h_0$	$10^{-5}$	[m]	[38]
Amplitude d'oscillation	$h_a$	$0.2 \times 10^{-5}$	[m]	-
Épaisseur du disque poreux	$H^*$	$22 \times 10^{-4}$	[m]	[39]
Paramètre de perméabilité dans la direction $r$	$\alpha_r$	$2.2 \times 10^{-13}$	[m <sup>4</sup> /N.s]	[40]
Paramètre de perméabilité dans la direction $z$	$\alpha_z$	$3.5 \times 10^{-14}$	[m <sup>4</sup> /N.s]	[40]
Fréquence de mouvement sinusoïdal	$f$	1	[Hz]	[41]
Fraction volumique de particule	$\phi$	0., 0.1 , 0.3	[-]	[41]
Constante matérielle responsable de la propriété des couples de contrainte	$\eta$	0 $4 \times 10^{-14}$ $9 \times 10^{-14}$ $1.6 \times 10^{-13}$	[N.s]	[42]
Paramètre du couple de contrainte sans dimension	$\tilde{\ell}$	0. , 0.2 , 0.3 , 0.4	[-]	-

#### IV.7.1 Validation

L'organigramme de calcul utilisé dans la présente analyse **figure IV.8** a été validé en comparant les résultats numériques obtenus par le code de calcul basé sur la résolution numérique du problème de couplage Reynolds-Darcy à l'aide de la méthode du point fixe relaxée avec la solution analytique simplifiée basée sur l'approximation de Morgan-Cameron. Les résultats obtenus sont présentés et comparés sur la **figure IV.9**. Les calculs ont été effectués à l'aide des données reportées dans le **tableau IV.3** pour  $\alpha_r = 0$ . Un bon accord est observé entre les résultats numériques et analytiques obtenus dans le cas Newtonien et non Newtonien, et on peut conclure que la stratégie de résolution

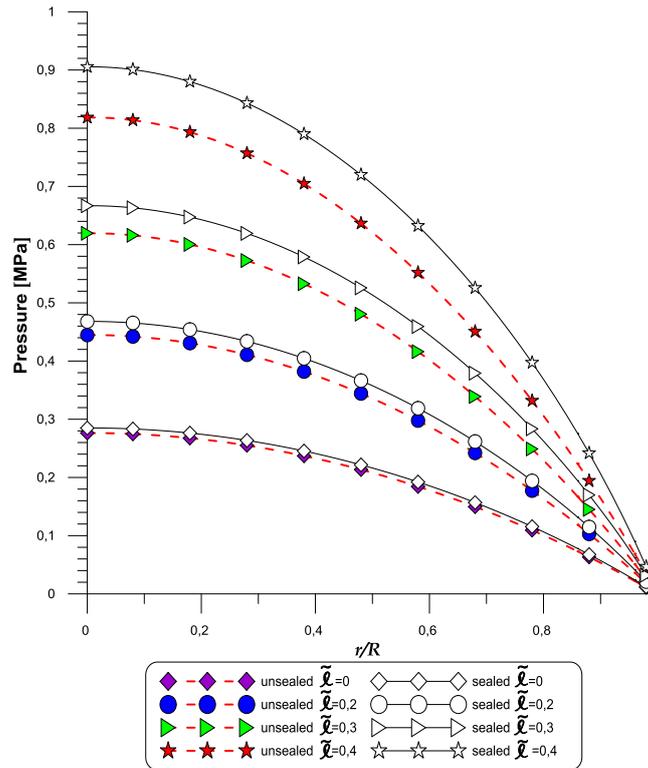
numérique proposée dans la présente analyse est validée dans le cas d'une couche poreuse de faible épaisseur.



**Fig. IV.9 Comparaison des profils axisymétriques de pression et de vitesse radiale calculés par la méthode itérative du point fixe relaxée et l'approche analytique de Morgan-Cameron : (a) Profils de pression ; (b) profils de vitesse radiale**

#### IV.7.2 Étude paramétrique

La **figure IV.10** montre la pression du film de compression positive axisymétrique  $p$  en fonction de la coordonnée radiale non dimensionnelle  $\tilde{r}$  à un temps sans dimension  $\tilde{t} = 0.3$  pour diverses valeurs du paramètre des couples de contraintes adimensionnel  $\tilde{l}$ . On observe les mêmes tendances que celles du cas traité dans le chapitre précédent lorsque les disques étaient imperméables ; c'est-à-dire une augmentation de la pression dans le film écrasé avec le paramètre  $\tilde{l}$ . Cette augmentation est plus accentuée pour des valeurs élevées de ce paramètre. Ce résultat fut également confirmé par les deux chercheurs V. Ponnuswamy et S. Govindaraj [5].



**Fig. IV.10 Profils de pression axisymétriques calculés pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  pour les configurations étanche (*sealed*) et non étanche (*unsealed or free*) à  $\tilde{t} = 0.3$  et pour  $\phi = 0$**

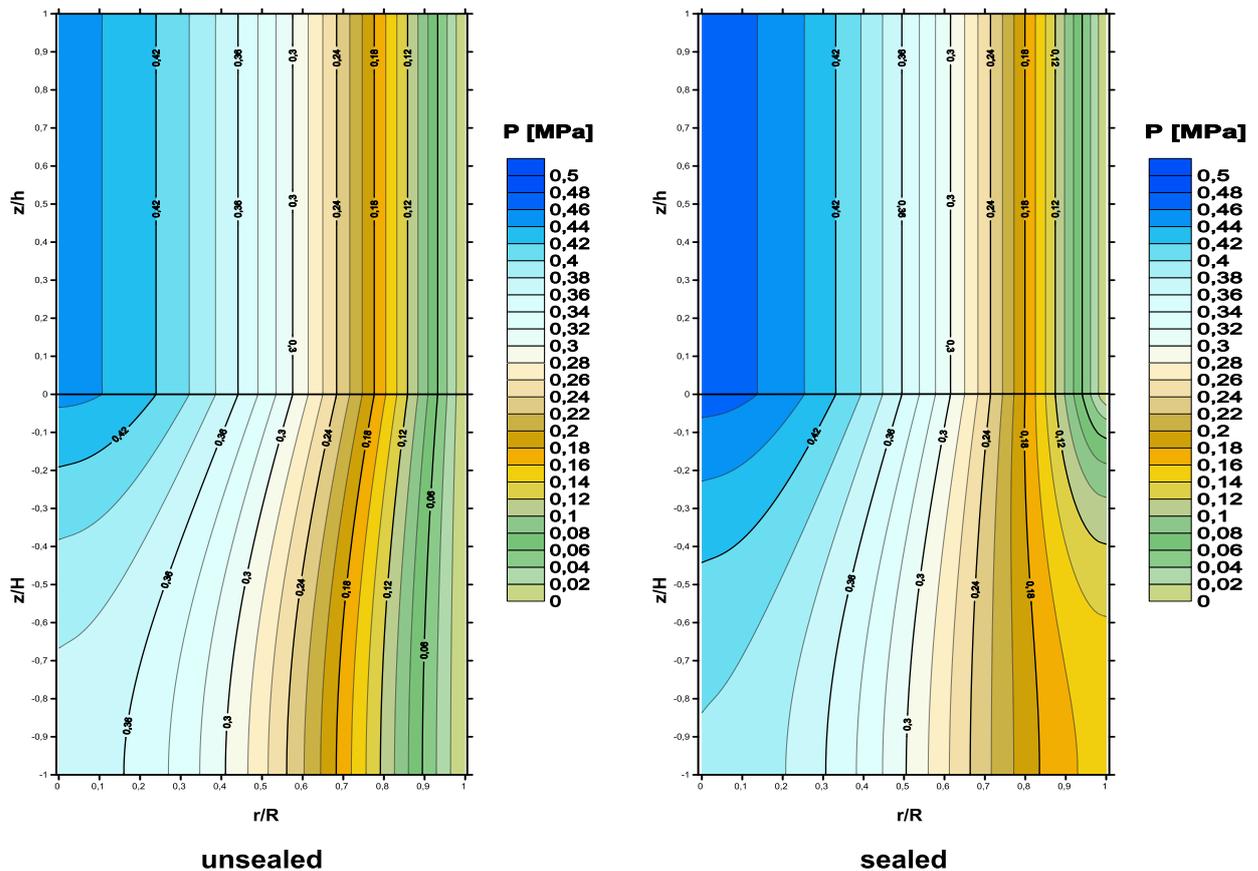
D'autre part, pour une même valeur du paramètre de couple de contrainte, la pression calculée pour la configuration étanche est supérieure à celle obtenue pour la configuration non étanche notamment pour les valeurs élevées de  $\tilde{\ell}$ . En effet, le taux d'augmentation le plus élevé de la pression centrale est d'environ 3% dans le cas Newtonien et il est de 10% dans le cas non Newtonien lorsque  $\tilde{\ell} = 0.4$ .

En outre, les lignes isobares à l'intérieur du film fluide et du disque poreux obtenues pour les configurations étanches et non étanches à  $\tilde{t} = 0.3$  correspondant à la phase d'écrasement positif et pour  $\tilde{\ell} = 0.2$  ont les mêmes allures sauf dans la zone proche du bord extérieur du disque poreux comme il est clairement illustré sur la **figure IV.11**.

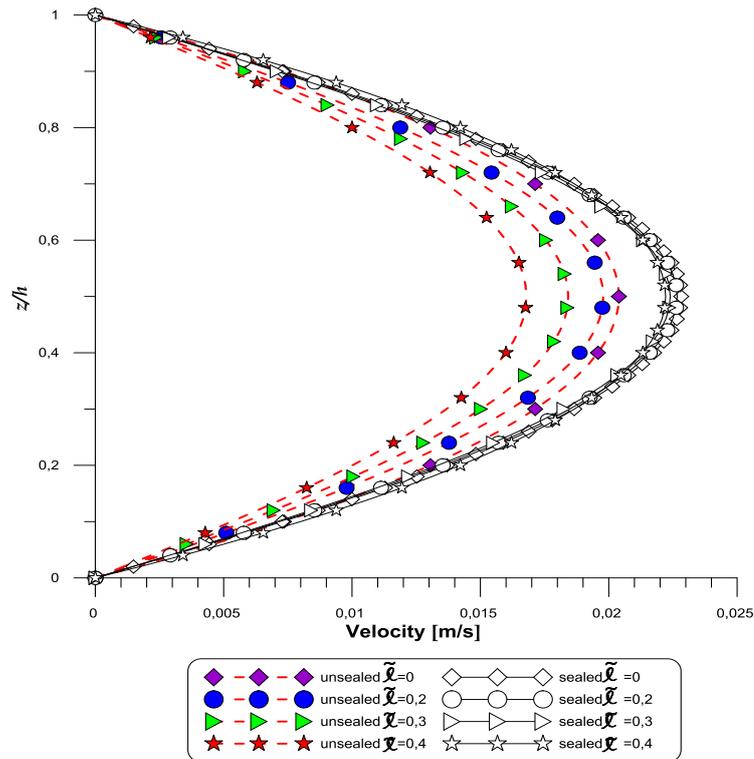
L'influence du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  sur le profil de vitesse radiale du fluide  $u$  au bord libre du disque ( $r = R$ ) pour  $\tilde{t} = 0.3$  est représentée sur la **figure IV.12** pour les deux configurations : étanche et non étanche.

Dans la configuration non étanche (*unsealed*), l'augmentation du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  entraîne une réduction de la vitesse radiale dans la couche fluide par

comparaison au cas Newtonien. Cette réduction est due au comportement du fluide à couples de contraintes qui développe une plus grande résistance à l'écoulement. Ces résultats sont qualitativement en bon accord avec ceux obtenus par Nabhani et al. [4] qui ont utilisé une approche CFD, et par Nabhani et al. [43] qui ont utilisé les équations de Darcy-Brinkman pour décrire l'écoulement du fluide dans la couche poreuse. En revanche, On observe qu'il n'y a pas d'effet appréciable du paramètre des couples de contraintes sur le profil de vitesse radiale dans la configuration étanche (*sealed*).

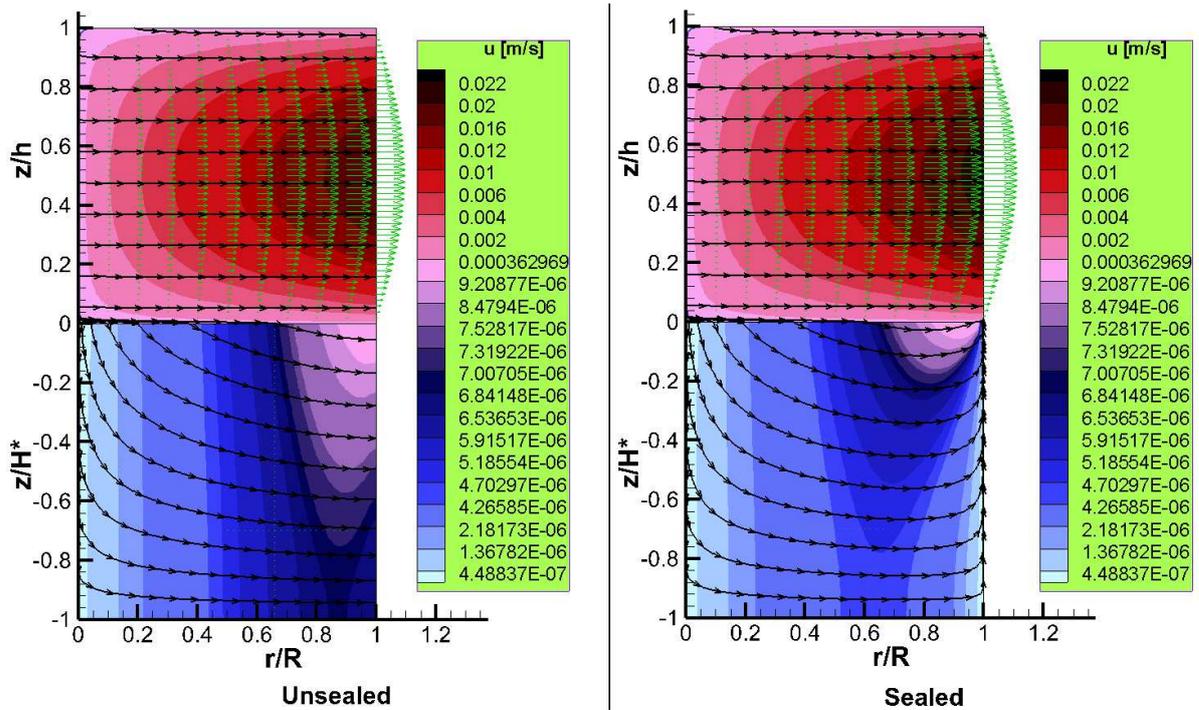


**Fig. IV.11 Zones de pression (lignes isobares) dans les milieux fluide et solide pour les configurations étanche et non étanche déterminées à  $\tilde{\tau} = 0.3$  et pour  $\phi = 0$**



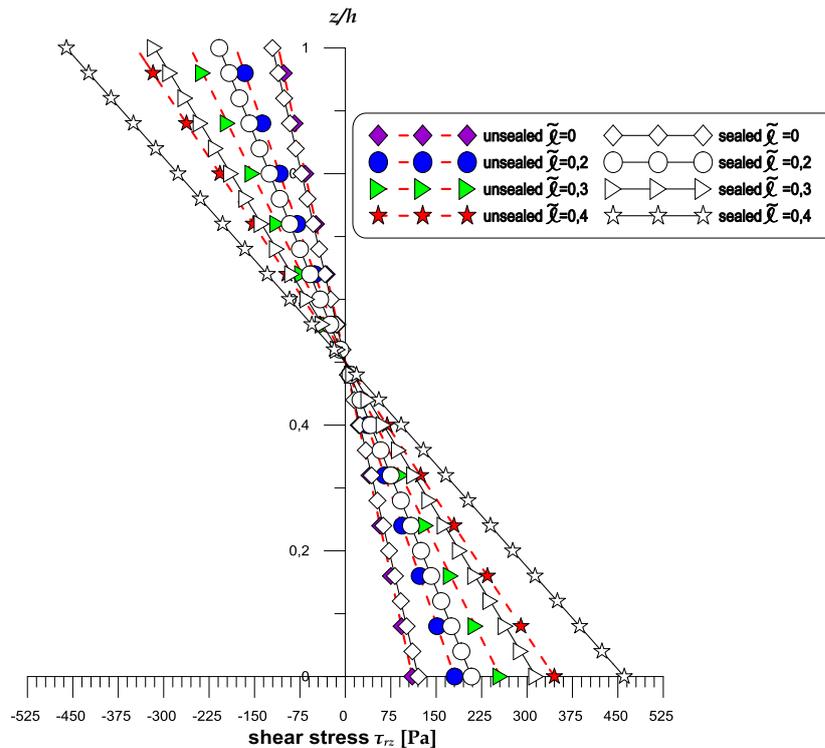
**Fig.IV.12 Profils axisymétriques de vitesse radiale au bord  $u(r = R)$  calculées pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  dans le cas des configurations étanche et non étanche à  $\tilde{t} = 0.3$  et pour  $\phi = 0$**

La **figure IV.13** représente les champs de vitesse et les lignes de courant axisymétriques de l'écoulement dans les régions fluide et solide à  $\tilde{t} = 0.3$  et pour  $\tilde{l} = 0.2$ . On constate que le fluide est accéléré dans la zone de basse pression (**figure IV.11**) et les profils de vitesse dans le film ont une forme parabolique tandis que les profils de vitesse axisymétriques sont presque uniformes à travers le disque poreux aussi bien pour le cas étanche que pour le cas non étanche. Sur la même figure, on retrouve la même configuration des lignes de courant dans le disque poreux pour les configurations étanche et non étanche sauf dans la région de sortie.



**Fig. IV.13 Lignes de courant et champs de vitesse moyenne axisymétriques de l'écoulement dans les milieux fluide et solide pour les configurations étanche et non étanche à  $\tilde{\ell} = 0.2$ ,  $\tilde{t} = 0.3$ , et  $\phi = 0$**

Les effets du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  sur les distributions des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur du film,  $\tau_{rz}$ , sont représentés sur la **figure IV.14** à  $\tilde{t} = 0.3$  et pour  $r = R$ . On observe que plus le paramètre des couples de contraintes est grand, plus la contrainte de cisaillement pariétale est élevée ce qui engendre une résistance accrue à l'écoulement. Comme prévu, les contraintes de cisaillement calculées pour les cas Newtoniens et non Newtoniens sont maximales aux parois et disparaissent au milieu du film car le gradient de vitesse devient nul. En outre, les contraintes de cisaillement pariétales obtenues dans la configuration étanche sont nettement supérieures à celles obtenues pour la configuration non étanche. Par conséquent, le cas d'un disque poreux étanche donne une force de traînée plus grande.



**Fig. IV.14 Variations des contraintes de cisaillement au bord  $\tau_{rz}(r = R, z)$  calculées pour différentes valeurs du paramètre de couple de contrainte  $\tilde{\ell}$  dans le cas des configurations étanche et non étanche à  $\tilde{t} = 0.3$  et pour  $\phi = 0$**

La **figure IV.15** présente la distribution axisymétrique de la pression pour quelques valeurs du temps d'écrasement et d'arrachement et trois valeurs de la fraction volumique  $\phi$ . Les calculs ont été effectués pour les deux configurations et pour  $\tilde{\ell} = 0,2$ .

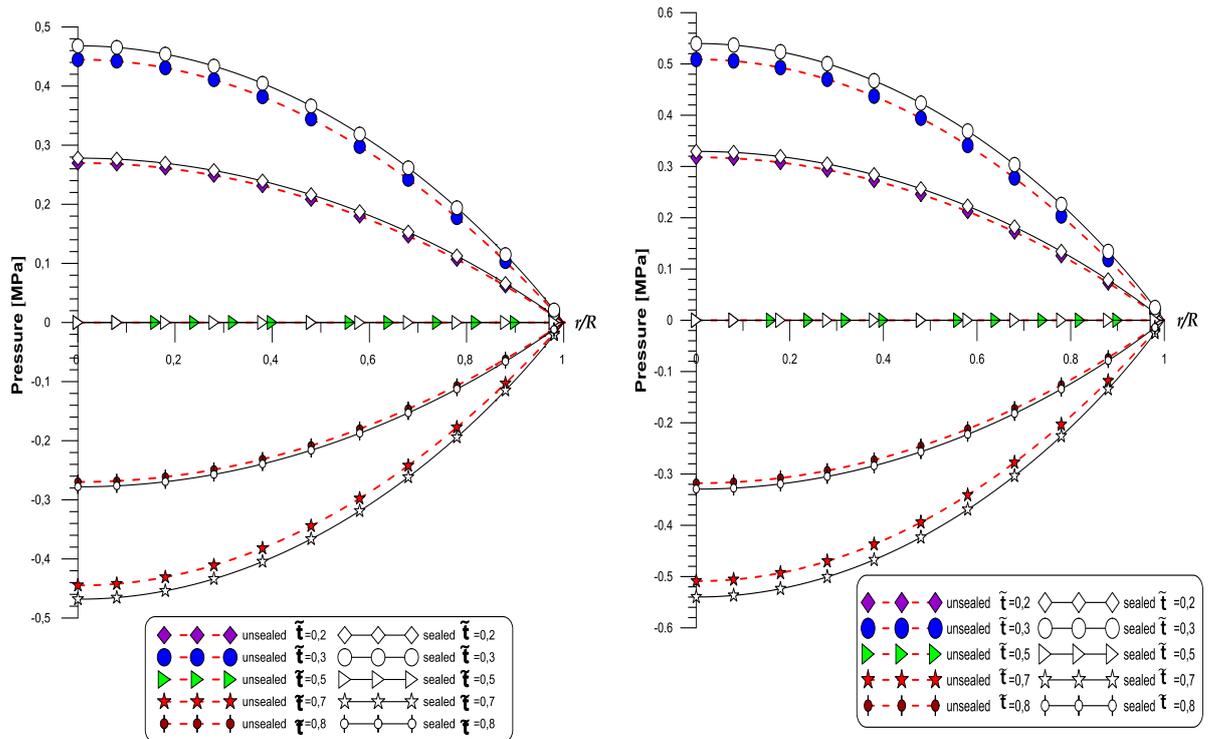
Les pressions positive et négative sont respectivement obtenues lors des mouvements d'écrasement positifs ( $\tilde{t} = 0.2$  et  $0.3$ ) et négatifs ( $\tilde{t} = 0.7$  et  $0.8$ ). On peut observer que la courbe de pression générée dans la couche fluide est de forme parabolique et est symétrique par rapport à l'axe horizontal car les forces d'inertie du fluide sont ignorées comme il a été mentionné précédemment. Des tendances similaires ont été trouvées expérimentalement par Y. Hori [44] (chapitre 7) pour le cas Newtonien ainsi que par J. R. Lin [45] pour les fluide non Newtonienne à couples de contraintes à travers une investigation théorique.

Comme prévu, La pression disparaît à  $\tilde{t} = 0.5$  correspondant à  $t = 0.5$  seconde pour laquelle la vitesse d'écrasement devient nulle comme le montre la **figure III.3**. En outre, la pression du film comprimé à  $\tilde{t} = 0.3$ , c'est-à-dire pendant le mouvement d'écrasement

positif, est supérieure à la pression du film prédite à  $\tilde{t} = 0.2$  puisque la vitesse d'écrasement  $W_{sq}$  est plus élevée et l'épaisseur du film est plus faible. En outre, on constate que la pression du film écrasé augmente de manière significative lors de l'augmentation de la fraction volumique de particules dans le fluide de base. Le taux d'augmentation à  $\tilde{t} = 0.3$  est d'environ 5% pour  $\phi = 0$  et 9% pour  $\phi = 0,3$ . En conséquence, le fluide suspendant permet d'améliorer la capacité de charge par comparaison au fluide sans suspension (solvant pur sans la présence de particules). D'autre part, la pression dans le film comprimé calculée pour le cas étanche est plus grande que celle obtenue dans le cas non étanche aussi bien dans la phase d'écrasement positif que dans la phase d'écrasement négatif.

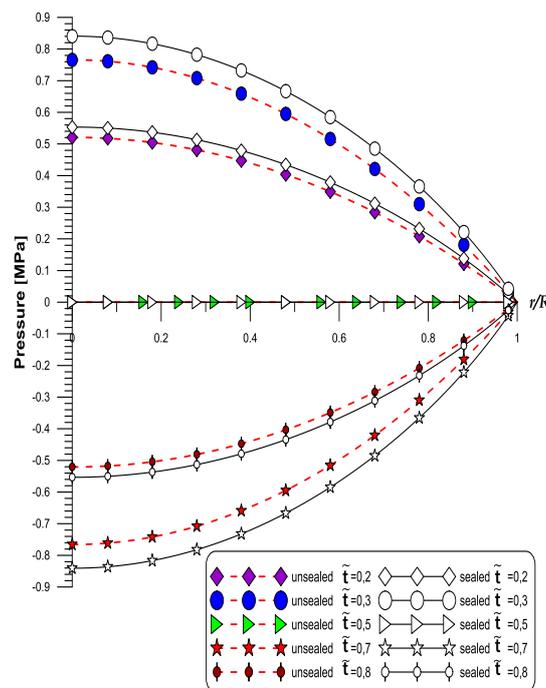
Les effets de la concentration sur les profils axisymétriques de la vitesse radiale et des contraintes de cisaillement calculées au bord du disque ( $r = R$ ) pour quelques valeurs des temps d'écrasement et d'arrachement et pour  $\tilde{t} = 0.2$  sont montrés graphiquement sur les **figures IV.16** et **IV.17**. Il semble qu'il n'y ait pas d'influence significative de la concentration sur les profils de vitesse pour les cas étanche et non étanche. Pour toutes les valeurs de la concentration, on observe bien évidemment que les vitesses radiales calculées dans le cas étanche sont plus importantes que celles obtenues dans le cas non étanche tant pour l'écrasement positif que négatif.

D'autre part, on observe que la contrainte de cisaillement augmente de façon significative avec la fraction volumique. Comme le montre la **figure IV.17**, la contrainte de cisaillement maximale se produit au niveau des parois. Cette augmentation peut s'expliquer par l'augmentation de la viscosité de la suspension. Comme il a été noté précédemment pour un temps fixe (**figure IV.14**), la contrainte de cisaillement  $\tau_{rz}$  calculée pour la configuration étanche est nettement supérieure à celle obtenue pour la configuration non étanche et ce pour les mouvements d'écrasement positifs et négatifs.



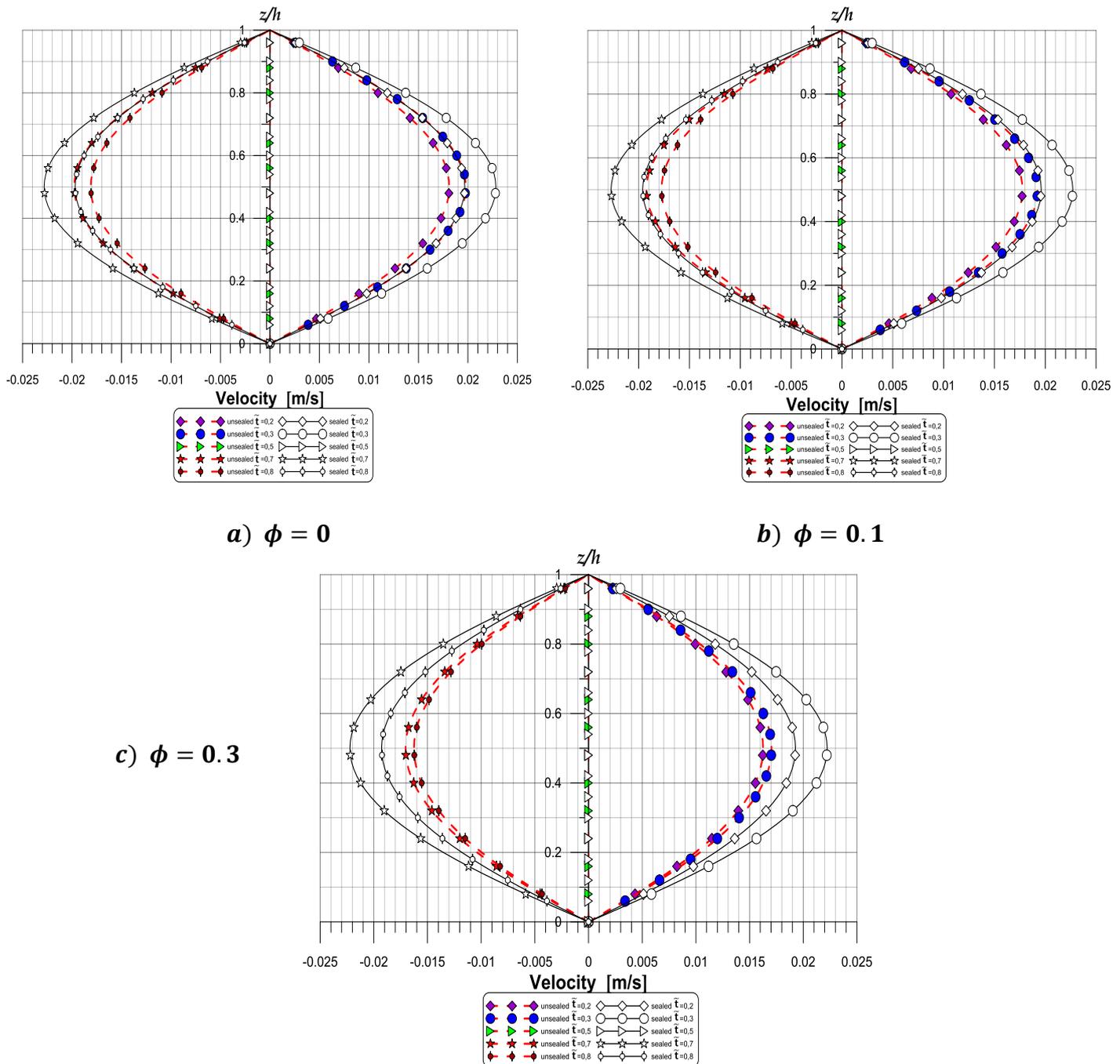
a)  $\phi = 0$

b)  $\phi = 0.1$

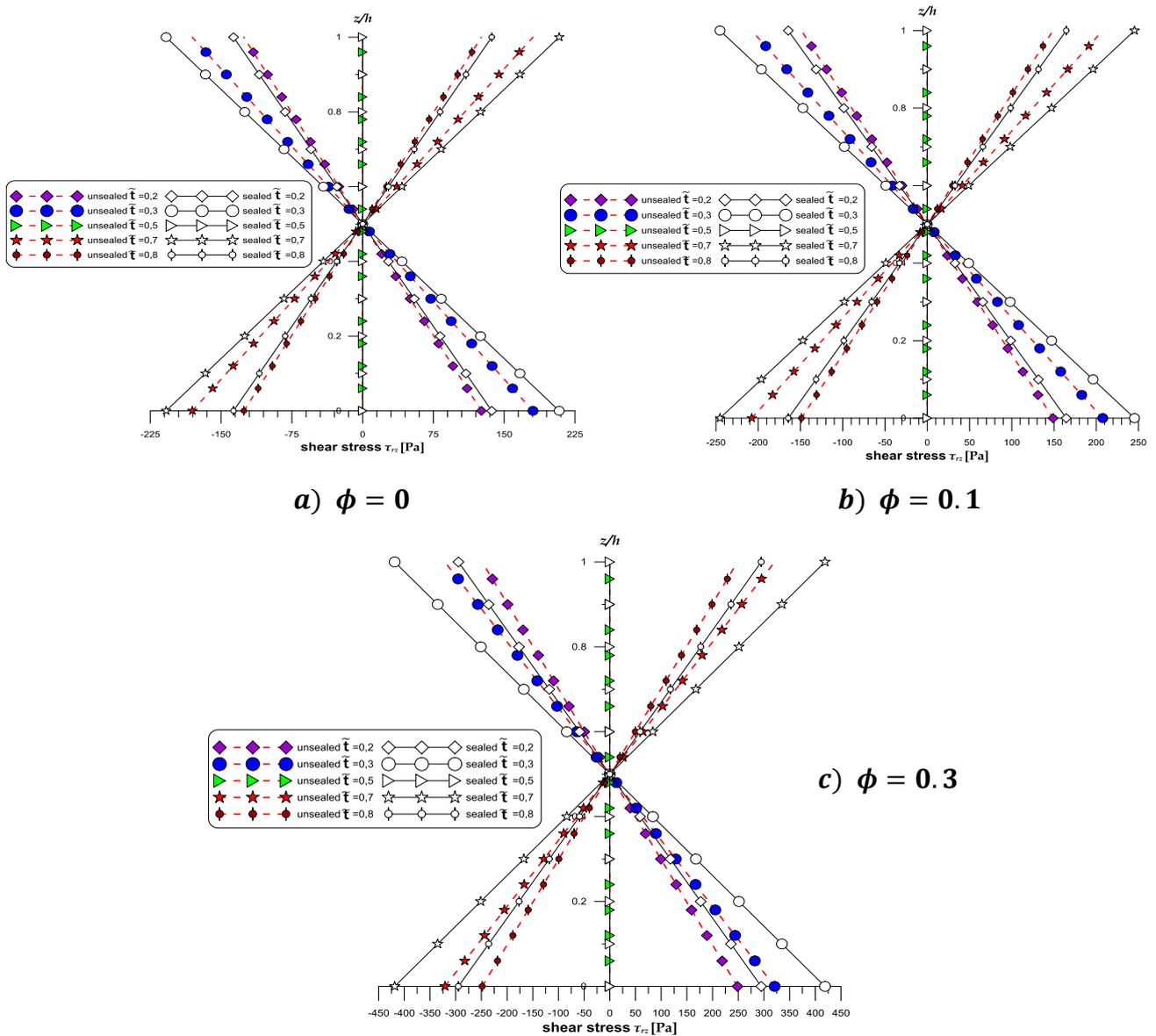


c)  $\phi = 0.3$

Fig. IV.15 Profils de pression axisymétriques calculés pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\phi$  et des temps d'écrasement et d'arrachement dans le cas des configurations étanche et non étanche ( $\tilde{\ell} = 0.2$ )



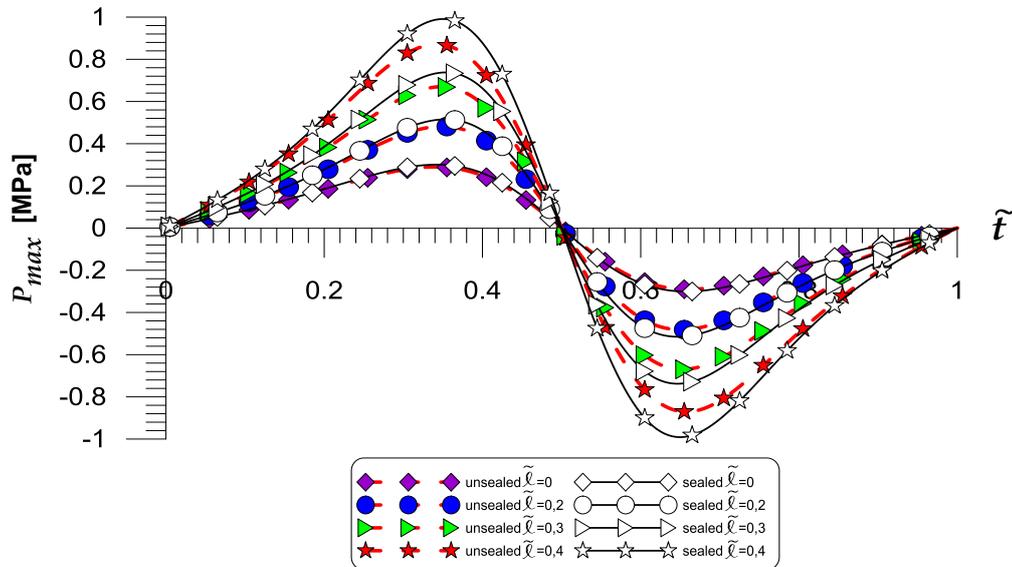
**Fig. IV.16 Profils de vitesse axisymétriques calculés pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\phi$  et des temps d'écrasement et d'arrachement dans le cas des configurations étanche et non étanche ( $\tilde{\ell} = 0.2$ ).**



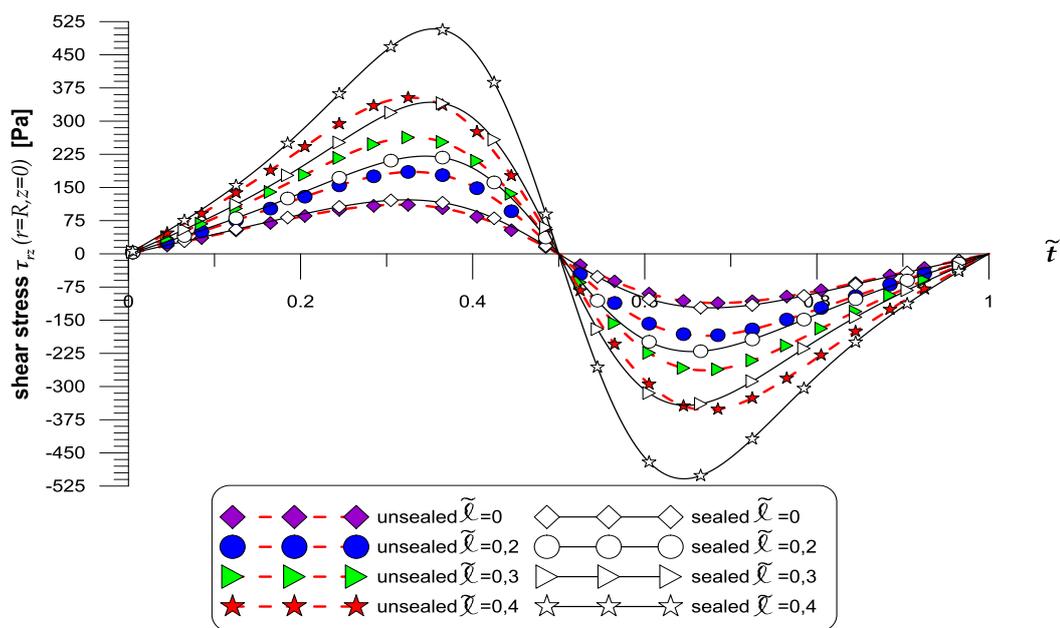
**Fig. IV.17** Profils des contraintes de cisaillement axisymétriques calculés pour différentes valeurs de la fraction volumique  $\phi$ , et des temps d'écrasement et d'arrachement dans le cas des configurations étanche et non étanche ( $\tilde{\ell} = 0.2$ )

Les variations temporelles de la pression centrale  $p_{max}$ , de la contrainte de cisaillement pariétale  $\tau_{rz}$  à  $r = R$ , de la force de frottement  $F_f$  et de la capacité de charge  $W$  pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  sont respectivement présentées sur les figures IV.18 à IV.21. On montre que toutes les caractéristiques hydrodynamiques ci-dessus citées augmentent de façon significative avec le paramètre des couples de contraintes et ce sur tout le cycle d'oscillation. Ce résultat rejoint celui de J. R. Lin [45]. De plus, les résultats graphiques sont toujours antisymétriques par rapport

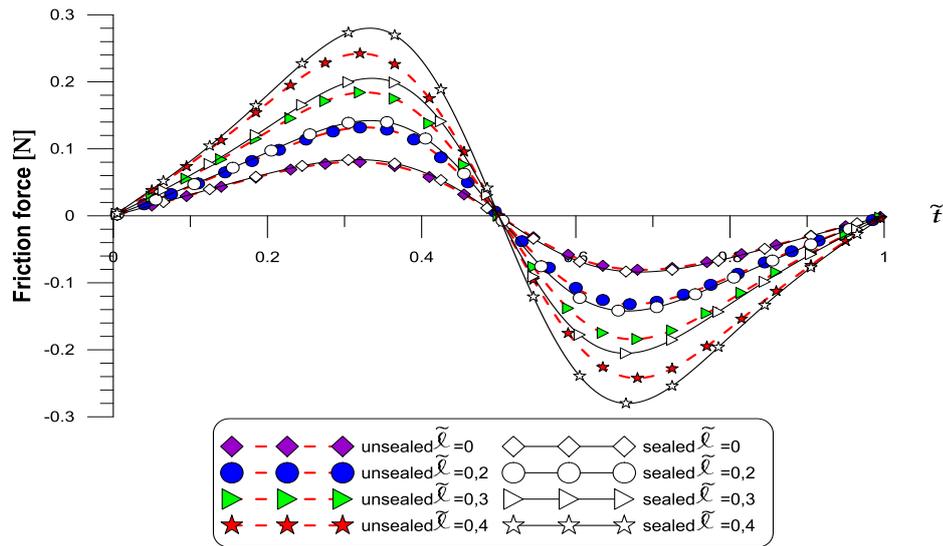
à  $\tilde{t} = 0.5$  qui suivent la même tendance que la vitesse d'écrasement (figure III.3). Il est à noter que les valeurs crêtes à crêtes de ces paramètres sont plus importantes pour le cas étanche.



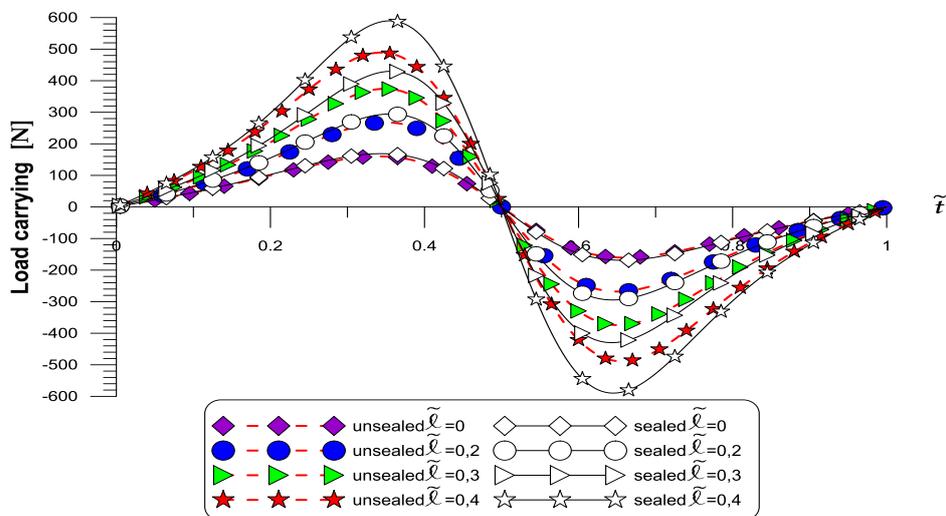
**Fig. IV.18 Variations de la pression maximale pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  dans le cas des configurations étanche et non étanche avec  $\phi = 0$**



**Fig. IV.19 Variations de la contrainte de cisaillement pariétale au bord du disque  $\tau_{rz}(r = R, z = 0)$  pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  et les deux configurations**



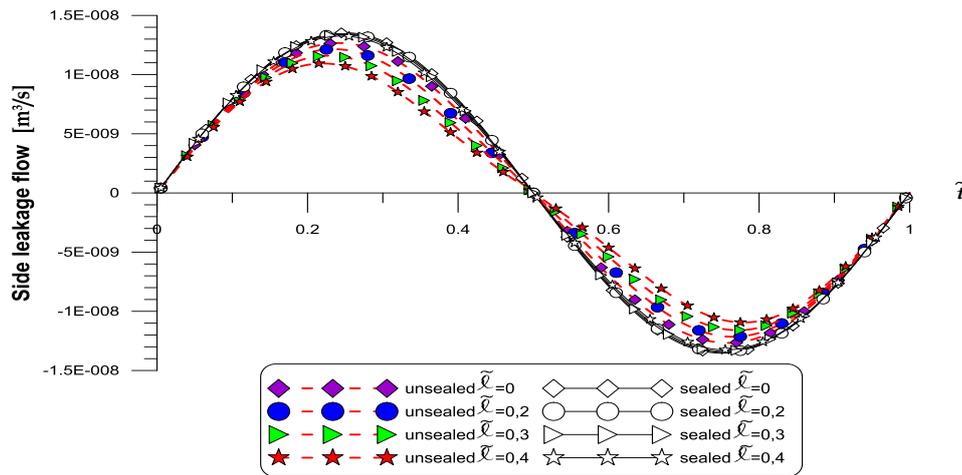
**Fig. IV.20** Évolutions de la force de frottement  $F_f$  pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  pour les deux configurations étanche et non étanche avec  $\phi = 0$



**Fig. IV.21** Évolutions de la capacité de charge  $W$  pendant un cycle d'oscillation pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  et pour les configurations étanche et non étanche avec  $\phi = 0$

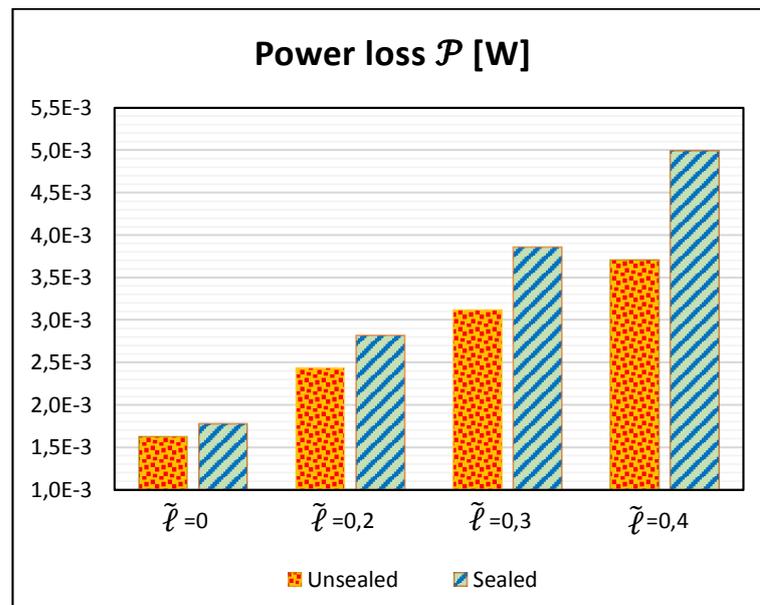
La figure IV.22 montre l'influence du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$  sur le débit de fuite  $Q_r$  calculé pour les cas étanche et non étanche pendant un cycle d'oscillation complet. Pour le cas étanche, le débit de fuite n'est pas affecté par le paramètre des couples de contraintes puisque le flux qui pénètre dans la matrice poreuse retourne dans la couche de fluide quel que soit  $\tilde{\ell}$ . En revanche pour le cas non étanche, le débit de fuite dans la partie fluide diminue lorsque l'on augmente le paramètre des couples de

contraintes. Dans cette situation, la fuite se produit à la fois au bord libre de la couche fluide et au bord libre de la matrice poreuse.



**Fig. IV.22 Variations cycliques du débit de fuite au bord  $Q_r$  pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  et pour les configurations étanche et non étanche avec  $\phi = 0$**

La **figure IV.23** illustre les variations de la perte de puissance pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  à  $\tilde{t} = 0.3$ . Les résultats obtenus mettent en évidence la faiblesse de la perte de puissance pour les configurations étanche et non étanche ainsi que pour les modèles de fluide Newtonien et non Newtonien.



**Fig.IV.23 Puissances dissipées pour différentes valeurs du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{l}$  et pour les configurations étanche et non étanche à  $\tilde{t} = 0.3$  et pour  $\phi = 0$**

## IV.8 Conclusion

Sur la base de la théorie du micro-continuum de V. K. Stokes, les équations gouvernantes, y compris l'équation de Reynolds modifiée et l'équation de Darcy modifiée, ont été dérivées pour un écoulement laminaire et résolues numériquement par la méthode des différences finies. Le problème d'interaction fluide-solide non linéaire pour les configurations étanche et non étanche a été résolu numériquement en utilisant une procédure itérative sous-relaxée pour des valeurs données du paramètre des couples de contraintes, des paramètres de perméabilité, et de la fraction volumique des particules. Les résultats numériques ont été présentés graphiquement pour un mouvement sinusoïdal de faible amplitude et de faible fréquence du disque rigide supérieur en tenant compte directement du phénomène de glissement à l'interface matrice poreuse-film fluide. Des améliorations de la pression du film écrasé et de la capacité de charge ont été observées pour des valeurs plus élevées du paramètre des couples de contraintes  $\tilde{\ell}$ . En outre, pour une valeur donnée de ce paramètre, des améliorations de la pression hydrodynamique engendrée dans le film comprimé et de la capacité de charge ont été obtenues en augmentant raisonnablement la fraction volumique des particules dans le fluide de base, en particulier pour la configuration du disque poreux étanche.

On a également constaté que pour une valeur du paramètre des couples de contraintes donnée, les contraintes de cisaillement pariétales augmentaient avec la fraction volumique des particules en suspension dans le lubrifiant de base et cette augmentation était plus prononcée pour le disque poreux à frontière étanche. Par contre, le débit de fuite latéral obtenu pour le cas non étanche diminue sur tout le cycle d'oscillation ; c'est-à-dire pour  $\tilde{t}$  variant de 0. à 1., lors de l'augmentation du paramètre des couples de contraintes. Cependant, le débit de fuite latéral calculé dans le cas étanche reste inchangé pour les différentes valeurs du paramètre des couples de contrainte.

Enfin, il a été montré que les pertes de puissance pour les cas étanche et non étanche restent faibles et ce pour toutes les valeurs du paramètre des couples de contraintes considérées.

## IV.9 Références

- [1] P. JURCZAK, "Pressure distribution in a squeeze film biobearing lubricated by a synovial fluid," *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering*, vol. 11, no. 4, pp. 857-864, 2006.
- [2] V. Morgan and A. Cameron, "Mechanismus of lubrication in porous metal bearing," *Proc. Conf. on Lubrication and Wear, Inst. Mech. Eng., London*, pp. 151-157, 1957.
- [3] J.-R. Lin, L.-M. Chu, W.-L. Li and R.-F. Lu, "Combined effects of piezo-viscous dependency and non-Newtonian couple stresses in wide parallel-plate squeeze-film characteristics," *Tribology International*, vol. 44, no. 12, pp. 1598-1602, 2011 November.
- [4] M. Nabhani, M. El Khlifi and B. Bou-Saïd, "Non-Newtonian couple stress poroelastic squeeze film," *Tribology International*, vol. 64, pp. 116-127, 2013 August.
- [5] V. Ponnuswamy and S. Govindaraj, "Behaviour of Couple Stress Fluids in Porous Annular Squeeze Films," *Journal of Applied Mathematics and Physics*, vol. 2, pp. 349-358, 2014.
- [6] G. S. Beavers and D. D. Joseph, "Boundary conditions at a naturally permeable wall," *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 30, no. 1, pp. 197-207, 1967.
- [7] H. C. Brinkman, "A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles," *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 1, no. 1, p. 27, 1949.
- [8] D. A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, Fifth Edition ed., Springer, Cham, 2017.
- [9] A. E. Scheidegger, *The physics of flow through porous media*, Britain: University of Toronto Press, 1974.
- [10] R. E. Collins, *Flow of fluids through porous materials*, New York: Reinhold publishing corporation, 1961.
- [11] A. Hutin, "Les milieux poreux en ingénierie de réservoir," 2020.
- [12] D. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media*, New York: Springer, 2013.
- [13] R. Calvet, *Le Sol, Propriétés et fonctions - Tome 2, Phénomènes physiques et chimiques, Applications agronomiques et environnementales*, France Agricole, 2003.
- [14] E. Guyon, J. Hulin et L. Petit, *Hydrodynamique physique*, Paris: EDP Sciences CNRS Editions, 2001.
- [15] P. Carman, "Fluid flow through granular beds," *Chemical Engineering Research and Design*, vol. 75, pp. S32-S48, 1997.
- [16] P. Carman, "Fluid Flow through Granular Beds," *Trans. Inst. Chem. Eng.*, vol. 15, pp. 150-166, 1937.

- [17] J. Kozeny , Über kapillare Leitung des Wassers im Boden, Wien: Sitzungsbericht Akademie Wissenschaft, 1927.
- [18] S. Kunik, "Étude numérique et expérimentale du mécanisme de lubrification eX-Poro-HydroDynamique (XPHD)," Université de Poitiers, Thèse de doctorat, 2018.
- [19] A. Nield and A. Bejan, Convection in porous media, New York: Springer, 2006.
- [20] H. Darcy, Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application, Paris: Victor Dalmont, 1856.
- [21] J. Bear , Dynamics of fluids in porous media, New York: Dover Publication, 1988.
- [22] M. Muskat , The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media, London: McGraw-Hill Book Company, 1937.
- [23] J. Ward, "Turbulent flow in porous media," *Journal of the hydraulics division*, vol. 90, no. 1, pp. 1-12, 1964.
- [24] P. Forchheimer, «Z. Ver. Dtsch.,» *Ing.*, vol. 45, p. 1782-1788, 1901.
- [25] C. Hsu and . P. Cheng, "Thermal dispersion in a porous medium," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 33, no. 8, pp. 1587-1597, 1990.
- [26] K. Gartling, C. Hickox et R. C. GIVLER, «Simulation of coupled viscous and porous flow problem,» *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, vol. 7, n° %11-2, pp. 23-48 , 1996 .
- [27] P. Nithiarasu, .K. Seetharamu and T. Sundararajan, "Natural convective heat transfer in a fluid saturated variable porosity medium," *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, no. 16, pp. 3955-3967, 1997.
- [28] N. B. Naduvinamani and A. Siddangouda, "Combined effects of surface roughness and couple stresses on squeeze film lubrication between porous circular stepped plates," *Proc. IMechE, Part J: Journal of Engineering Tribology*, vol. 221, pp. 525-534, 2007.
- [29] N. B. Naduvinamani, S. T. Fathima and P. S. Hiremath, "Effect of surface roughness on characteristics of couplestress squeeze film between anisotropic porous rectangular plates," *Fluid Dynamics Research*, vol. 32, no. 5, 2003.
- [30] A. E. Yousif and A. A. Al-allaq, "The hydrodynamic squeeze film lubrication of the ankle joint," *International Journal of Mechanical Engineering and Applications*, vol. 1, pp. 34-42, 2013.
- [31] G. Allaire, Numerical Mathematics and Scientific Computation, NewYork: Oxford University Press , 2007.
- [32] B. Alkahtani, "Numerical Solutions to the Navier-Stokes Equations in Two and Three Dimensions," Doctoral thesis, University of Manchester, 2013.
- [33] J. D. Hoffman and S. Frankel, Numerical Methods for Engineers and Scientists, 2 ed., CRC Press, 2001.

- [34] B. Laouadi, M. Lahmar, B. Benyebka , A. Mouassa and H. Boucherit, "Analysis of couple-stress effects in gas foil bearings using the V. K. Stokes micro-continuum theory," *Lubrication Science*, vol. 30, no. 8, pp. 401-439, 2018.
- [35] B. Laouadi, . M. Lahmar, B.-s. Benyebka , . H. Boucherit and A. Mouassa, "Analysis of couple-stresses and piezo-viscous effects in a layered connecting-rod bearing," *Mechanics & Industry*, vol. 19, no. 6, p. 607, 2018.
- [36] J. H. DUMBLETON, *Tribology of natural and artificial joints*, NEW YORK: Elsevier scientific publishing company, 1981.
- [37] D. J. Knox, S. K. Wilson, B. R. Duffy and S. McKee, "Squeeze-Film Flow in the Presence of a Thin Porous Bed, with Application to the Human Knee Joint," *Oxford Centre for Collaborative Applied Mathematics*, 2012.
- [38] M. Yousfi , B. Bou-Saïd and J. Tichy, "Axisymmetric squeezing of a Phan-Thien and Tanner lubricant film under imposed constant load in the presence of a poroelastic medium," *Lubrication Science*, vol. 27, no. 8, p. 505-522, 2015.
- [39] D. D. Frisbie, M. W. Cross and C. W. McIlwraith, "A comparative study of articular cartilage thickness in the stifle of animal species used in human pre-clinical studies compared to articular cartilage thickness in the human knee," *Veterinary and Comparative Orthopaedics and Traumatology*, vol. 19(03), pp. 142-146, 2006.
- [40] V. C. Mow, A. Ratcliffe et A. Poole, «Cartilage and diarthrodial joints as paradigms for hierarchical materials and structures,» *Biomaterials*, vol. 13, n° %12, pp. 67-97, 1992.
- [41] J. Katta, Z. Jin, E. Ingham and J. Fisher, "Biotribology of articular cartilage—A review of the recent advances," *Medical Engineering & Physics*, vol. 30, no. 10, p. 1349-1363, 2008.
- [42] A. Ruggiero, E. Gómez and R. D'Amato, "Approximate closed-form solution of the synovial fluid film force in the human ankle joint with non-Newtonian lubricant," *Tribology International*, 2013.
- [43] M. Nabhani , M. El Khlifi et B. Bou-Saïd, «Combiend non-Newtonian and viscous shear effects on porous squeeze film behavior,» *Trbology Transactions*, vol. 55, n° %14, pp. 491-502, 2012.
- [44] Y. Hori, *Hydrodynamic Lubrication*, Tokyo ; New York: Springer, 2006.
- [45] J. R. Lin, «Oscillating circular squeeze films considering the combined effects of fluid inertial forces and non-Newtonian couple stresses,» *Proc. IMecE, Journal of Enginnering Tribology, Part J*, vol. 222, 2008.

---

# Chapitre V

Lubrification Ex-Poro-  
hydrodynamique (XPHD) d'une  
prothèse de genou

---

## Chapitre V

# Lubrification Ex-Poro-hydrodynamique (XPHD) d'une prothèse de genou

### V.1 Introduction

La lubrification Ex-Poro-hydrodynamique (XPHD, en abrégé) est un mécanisme de lubrification d'inspiration biomimétique similaire à la lubrification par suintement (*weeping lubrication*) dans les joints articulaires. Il s'agit essentiellement d'un écoulement dans une matrice poreuse dont la phase solide induit des forces élastiques de compression négligeables devant les forces hydrodynamiques (HD) générées au sein du milieu. Le concept essentiel de la lubrification XPHD consiste à remplacer les revêtements de surface et le film lubrifiant traditionnellement utilisés comme solutions technologiques en vue de réduire le frottement et l'usure, par une matrice ou une couche poreuse imbibée d'un fluide qui fournit une plus grande capacité de charge. Ce mode de lubrification, copié sur la nature, simule parfaitement le mécanisme de lubrification rencontré dans l'articulation du genou humain où le fluide et la couche poreuse sont respectivement représentés par le liquide synovial et le cartilage osseux.

Sur le plan industriel, ce type de lubrification représente une solution technologique inédite permettant d'éviter l'usage à outrance des huiles lubrifiantes d'origine minérale ou synthétique formulées à partir du raffinage du pétrole brut ou par réaction de certains composés chimiques, et d'utiliser des tribo-systèmes autolubrifiants plus écologiques et moins coûteux.

La lubrification XPHD [1] est un sujet de recherche multi-physique et innovant qui constitue une nouvelle solution technologique intéressante tant sur le plan économique que technique et ce pour diverses applications telles que les paliers, les butées, les prothèses, etc.

La théorie du mécanisme (ou mode) de lubrification XPHD se base essentiellement sur la construction d'une équation aux dérivées partielles scalaire de type Reynolds dérivée à partir de l'équation vectorielle de Darcy-Brinkman [2] au lieu de l'équation de Navier, et de l'équation de continuité pour un écoulement laminaire incompressible dans un milieu

poreux de faible épaisseur. Le milieu poreux, supposé isotrope, est caractérisé par deux paramètres, à savoir : la porosité  $\varepsilon$  et la perméabilité  $k$ . Cette dernière peut être calculée en utilisant la loi de Kozeny-Carman reliant la perméabilité à la porosité du milieu poreux.

Les principales hypothèses de la lubrification XPHD sont quasiment similaires à celles établies par Osborne Reynolds pour la dérivation de son équation en 1886 (Cf. paragraphe II.3.1). Ces hypothèses sont similaires à celles utilisées en lubrification HD classique où le mécanisme de génération de la pression dans le film lubrifiant s'effectue soit par effet de coin d'huile (*wedge effect*) ou d'étirement (*stretching effect*) ou encore par effet d'écrasement du film (*squeeze film effect*). Chaque effet correspond à un mécanisme ou mode de lubrification. Notons que le deuxième effet est surtout rencontré lors du formage plasto-hydrodynamique des métaux (*laminage*). Notons également que ces trois effets sont mathématiquement représentés par les termes figurant dans le second membre de l'équation de pression dite aussi équation de Reynolds [3].

Dans le prochain paragraphe, on présentera en détail le processus de dérivation de l'équation de Reynolds modifiée Newtonienne à partir de l'équation de Darcy-Brinkman qui sera considérée comme l'équation de base de la théorie de la lubrification XPHD ou XPEHD (Ex-Poro-Elasto-Hydrodynamique) lorsque l'on tient en compte les déformations élastiques de la matrice dues aux pressions. On note que la prise en considération de l'élasticité de la matrice poreuse et la piézo-viscosité du fluide rend le problème de lubrification fortement non linéaire ce qui nécessite l'emploi de méthodes numériques appropriées (méthode itérative de Newton-Raphson, ...) pour trouver une solution approchée du problème.

L'hypothèse de la présence de fluide Newtonien dans le disque inférieur est relativement raisonnable, car on suppose que les particules en suspension dans le film fluide en l'occurrence l'acide hyaluronique sont suffisamment grosses et ne peuvent pas pénétrer dans la matrice poreuse.

## V.2 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cartésiennes

### V.2.1 Équations de base

L'équation de continuité en coordonnées cartésiennes pour un écoulement incompressible dans le plan  $(x, y)$  s'écrit comme suit :

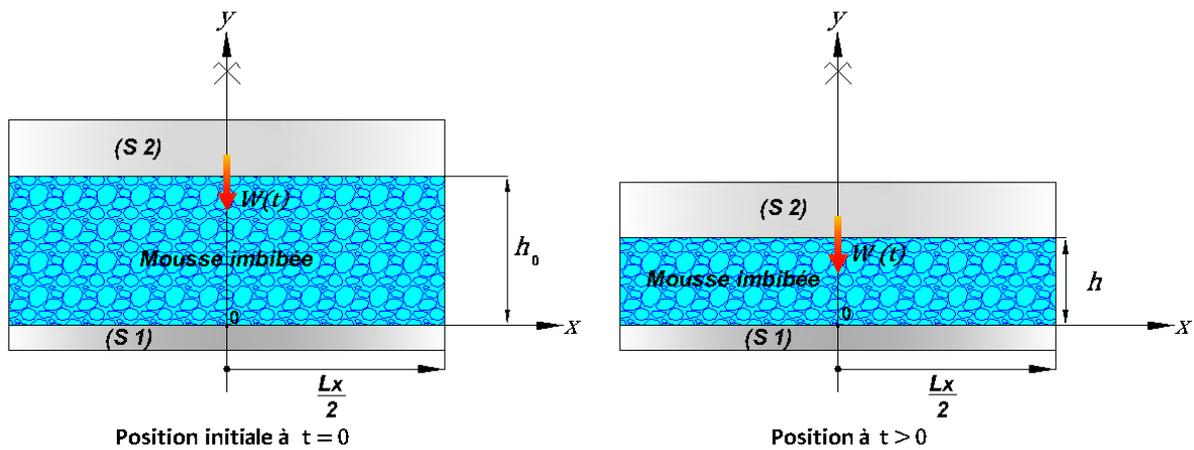
$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} = 0 \quad (V-1)$$

où  $u^*, v^*$  sont respectivement les composantes du vecteur vitesse dans le film fluide dans les directions  $x$  et  $y$ .

Le développement du modèle de lubrification XPHD est particulièrement présenté pour le cas d'écrasement d'un fluide Newtonien entre deux surfaces planes parallèles (figure V.1). Pour un écoulement incompressible unidirectionnel  $(1 - D)$ , l'équation de Darcy-Brinkman peut être écrite en coordonnées cartésiennes sous la forme suivante :

$$\frac{dp^*(x)}{dx} = -\frac{\mu}{k}u^* + \mu' \frac{d^2u^*(y)}{dy^2} \quad (V-2)$$

où  $\mu' = \mu/\varepsilon$  est la viscosité effective.



**Fig. V.1 Écrasement d'une matrice poreuse imbibée en coordonnées cartésiennes**

### V.2.2 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sur les vitesses sont :

$$\begin{aligned} y = 0 & \quad u^* = 0 & \quad v^* = 0 \\ y = h(t) & \quad u^* = 0 & \quad v^* = V_{sq} = \frac{dh}{dt} \end{aligned} \quad (V-3)$$

### V.2.3 Champ de vitesse

La solution générale de l'équation différentiel (V-2) à coefficient constants non homogène est de la forme :

$$u^*(y) = \underbrace{B \sinh(\omega y) + A \cosh(\omega y)}_{\substack{\text{solution de l'équation} \\ \text{différentielle homogène}}} - \underbrace{\frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p^*}{\partial x} \right)}_{\text{solution particulière}} \quad (\text{V-4})$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'k}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{k}}$$

Compte-tenu des conditions limites (V-3), les constantes d'intégration  $A$  et  $B$  s'expriment ainsi :

$$\begin{aligned} A &= \frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \\ B &= -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left( \frac{\cosh(\omega h(t)) - 1}{\sinh(\omega h(t))} \right) \end{aligned} \quad (\text{V-5})$$

Soit par conséquent :

$$u^*(y) = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left\{ (\cosh(\omega h(t)) - 1) \left( \frac{\sinh(\omega y)}{\sinh(\omega h(t))} \right) - \cosh(\omega y) + 1 \right\} \quad (\text{V-6})$$

Le signe moins (–) précédant le gradient de pression signifie que l'écoulement du fluide s'effectue dans le sens des pressions décroissantes.

### V.2.4 Débit volumique

Le débit volumique par unité de largeur se calcule par la relation suivante :

$$Q_x = \int_{h_0}^{h(t)} u^* dy \quad (\text{V-7})$$

Soit :

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left\{ \left( \frac{\cosh(\omega h(t)) - 1}{\sinh(\omega h(t))} \right) \left[ \frac{1}{\omega} \cosh(\omega y) \right]_{h_0}^{h(t)} - \frac{1}{\omega} [\sinh(\omega y)]_{h_0}^{h(t)} + y \Big|_{h_0}^{h(t)} \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left\{ \left( \frac{(\cosh(\omega h(t)) - 1)^2}{\omega \sinh(\omega h(t))} \right) - \left( \frac{\sinh(\omega h(t))}{\omega} \right) + h(t) \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left\{ \frac{\cosh^2(\omega h(t)) + 1 - 2\cosh(\omega h(t)) - \sinh^2(\omega h(t)) + h \omega \sinh(\omega h(t))}{\omega \sinh(\omega h(t))} \right\}$$

Sachant que :  $\cosh^2(\omega h(t)) - \sinh^2(\omega h(t)) = 1$ , on peut écrire alors :

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left\{ \frac{2 - 2\cosh(\omega h(t)) + h(t) \omega \sinh(\omega h(t))}{\omega \sinh(\omega h(t))} \right\}$$

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) \left\{ \frac{2(1 - \cosh(\omega h(t)))}{\omega \sinh(\omega h(t))} + h(t) \right\}$$

Donc, le débit volumique par unité de largeur est :

$$Q_x = -\frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) (h(t) - 2C) \quad (V-8)$$

Où :

$$C = \frac{\cosh(\omega h(t)) - 1}{\omega \sinh(\omega h(t))} \quad (V-9)$$

### V.2.5 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée

L'équation de Reynolds modifiée est obtenue à partir de l'intégration de l'équation de continuité (V-1) à travers l'épaisseur du film :

$$\int_0^{h(t)} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) dy = \int_0^{h(t)} \frac{\partial u^*}{\partial x} dy + \int_0^{h(t)} \frac{\partial v^*}{\partial y} dy = 0 \quad (V-10)$$

En utilisant la formule de Leibnitz (II-18), qui permet d'invertir l'opérateur de dérivation avec le symbole d'intégration et les condition aux limite (V-3), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\int_0^{h(t)} u^* dy}_{Q_x} + \underbrace{v_{sq} - 0}_{\frac{dh}{dt}} = \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{dh}{dt} = 0 \quad (V-11)$$

Soit par conséquent :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dx} \right) (h(t) - 2C) \right) = \frac{dh}{dt} \quad (V-12)$$

C'est l'équation de Reynolds modifiée. Cette équation peut être généralisée au cas d'un écoulement bidimensionnel ( $2 - D$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p^*}{\partial x} \right) (h - 2C) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k}{\mu} \left( \frac{\partial p^*}{\partial z} \right) (h - 2C) \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (V-13)$$

Si  $k = cte$ ,  $\mu = cte$ , et  $h = h(t)$ , l'équation ci-dessus devient :

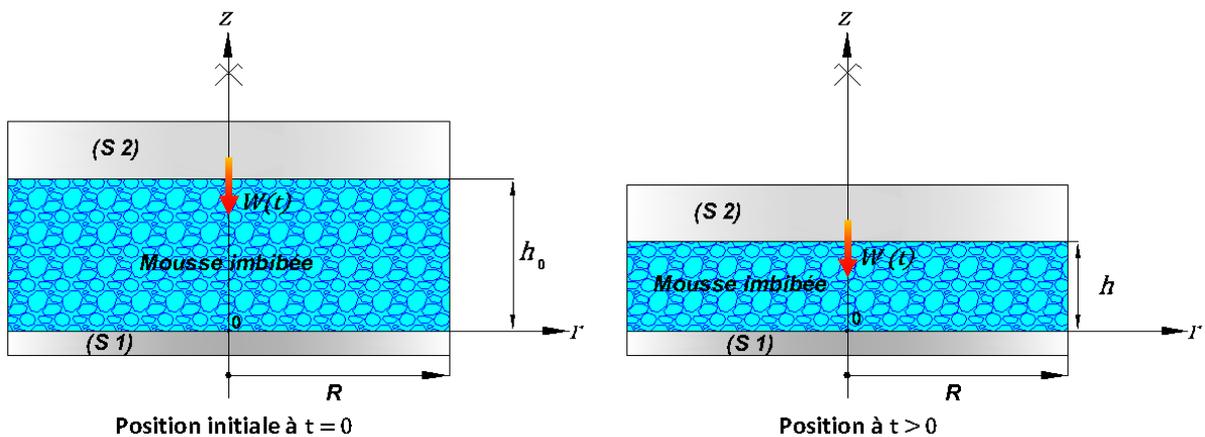
$$\nabla^2 p^*(x, z, t) = \frac{\mu}{k(h - 2c)} \left( \frac{dh}{dt} \right) \quad (V-14)$$

où  $\nabla^2$  est l'opérateur différentiel de Laplace.

Les conditions limites associées à l'équation de Reynolds modifiée (V-14) portent généralement sur la pression aux bords du domaine d'intégration, et ses gradients lorsqu'il s'agit d'un écoulement symétrique ou axisymétrique.

### V.3 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques pour un écoulement axisymétrique

Pour la géométrie du contact représentée dans la **figure V.2** schématisant un écoulement Newtonien axisymétrique entre deux disques parallèles, il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'utilisation de l'hypothèse de symétrie circonférentielle permettra de simplifier les équations en annulant toutes les dérivées partielles par rapport à la coordonnée circonférentielle ; c.-à-d. :  $(\partial/\partial\theta = 0)$ .



**Fig. V.2 Écrasement axisymétrique d'une matrice poreuse imbibée**

### V.3.1 Équation de base

En utilisant les hypothèses traditionnelles de la lubrification par film mince, l'équation de Darcy-Brinkman et l'équation de continuité prennent la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d p^*}{d r} = -\frac{\mu}{k} u^* + \mu' \frac{d^2 u^*}{d z^2} \\ \frac{\partial p^*}{\partial \theta} = \frac{\partial p^*}{\partial z} = 0 \rightarrow p^* = p^*(r) \end{array} \right. \quad (\text{V-15})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u^*) + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (\text{V-16})$$

où  $r$  et  $z$  sont respectivement les coordonnées radiale et axiale,  $u$  et  $w$  sont respectivement les composantes radiale et axiale du vecteur vitesse de l'écoulement dans la matrice poreuse.

### V.3.2 Conditions aux limites associées à l'équation de Darcy-Brinkman et l'équation de Reynolds modifiée

Les conditions aux limites sur les vitesses ou conditions de non glissement sont :

$$\begin{array}{l} z = 0 \quad u^* = 0 \quad w^* = 0 \\ z = h(t) \quad u^* = 0 \quad w^* = W_{sq} = \frac{dh}{dt} \end{array} \quad (\text{V-17})$$

Les conditions aux limites sur la pression sont :

$$\begin{array}{l} r = 0 \quad \frac{\partial p^*}{\partial r} = 0 \quad (\text{symétrie radiale}) \\ r = R \quad \left\{ \begin{array}{l} p^* = 0 \quad (\text{si le bord du disque poreux est non - étanche}) \\ \left. \frac{\partial p^*}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (\text{si le bord du disque poreux est étanche}) \end{array} \right. \quad (\text{V-18}) \end{array}$$

### V.3.3 Détermination du champ de vitesse

Compte-tenu des conditions de non glissement (V-17), la solution de l'équation (V-15) est obtenue comme suit :

$$u^*(z) = -\frac{k}{\mu} \frac{d p^*}{d r} \left\{ (\cosh(\omega h(t)) - 1) \left( \frac{\sinh(\omega z)}{\sinh(\omega h(t))} \right) - \cosh(\omega z) + 1 \right\} \quad (\text{V-19})$$

La vitesse du fluide  $w^*$  dans la direction  $z$  peut être obtenue en dérivant l'équation de continuité (V-16) une fois par rapport à  $z$  puis en intégrant l'équation obtenue deux fois par rapport à  $z$  et compte tenu des conditions limites (V-18). Soit :

$$w^*(z) = \left( \frac{1}{(h(t) - 2C)} \right) \left( \frac{dh(t)}{dt} \right) \left\{ C(\cosh(\omega z) - 1) + C \left( \frac{z}{h(t)} \right) (1 - \cosh(\omega h(t))) \right. \\ \left. - \left( \frac{\sinh(\omega z)}{\omega} \right) + \left( \frac{z \sinh(\omega h(t))}{\omega h(t)} \right) \right\} + \left( \frac{z}{h(t)} \right) \left( \frac{dh(t)}{dt} \right) \quad (V-20)$$

$$\text{où : } C = \frac{\cosh(\omega h) - 1}{\omega \sinh(\omega h)}$$

### V.3.4 Vitesse moyenne et débit volumique

A partir des équations des vitesses radiale et axiale (V-19) et (V-20), on peut déterminer les vitesses moyennes de l'écoulement :

$$\langle u^* \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h u^* dz = - \frac{R}{2h(h - 2C)} \left( \frac{dh}{dt} \right) \left\{ (\cosh(\omega z) - 1)C - \left( \frac{\sinh(\omega h)}{\omega} \right) + h \right\} \quad (V-21)$$

$$\langle w^* \rangle = \frac{1}{h} \int_0^h w^* dz = \\ - \frac{1}{h(h - 2c)} \left( \frac{dh}{dt} \right) \left\{ \left( \frac{\sinh(\omega h)}{\omega} - 1 \right) C + C \left( \frac{h}{2} \right) (1 - \cosh(\omega h)) \right. \\ \left. - \left( \frac{\cosh(\omega h)}{\omega^2} \right) + \left( \frac{h \sinh(\omega h)}{2\omega} \right) - \left( \frac{1}{\omega^2} \right) \right\} \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{dh}{dt} \right) \quad (V-22)$$

Par conséquent le débit volumique radial est :

$$Q_r = \int_0^{h(t)} u^* dz = - \frac{k}{\mu} \left( \frac{dp^*}{dr} \right) (h - 2C) \quad (V-23)$$

### V.3.5 Dérivation de l'équation de Reynolds modifiée en coordonnées cylindriques

En procédant de la même manière qu'en lubrification HD, l'intégration de l'équation de continuité (V-16) moyennant les conditions limites sur la vitesse axiale (V-17) conduit à

la dérivation d'une équation de Reynolds dont l'inconnue est la pression générée dans le milieu poreux pendant la phase d'écrasement dû au mouvement d'approche ou de descente du disque supérieur. Soit :

$$\underbrace{\frac{1}{r} \int_0^{h(t)} \frac{\partial}{\partial r} (r u^*) dz}_{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r Q_r)} + \underbrace{\int_0^{h(t)} \frac{\partial w^*}{\partial z} dz}_{W_{sq-0} = \frac{\partial h(t)}{\partial t}} = 0 \quad (V-24)$$

Soit par conséquent :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{k}{\mu} r \left( \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) (h - 2C) \right) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (V-25)$$

Si la viscosité dynamique  $\mu$  et la perméabilité  $k$  sont supposées constantes, l'équation (V-25) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} (h - 2C) \right) = \frac{\mu}{k} \left( \frac{\partial h}{\partial t} \right) \quad (V-26)$$

Si :  $h = h(t)$ , l'équation (V-26) devient :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p^*}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{k} \left( \frac{dh}{dt} \right) \frac{r}{h - 2C} \quad (V-27)$$

L'équation (V-27) peut admettre une solution analytique, après deux intégrations par rapport à  $r$  et compte tenu des conditions limites sur  $p$  (V-18) dans le cas où le bord du disque poreux est libre, permettra de déterminer la pression du film de compression est donnée par :

$$p^*(r, t) = \frac{\mu}{k} \left( \frac{dh(t)}{dt} \right) \frac{1}{4(h(t) - 2C)} (r^2 - R^2) \quad (V-28)$$

D'après cette équation, on remarque que  $p$  est positive si la vitesse d'écrasement  $dh/dt$  est négative (*positive squeeze*). L'intégration de la pression sur la surface du disque permettra de calculer la capacité de charge du système ou l'action du fluide sur le disque supérieur :

$$F(t) = \int p^* dS = 2\pi \int_0^R p^*(r, t) r dr \quad (V-29)$$

## V.4 Équations de mouvement et d'équilibre du disque supérieur et schéma de résolution

### V.4.1 Prise en compte de l'inertie du disque mobile

#### a) Équation différentielle du mouvement

Les forces extérieures agissant sur le disque supérieur sont la force résultante des actions de la pression hydrodynamique  $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ , les forces d'inertie du disque en mouvement  $m\vec{a}$  et son propre poids  $\vec{W} = -W_0 \vec{e}_z$  où  $W_0 = mg$ . Dans le système d'axes de la **figure V.3**, l'équation différentielle du second ordre décrivant le mouvement d'écrasement du disque supérieur selon la direction axiale s'écrit :

$$F_z(t) - W_0 = m \frac{d^2h(t)}{dt^2} \quad (\text{V-30})$$

où :  $W_0$  correspond au poids du disque supérieur mobile,  $m$  est la masse du disque supérieur, et  $g$  est l'accélération de la pesanteur,  $F_z$  est la portance hydrodynamique ou l'action du fluide sur la face inférieure du disque supérieur.

La portance hydrodynamique est calculée à partir de l'intégration du vecteur contrainte de Cauchy sur toute la surface du contact :

$$\vec{F} = \iint_S \vec{T}(M, \vec{n}) dS \quad (\text{V-31})$$

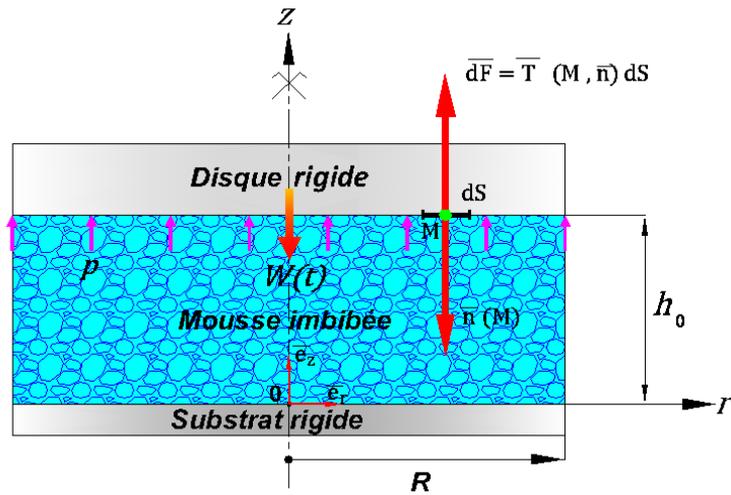
Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}}{dS} = -p \vec{n}(M) \\ \text{avec} \\ \vec{n}(M) = -\vec{e}_z \\ \text{et} \\ dS = r dr d\theta \text{ qui est l'élément d'aire} \end{array} \right. \quad (\text{V-32})$$

$\vec{n}$  est le vecteur normal unitaire extérieur en un point  $M$  du solide dirigé vers le fluide tel que :

$$F_z(t) = \vec{F} \cdot \vec{e}_z = 2\pi \int_0^R p^*(r, t) r dr \quad (\text{V-33})$$

$\vec{e}_z$  étant le vecteur de base unitaire de l'axe ascendant  $O\vec{z}$ .



**Fig. V.3 Représentation de l'action du fluide sur la face inférieure du disque supérieur dans le cas où les contraintes tangentielles pariétales négligées**

Le problème posé étant de valeurs initiales, la solution  $h$  doit satisfaire à l'équation différentielle du second ordre (V-30) pour  $t > 0$  ainsi qu'aux deux conditions initiales portant sur la position du disque  $h$  et la vitesse d'écrasement  $\frac{dh}{dt}$ ; c'est à dire :  $h(t = 0) = h_0$  et  $\frac{dh}{dt}(t = 0) = 0$ .

**b) Schéma de calcul de la vitesse de descente  $\frac{dh}{dt}$  de la surface écrasante**

La vitesse d'écrasement  $\frac{dh}{dt}\Big|_{t+\Delta t}$  du disque à l'instant  $(t + \Delta t)$  est calculée à l'aide d'un schéma explicite d'ordre un de l'accélération :

$$m \frac{\frac{dh}{dt}\Big|_{t+\Delta t} - \frac{dh}{dt}\Big|_t}{\Delta t} = F_z(t) - mg \tag{V-34}$$

Soit :

$$\frac{dh}{dt}\Big|_{t+\Delta t} = \frac{dh}{dt}\Big|_t + \Delta t \left( \frac{F_z(t) - mg}{m} \right) + o(\Delta t) \tag{V-35}$$

où la portance  $F_z(t)$  et la vitesse d'écrasement  $\frac{dh}{dt}\Big|_t$  à l'instant  $t$  sont supposées connues.

**c) Schéma de calcul de la position  $h(t)$  de la surface écrasante**

La position de la face inférieure du disque supérieur en mouvement est obtenue à partir d'un développement de Taylor limité à l'ordre deux :

$$h|_{t+\Delta t} = h|_t + \Delta t \left. \frac{dh}{dt} \right|_t + \frac{\Delta t^2}{2} \left( \frac{F_z(t) - mg}{m} \right) + o(\Delta t^2) \quad (\text{V-36})$$

Notons que la méthode de Runge-Kutta peut être utilisée pour la résolution de l'équation (V.30) en la transformant en un système de deux équations différentielles d'ordre un.

#### V.4.2 Inertie du disque négligée : équation d'équilibre du disque supérieur

Dans le cas où la force d'inertie est négligée, l'équation (V-30) se réduit à :

$$F_z(t) - W_0 = 2\pi \int_0^R p^*(r, t) r dr - W_0 = 0 \quad (\text{V-37})$$

Compte tenu de l'expression de  $p^*$  (V-28), on aboutit à l'équation différentielle ordinaire d'ordre un suivante :

$$\frac{dh}{dt} = \mathcal{F}(t, h) \quad (\text{V-38})$$

avec :

$$\mathcal{F}(t, h) = -\frac{8 W_0 k (h(t) - 2C)}{\mu \pi R^4} \quad (\text{V-39})$$

Comme il s'agit d'un problème de valeur initiale, la solution  $h$  doit satisfaire à l'équation différentielle (V-38) pour  $t > 0$  ainsi qu'à la condition initiale  $h(t = 0) = h_0$ .

La solution de l'équation différentielle (V-38) fortement non linéaire d'ordre un est recherchée numériquement à l'aide de méthodes de type Runge-Kutta [4].

La formule d'ordre 4 est l'une des plus utilisées :

$$h_{n+1} = h_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (\text{V-40})$$

où :  $n = 0, 1, 2, \dots$  etc.

$$k_1 = \Delta t \mathcal{F}(t_n, h_n) \quad ; \quad k_2 = \Delta t \mathcal{F}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, h_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = \Delta t \mathcal{F}\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, h_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad ; \quad k_4 = \Delta t \mathcal{F}(t_n + \Delta t, h_n + k_3)$$

Notons que la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre peut efficacement être utilisée dans le cas d'une charge dynamique sinusoïdale appliquée. Il suffit de remplacer dans l'équation (V-39) :

$W_0$  par  $W(t) = W_0 \cos(2\pi ft)$  où  $f$  est la fréquence d'oscillation du disque.

### V.5 Étude paramétrique

Dans cette étude, on suppose que le processus d'écrasement de la matrice poreuse imbibée intercalée entre les deux disques (par exemple, une mousse en polyuréthane imbibée) s'effectue à charge imposée constante (il s'agit du problème de lubrification XPHD inverse), et les forces d'inertie du disque mobile sont négligées. La charge appliquée  $W_0$  correspond par exemple au poids d'un individu d'un certain âge distribué symétriquement sur les deux genoux. Les données relatives à cette étude paramétrique sont reportées dans le **tableau V.1**. Dans cette étude, on essaiera de mettre en évidence l'influence de la porosité et de la charge appliquée sur le comportement du tribo-système considéré.

**Tableau V.1. Données géométriques et physiques**

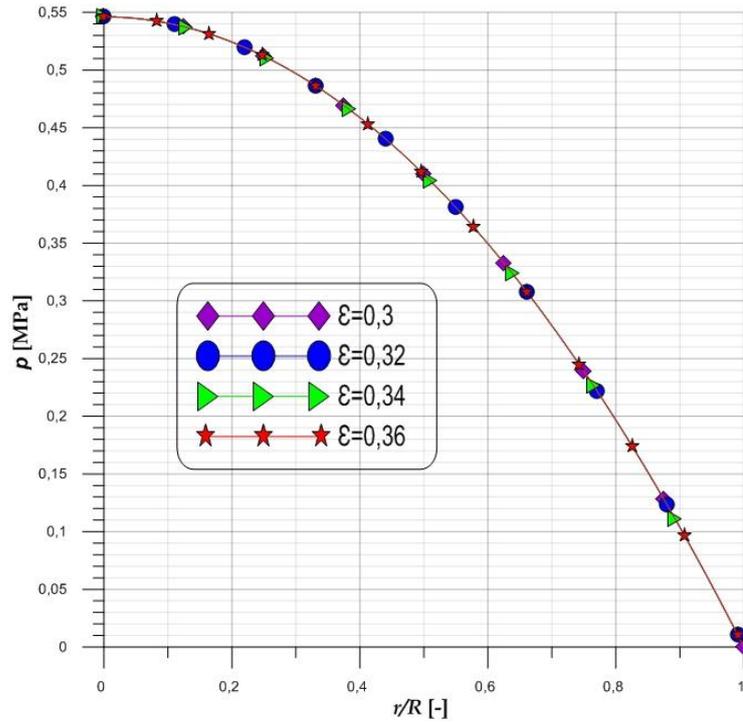
Paramètres	Symboles	Valeurs Numériques	Unités SI
Viscosité dynamique du fluide	$\mu$	$10^{-1}$	[Pa.s]
Rayon des deux disques	$R$	$18.7 \times 10^{-3}$	[m]
Epaisseur initiale du film fluide	$h_0$	$22 \times 10^{-4}$	[m]
Temps d'écrasement	$t_f$	17	[s]
Dimension caractéristique de la taille des pores du matériau poreux	$D_p$	$10^{-4}$	[m]
Porosités du disque inférieur	$\varepsilon$	0.3 , 0.32 , 0.34 , 0.36	[–]
Poids du disque supérieur	$W_0$	250 , 300 , 350 , 400	[N]

Les effets de la porosité  $\varepsilon$  du matériau constituant la matrice imbibée par un fluide Newtonien (solvant pur) sur le profil axisymétrique de la pression hydrodynamique pour une charge appliquée constante  $W_0 = 300 \text{ N}$  est représenté sur la **figure V.4**. Comme prévu, la porosité n'a aucun effet sur la pression dans la mesure où le processus de compression de la matrice se produit sous une charge constante imposée. On observe les

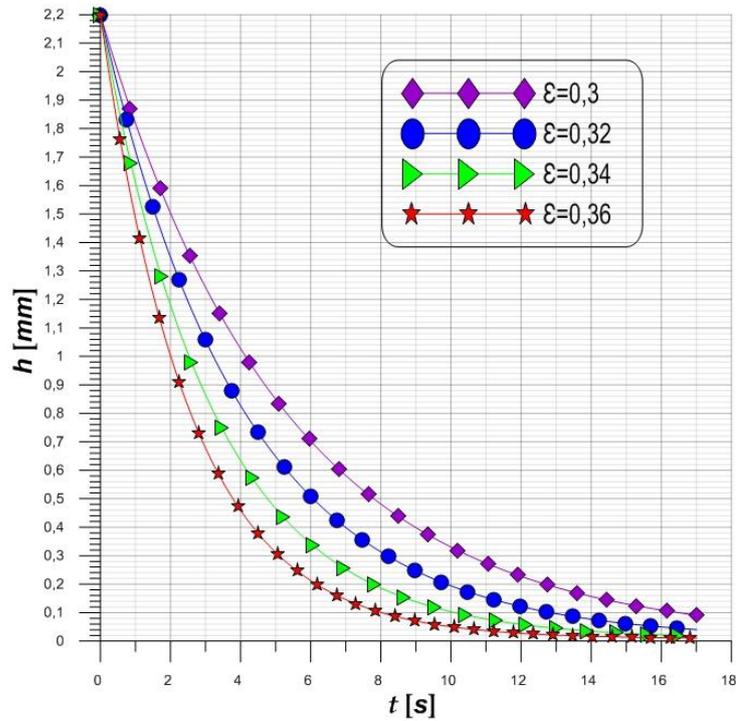
mêmes tendances que celles de la lubrification poro-hydrodynamique (PHD) classique ; c'est-à-dire la pression est une fonction décroissante de la coordonnée radiale. Elle est maximale sur l'axe de symétrie et nulle au bord libre de la matrice poreuse.

La **figure V.5** représente l'évolution de l'épaisseur d'écrasement  $h$  au cours du temps pour diverses porosités  $\varepsilon$  à  $W_0 = 300 N$ . On constate que la courbe de variation de  $h$  est quasi-linéaire aux premiers instants et devient asymptotique par la suite. On constate également que pour les grandes valeurs de la porosité, le temps d'écrasement est plus court entraînant ainsi un ralentissement du disque supérieur. En effet, pour une porosité  $\varepsilon = 30\%$  le temps nécessaire pour que le disque supérieur atteigne la position  $h=0.2 mm$  est environ 13 secondes alors que pour  $\varepsilon = 36\%$ , le temps mis pour atteindre la même position est environ 6 secondes. On peut conclure que le temps d'écrasement diminue lorsque la porosité augmente. Ceci est confirmé par les profils axisymétriques de la vitesse radiale au bord libre de la matrice représentée sur la **figure V.6** où l'écoulement du fluide s'effectue difficilement dans les milieux poreux caractérisés par de faibles porosités.

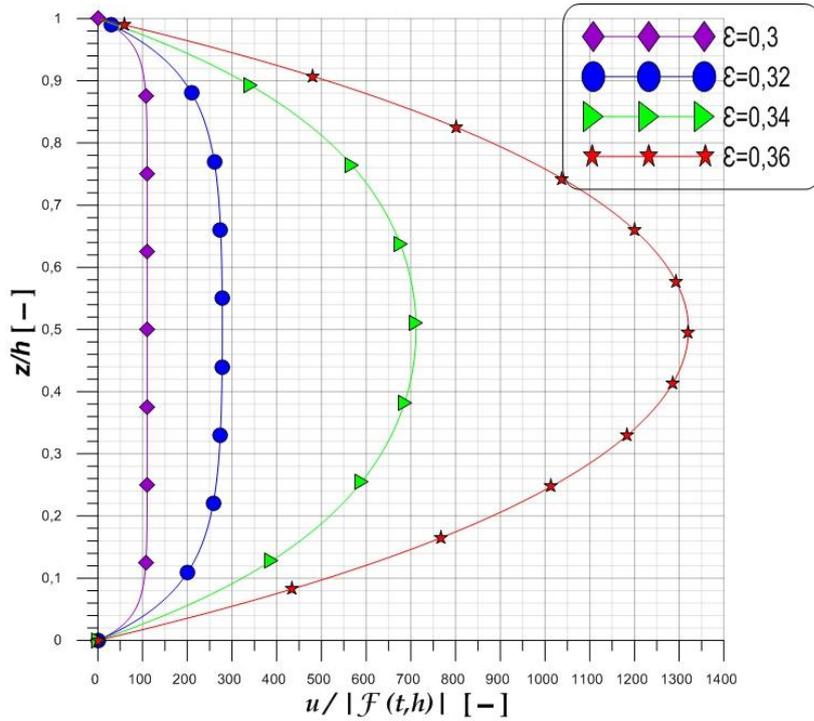
La **figure V.7** montre l'évolution de la vitesse d'écrasement au cours du temps pour diverses porosités  $\varepsilon$  à  $W_0 = 300 N$ . La vitesse d'écrasement est élevée aux premiers instants puis au fur et à mesure que l'écrasement se poursuit, la pression engendrée dans le film augmente de façon importante à cause de la diminution de l'épaisseur du film, ce qui tend à ralentir l'écrasement et donc la vitesse diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule. L'augmentation de la pression pendant le processus d'écrasement affecte sensiblement la viscosité du fluide et peut même causer des déformations élastiques importantes de la structure de la matrice. Dans de telle situation, il y a lieu de prendre en considération dans le modèle la piézo-viscosité du fluide et l'élasticité voire la viscoélasticité de la structure. De plus, on note que plus la porosité est grande, plus la vitesse initiale d'écrasement est élevée car la résistance à l'écoulement est faible.



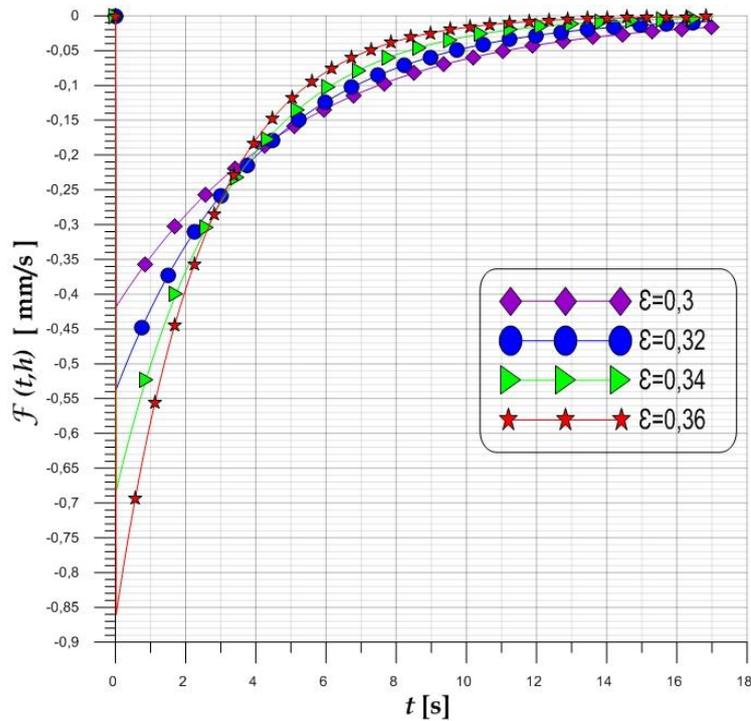
**Fig. V.4 Profils de pression axisymétriques pour diverses valeurs de la porosité  $\epsilon$  avec  $W_0 = 300 N$**



**Fig. V.5 Positions instantanées du disque supérieur pour diverses porosités  $\epsilon$  avec  $W_0 = 300 N$**



**Fig. V.6 Profils de vitesse radiale axisymétrique à  $r = R$  pour diverses porosités  $\varepsilon$  avec  $W_0 = 300 N$**



**Fig. V.7 Évolution de la vitesse d'écrasement au cours du temps pour diverses porosités  $\varepsilon$  avec  $W_0 = 300 N$**

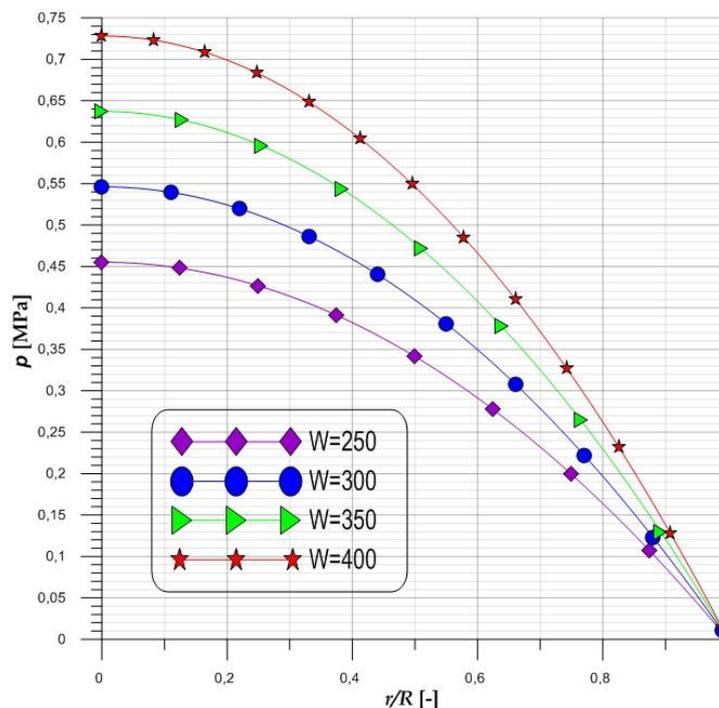
La **figure V.8** présente les profils de pression axisymétriques dans la matrice poreuse calculés pour  $\varepsilon = 0,32$ . On observe que la réaction en pression du système devient

évidente avec une augmentation de la charge imposée, et cette réaction est naturelle car l'effet visqueux du fluide crée une plus grande portance avec une charge accrue.

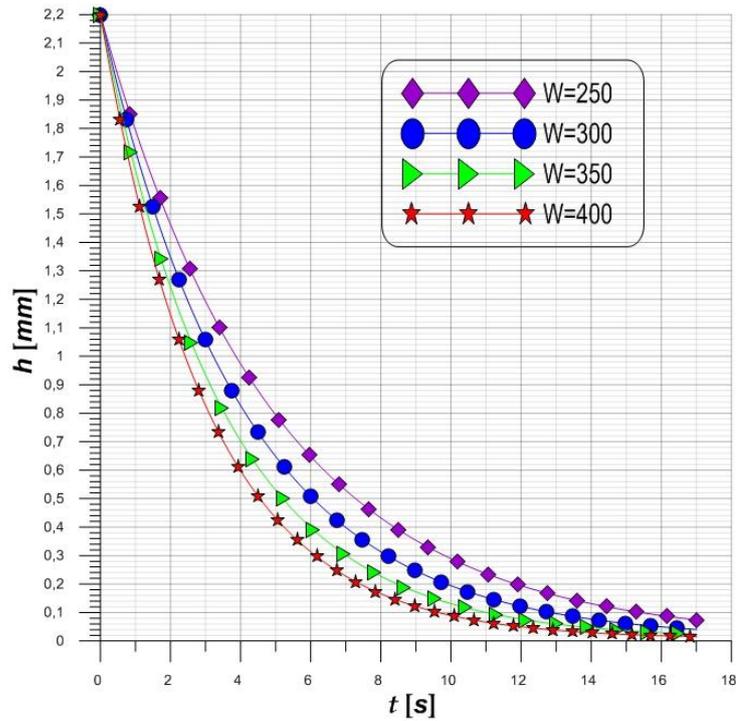
L'évolution de l'épaisseur d'écrasement  $h$  au cours du temps pour différentes charges imposées  $W_0$  avec une porosité  $\varepsilon = 0.32$  est représentée sur la **figure V.9**. On constate qu'une augmentation de la charge imposée conduit à une diminution rapide de l'épaisseur d'écrasement ce qui réduit par conséquent le temps d'écrasement.

Sur la **figure V.10**, on présente les profils de vitesse radiale calculés au bord libre de matrice poreuse ( $r = R$ ). Cette figure montre clairement que plus la charge imposée est élevée, plus le fluide est accéléré à la sortie à cause des forts gradients de pression **figure V.8**.

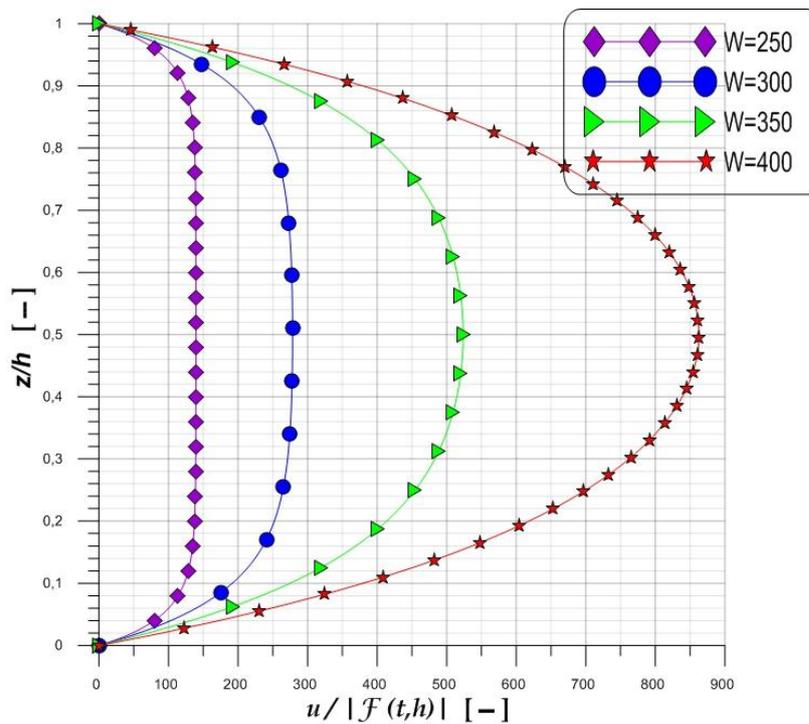
La **figure V.11** montre l'évolution de la vitesse d'écrasement au cours du temps pour différentes charges imposées et une porosité  $\varepsilon=0,32$ . On observe les mêmes tendances que dans le cas précédent, la vitesse d'écrasement est élevée aux premiers instants, puis avec le temps, la vitesse diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule. En outre, on observe également que plus la charge imposée est élevée, plus la vitesse initiale d'écrasement est élevée et cela est en parfaite cohérence avec les résultats de distribution de pression et de l'épaisseur d'écrasement.



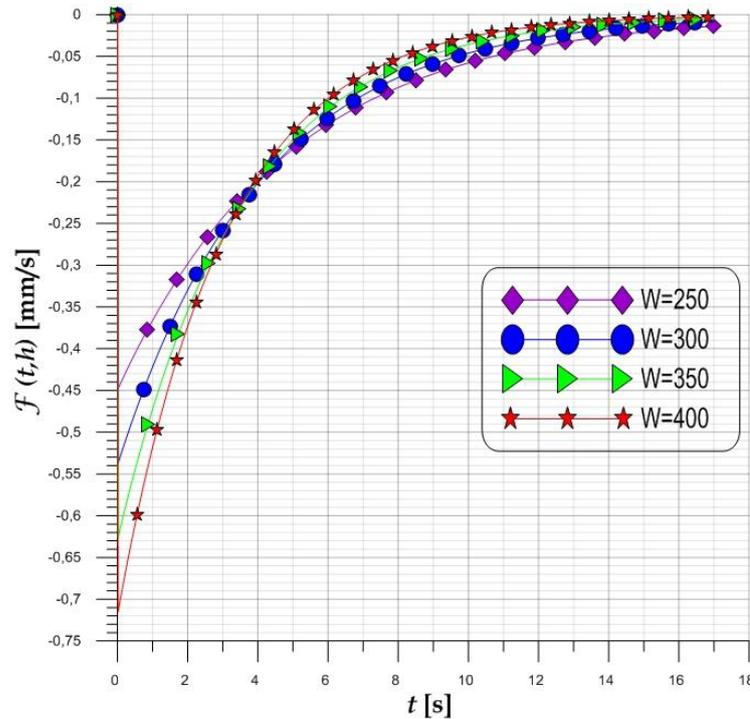
**Fig. V.8 Profils de pression axisymétriques pour diverses valeurs de la charge imposée  $W$  avec  $\varepsilon = 0.32$**



**Fig. V.9 Positions instantanées du disque supérieur pour différentes charges imposées  $W$  avec  $\varepsilon = 0.32$**



**Fig. V.10 Profils de vitesse radiale axisymétriques à  $r = R$  pour différentes charges imposées  $W$  avec  $\varepsilon = 0.32$**



**Fig. V.11 Évolution de la vitesse d'écrasement au cours du temps pour différentes charges imposées  $W$  avec  $\varepsilon = 0.32$**

## V.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté en détails la théorie de la lubrification Ex-Poro-Hydrodynamique (XPHD) considérée comme un nouveau mécanisme ou mode de génération de pression hydrodynamique au sein d'une mousse en polyuréthane imbibée pouvant jouer le rôle d'un cartilage articulaire. Le choix de ce matériau est principalement lié à ses performances tribologiques qui sont la résistance au frottement et à l'usure ainsi que sa capacité d'imbibition et de ré-imbibition accrue. D'autre part, la mousse s'imbibe plus facilement avec un fluide dont la viscosité est plus faible.

On peut conclure qu'une augmentation de la porosité  $\varepsilon$  a des effets significatifs et non négligeables sur les caractéristiques de l'écrasement. Ces effets permettent d'une part de réduire le temps d'écrasement qui se produit grâce à une diminution rapide de l'épaisseur d'écrasement et d'autre part, ils permettent d'augmenter la vitesse radiale et la vitesse d'écrasement du fluide. De plus, lorsque la charge imposée augmente, alors la pression  $p^*$ , la vitesse radiale et la vitesse d'écrasement du fluide augmentent également, tandis que l'épaisseur d'écrasement diminue.

Les résultats de l'étude effectuée sont d'un intérêt industriel et médical certain. Ces résultats ont permis de confirmer théoriquement la capacité d'une prothèse fonctionnant en mode de lubrification XPHD de supporter une charge considérable en intercalant entre les deux premiers corps solides (disques) une matrice poreuse mince imbibée.

## V.7 Références

- [1] S. Kunik, "Étude numérique et expérimentale du mécanisme de lubrification eX-Poro-HydroDynamique (XPHD)," Université de Poitiers, Thèse de doctorat, 2018.
- [2] H. C. Brinkman, "A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles," *Flow, Turbulence and Combustion*, vol. 1, no. 1, p. 27, 1949.
- [3] O. Reynolds, «On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil,» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. 177, pp. 157-234, 1886.
- [4] M. Ez-zini et S. Bouameur, «Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et application,» University Ibn Zohr - Agadir, 2017.

---



# Conclusion générale

---



## Conclusion générale

L'objectif principal de cette recherche est une contribution à l'étude théorique et numérique de la lubrification d'une prothèse de genou humain par effet de compression ou d'écrasement d'un troisième corps entre deux disques circulaires imperméables ou poreux représentant les cartilages articulaires. Selon le mécanisme de lubrification adopté, le troisième corps peut être soit un film fluide à rhéologie non Newtonienne contenant des microparticules dispersées dans un solvant soit une matrice poreuse mince imbibée par un fluide Newtonien. Le premier mécanisme de lubrification traditionnelle lorsqu'un milieu solide poreux est présent est communément appelé « lubrification porohydrodynamique ou PHD » tandis que le second est désigné sous le nom de « lubrification ex-porohydrodynamique ou XPHD » d'inspiration biomimétique.

L'idée essentielle de la lubrification XPHD consiste à remplacer les revêtements de surface antifriction et le film de fluide mince traditionnellement utilisés par une matrice poreuse (par exemple, une mousse en polyuréthane) imbibée d'un fluide qui fournit une plus grande capacité de charge. Ce type de lubrification représente une nouvelle solution technologique révolutionnaire (en rupture totale avec la solution technologique classique) qui peut permettre de concevoir des systèmes tribologiques (les prothèses) autolubrifiants et donc plus écologiques et plus économiques.

A notre connaissance, il y a une grande ressemblance entre la lubrification XPHD et la lubrification par suintement (en anglais, *weeping lubrication*) du genou rencontrée pendant le cycle de marche largement étudié par Mc Cutchen.

Les équations gouvernantes de la lubrification PHD ou la lubrification HD en présence de milieux poreux anisotropes et de microparticules dans le fluide lubrifiant sont l'équation de Reynolds modifiée couplée à l'équation de Darcy modifiée. L'équation de Reynolds modifiée dont l'inconnue est la pression hydrodynamique engendrée dans le film lubrifiant a été dérivée à partir des lois de conservation de la quantité de mouvement et de la masse appliquées au micro-continuum de V. K. Stokes. L'équation de Darcy dont l'inconnue est la pression créée dans le milieu poreux a été obtenue à partir de la loi bien connue de Darcy appliquée à un milieu poreux anisotrope.

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles (EDP) n'admettant pas de solutions analytiques ont été résolues numériquement à l'aide d'un schéma aux différences finies. Les systèmes d'équations algébriques résultant de la discrétisation spatiale ont été résolus par la méthode de Gauss-Seidel avec facteur de sur-relaxation.

Le couplage entre les deux équations à l'interface matrice poreuse-film fluide a été assuré par la méthode itérative du point fixe avec facteur de sous-relaxation.

La lubrification XPHD est gouvernée par une équation aux dérivées partielles de type Reynolds dénommée équation de Reynolds modifiée dérivée à partir des équations de Darcy-Brinkman qui décrivent les écoulements laminaires de fluides incompressibles Newtoniens dans les milieux poreux moyennant des hypothèses simplificatrices similaires à celles exploitées par Osborne Reynolds pour la dérivation de son célèbre équation. Cette équation fait intervenir une propriété physique supplémentaire, à savoir : la perméabilité du milieu poreux dont la valeur peut être calculée à partir de la porosité du milieu en utilisant la loi de Kozeny-Carman.

Les résultats obtenus par le modèle PHD ont permis de faire les conclusions suivantes :

- ❖ les effets des couples de contraintes dus à la présence des microparticules (molécules de l'acide hyaluronique) dans le fluide lubrifiant (la synovie) sur les performances de la prothèse sont significatifs et ne doivent pas être négligés; ces effets sont accentués dans le cas des suspensions hautement concentrées,
- ❖ la viscosité d'une suspension est une fonction croissante de la concentration des microparticules,
- ❖ la présence des microparticules dans un solvant entraîne une amélioration importante de la pression et par conséquent de la capacité de charge de la prothèse par comparaison à un lubrifiant sans microparticules (solvant pur),
- ❖ la pression et la capacité de charge calculées dans le cas d'un écrasement en présence d'un disque poreux sont inférieures à celles obtenues dans le cas d'un écrasement en présence d'un disque rigide. Celles-ci peuvent être améliorées davantage si le bord du disque poreux est étanche.

D'autre part, les résultats obtenus par le modèle XPHD ont montré que la nouvelle solution technologique utilisant une couche poreuse mince imbibée au lieu d'un film

écrasé entre deux surfaces est prometteuse surtout sur le plan des performances tribologiques, en raison de la capacité de charge significativement améliorée permettant ainsi des temps d'écrasement de la matrice poreuse plus longs.

Les prolongements possibles de cette étude qui seront bien évidemment focalisés sur la lubrification XPHD sont :

- ❖ Prise en considération des effets d'inertie dans les parties solide et fluide de la prothèse.
- ❖ Prise en considération de l'inclinaison de l'axe du disque supérieur pendant le processus d'écrasement (écoulement non axisymétrique du fluide dans la matrice poreuse imbibée).
- ❖ Extension de la théorie XPHD par la prise en considération de l'élasticité et de la viscoélasticité de la matrice poreuse imbibée d'un fluide non Newtonien viscoélastique ou viscoplastique de type Maxwell, PTT, Fene-P, Bingham, etc.

---



# Annexes



---

## Annexe -A-

## Équations de mouvement de V. K. Stokes

Équation de mouvement (*momentum*) d'un fluide à couples de contraintes :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \mu \nabla^2 \vec{V} - \eta \nabla^4 \vec{V} \quad (\text{A-1})$$

On peut montrer que le Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  peut être défini par :

$$\Delta \vec{V} = \nabla^2 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \quad (\text{A-2})$$

Le fluide étant incompressible, l'équation de continuité s'écrit alors :

$$\text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (\text{A-3})$$

Compte tenu de (A-3), Le Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  se réduit à :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \nabla^2 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \\ \Delta \vec{V} &= \nabla^2 \vec{V} = -\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

Le bi-Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  s'exprime :

$$\begin{aligned} \Delta^2 \vec{V} &= \nabla^4 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\Delta \vec{V})) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\Delta \vec{V})) = \Delta \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})) - \Delta \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) \\ &= \left[ \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})))) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})))) \right] \\ &\quad - \left[ \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\Delta^2 \vec{V} = \nabla^4 \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{V})))) + \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \quad (\text{A-5})$$

Le fluide étant incompressible ( $\text{div}(\vec{V}) = 0$ ), le bi-Laplacien du champ de vitesse  $\vec{V}$  s'écrit comme :

$$\Delta^2 \vec{V} = \nabla^4 \vec{V} = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \quad (\text{A-6})$$

Finalement l'équation vectorielle de V. K. Stokes pour un fluide incompressible à couple de contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) - \mu \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})) - \eta \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})))) \quad (\text{A-7})$$

## Annexe -B-

## Analyse dimensionnelle des équations de mouvement de V. K. Stokes pour un écoulement en film mince

### B.1 Coordonnées cartésiennes

Dans le chapitre II, on a vu que l'équation vectorielle de V. K. Stokes (II-7) s'écrivait sous la forme suivante (Cf. Annexe A pour les détails) :

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}(p) - \mu \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V})) - \eta \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{V}))) \quad (B-1)$$

ou encore en projetant l'équation sur les trois axes :

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \left( -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - \\ & \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial y \partial z^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial z} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial z^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^2 \partial z} \right) \end{aligned} \quad (B-2a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial y} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) - \\ & \eta \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial z^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 v}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial y^3 \partial z} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^4 w}{\partial y \partial z^3} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y \partial z} \right) \end{aligned} \quad (B-2b)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} = & -\frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \\ & \eta \left( -\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial z} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z^3} - \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z} - \frac{\partial^4 v}{\partial y^3 \partial z} - \frac{\partial^4 v}{\partial y \partial z^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y \partial z} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial z^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (B-2c)$$

où :  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$  est l'opérateur de dérivation totale ou particulière.

En mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film mesurée suivant l'axe y est très faible devant les autres dimensions. Les variables sans dimension ainsi utilisées dans l'analyse dimensionnelle des équations (B-2) sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{x}{L} & \tilde{u} &= \frac{u}{V} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} \\
\tilde{y} &= \frac{y}{h} & \tilde{v} &= \frac{v}{\frac{Vh}{R}} & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} \\
\tilde{z} &= \frac{z}{L} & \tilde{w} &= \frac{w}{V} & \tilde{t} &= \frac{V}{L} t
\end{aligned} \tag{B-3}$$

Ce changement de variables conduit à poser  $\tilde{p} = \frac{h^2}{\mu_0 L V} p$ . Il met aussi en évidence les 3 nombres sans dimension suivants :

$R_e = \frac{\rho V h}{\mu_0}$  : nombre de Reynolds de l'écoulement relatif à l'épaisseur du film, qui représente le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité exercées sur une particule de fluide.

$\varepsilon = \frac{h}{L}$  : paramètre d'échelle qui, en lubrification, est de l'ordre de  $10^{-3}$ .

$\tilde{l}_0 = \frac{l_0}{h}$  : rapport de la taille caractéristique des microstructures dispersées dans le fluide à l'épaisseur de l'écoulement ( $l_0 = \sqrt{\frac{\eta_0}{\mu_0}}$ ).

Compte tenu de ces changements de variable, les équations V. K. Stokes normalisées s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} &= -\varepsilon R_e \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} - \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} \right) - \\
\tilde{\eta} \varepsilon^4 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 &\left( \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^3 \partial \tilde{y}} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^3} \right. \\
&\left. - \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y} \partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^3 \partial \tilde{z}} - \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}^3} - \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}} \right) \tag{B-4a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} &= -\varepsilon^3 R_e \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} - \tilde{\mu} \varepsilon^4 \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \right) - \\
\tilde{\eta} \varepsilon^4 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 &\left( \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^3 \partial \tilde{y}} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^3} - \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y} \partial \tilde{z}^2} + \frac{h^2}{L} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^4} + \frac{h^2}{L} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} + \frac{h}{\varepsilon} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}^2} \right. \\
&\left. + \frac{2h^2}{L} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^3 \partial \tilde{z}} - \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}^3} - \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} \right) \tag{B-4b}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = -\varepsilon R_e \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} - \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} - \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} \right) -$$

$$\begin{aligned} \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 & \left( -\frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^3 \partial \tilde{z}} - \frac{\partial^4 u}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{z}^3} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{y}^3 \partial \tilde{z}} - \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{z}^3} - \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y} \partial \tilde{z}} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} + \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{y}^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-4c})$$

En négligeant les termes multipliés par  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^3$ , et  $\varepsilon^4$ , il reste :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\varepsilon R_e \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} - \tilde{\mu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \quad (\text{B-5a})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (\text{B-5b})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = -\varepsilon R_e \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} - \tilde{\mu} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \quad (\text{B-5c})$$

Les termes en  $\varepsilon R_e$ , ou termes d'inertie, du système (B-5) seront négligeables devant les termes de viscosité quand  $R_e \ll 1$ . Il vient donc :

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = -\tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^4} \quad (\text{B-6a})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{y}} = 0 \quad (\text{B-6b})$$

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = -\tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^2} - \tilde{\eta} \left(\frac{l_0}{h}\right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{y}^4} \quad (\text{B-6c})$$

Et en revenant aux variables dimensionnelles, les équations de mouvement du micro-continuum de V. K. Stokes pour un écoulement en film mince en coordonnées cartésiennes  $(0, x, y, z)$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{cases} \quad (\text{B-7})$$

## B.2 Coordonnées cylindriques

Dans le chapitre II, les équations de mouvement (momentum) du micro-continuum de V.

K. Stokes en coordonnées cylindriques (II-27) ont été établies sous la forme suivante :

$$\rho \begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} - \frac{v^2}{r} \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv}{r} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \Delta u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \\ \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \\ \Delta w \end{pmatrix} - \eta \begin{pmatrix} \Delta^2 u - \frac{2}{r^2} \Delta u - \frac{4}{r^2} \Delta \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{8}{r^3} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3u}{r^4} \\ \Delta^2 v - \frac{2}{r^2} \Delta v + \frac{4}{r^2} \Delta \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{8}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{4}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{3v}{r^4} \\ \Delta^2 w \end{pmatrix} \quad (\text{B-8})$$

$$\text{Où : } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta(\ ) = \nabla^2(\ ) = \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2(\ )}{\partial z^2}$$

$$\Delta^2(\ ) = \nabla^4(\ )$$

$$\begin{aligned} &= \left( \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\ )}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial(\ )}{\partial r} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4(\ )}{\partial \theta^4} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2(\ )}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial z^4} \right. \\ &+ 2 \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4(\ )}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4(\ )}{\partial \theta^2 \partial z^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r \partial z^2} \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial^3(\ )}{\partial r^3} \right) \right) \end{aligned}$$

Comme en coordonnées cartésiennes, on fait les mêmes hypothèses de la mécanique des films minces visqueux, la dimension suivant l'épaisseur du film est très faible par rapport aux deux autres, ce qui permet, pour déterminer l'ordre de grandeur des différents termes du système d'équations (B-8) d'effectuer une analyse dimensionnelle. Pour ce faire, on choisit les variables adimensionnées suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{r}{R} & \tilde{u} &= \frac{u}{W} & \tilde{\mu} &= \frac{\mu}{\mu_0} & \tilde{p} &= \frac{h^2}{\mu_0 R W} p \\ \tilde{z} &= \frac{z}{h} & \tilde{v} &= \frac{v}{W} & \tilde{\eta} &= \frac{\eta}{\eta_0} & R_e &= \frac{\rho W h}{\mu_0} \\ \varepsilon &= \frac{h}{R} & \tilde{W} &= \frac{W}{W \varepsilon} & \tilde{l}_0 &= \frac{l_0}{h} & \tilde{t} &= \frac{W}{R} t \end{aligned} \quad (\text{B-9})$$

Compte tenu de ces changements de variables, le système (B-8) devient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = & -R_e \varepsilon \left[ \frac{D\tilde{u}}{D\tilde{t}} - \frac{\tilde{v}^2}{\tilde{r}} \right] + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^4} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right. \right. \\
& + 2 \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2 \varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^3} \right) \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \\
& - \frac{4}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{8}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}} \\
& \left. - \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{4}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{3 \tilde{u}}{\tilde{r}^4} \right] \tag{B-10a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} = & -\tilde{\rho} R_e \varepsilon \left[ \frac{D\tilde{v}}{D\tilde{t}} + \frac{\tilde{u} \tilde{v}}{\tilde{r}} \right] + \tilde{\mu} \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^4 (l_0)^2 \left[ \left( \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^4} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right. \right. \\
& + 2 \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2 \varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^3} \right) \right] - \frac{2}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} \right) \\
& + \frac{4}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta}} \right)}{\partial \tilde{z}^2} \right) - \frac{8}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\theta} \partial \tilde{r}} \\
& \left. - \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} + \frac{4}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}} - \frac{3 \tilde{v}}{\tilde{r}^4} \right] \tag{B-10b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = & -\tilde{\rho} R_e \varepsilon^3 \left[ \frac{D\tilde{w}}{D\tilde{t}} \right] + \tilde{\mu} \varepsilon^4 \left[ \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^6 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \left[ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^4} + \frac{1}{\varepsilon^4} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^4} - \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^4} + \frac{4}{\tilde{r}^4} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2} \right. \\
& \left. + 2 \left( \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{r}^3} \frac{\partial^3 \tilde{v}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^3} \right) \right] \\
& - \tilde{\eta} \varepsilon^4 \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 2 \left[ \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2 \partial \tilde{z}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{\theta}^2 \partial \tilde{z}^2} \right. \\
& \left. + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial^3 \tilde{w}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{z}^2} \right] \tag{B-10c}
\end{aligned}$$

En négligeant les termes multipliés par  $\varepsilon^2$  et plus, et les termes d'inertie les équations (B-10) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{r}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} = \tilde{\mu} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2} - \tilde{\eta} \left( \frac{l_0}{h} \right)^2 \frac{\partial^4 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^4} \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} = 0 \end{cases} \tag{B-11}$$

Et en revenant aux variables dimensionnelles en coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta, z)$ , les équations de mouvement du micro-continuum de V. K. Stokes pour un écoulement en film mince se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \eta \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow p = p(r, \theta) \end{cases} \tag{B-12}$$

## Annexe -C-

## Détermination du champ de vitesse pour un écoulement de fluide à couples de contraintes

Pour un écoulement bidimensionnelle (2D) en film mince visqueux, les équations de V. K. Stokes s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \end{array} \right. \quad (\text{C-1a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial z} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \eta \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \end{array} \right. \quad (\text{C-1b})$$

En fixant un point  $x$  du continuum, l'équation (C-1a) peut être traitée comme une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre quatre à coefficients constants dont la solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière :

$$u = \underbrace{A_1 + A_2 y + E_1 e^{\frac{y}{l}} + E_2 e^{-\frac{y}{l}}}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2}_{\text{solution particulière}} \quad (\text{C-2})$$

Avec  $A_1, A_2, E_1$  et  $E_2$  sont des constantes, où  $E_1 = \left(\frac{B_1+B_2}{2}\right)$  et  $E_2 = \left(\frac{B_1-B_2}{2}\right)$

Sachant que :  $\cosh\left(\frac{y}{l}\right) = \frac{(e^{\frac{y}{l}} + e^{-\frac{y}{l}})}{2}$  et  $\sinh\left(\frac{y}{l}\right) = \frac{(e^{\frac{y}{l}} - e^{-\frac{y}{l}})}{2}$

l'équations (C-2) devient :

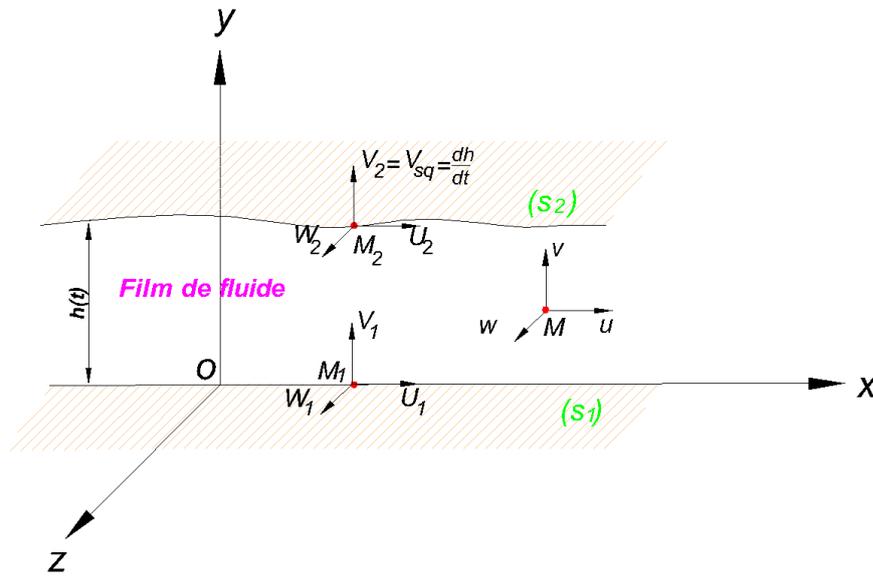
$$u = \underbrace{A_1 + A_2 y + B_1 \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{y}{l}\right)}_{\text{solution homogène}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)y^2}_{\text{solution particulière}} \quad (\text{C-3})$$

Le dérivée seconde de la vitesse s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{B_1}{l^2} \cosh\left(\frac{y}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{y}{l}\right) + \left(\frac{1}{2\mu}\right)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (\text{C-4})$$

L'indentification des constantes d'intégration nécessite l'utilisation des conditions aux limites (figure C.1) sur la vitesse :

$$\begin{array}{llllll} y = 0 & u = U_1 & v = V_1 & w = W_1 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0 & & \\ & & & & & & \\ y = h & u = U_2 & v = V_2 = V & w = W_2 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=h} = 0 & & \end{array} \quad (\text{C-5})$$



**Fig. C.1 Schéma du contact selon la théorie de Reynolds en coordonnées cartésiennes  
(Paroi inférieure (S<sub>1</sub>) confondue avec le plan du référentiel (O, x, z))**

Pour  $y = 0$ , l'équation (C-4) devient :

$$0 = \frac{B_1}{l^2} \cosh(0) + B_2 \sinh(0) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

On a donc :

$$B_1 = -\left(\frac{l^2}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{C-6}$$

Soit :

$$U_1 = A_1 + A_2 (0) + B_1 \cosh(0) + B_2 \sinh(0) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) (0)$$

et

$$A_1 = U_1 + \left(\frac{l^2}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{C-7}$$

Pour  $y = h$

$$\begin{cases} U_2 = A_1 + A_2 h + B_1 \cosh\left(\frac{h}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{h}{l}\right) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) h^2 \\ 0 = \frac{B_1}{l^2} \cosh\left(\frac{h}{l}\right) + B_2 \sinh\left(\frac{h}{l}\right) + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations à deux variables donne :

$$B_2 = \left(\frac{l^2}{\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left(\frac{\cosh\left(\frac{y}{l}\right) - 1}{\sinh\left(\frac{y}{l}\right)}\right) \tag{C-8}$$

$$A_2 = \frac{U_2 - U_1}{h} - \left(\frac{h}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \quad (\text{C-9})$$

En substituant ces valeurs et après avoir simplifié, l'expression de vitesse d'écoulement est enfin obtenue :

$$u = U_1 + \left(\frac{U_2 - U_1}{h}\right)y + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \left[ y^2 - hy + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{C-10})$$

De même pour  $w$  :

$$w = W_1 + \left(\frac{W_2 - W_1}{h}\right)y + \left(\frac{1}{2\mu}\right) \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) \left[ y^2 - hy + 2l^2 \left( 1 - \frac{\cosh\left(\frac{2y-h}{2l}\right)}{\cosh\left(\frac{h}{2l}\right)} \right) \right] \quad (\text{C-11})$$

---

## Publications

### Journal avec comité de lecture

**Auteurs:** Bilal Boussaha, Mustapha Lahmar, Benyebka Bou-Said and Hamid Boucherit

**Intitulé de la Publication:** *Non-Newtonian couple-stress squeeze film behaviour between oscillating anisotropic porous circular discs with sealed boundary*

**Intitulé de la Revue:** Mechanics & Industry 21, 311 (2020)

### Congrès international

*International Conference on Advanced Mechanics and Renewable Energies (ICAMRE),*  
Boumerdes - Algeria, November 28 & 29, 2018

Etude des effets de la pollution solide des huiles lubrifiantes sur la stabilité des paliers hydrodynamiques des machines tournantes

Bilal Boussaha, Hamid Boucherit, Mustapha Lahmar, Ahcene Mouassa et Hamza Bensouilah