

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté de Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière



Thèse :

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3^{ème} cycle en Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées

Par : Lakhdari Abdelghani

Intitulée

Sur quelques méthodes de régularisation
itératives pour une classe de problèmes
inverses en EDP

Dirigé par : Prof. Boussetila Nadjib

Devant le jury

Président	Hamlaoui Abdelhamid	MCA	Univ Guelma
Rapporteur	Boussetila Nadjib	Prof	Univ Guelma
Examineur	Rebbani Faouzia	Prof	Univ Annaba
Examineur	Lakhal Fahim	MCA	Univ Guelma
Examineur	Nouar Ahmed	MCA	Univ Skikda
Examineur	Ramoul Hichem	MCA	Univ Khenchela

Année 2014-2015

UNIVERSITÉ 8 MAI 1945, GUELMA

FACULTÉ MISM

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET MODÉLISATION

THÈSE

En vue de l'obtention du Diplôme de

Doctorat (LMD) en MATHÉMATIQUES

Présentée par

Abdelghani LAKHDARI

**Sur Quelques Méthodes de Régularisation
Itératives pour une Classe de Problèmes Inverses
en EDP**

Directeur de Thèse : Prof. Nadjib BOUSSETILA U. Guelma

Jury :

<i>Président :</i>	Abdelhamid HAMLAOUI	MCA	Univ Guelma
<i>Examineurs :</i>	Faouzia REBBANI	Prof	Univ Annaba
	Fahim LAKHAL	MCA	Univ Guelma
	Ahmed NOUAR	MCA	Univ Skikda
	Hichem RAMOUL	MCA	Univ Khenchela

Année 2015

ملخص

يهدف من خلال هذه الأطروحة إلى دراسة بعض المسائل العكسية و المعتلة بمفهوم هادمار لجملة من المعادلات التفاضلية الجزئية من النمط الناقصي و التكافئي المزدوج. باستعمال التحليل الطيفي و طريقة التعديل التكراري نقوم بإنشاء بعض الحلول المعدلة و المتزنة والتي يمكن اعتبارها كحلول تقريبية للحلول الأصلية. نهي هذه الدراسة بتبيان تقارب الحلول المعدلة نحو الحلول الأصلية مع تقدير الخطأ الناتج عن عملية التعديل.

الكلمات المفتاحية. المسائل العكسية المعتلة - التعديل الطيفي - طريقة التعديل التكراري

Résumé

Dans le présent travail, on étudie deux classes de problèmes inverses en EDP, engendrés respectivement par une équation elliptique et biparabolique. Ces problèmes sont qualifiés mal posés au sens de Hadamard. En se basant sur la troncature spectrale et la méthode itérative de Kozlov-Mazyra, on développe une stratégie de régularisation afin de construire des solutions approchées et stables pour les problèmes en question. L'étude est clôturée par une série d'expérimentations numériques justifiant le cadre théorique développé dans cette thèse.

Mots clés. Problèmes inverses, problèmes mal-posés, problème elliptique, problème biparabolique, régularisation, troncature spectrale.

Abstract

In this work, we study two classes of inverse problems governed by an elliptic and biparabolic equations posed on a bounded geometry. By using the spectral truncation and the Kozlov-Mazyra iteration method, we develop a strategy of regularization to construct stable solutions of the original ill-posed problems. We give also some numerical examples to show the accuracy of these methods.

Key words. Inverse problems, ill-posed problems, elliptic problem, biparabolic problem, regularization, spectral truncation, Kozlov-Mazyra iteration.

Remerciements



Je tiens à remercier mon directeur de thèse, Professeur *Boussetila Nadjib*. Si j'ai mené cette thèse à terme, c'est grâce à lui. Il a su me transmettre sa motivation et son intérêt pour la recherche mathématique.

Je tiens également à remercier le Docteur *Hamlouï Abdelhamid* qui me fait l'honneur de présider le jury ainsi que le Professeur *Rebbani Faouzia* et les Docteurs *Lakhal Fahim*, *Nouar Ahmed* et *Ramoul Hichem* d'avoir accepté de faire partie du jury et d'y consacrer une partie de leur temps.

Je remercie aussi le Professeur *KIRANE Mokhtar* pour son aide, ses conseils précieux, sa disponibilité lors de mon séjour au sein de son laboratoire à La Rochelle-France, ainsi que le Professeur *BENABDA Amel* qui m'a aidé pendant le séjour au niveau de l'ENIT – Tunisie.

Au cours de ces cinq années, j'ai bénéficié de très bonnes conditions de travail au sein du Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation (LMAM, Guelma) pour mener à bien ce projet. Un grand merci à tous les membres du Laboratoire LMAM.

Je remercie également tous les membres du département de Mathématiques et de la faculté MISM, pour toute l'aide qui m'a été accordée.

Je ne peux terminer ces lignes sans remercier le docteur *Chamlal Arezki*, les amis *Bouzitouna Abdallah*, *Souahi Abdourazek*, *Saci Fateh*, *Benchettah Djaber* et *Bousbiat Lilia* pour leur soutien moral et matériel.





*A la mémoire de mon père,
à ma Mère ♡,
à mes frères,
Abdelwahed et Abderrahim.*



Publication découlant de cette Thèse

- ✓ Lakhdari Abdelghani and Boussetila Nadjib.
[*An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem*]
Boundary Value Problems (2015), 2015 :55 DOI : 10.1186/s13661-015-0318-4.

- Submission date : 08 December 2014
- Acceptance date : 19 March 2015
- Published online : 28 March 2015
- Article URL : <http://www.boundaryvalueproblems.com/content/2015/1/55>

RESEARCH

Open Access

An iterative regularization method for an abstract ill-posed biparabolic problem

Abdelghani Lakhdari¹ and Nadjib Boussetila^{2,3*}

*Correspondence:

n.boussetila@gmail.com

²Department of Mathematics,
University 8 Mai 1945 Guelma,
P.O. Box 401, Guelma, 24000, Algeria

³Applied Mathematics Laboratory,
University Badji Mokhtar Annaba,
P.O. Box 12, Annaba, 23000, Algeria
Full list of author information is
available at the end of the article

Abstract

In this paper, we are concerned with the problem of approximating a solution of an ill-posed biparabolic problem in the abstract setting. In order to overcome the instability of the original problem, we propose a regularizing strategy based on the Kozlov-Maz'ya iteration method. Finally, some other convergence results including some explicit convergence rates are also established under *a priori* bound assumptions on the exact solution.

MSC: Primary 47A52; secondary 65J22

Keywords: ill-posed problems; biparabolic problem; iterative regularization

1 Formulation of the problem

Throughout this paper H denotes a complex separable Hilbert space endowed with the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and the norm $\| \cdot \|$, $\mathcal{L}(H)$ stands for the Banach algebra of bounded linear operators on H .

Let $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ be a positive, self-adjoint operator with compact resolvent, so that A has an orthonormal basis of eigenvectors $(\phi_n) \subset H$ with real eigenvalues $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+$, *i.e.*,

$$A\phi_n = \lambda_n\phi_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad \langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j, \\ 0, & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \phi_n, \quad h_n = \langle h, \phi_n \rangle.$$

In this paper, we consider the inverse source problem of determining the unknown source term $u(0) = f$ and the temperature distribution $u(t)$ for $0 \leq t < T$, in the following biparabolic problem:

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 u = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^2 u(t) = u''(t) + 2Au'(t) + A^2 u(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(T) = g, \quad u_t(0) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $0 < T < \infty$ and f is a given H -valued function.

Table des matières

Introduction	v
1 Résultats préliminaires et notations	1
1.1 Éléments de théorie spectrale	1
1.1.1 Opérateurs linéaires	1
1.1.2 Opérateurs bornés	2
1.1.3 Opérateurs non-bornés	3
1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné	4
1.2 Théorie de Riesz-Fredholm	5
1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts	5
1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité	5
1.3 Semi-groupes d'opérateurs linéaires	9
1.3.1 Généralités	9
1.3.2 Caractérisation des générateurs	10
1.4 Problèmes mal posés et problèmes inverses	11
1.4.1 Outils d'analyse des problèmes mal posés (cas linéaire)	15
1.5 Méthodes de régularisation	16
1.5.1 La méthode de Tikhonov	17
1.5.2 Convexité logarithmique	18
2 Problème inverse de type elliptique : identification de sources	20
2.1 Position du problème	20
2.2 Résultats préparatoires	21
2.2.1 Opérateurs quasi-contractants	21
2.2.2 Propriétés de l'opérateur K	23
2.3 Régularisation	24
2.3.1 Régularisation par troncature spectrale	24
2.3.2 Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya	26
3 Problème inverse de type biparabolique : identification de conditions initiales	30
3.1 Formulation du problème	30
3.2 Motivation physique : Reconstruction du passé connaissant l'état présent.	31
3.3 Analyse du problème	35
3.3.1 Position incorrecte du problème (3.1)	37
3.3.2 Stabilisation du problème	39
3.4 Régularisation par la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya	41

4	Implémentations numériques	47
4.1	Problème inverse elliptique	47
4.1.1	Application	47
4.1.2	Exemple	48
4.1.3	Résultats numériques	49
4.2	Problème inverse bi-parabolique	59
4.2.1	Application	59
4.2.2	Exemple	59
4.2.3	Résultats numériques	59
	Bibliographie	65

INTRODUCTION

Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations aux dérivées partielles auxquelles sont jointes des conditions aux limites s'exprimant sur la frontière du domaine où le phénomène évolue, ainsi que des conditions initiales, finales ou autres.

Généralement, la modélisation d'un problème est suivie d'une analyse théorique et d'une implémentation numérique.

Certains de ces problèmes, qui apparaissent dans beaucoup de domaines pratiques des sciences et des techniques; comme la médecine (échographie, scanners, rayons X, ...), l'énergie (calcul d'écoulements de pétrole dans un réservoir avec puits), la chimie (détermination des constantes de réaction) et autres, ne peuvent être traités directement. Pour les résoudre on est contraint de passer par une étape précédant l'analyse théorique et qui est la régularisation (ces problèmes sont dits mal posés).

■ PROBLÈMES MAL POSÉS

En 1923, Hadamard a défini la notion de problème bien posé par les conditions suivantes :

- 1- Existence de la solution,
- 2- Unicité de la solution,
- 3- Dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème.

Par la suite on considéra longtemps que les problèmes ne vérifiant pas les conditions citées ci-dessus n'ont pas de valeur pratique et ne peuvent modéliser de manière correcte un phénomène physique. Pour cette classe, on parla de problèmes mal posés.

L'opinion de Hadamard s'avéra inexacte et on sait maintenant que beaucoup de problèmes à caractère théorique ou d'ordre pratique mènent dans leur résolution à des problèmes mal posés et ceci explique l'intérêt grandissant pour cette classe de problèmes.

Un problème mal posé est donc un problème pour lequel l'une au moins des trois conditions n'est pas vérifiée; mais la plus grande difficulté réside dans la non satisfaction de la troisième condition. Il s'agit donc de problèmes pour lesquels une légère perturbation des données peut provoquer un changement important de la solution.

Parmi les situations qui se traduisent par un problème mal posé, nous pouvons citer celle de déterminer les états passés d'un système physique décrit par une équation différentielle à partir de son état présent, ou bien celui de déterminer les paramètres d'un système à partir de données expérimentales. Dans les deux cas nous parlons de problème inverse (voir [43, 76, 108, 70]).

■ PROBLÈMES INVERSES

D'après J.B.Keller [78], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre ; si la formulation de l'un met l'autre en cause. On les trouve dans plusieurs situations ; par exemple en reconstituant l'état initial d'un phénomène, à partir de son état final, ou d'une évolution partielle, et également en cherchant la source d'un phénomène donné.

Une définition plus opérationnelle est qu'un problème inverse consiste à déterminer des causes connaissant des effets. Ainsi, ce problème est l'inverse de l'autre appelé problème direct, consistant à déduire les effets, les causes étant connues.

L'étude d'un problème inverse exige une bonne maîtrise du problème direct et l'on a recours à des notions tant mathématiques que physiques. Généralement, la résolution s'appuie sur des éléments spécifiques au cas à considérer. Toutefois, il existe quelques techniques qui possèdent un champ d'application étendu. Lorsqu'il est question d'identifier ou de calculer une grandeur physique à partir d'observations (mesures), on est amené souvent à inverser un opérateur (la résolvante qui donne la solution du problème direct) ; cette inversion généralement instable, nécessite un traitement particulier. Il s'agit de techniques, dites de régularisation, dont le but est de rendre le problème bien posé et numériquement réalisable et ce en le perturbant légèrement pour éliminer les agents responsables de l'instabilité.

■ RÉGULARISATION

En mathématique, la régularisation est une procédure qui consiste à modifier un problème non régulier par un autre problème qui lui est proche (dans un sens) et qui possède de bonnes propriétés rendant son étude théorique et numérique plus facile.

-Dans la littérature, plusieurs approches ont été utilisées pour régulariser certains problèmes mal posés au sens de Hadamard. Parmi elles on peut citer :

- La méthode de Quasi-Réversibilité (Q-R) 1967 initialement introduite par Lattès & Lions 1967 [96] qui consiste à transformer le problème de Cauchy mal posé d'ordre 2 en un problème bien posé d'ordre plus élevé (d'ordre 4) en introduisant un certain paramètre (terme de correction). La convergence vers le problème d'origine est assurée quand ce paramètre tend vers 0. Cette méthode a été ensuite reprise par plusieurs auteurs pour résoudre quelques problèmes inverses elliptiques, notamment Klibanov & Santosa 1992 [80], Bourgeois 2005 [24, 25]. Pour plus de détails, on renvoie à la référence [121].
- La méthode itérative alternative initialement proposée par Kozlov et al. 1991 [87]. Cette méthode consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés dont la solution converge, pour des données appartenant à certaines classes admissibles, vers la solution du problème original.

- La méthode des conditions auxiliaires (A-B-C) introduite par Abdulkerimov 1977 [9] et qui a été développée récemment par Hao et al. 2009 [60]. Le principe de cette approche consiste à perturber légèrement le problème original en le remplaçant par un problème non-local. Dans [121], on trouve un bon exposé accompagné d'une série d'expérimentations justifiant l'efficacité de cette méthode..

L'étude intensive des problèmes inverses est dictée par la richesse du sujet aussi bien sur l'aspect théorique, que sur l'aspect pratique.

Toute problématique directe génère une variété de problèmes inverses, qui donne naissance à des questions théoriques et des défis numériques.

■ MOTIVATION PHYSIQUE

La présente thèse porte sur l'étude d'une classe de problèmes inverses d'identification de sources / de conditions initiales à partir d'observations supplémentaires fournies par des mesures internes de la solution / conditions finales sur la géométrie considérée, où évolue la solution décrivant le phénomène physique considéré.

Lorsqu'on veut déterminer le flux de la température ou de la chaleur sur la surface d'un corps, où la surface elle-même est inaccessible aux mesures directes, on est donc obligé de prendre des mesures internes, et à partir de ces mesures, on essaie de reconstruire les données recherchées.

On peut citer par exemple la mesure du puits [113] utilisable par les géologues et les géophysiciens pour déterminer la température sur la surface de la terre. Pour cela, il est utile de faire des mesures intérieures plutôt que sur la surface, puisque les mesures sur la surface sont susceptibles d'être affectées par des bruits parasites.

Les problèmes inverses intervenant dans la reconstitution de sources et/ou de conditions finales, ont été largement étudiés et expérimentés dans plusieurs applications : la détection des fissures, le Contrôle Non Destructif, la corrosion, l'électro-cardiologie, et d'autres domaines pratiques. Voir [69, 21, 39, 77], ainsi que les références qui y sont citées.

CONTENU DE LA THÈSE

■ La thèse comporte une introduction et quatre chapitres

■ Le Chapitre 1, rassemble l'essentiel des résultats concernant les espaces fonctionnels, ainsi qu'un aperçu sur la théorie spectrale. Les énoncés des résultats qui ne seront utilisés que ponctuellement seront rappelés au moment approprié dans les autres chapitres. Le but de ce premier chapitre est de donner des définitions et des énoncés précis des théorèmes que nous utiliserons dans la suite, afin d'éviter des renvois permanents à d'autres ouvrages.

■ Dans le chapitre 2, nous étudions un problème inverse dans lequel nous essayons de déterminer une source inconnue apparaissant dans une équation elliptique à partir d'une mesure interne. Nous commençons par la position incorrecte du problème, par la suite, on suit une stratégie de régularisation basée sur la méthode de troncature spectrale et la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya, et on montre leurs convergences ainsi que les estimations des erreurs.

■ Le chapitre 3 est dédié à un problème inverse de type biparabolique. Nous donnons la motivation physique qui nous a conduit au nouveau modèle du processus de conduction de la chaleur au lieu de l'équation de la chaleur classique. L'objectif est de déterminer le terme source (état initial) connaissant l'état final du phénomène, pour cela, on utilise la méthode de régularisation itérative de Kozlov-Maz'ya qui consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés dont la solution converge, pour des données appartenant à certaines classes admissibles, vers la solution du problème original.

■ Le volet numérique de ce travail fait l'objet du chapitre 4. Nous faisons des simulations numériques conduisant à l'identification des termes inconnus pour des données exactes et bruitées afin de justifier les résultats théoriques de stabilité pour les deux problèmes considérés dans notre recherche.

Enfin, nous terminons par une conclusion qui englobe les principaux résultats de ces travaux.

Notre travail est une extension de la série des travaux [5, 29, 68, 104, 105, 106, 108] et des études qui ont été faites dans cette direction.

Résultats préliminaires et notations



L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats qui seront utilisés tout au long de ce travail. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

On se place dans un cadre hilbertien $(H_1 \longrightarrow H_2)$, où H_i est un espace de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , muni de la norme $|\cdot|_{H_i}$ et le produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{H_i}$, ($i = 1, 2$).

1.1 Éléments de théorie spectrale

Références

- H. Brezis ; Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications, Masson (1993).
- R. Dautray, J.-L. Lions ; Analyse mathématique et calcul numérique. Tome 5 (spectre des opérateurs), Edt. Masson, (1988). [§3. page 136-180].
- E.B. Davies ; Linear Operator and their Spectra, Cambridge University Press (2007).
- I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek ; Basic Classes of Linear Operators, Birkhäuser (2003).
- D. Huet ; Décomposition Spectrale et Opérateurs, PUF (1976).
- P. Lévy-Bruhl ; Introduction à la Théorie Spectrale : Cours et Exercices Corrigés, Dunod (2003).

1.1.1 Opérateurs linéaires

De manière générale, un opérateur linéaire est une application $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ linéaire, où $\mathcal{D}(A)$ est le domaine de définition de l'application linéaire A , qui est un sous-espace vectoriel de H_1 , que l'on suppose en général dense dans H_1 . L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$ est dit borné si la quantité

$$\|A\| = \sup \{ |Au|_{H_2}, u \in \mathcal{D}(A), |u|_{H_1} = 1 \}$$

est finie. Dans ce cas A est une application linéaire continue sur $\mathcal{D}(A)$, et lorsque $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H_1 , A s'étend de manière unique à un opérateur borné sur H_1 .

- Tout opérateur A est complètement défini par son graphe $\mathbf{G}(A)$ qui est un sous-espace vectoriel de $H_1 \times H_2$ défini par $\mathbf{G}(A) = \{(v, Av), v \in \mathcal{D}(A)\}$.

Pour tout opérateur linéaire $A : \mathcal{D}(A) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2$, on note par :

$$\mathbf{N}(A) = \{h \in \mathcal{D}(A), Ah = 0\} \text{ (noyau de } A\text{),}$$

$$\mathbf{R}(A) = \{h_2 = Ah_1, h_1 \in \mathcal{D}(A)\} \text{ (image de } A\text{).}$$

1.1.2 Opérateurs bornés

On note $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ (resp. $\mathcal{L}(H_1)$) l'espace vectoriel des **opérateurs linéaires continus** de H_1 dans H_2 (resp. des **endomorphismes continus** de H_1) muni de la topologie de la convergence uniforme :

$$B \in \mathcal{L}(H_1, H_2), \quad \|B\|_{\mathcal{L}(H_1, H_2)} = \sup_{u \in H_1 \setminus \{0\}} \frac{|Bu|_2}{|u|_1}.$$

Définition 1.1.1 On dit qu'une application linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est **inversible** si et seulement si il existe une application $S' \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ telle que

$$S' \circ S = I_{H_1}, \quad S \circ S' = I_{H_2}.$$

L'application S' si elle existe est unique. On notera $S' = S^{-1}$ et

$$\mathbf{Inv}(H_1, H_2) := \{S \in \mathcal{L}(H_1, H_2), S \text{ inversible}\}.$$

Théorème 1.1.2 [Théorème des isomorphismes de Banach]

L'inverse de toute bijection linéaire continue $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est continue.

Définition 1.1.3 Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On appelle **ensemble résolvant** de A , l'ensemble

$$\rho(A) := \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; A_\lambda = (\lambda I - A) \text{ est inversible } (\iff \text{bijectif}) \right\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le **spectre** de A et sera noté

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

On appelle **rayon spectral** (noté $\text{spr}(A)$) la borne supérieure du spectre en module, i.e.,

$$\text{spr}(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

► Le spectre d'un opérateur borné est un compact non vide.

Le spectre ponctuel de A (noté $\sigma_p(A)$) est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A_λ soit non injectif :

$$\lambda \in \sigma_p(A) \iff \mathbf{N}(A_\lambda) \neq \{0\}.$$

Un élément $\lambda \in \sigma_p(A)$ est dit valeur propre de A , on lui associe $0 \neq h \in H$ appelé vecteur propre associé à λ et tel que $Ah = \lambda h$.

Définition 1.1.4 (et proposition) Soit $S \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors il existe un opérateur unique $S^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$, appelé adjoint de S , qui vérifie la relation suivante :

$$(Sh_1, h_2)_2 = (h_1, S^* h_2)_1, \quad \forall h_1 \in H_1, \forall h_2 \in H_2.$$

De plus, on a les propriétés suivantes :

$$\|S\| = \|S^*\|, \quad S^{**} = (S^*)^* = S.$$

Si S est bijectif (\implies inversible), alors S^* l'est aussi, et $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$.

Définition 1.1.5 Soit H un espace de Hilbert. On dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est **auto-adjoint** si $A = A^*$.

$$A = A^* \iff (Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x, y \in H.$$

1.1.3 Opérateurs non-bornés

Définition 1.1.6 On dit qu'un opérateur A est fermé si son graphe $G(A)$ est fermé dans $H_1 \times H_2$, i.e., pour toute suite $(u_n) \subset \mathcal{D}(A)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans H_1 et $Au_n \rightarrow v$ dans H_2 , alors $u \in \mathcal{D}(A)$ et $v = Au$.

► L'opérateur fermé A peut être considéré comme un opérateur borné de son domaine de définition $\mathcal{D}(A)$ muni de la norme du graphe $(|u|_G := |u|_{H_1} + |Au|_{H_2})$ dans H_1 .

Théorème 1.1.7 [Théorème du graphe fermé] Si l'opérateur fermé A est défini sur tout l'espace H_1 , alors A est borné

$$(A \text{ fermé et } \mathcal{D}(A) = H_1 \implies A \text{ borné}).$$

Définition 1.1.8 (et proposition) Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur non-borné à domaine dense. On peut définir l'opérateur non-borné A^* adjoint de l'opérateur A , comme suit :

$$A^* : \mathcal{D}(A^*) \subset H_2 \rightarrow H_1$$

$$\mathcal{D}(A^*) = \{v \in H_2 : \exists c > 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c|u|_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A)\}.$$

Dans ce cas la fonctionnelle : $u \mapsto g(u) = \langle v, Au \rangle$ se prolonge de façon unique en une fonctionnelle linéaire $f : H_1 \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $|f(u)| \leq c|u|_{H_1}$, $\forall u \in H_1$, et $f \in H'_1 \simeq H_1$. Par conséquent la relation fondamentale qui lie A et A^* est :

$$\langle v, Au \rangle_{H_2} = \langle A^* v, u \rangle_{H_1}, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \forall v \in \mathcal{D}(A^*).$$

► Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur non-borné à domaine dense, alors A^* est fermé.

Définition 1.1.9 On dit qu'un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est symétrique lorsque

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(A), \quad (Au, v) = (u, Av)$$

Définition 1.1.10 L'opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ est dit auto-adjoint si $A = A^*$, i.e.,

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^*) \text{ et } (v, Au) = (Av, u), \quad \forall u, v \in \mathcal{D}(A).$$

Théorème 1.1.11 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur fermé symétrique. A est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.12 [Caractérisation des opérateurs à images fermées]

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbf{R}(A)$ est fermé, (ii) $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé, (iii) $\mathbf{R}(A) = \mathbf{N}(A^*)^\perp$, (iv) $\mathbf{R}(A^*) = \mathbf{N}(A)^\perp$.

Le résultat qui suit est une caractérisation utile des opérateurs surjectifs.

Théorème 1.1.13 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (a) A est surjectif, i.e., $\mathbf{R}(A) = H_2$,
- (b) il existe une constante $k > 0$ telle que

$$|v| \leq k|A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*),$$

- (c) $\mathbf{N}(A^*) = \{0\}$ et $\mathbf{R}(A^*)$ est fermé.

Corollaire 1.1.14 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H_1 \longrightarrow H_2$ un opérateur non-borné, fermé, avec $\overline{\mathcal{D}(A)} = H_1$. L'opérateur A admet un inverse borné A^{-1} sur H_2 si et seulement si il existe deux constantes m_1 et m_2 telles que

$$\begin{aligned} |u| &\leq m_1 |Au|, \quad \forall u \in \mathcal{D}(A), \\ |v| &\leq m_2 |A^*v|, \quad \forall v \in \mathcal{D}(A^*). \end{aligned}$$

1.1.4 Spectre et résolvante d'un opérateur non borné

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné que l'on suppose fermé^{1 2 3} et à domaine dense.

Définition 1.1.15 On appelle ensemble résolvant de A , l'ensemble

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda = \lambda I - A \text{ est bijectif}\}.$$

Son complémentaire dans le plan complexe s'appelle le spectre de A et sera noté $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

- On note que si $\lambda \in \rho(A)$, en vertu du théorème du graphe fermé, A_λ^{-1} est borné, on l'appelle *résolvante* de A .
- L'ensemble résolvant $\rho(A)$ est un ouvert du plan complexe et l'application : $\rho(A) \ni \lambda \longmapsto R(\lambda; A)$ est analytique sur chaque composante connexe de $\rho(A)$. La résolvante satisfait à l'équation fonctionnelle suivante dite *identité de la résolvante* :

$$R(\lambda_1; A) - R(\lambda_2; A) = (\lambda_2 - \lambda_1)R(\lambda_1; A)R(\lambda_2; A).$$

- Le spectre de A est donc un fermé de \mathbb{C} , et si en plus l'opérateur A est borné, alors $\sigma(A)$ est un compact non vide.

Examinons à présent de plus près la structure du spectre.

- Le premier sous-ensemble important du spectre est le *spectre ponctuel* :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}.$$

1. L'hypothèse de fermeture est nécessaire pour faire une théorie spectrale raisonnable.
 2. Si A n'est pas fermé, alors $\rho(A) = \emptyset$.
 3. Si $A = A^*$, alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Un élément λ de $\sigma_p(A)$ est dit *valeur propre* de A , on lui associe $0 \neq \vartheta \in \mathcal{D}(A)$ tel que $A_\lambda \vartheta = 0$, que l'on appelle *vecteur propre* (fonction propre quand H est un espace de fonctions) correspondant à λ .

- Si $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$ donc A_λ est injectif mais non surjectif. Deux cas se présentent :
 - Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ n'est pas dense, $\lambda \in \sigma_r(A)$ est alors appelé le spectre *résiduel* de A .
 - Si $\mathbf{R}(A_\lambda)$ est dense, $\lambda \in \sigma_c(A)$ est alors appelé le spectre *continu* de A .

1.2 Théorie de Riesz-Fredholm

1.2.1 Diagonalisation des opérateurs auto-adjoints compacts

Définition 1.2.1 On dit qu'un opérateur $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est **compact** si $K(B_{H_1}(0, 1))$ est relativement compacte pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(H_1, H_2)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_1 dans H_2 et on pose $\mathcal{K}(H_1, H_1) = \mathcal{K}(H_1)$.

► La compacité d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est caractérisée comme suit :

$$T \in \mathcal{K}(H_1, H_2) \iff \forall (x_n) \subset H_1, x_n \rightarrow 0 \text{ (faiblement)} \implies Tx_n \rightarrow 0 \text{ (fortement)}.$$

► Soient E, F et G trois espaces de Banach. Si $S_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{K}(F, G)$ (resp. $S_1 \in \mathcal{K}(E, F)$ et $S_2 \in \mathcal{L}(F, G)$), alors $S_2 S_1 \in \mathcal{K}(E, G)$.

► [Théorème de Schauder] K est compact si et seulement si K^* est compact.

Théorème 1.2.2 Soit $K \in \mathcal{K}(H)$ avec $\dim(H) = \infty$. Alors on a :

- (a) $0 \in \sigma(K)$,
- (b) $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
- (c) l'une des situations suivantes :
 - ou bien $\sigma(K) = \{0\}$,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est fini,
 - ou bien $\sigma(K) \setminus \{0\}$ est une suite qui tend vers 0.

Théorème 1.2.3 On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T :

$$\forall x \in H, \quad x = x_0 + \sum_{k \geq 1} (x, e_k) e_k, \quad x_0 \in \mathbf{N}(A), \quad Tx = \sum_{k \geq 1} (x, e_k) \lambda_k e_k.$$

1.2.2 Famille spectrale et résolution de l'identité

- Version discrète

Définition 1.2.4 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur non borné. Alors A est dit à **résolvante compacte** si

$$\forall \lambda \in \rho(A), R(\lambda; A) \in \mathcal{K}(H).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.2.5 Un opérateur $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est à résolvante compacte si et seulement si il existe $\mu \in \rho(A)$ tel que $R(\mu; A) \in \mathcal{K}(H)$.

Théorème 1.2.6 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint. Alors

- (1) $\sigma_r(A) = \emptyset$,
- (2) $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$,
- (3) $A \geq \theta \iff \sigma(A) \subset [\theta, \infty[$.

Théorème 1.2.7 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur auto-adjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors A est diagonalisable, i.e., il existe une base hilbertienne dans H , $(e_m)_{m \geq 1} \subset \mathcal{D}(A)$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \longrightarrow +\infty, \quad Ae_m = \lambda_m e_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

Remarque 1.2.8 Si $A : \mathcal{D}(A) \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur auto-adjoint avec $A \geq \theta > 0$ ($\implies 0 \in \rho(A)$), et l'injection $H_1 := (D(A), |\cdot|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, alors A est à résolvante compacte et donc diagonalisable.

• Version continue

Définition 1.2.9 Une famille $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de projections orthogonales dans H est appelée famille spectrale ou encore résolution de l'identité si elle satisfait aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad E_\lambda E_\mu = E_{\inf(\lambda, \mu)}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad E_{-\infty} = 0, \quad E_{+\infty} = I, \\ \text{où } E_{-\infty} h = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda h, \quad E_{+\infty} h = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E_\lambda h, \quad h \in H, \\ (iii) \quad E_{\lambda+0} = E_\lambda \text{ où } E_{\lambda+0} h = \lim_{\varepsilon > 0, \varepsilon \rightarrow 0} E_{\lambda+\varepsilon} h, \quad h \in H. \end{array} \right.$$

Les limites sont prises au sens de la norme de H .

Théorème 1.2.10 Soient H un espace de Hilbert et A un opérateur auto-adjoint dans H . Alors il existe une famille spectrale $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ telle que

$$(Ax, y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda d(E_\lambda x, y), \quad Ax = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda x.$$

On note symboliquement $A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_\lambda$.

Théorème 1.2.11 Soit $\lambda \mapsto f(\lambda)$ une fonction continue à valeurs réelles. Soit $\mathcal{D} \subset H$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ h \in H : \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty \right\}.$$

Alors \mathcal{D} est dense dans H et on définit un opérateur auto-adjoint S dans H par :

$$(Sx, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d(E_\lambda x, y), \quad x \in \mathcal{D}, y \in H,$$

de domaine $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}$.

1.2.2.1 Fonctions d'un opérateur auto-adjoint

Soit A un opérateur auto-adjoint dans l'espace de Hilbert H , $A = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda dE_\lambda$,

$\lambda_0 = \inf \sigma(A) > 0$, sa décomposition spectrale.

Définition 1.2.12 On définit :

- Les puissances de A .

$$A^r = \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^r dE_\lambda, \quad r \in \mathbb{R}; \quad h \in \mathcal{D}(A^r) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} \lambda^{2r} d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

On note ici, que pour tout $r \leq 0$, $A^r \in \mathcal{L}(H)$, et si $r = 0$, $A^0 = I$.

Pour tout $r \geq 0$ et pour tout $h \in \mathcal{D}(A^r)$, on a $(A^r h, h) \geq \lambda_0^r |h|^2$.

Pour tout $r \geq 0$, $\mathcal{D}(A^r)$ muni de la norme $|h|_r^2 = |A^r h|^2$, $h \in \mathcal{D}(A^r)$, est un espace de Hilbert.

Si $0 \leq r_1 \leq r_2$, $\mathcal{D}(A^{r_2}) \hookrightarrow \mathcal{D}(A^{r_1})$ et $\mathcal{D}(A^{r_2})$ est dense dans $\mathcal{D}(A^{r_1})$.

- Si f une fonction continue sur \mathbb{R} , alors :

$$f(A) = \int_{\lambda_0}^{+\infty} f(\lambda) dE_\lambda, \quad h \in \mathcal{D}(f(A)) \iff \int_{\lambda_0}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d|E_\lambda h|^2 < \infty.$$

1.2.2.2 Equations opérationnelles et Alternative de Fredholm

On suppose que H est séparable. Soit $T \in \mathcal{K}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact donné par sa décomposition spectrale :

$$\forall h \in H, \quad h = h_0 + \sum_{k \geq 1} (h, e_k) e_k, \quad h_0 \in \mathbf{N}(T), \quad Th = \sum_{k \geq 1} (h, e_k) \lambda_k e_k.$$

Considérons l'équation

$$(T - \lambda I)f = g, \tag{1.1}$$

où $f = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n$, $g = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n e_n$ sont deux vecteurs de H donnés.

- Si $\lambda \notin \sigma(T)$, la solution de l'équation (1.1) est donnée par :

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda}.$$

- Si $\lambda = \lambda_s \neq 0$, l'équation (1.1) n'a de solution que si $g_s = 0$ ($\iff g \in \ker(T - \lambda_s I)^\perp$) et dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n \neq s}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n - \frac{g_0}{\lambda_s} \right] + G_s,$$

où G_s est un élément arbitraire de $\ker(T - \lambda_s I)$.

- Si $\lambda = 0$, pour que l'équation $Tf = g$ ait une solution il faut et il suffit que

$$f_0 = 0 \iff f \in \mathbf{N}(T)^\perp = \overline{\mathbf{R}(T)}$$

et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g_n|^2}{\lambda_n^2}$$

soit convergente. Dans ce cas les solutions sont données par :

$$f = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{g_n}{\lambda_n - \lambda} \right) e_n \right] + G_0,$$

où G_0 est un élément arbitraire de $\ker(T)$.

1.2.2.3 Décomposition en valeurs singulières

Considérons maintenant un opérateur compact $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, où H_1, H_2 sont deux espaces de Hilbert séparables. L'une des approches les plus pratiques pour étudier le problème inverse $Th_1 = h_2$, consiste à utiliser la décomposition en valeurs singulières (SVD)⁴ de l'opérateur T . Cette décomposition propose des bases pour les espaces de Hilbert H_1 et H_2 permettant d'exprimer et de résoudre simplement le problème.

Définition 1.2.13 (Valeur singulière.)

Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables et $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$. On appelle valeur singulière de l'opérateur T , le nombre réel positif $s = \sqrt{\lambda}$, où λ est une valeur propre de l'opérateur $K = T^*T : H_1 \rightarrow H_1$.

Théorème 1.2.14 (Décomposition en valeurs singulières (SVD)) Soit $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ et Pr_0 la projection orthogonale sur $\mathbf{N}(T)$. Alors il existe une suite de valeurs singulières (s_n) et deux systèmes orthonormés $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H_1, \{\psi_1, \psi_2, \dots\} \subset H_2$ tels que :

4. La notion de valeurs singulières généralise la notion de valeurs propres liée aux opérateurs auto-adjoints.

1. (s_n) est décroissante, $s_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
2. $T\varphi_k = s_k\psi_k, T^*\psi_k = s_k\varphi_k$.
3. $\forall h \in H_1, h = \sum_{k \geq 1} (h, \varphi_k) \varphi_k + Pr_0 h$.
4. $\forall h \in H_1, Th = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \varphi_k) \psi_k$.
5. $\forall \tilde{h} \in H_2, T^*\tilde{h} = \sum_{k \geq 1} s_k (h, \psi_k) \varphi_k$.

Le système $\{(s_k; \varphi_k, \psi_k)\}_{k \geq 1}$ est appelé système singulier de T .

La famille (φ_n) est une base hilbertienne de $\mathbf{N}(T)^\perp$, et la famille (ψ_n) est une base hilbertienne de $\overline{\mathbf{R}(T)}$.

Remarque 1.2.15 Le calcul des valeurs singulières et l'étude de leur vitesse de décroissance peut donc fournir des renseignements sur le caractère mal posé d'un problème inverse donné (cf. [43]).

1.3 Semi-groupes d'opérateurs linéaires

1.3.1 Généralités

Définition 1.3.1 On appelle semi-groupe fortement continu à un paramètre une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs bornés sur H vérifiant les propriétés suivantes :

- (i) $S(0) = I$,
- (ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t \geq 0, s \geq 0$,
- (iii) $\forall u \in H, \lim_{t \searrow 0} \|S(t)u - u\| = 0, \forall u \in H$.

On associe à tout semi-groupe son générateur $-A$ défini par :

$$-Au = \lim_{t \searrow 0} \left\{ \frac{S(t)u - u}{t} \right\} \tag{s_1}$$

pour tout u tel que la limite (s₁) existe dans la topologie de la norme de H , ce qui définit le sous espace $\mathcal{D}(A)$, domaine de l'opérateur A . Les premières propriétés des semi-groupes sont rassemblées dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.2 Soit $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un semigroupe d'opérateurs sur H , et $-A$ son générateur. Alors :

- (a) $t \mapsto S(t)$ est une fonction fortement continue de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{L}(H)$.
- (b) Il existe des constantes $M_A \geq 1$ et $\gamma_A \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|S(t)\| \leq M_A e^{\gamma_A t}. \tag{s_2}$$

- (c) A est un opérateur fermé et son domaine $\mathcal{D}(A)$ est dense dans H .

(d) Pour tout $u \in \mathcal{D}(A)$, $S(t)u$ est dérivable au sens de la norme de H et

$$\frac{d}{dt}(S(t)u) = -AS(t)u = -S(t)Au. \quad (s_3)$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\Re \lambda > \gamma_A$, alors $-\lambda$ est dans l'ensemble résolvant $\rho(A)$, et la résolvante $R(\lambda; A) = (A + \lambda)^{-1}$ de A a l'expression suivante

$$R(\lambda; A) = (A + \lambda)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt. \quad (s_4)$$

L'intégrale (s₄) est définie au sens fort sur tout intervalle borné $[0, T]$, et converge en norme d'opérateur lorsque $T \rightarrow \infty$. De plus par l'inégalité (s₂) on a

$$\|(A + \lambda)^{-1}\| \leq \frac{M_A}{\Re \lambda - \gamma_A}. \quad (s_5)$$

En fonction des valeurs des constantes M_A et γ_A , on distingue plusieurs classes de semi-groupes :

- Si $\gamma_A \leq 0$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe borné.
- Si $\gamma_A \leq 0$ et $M_A = 1$, on dit que $S(t)$ est un semi-groupe contractant.

1.3.2 Caractérisation des générateurs

Le résultat principal est le théorème de HILLE-YOSIDA.

Théorème 1.3.3 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach H est le générateur d'un semi-groupe si et seulement si il existe des constantes M_A et γ_A telles que tout réel $\lambda > \gamma_A$ soit dans l'ensemble résolvant $\rho(-A)$ et que*

$$\|(\lambda + A)^{-m}\| \leq \frac{M_A}{(\lambda - \gamma_A)^m}$$

pour tout $\lambda > \gamma_A$ et tout entier $m \geq 1$. On alors l'estimation

$$\|S(t)\| = \|e^{-tA}\| \leq M_A e^{t\gamma_A}.$$

Corollaire 1.3.4 *Un opérateur $-A$ fermé à domaine dense dans un espace de Banach \mathcal{X} est le générateur d'un semi-groupe contractant si et seulement si $]0, +\infty[\subseteq \rho(-A)$ et pour tout $\lambda > 0$ on a l'inégalité $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}$.*

Définition 1.3.5 *Soit $\psi \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et considérons l'ensemble*

$$\Sigma(\psi) := \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0 \text{ et } |\arg z| < \psi\}.$$

la famille des opérateurs $(T(z))_{z \in \Sigma(\psi)}$ est dite semi-groupe analytique (d'angle ψ) si

1. $T(0) = I$ et $T(z + z') = T(z)T(z')$ pour $z, z' \in \Sigma(\psi)$;
2. L'application $z \rightarrow T(z)$ est analytique sur $\Sigma(\psi)$;
3. $\lim_{z \rightarrow 0} T(z)x = x$ pour tout $x \in E, 0 < \psi' < \psi$ et $z \in \Sigma(\psi')$.

Remarque Si l'ensemble $\{\|T(z)\|, z \in \Sigma(\psi')\}$ est borné pour tout $0 < \psi' < \psi$, alors $T(z)_{z \in \Sigma(\psi')}$ est dit semi-groupe analytique borné.

Définition 1.3.6 Un opérateur $(B, D(B))$ linéaire fermé, à domaine dense dans un espace de Hilbert H ($\overline{D(B)} = E$) est dit sectoriel (d'angle ψ) si

1. Il existe $\psi, 0 < \psi < \frac{\pi}{2}$ tel que $\Sigma_{\psi + \frac{\pi}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda)| < \frac{\pi}{2} + \psi\} \cup \{0\} \subset \rho(B)$.
2. Pour $\theta \in (0, \psi)$, il existe $M > 0$ telle que $\|R(\lambda, B)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$ pour $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\psi + \frac{\pi}{2} - \theta}$ et $\lambda \neq 0$

Théorème 1.3.7 Soit $B : D(B) \subset H \rightarrow H$ un opérateur à domaine dense, où H est un espace de Hilbert complexe. Alors B engendre un semi-groupe analytique dans $\Sigma(\psi)$ si et seulement si $\Sigma(\psi + \frac{\pi}{2}) \subseteq \rho(B)$ et pour tout $\theta \in (0, \psi)$, on a

$$\sup_{\lambda \in \Sigma(\theta + \frac{\pi}{2})} \|\lambda(\lambda I - B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} < \infty.$$

- On suppose que B engendre un semi-groupe analytique dans le secteur $\Sigma(\psi), \psi > 0$. Une application directe de la formule de Cauchy montre qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|BT(t)u\| \leq \frac{M}{t} \text{ pour tout } u \in H \text{ et } t > 0. \quad (1.19)$$

- L'analyticité de semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ dans le secteur $\Sigma(\psi)$ entraîne que pour tout $\theta \in (-\psi, \psi), (T(e^{i\theta t}))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu sur H , où son générateur est $e^{i\theta} B$.

1.4 Problèmes mal posés et problèmes inverses

Problèmes directs. Si on note par \mathbf{P} l'espace des paramètres, \mathbf{E} l'espace des excitations et \mathbf{R} l'espace des états (réponses), alors le problème direct $L : \mathbf{P} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{R}$, consiste à calculer la réponse d à partir de la donnée des sollicitations x et des paramètres p . Les équations de la physique donnent en général la réponse d comme fonction de x et $p : L(x, p) = d$, la notation L symbolise les équations de la physique du problème considéré ; on parle parfois du modèle physique.

Problèmes inverses. D'un point de vue "physique" ou "expérimental", on parle de problème inverse lorsqu'on se trouve dans une situation où l'on souhaite évaluer une certaine grandeur physique p inaccessible à l'expérience à partir de la mesure d'une autre grandeur d directement accessible à l'expérience, connaissant un modèle mathématique du problème direct qui donne explicitement d à partir de p (ce que l'on note symboliquement $d = G(p)$).

Réf 5

► **Problèmes directs et Problèmes inverses en EDP**

- Dans le cas de problèmes directs, étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, on s'intéresse aux solutions $u : \Omega \times [0, \infty[\ni (x, t) \rightarrow u(x, t) \in E$ de

$$\begin{cases} u_t + F\left(t, x, \partial_{x_1}^{\alpha_1} u, \dots, \partial_{x_p}^{\alpha_p} u\right) = f, & \text{dans } \Omega \\ \{B_i\}_{i=1}^q u = g_i, & \text{sur } \partial\Omega \times [0, \infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

- Dans le cas de problèmes inverses ; à partir d'une connaissance partielle de la solution u de l'EDP (mesures internes, mesures frontières), on doit retrouver par exemple :

- $f, g_1, \dots, g_q \rightarrow$ problème d'identification de sources.
- $u_0 \rightarrow$ problème d'identification de données initiales.
- $F \rightarrow$ problème d'identification de coefficients.
- $\Omega \rightarrow$ problème d'identification géométrique.

La difficulté principale des problèmes inverses est leur caractère généralement mal posé⁶

Définition 1.4.1 [62], Soient X, Y deux espaces de Banach, et $A : X \ni D(A) \rightarrow Y$ un opérateur (linéaire ou non-linéaire). Le problème inverse $Ax = y$ est **bien posé** au sens de HADAMARD si

- | | |
|-------------|---|
| Existence : | Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $Ax = y$. |
| Unicité : | Pour tout $y \in Y$, il y a au plus une solution $x \in X$. |
| Stabilité : | La solution x dépend continûment de la donnée y . |

Si au moins une de ces trois conditions n'est pas vérifiée, alors le problème est dit **mal posé**. En pratique, cela veut souvent dire qu'il n'existe pas de solution unique ou que, si elle existe, une légère modification des données conduit à des solutions très différentes.

Remarque 1.4.2 Le choix des espaces de départ et d'arrivée X et Y est bien sûr très important dans cette définition. La stabilité est une condition primordiale. En effet, s'il y a un problème de stabilité, le calcul numérique de la solution peut devenir impossible à cause des erreurs de mesures ou d'arrondis.

Remarque 1.4.3 La définition donnée par Hadamard est très contraignante dans la pratique. Il faut donc relaxer la définition d'un problème bien posé.

5. Marc Bonnet, Problèmes inverses : Cours de DEA Dynamique des Structures et Couplages (2004).

6. Alors que les mêmes causes provoquent les mêmes effets, des effets identiques peuvent avoir de multiples causes : les problèmes inverses sont mal posés.

Définition 1.4.4 (Lavrentiev 1959) (Stabilité conditionnelle) Soit $A : X \supseteq D(A) \longrightarrow Y$ un opérateur fermé, densément défini. On dit que le problème $Ax = y$ est conditionnellement stable (ou correct au sens de TIKHONOV) sur $M \subset \mathcal{D}(A)$ s'il existe une fonction

$$\omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \text{ continue en } 0 \text{ avec } \omega(0) = 0,$$

telle que l'on ait

$$\|x_2 - x_1\| \leq \omega(\|Ax_2 - Ax_1\|), \forall x_2, x_1 \in M.$$

L'ensemble M est appelé ensemble des contraintes (ou ensemble des informations a priori). L'appartenance de u à M signifie une certaine régularité ou une certaine bornitude.

On donne ici quelques exemples de problèmes mal posés.

Exemple 1.4.5 Problème de Cauchy pour l'équation de Laplace. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_y u(x, 0) = \varphi_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.2)$$

où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$. On vérifie aisément que $u_\varepsilon(x, y) = \varepsilon^2 \sinh\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ est une solution du problème (1.2). On remarque que $(\varphi_\varepsilon \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0)$ mais $(u_\varepsilon(x, y) \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0)$ pour tout $x > 0$ fixé. Ce qui prouve que les solutions de (1.2) ne dépendent pas continûment des données initiales, d'où le problème est mal posé.

Exemple 1.4.6 Problème rétrograde pour l'équation de la chaleur. Ce problème consiste à déterminer $u(x, 0) = u_0(x)$ (condition initiale inconnue), sachant que le champ de température $u(x, t)$ vérifie :

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, T), \\ u(x, T) = \psi(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.3)$$

où $\psi \in L_2(0, \pi)$ est une fonction donnée. Par la méthode de Fourier, on peut expliciter la solution du problème (1.3) sous la forme :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)n^2} \psi_n e_n(x),$$

où ψ_n est le coefficient de Fourier d'ordre n de ψ :

$$\psi_n = \langle \psi, e_n \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \psi(x) \sin(nx) dx, \quad e_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx).$$

Soit $\varphi(x) = u_0(x, 0)$ la température initiale. Alors d'après l'égalité de Parseval, on a :

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n^2 T} |\psi_n|^2.$$

On considère maintenant le problème (1.3) avec des données bruitées :

$$\psi_k = \psi + \frac{1}{k} e_k(x).$$

On remarque que $\|\psi_k - \psi\| = \frac{1}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty$ mais

$$\|u(\psi_k; 0) - u(\psi; 0)\| = \frac{1}{k} e^{k^2 T} \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty.$$

On voit très clairement que le problème (1.3) est instable, donc mal posé. C'est pour cela, qu'on dit que les phénomènes de la chaleur sont **irréversibles**.

La solution de l'équation de la chaleur avec la condition initiale $u(x, 0) = \varphi(x)$, telle que $\varphi(x) \in L_2(0, \pi)$ est donnée par la formule :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \varphi_n e_n(x) = \int_0^{\pi} \left\{ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t} \sin(nx) \sin(n\xi) \right\} \varphi(\xi) d\xi.$$

Ainsi, u est solution du problème (1.3) si et seulement si φ satisfait l'équation de Fredholm de première espèce :

$$\mathcal{K} \varphi = \psi, \quad u(x, T) = \int_0^{\pi} \mathcal{K}(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

où $\mathcal{K}(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(n\xi)$.

L'opérateur intégral \mathcal{K} est du type Hilbert-Schmidt (donc compact), d'où \mathcal{K}^{-1} n'est pas borné. Ce qui montre le caractère mal posé du problème (1.3).

Exemple 1.4.7 Equation hyperbolique avec conditions de Dirichlet. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) + Au(t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(0) = \varphi, \quad u(T) = \psi, \end{cases} \quad (1.4)$$

où φ, ψ sont des fonctions données dans H , et $A: \mathcal{D}(A) : H \rightarrow H$ tel que $A = A^*$ et $A \geq \delta > 0$. Si $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots$, ne sont pas des valeurs propres de A , alors l'opérateur $(\sin(T\sqrt{A}))$ est injectif, et la solution formelle du problème (1.4) est donnée par :

$$u(t) = \sin((T-t)\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \varphi + \sin(t\sqrt{A}) \left(\sin(T\sqrt{A}) \right)^{-1} \psi.$$

Inversement, si $\left\{ \lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots \right\} \cap \sigma_p(A) \neq \emptyset$, alors la solution du problème (1.4) n'est pas unique. Le problème (1.4) est mal posé au sens de HADAMARD dans les deux cas : les valeurs $\lambda_k = \frac{(k\pi)^2}{T^2}, k = 1, 2, \dots$, peuvent être proches des valeurs propres de A :

$$[\delta, +\infty[\ni \lambda \mapsto \frac{1}{\sin(T\sqrt{\lambda})} \text{ n'est pas bornée au voisinage des } \lambda_k.$$

► On remarque d'après les exemples donnés, qu'il y a deux questions sérieuses liées à cette catégorie de problèmes :

1. **La non unicité.** Pour cette question, il nous faut des informations supplémentaires sur la solution et une bonne connaissance de la nature physique du problème, pour récupérer l'unicité (conditions a priori).
2. **L'instabilité.** Ce caractère est le plus problématique, surtout dans l'implémentation numérique.

Cela veut dire qu'il est impossible de donner un schéma numérique convergent et stable quelque soit la performance de la méthode proposée. Pour traiter ce caractère d'instabilité, on approxime le problème original par un problème proche (dans un certain sens) qui est stable. Les méthodes de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon sa complexité et son degré de position incorrecte (voir [43])

1.4.1 Outils d'analyse des problèmes mal posés (cas linéaire)

Dans l'étude des équations de la forme :

$$B : D(B) \subseteq H_1 \longrightarrow H_2, u \longmapsto Bu = v,$$

la fermeture de $\mathbf{R}(B)$ est une propriété cruciale, pour que l'inverse de B soit borné. Le Théorème de Banach nous fournit une caractérisation topologique de cette propriété :

Théorème 1.4.8 (Théorème de Banach sur l'inversion bornée) *On suppose que B est injectif. Alors $B^{-1} : \mathbf{R}(B) \longrightarrow H_1$ est borné si et seulement si $\mathbf{R}(B)$ est fermée.*

Théorème 1.4.9 (Théorème de PICARD) *(voir [82]) Soit $K \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$ un opérateur compact, et $\{(\sigma_n, \varphi_n, \psi_n), n \in \mathbb{N}\}$ son système singulier. Alors le problème :*

$$Kf = g$$

est résoluble si et seulement si

$$g \in \mathbf{N}(K^*)^\perp = \overline{\mathbf{R}(K)} \text{ et } \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n^2} |\langle g, \psi_n \rangle|^2 < +\infty.$$

Dans ce cas, la solution est donnée par la formule :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sigma_n} \langle g, \psi_n \rangle \varphi_n + f_0, f_0 \in \mathbf{N}(K).$$

- Afin de proposer une stratégie de régularisation efficace, on doit mesurer tout d'abord la complexité du problème posé. En général, on ne dispose pas d'un cadre théorique permettant de donner des réponses à ce type de questions, mais dans des cas particuliers, on a des critères qui caractérisent que tels problèmes sont fortement ou faiblement mal posés.

- Pour les opérateurs compacts, on utilise le critère suivant :
Soient H_1, H_2 deux espaces de Hilbert séparables, $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, et soit le problème inverse :

$$T : H_1 \longrightarrow H_2, u \longrightarrow Tu = v. \quad (1.5)$$

Définition 1.4.10 (cf. [43]) *On dit que le problème (1.5) est faiblement mal posé (resp. fortement mal posé), si les valeurs singulières s_n de $K = T^*T$ sont équivalentes à $\frac{C}{n^p}$ (resp. Ce^{-n^p}), où C et p sont des constantes positives.*

1.5 Méthodes de régularisation

La régularisation des problèmes mal posés, due initialement à TIKHONOV [126], cherche à redéfinir les notions d'inversion et de solution (quasi-solution, solution approchée, ...), de façon que la « solution régularisée » obtenue par « inversion régularisée » dépend continûment des données et soit proche de la solution exacte (supposant que celle-ci existe pour des données proches des valeurs effectivement obtenues par la mesure). En d'autres termes, on remplace le problème original mal posé par un autre « proche dans un certain sens » du premier et qui est bien posé.

Considérons le problème inverse $Kh_1 = h_2$ où $K : H_1 \longrightarrow H_2$ est un opérateur compact injectif⁷. On suppose que $h_2 \in \mathbf{R}(K)$, i.e., le problème inverse possède une solution unique⁸.

Définition 1.5.1 *Une famille d'opérateurs linéaires bornés $R_\alpha : H_2 \longrightarrow H_1, (\alpha > 0)$ est dite "famille régularisante" pour l'opérateur K si*

$$\forall h_1 \in H_1, \lim_{\alpha \rightarrow 0} (R_\alpha K) h_1 = h_1, \text{ i.e., } R_\alpha K \longrightarrow I \text{ simplement.}$$

Remarque 1.5.2 *Si R_α est une famille régularisante pour l'opérateur $K : H_1 \longrightarrow H_2$, où H_1 est de dimension infinie, alors les opérateurs R_α ne sont pas uniformément bornés, i.e., il existe une suite $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}_+$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_{\alpha_n}\| = +\infty$.*

La donnée initiale $h_2 \in H_2$ n'est jamais connue exactement : il y a toujours un bruit qui vient la perturber. Notons h_2^η la donnée perturbée où le nombre $\eta > 0$ est le niveau du bruit, i.e., $|h_2 - h_2^\eta| \leq \eta$.
Notons $h_1^{\alpha, \eta} = R_\alpha h_2^\eta$ l'approximation de la solution du problème inverse $Kh_1 = h_2$ obtenue avec l'opérateur de régularisation et la donnée perturbée. En utilisant l'inégalité triangulaire sur $|h_1 - h_1^{\alpha, \eta}|$, on obtient

7. Le fait de choisir K injectif n'est pas très contraignant car on peut toujours restreindre l'espace H_1 au complément orthogonal de $\mathbf{N}(K)$, où \mathbf{N} désigne le noyau.

8. Il faut noter que notre problème inverse $Kh_1 = h_2$ est toujours mal posé à cause de la non continuité de K^{-1} .

$$|h_1 - h_1^{\alpha, \eta}| = |(h_1 - R_\alpha h_2) + (R_\alpha h_2 - h_1^{\alpha, \eta})| \leq \eta \|R_\alpha\| + |(h_1 - R_\alpha h_2)|. \quad (1.6)$$

Le premier terme de droite de l'équation (1.6) représente la majoration de l'erreur due au niveau de bruit. Par la Remarque 1.5.2, nous avons vu que $\|R_{\alpha_n}\| \rightarrow +\infty$ quand $\alpha \rightarrow 0$. Donc il ne faut pas choisir α trop petit sinon l'erreur peut devenir très grande. Par contre le second terme de droite de (1.6) tend vers 0 quand α tend vers 0 par définition de R_α . Nous allons faire tendre le niveau de bruit η vers 0 et nous allons choisir une stratégie de régularisation de manière à ne pas commettre une trop grande erreur sur la vraie solution h_1 .

Définition 1.5.3 Une stratégie de régularisation $\eta \rightarrow \alpha(\eta)$ est admissible si pour tout $h_1 \in H_1$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \alpha(\eta) = 0 \text{ et } \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\sup_{h_2^\eta \in H_2} \left\{ |R_{\alpha(\eta)} h_2^\eta - h_1| \text{ tel que } |K h_1 - h_2^\eta| \leq \eta \right\} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Les stratégies de régularisation sont variées. Chaque problème nécessite un traitement spécifique selon son degré de complexité. (Voir. [43, 52, 102]). Parmi les méthodes les plus connues en problèmes inverses et en calcul matriciel mal conditionné, on a la méthode de Tikhonov et la méthode de la troncature spectrale.

1.5.1 La méthode de Tikhonov

- Le principe de la régularisation de Tikhonov pour stabiliser le problème inverse mal posé $Kf = g$ est de choisir comme solution l'élément f_α qui minimise la fonctionnelle

$$|Kf - g|^2 + \alpha |f|^2, \alpha > 0. \quad (1.8)$$

L'existence et l'unicité du minimum sont assurées par la coercivité et la stricte convexité de $f \mapsto |f|^2$. Le paramètre α est appelé paramètre de régularisation et le terme $|f|^2$ est appelé terme de correction. Le choix du paramètre α est basé sur un critère d'équilibre entre l'erreur due au terme de correction et le gain de la stabilité.

On a le Théorème suivant :

Théorème 1.5.4 [76] Soit $K \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Alors la fonctionnelle de Tikhonov admet un unique minimum f_α . L'élément f_α est la solution de l'équation normale

$$S_\alpha f_\alpha = (\alpha I + K^* K) f_\alpha = K^* g. \quad (1.9)$$

La famille d'opérateurs $R_\alpha = (\alpha I + K^* K)^{-1} K^* : H_2 \rightarrow H_1$,⁹ est appelée famille régularisante de Tikhonov. On a $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$ et tout choix de $\alpha(\eta) \rightarrow 0$ avec $\eta^2 \alpha(\eta) \rightarrow 0$ est admissible. Pour les résultats de la vitesse de convergence, on peut consulter les références [43, 102].

9. $(S_\alpha = S_\alpha^*, \langle S_\alpha h, h \rangle = |Sh|^2 + \alpha |h|^2 \geq \alpha |h|^2, \forall h \in H_1) \implies (\sigma(S_\alpha) \subset [\alpha, \|S_\alpha\|] \implies 0 \in \rho(S_\alpha))$, i.e., S_α^{-1} existe et $S_\alpha^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$.

- Le paramètre de régularisation $\alpha > 0$ est choisi via le principe d'écart (en anglais : discrepancy principle) de MOROZOV [100]. Ce principe consiste à fixer le paramètre tel que la solution correspondante ait une erreur égale au niveau de bruit (cf. [101], [130]).

Le choix optimal est extrêmement difficile et les critères qui existent sont d'application délicate, et nécessitent des méthodes itératives pour être mis en oeuvre.^{10, 11}

- Dans la pratique nous supposons qu'un paramètre α est valable si l'erreur appartient à un petit intervalle contenant la valeur du niveau de bruit $\eta > 0$ (cf. [102], page 172).

1.5.2 Convexité logarithmique

Pour finir cette revue de méthodes d'analyse des problèmes mal posés en EDP, on cite ici la méthode de convexité logarithmique, qui trouve sa place dans la stabilisation des problèmes qui sont conditionnellement stables.

Définition 1.5.5 Soit f une fonction positive. On dit que f est log-convexe si la fonction $\hat{f}(t) = \log(f(t))$ est convexe.

Si la fonction f est strictement positive ($f > 0$) et log-convexe sur l'intervalle $[a, b]$, alors on a l'inégalité suivante :

$$\log(f(t)) \leq (1 - \theta(t))\log(f(a)) + \theta(t)\log(f(b)), \quad t \in [a, b], \quad (1.10)$$

où : $\theta(t) = \frac{b-t}{b-a}$. Cette dernière inégalité nous donne l'inégalité d'interpolation :

$$f(t) \leq f(a)^{1-\theta(t)} f(b)^{\theta(t)}, \quad t \in [a, b]. \quad (1.11)$$

- Une fonction $f \in C^2([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ est log-convexe si et seulement si $ff'' - f^2 \geq 0$. Cette propriété découle du fait qu'une fonction est convexe si sa dérivée seconde est positive :

$$\hat{f}''(t) = \log(f(t))'' \geq 0 \iff \frac{ff'' - f^2}{f^2} \geq 0 \iff ff'' - f^2 \geq 0 \text{ et } f^2 > 0$$

Théorème 1.5.6 Soit f une fonction continue, positive et log-convexe sur un intervalle I . Alors $f(t) > 0, \forall t \in I$ ou $f(t) = 0, \forall t \in I$

Théorème 1.5.7 Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$, un opérateur symétrique, et $u(t)$ une solution du problème $u'(t) = Au(t), 0 \leq t \leq T$. Alors $\log(|u(t)|)$ est convexe sur $[0, T]$. En conséquence :

$$|u(t)| \leq |u(0)|^{1-t/T} |u(T)|^{t/T}. \quad (1.12)$$

10. **Méthodes a priori** : utilisation d'informations sur le niveau d'erreur et sur l'opérateur K .

11. **Méthodes a posteriori** : utilisent aussi les données g_η . $\alpha_{opt} := \max\{\alpha : |Kf_\alpha - g_\eta| \leq \eta\}$, où $f_\alpha = \inf_f \{|Kf - g_\eta|^2 + \alpha |f_\alpha|^2\}$.

Cette inégalité montre qu'on peut récupérer la dépendance continue si on impose une contrainte de bornitude sur la solution.

Pour plus de détails et d'autres versions généralisées (cf. Ames & Straughan[2], p.17-20, Isakov [70], p.43-46 et Fattorini [47], p.375)

Problème inverse de type elliptique : identification de sources

2.1 Position du problème

Soient $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \|\cdot\|)$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $A: D(A) \subset H \rightarrow H$ un opérateur non borné à domaine dense dans H .

Considérons le problème aux limites avec les conditions de Dirichlet :

$$\begin{cases} u_{yy}(y) - Au(y) = f, & 0 < y < Y, \\ u(0) = u(Y) = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où la source $f \in H$ est une fonction donnée indépendante de y .

On fait les hypothèses suivantes :

H1 L'opérateur A est auto-adjoint, i.e., $A = A^*$.

H2 L'opérateur A est strictement positif, i.e., $A \geq \gamma I$ où $0 < \gamma = \inf \sigma(A)$.

H3 L'injection $H^1 := (D(A), \|\cdot\|_G) \hookrightarrow H$ est compacte, où $\|\cdot\|_G$ est la norme du graphe.

• Sous les hypothèses **H1**, **H2** et **H3** l'opérateur A est diagonalisable.^{1 2} Soit alors $(\lambda_k, \xi_k)_{k \geq 1}$ les couples propres (valeurs et vecteurs propres) de l'opérateur A :

$$A\xi_k = \lambda_k \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \langle \xi_m, \xi_n \rangle = \delta_{mn},$$

$$0 < \gamma = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{k=1}^{\infty} h_k \xi_k, \quad h_k = \langle h, \xi_k \rangle \text{ le coefficient de Fourier d'ordre } k \text{ de } h.$$

Théorème 2.1.1 ([104]) *Pour tout $f \in H$, le problème (2.1) admet une solution unique $u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; D(A^{1/2})) \cap C^2([0, T]; H)$ donnée par l'expression*

$$u(y) = R(y)f = \int_0^Y G(y, s) f(s) ds = \left(\int_0^Y G(y, s) ds \right) f \quad (2.2)$$

1. $H2 \implies 0 \in \rho(A)$, $H3 \implies A^{-1}$ est compact.

2. $(H1, H2, H3) \implies A^{-1}$ est auto-adjoint compact, et donc diagonalisable d'après le Théorème de la décomposition spectrale des opérateurs auto-adjoints compacts. En conséquence A est diagonalisable.

où : $G(y, s) = \frac{1}{2}(I - V(2Y))^{-1} A^{-\frac{1}{2}} [V(2Y - y - s) - V(2Y - |y - s|) - V(|y - s|) + V(y + s)]$
 avec : $V(y)$ est le semi-groupe analytique fortement continu engendré par $(-A^{\frac{1}{2}})$,
 i.e,

$$V(y) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-y\sqrt{\lambda_k}} E_k, \quad E_k h = \langle h, \xi_k \rangle \xi_k$$

Notre problème inverse se formule comme suit :

Soit $u(\tau; f) = g$ une mesure interne effectuée sur la solution $u(y; f)$ au point $y = \tau$, $\tau = \frac{Y}{2}$. Notre objectif est de déterminer la source f à partir de la mesure g .

$$\begin{cases} u_{yy}(y) - Au(y) = f, & 0 < y < Y, \\ u(0) = u(Y) = 0, \\ u(\tau) = g. \end{cases} \quad (2.3)$$

On peut schématiser notre problème inverse comme suit :

$$\varphi \longrightarrow u(y) = R(y)f \longrightarrow \Phi(u) = u(\tau) = g, \quad (2.4)$$

on obtient donc une équation de Fredholm de première espèce

$$Kf = g. \quad (2.5)$$

où : $K = R(\tau)$.

2.2 Résultats préparatoires

Dans cette section nous présentons les notations et le cadre fonctionnelle qui seront utilisés dans ce travail et quelques notions fondamentales nécessaires à notre analyse.

2.2.1 Opérateurs quasi-contractants

Définition 2.2.1 Un opérateur linéaire $M \in \mathcal{L}(H)$ est dit quasi-contractant si :

$$\|M\| \leq 1$$

Théorème 2.2.2 Soit $M \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif avec $\|M\| \leq 1$. Posons $V_0 = N(M)$ et $V_1 = N(I - M)$, alors on a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} M^n = \Pi_{V_1}$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I - M^n) = \Pi_{V_0}$

où la notation Π_W désigne la projection orthogonale sur le sous espace fermé W .

Considérons l'équation opérationnelle

$$S\varphi = (I - M)\varphi = \psi \quad (2.6)$$

où M est un opérateur quasi-contractant.

Théorème 2.2.3 *Soit M un opérateur linéaire auto-adjoint, positif et quasi-contractant sur H . Soit $\hat{\psi} \in H$ tel que l'équation (2.6) a une solution $\hat{\varphi}$. Si 1 n'est pas une valeur propre de M , i.e : $(I - M)$ est injectif ($V_1 = \{0\}$), alors les approximations successives*

$$\varphi_{n+1} = M\varphi_n + \hat{\psi}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

convergent vers $\hat{\varphi}$ pour toute donnée initiale $\varphi_0 \in H$.

Preuve.

D'après les hypothèses du théorème(2.2.2), nous avons :

$$\forall \varphi_0 \in H, M^n \varphi_0 \rightarrow \Pi_{V_1} \varphi_0 = \Pi_{\{0\}} \varphi_0 = 0. \quad (2.7)$$

Par induction par rapport à n , il est facile de voir que φ_n a la forme explicite

$$\begin{aligned} \varphi_n &= M^n \varphi_0 + \sum_{j=0}^{n-1} M^j \hat{\psi} \\ \varphi_n &= M^n \varphi_0 + (I - M^n)(I - M)^{-1} \hat{\psi} \\ \varphi_n &= M^n \varphi_0 + (I - M^n) \hat{\varphi} \end{aligned}$$

et (2.6) nous permet de conclure que

$$\varphi_n - \hat{\varphi} = M^n(\varphi_0 - \hat{\varphi}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Remarque 2.2.4 *Dans de nombreuses situations, certains problèmes inverses peuvent être formulés par des équations de Fredholm de première espèce de la forme $B\varphi = \psi$, où : B est un opérateur compact, positif et auto-adjoint. Cette équation peut être réécrite de la manière suivante :*

$$\varphi = (I - \omega B)\varphi + \omega\psi = L\varphi + \omega\psi.$$

où $L = (I - \omega B)$, et ω est un paramètre positif satisfaisant $\omega < \frac{1}{\|B\|}$. Il est facile de voir que l'opérateur L est quasi-contractant et 1 n'est pas une valeur propre de L . Il résulte du théorème (2.2.3) que la suite $\{\varphi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ converge et $(I - \omega B)^n \zeta \rightarrow 0$, pour tout $\zeta \in H$ et $n \rightarrow +\infty$.

• L'opérateur K introduit dans (2.5) est l'outil principal dans l'étude de notre problème.

Plus précisément, on s'intéresse aux propriétés suivantes :

- L'injectivité de l'opérateur K (identifiabilité).
- L'existence et la continuité de l'inverse de l'opérateur K (classes admissibles et stabilité).

2.2.2 Propriétés de l'opérateur K

Définition 2.2.5 On définit l'opérateur $K = R(\tau)$ comme suit

$$K = R(\tau) = -(e^{-\tau\sqrt{A}} - 1)^2(1 + e^{-Y\sqrt{A}})^{-1} A^{-1}$$

Preuve.

$$G(y, s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\exp[-(2Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \exp[-(2Y-|y-s|)\sqrt{\lambda_k}] - \exp[-(|y-s|)\sqrt{\lambda_k}] + \exp[-(y+s)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k}(1 - \exp(-2Y\sqrt{\lambda_k}))} \right) E_k$$

où : $E_k h = \langle h, \xi_k \rangle > \xi_k$.

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\exp(Y\sqrt{\lambda_k})}{\exp(Y\sqrt{\lambda_k})} \times \frac{\exp[-(2Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \exp[-(2Y-|y-s|)\sqrt{\lambda_k}] - \exp[-(|y-s|)\sqrt{\lambda_k}] + \exp[-(y+s)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k}(1 - \exp(-2Y\sqrt{\lambda_k}))} \right) E_k.$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\exp[-(Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \exp[-(Y-|y-s|)\sqrt{\lambda_k}] - \exp[-(|y-s|)\sqrt{\lambda_k}] + \exp[(Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k}(\exp(Y\sqrt{\lambda_k}) - \exp(-Y\sqrt{\lambda_k}))} \right) E_k.$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cosh[(Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \cosh[(Y-|y-s|)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k} \sinh(Y\sqrt{\lambda_k})} \right) E_k.$$

$$\Rightarrow R(y) = \int_0^Y \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cosh[(Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \cosh[(Y-|y-s|)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k} \sinh(Y\sqrt{\lambda_k})} \right) E_k ds.$$

$$= \int_0^Y \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cosh[(Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \cosh[(Y-y+s)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k} \sinh(Y\sqrt{\lambda_k})} \right) E_k ds + \int_y^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\cosh[(Y-y-s)\sqrt{\lambda_k}] - \cosh[(Y-s+y)\sqrt{\lambda_k}]}{2\sqrt{\lambda_k} \sinh(Y\sqrt{\lambda_k})} \right) E_k ds.$$

$$= \int_0^Y \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\sinh[(Y-y)\sqrt{\lambda_k}] \times \sinh[(-s)\sqrt{\lambda_k}]}{\sqrt{\lambda_k} \sinh(Y\sqrt{\lambda_k})} \right) E_k ds + \int_y^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\sinh[(Y-s)\sqrt{\lambda_k}] \times \sinh[(-y)\sqrt{\lambda_k}]}{\sqrt{\lambda_k} \sinh(Y\sqrt{\lambda_k})} \right) E_k ds.$$

$$= \sinh[(Y-y)A^{\frac{1}{2}}] A^{-\frac{1}{2}} \sinh^{-1}(YA^{\frac{1}{2}}) \int_0^Y \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sinh[-s\sqrt{\lambda_k}] \right) E_k ds$$

$$+ \sinh[-yA^{\frac{1}{2}}] A^{-\frac{1}{2}} \sinh^{-1}(YA^{\frac{1}{2}}) \int_y^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sinh[(Y-s)\sqrt{\lambda_k}] \right) E_k ds.$$

$$= \sinh[(Y-y)A^{\frac{1}{2}}] A^{-1} \sinh^{-1}(YA^{\frac{1}{2}}) \times [1 - \cosh(yA^{\frac{1}{2}})] + \sinh[(y)A^{\frac{1}{2}}] A^{-1} \sinh^{-1}(YA^{\frac{1}{2}}) \times [1 - \cosh((Y-y)A^{\frac{1}{2}})].$$

Pour $\tau = \frac{Y}{2}$ on obtient :

$$\begin{aligned} K = R(\tau) &= 2 \sinh(\tau\sqrt{A})(A \times \sinh(Y\sqrt{A}))^{-1} \times [1 - \cosh(\tau\sqrt{A})] \\ &= (2 \sinh(\tau\sqrt{A}) - \sinh(Y\sqrt{A}))(A \times \sinh(Y\sqrt{A}))^{-1} \\ &= 2 \sinh(\tau\sqrt{A})(A \times \sinh(Y\sqrt{A}))^{-1} - A^{-1} \\ &= A^{-1} \left[2(e^{\tau\sqrt{A}} - e^{-\tau\sqrt{A}})(e^{Y\sqrt{A}} - e^{-Y\sqrt{A}})^{-1} - 1 \right] \\ &= A^{-1} \left[2(e^{\tau\sqrt{A}} - e^{-\tau\sqrt{A}})[(e^{\tau\sqrt{A}} - e^{-\tau\sqrt{A}})(e^{\tau\sqrt{A}} + e^{-\tau\sqrt{A}})^{-1} - 1] \right] \\ &= A^{-1} \left[2(e^{\tau\sqrt{A}} + e^{-\tau\sqrt{A}})^{-1} - 1 \right] \\ &= A^{-1} \left[2e^{-\tau\sqrt{A}}(1 + e^{-Y\sqrt{A}})^{-1} - 1 \right] \\ &= -A^{-1}(1 + e^{-Y\sqrt{A}} - 2e^{-\tau\sqrt{A}})(1 + e^{-Y\sqrt{A}})^{-1} \\ &= -A^{-1}(e^{-\tau\sqrt{A}} - 1)^2(1 + e^{-Y\sqrt{A}})^{-1} \end{aligned}$$

Proposition 2.2.6 $\|K\| = \sup_{y \in [0, Y]} \|R(y)\|$

Preuve.

On a $R(0) = R(Y) = 0$, alors : $\exists y_0 \in [0, Y]$ tel que : $R'(y_0) = 0$ et $|R(y_0)| = \sup_{y \in [0, Y]} R(y)$

$$\begin{aligned} R'(y) &= \frac{-\cosh[(Y-y)\sqrt{\lambda}]}{\lambda \times \sinh(Y\sqrt{\lambda})} \times [1 - \cosh(y\sqrt{\lambda})] - \frac{\sinh[(Y-y)\sqrt{\lambda}]}{\lambda \times \sinh(Y\sqrt{\lambda})} \times \sinh(y\sqrt{\lambda}) \\ &\quad + \frac{\cosh[y\sqrt{\lambda}]}{\lambda \times \sinh(Y\sqrt{\lambda})} \times [1 - \cosh((Y-y)\sqrt{\lambda})] - \frac{\sinh[y\sqrt{\lambda}]}{\lambda \times \sinh(Y\sqrt{\lambda})} \times \sinh((Y-y)\sqrt{\lambda}). \\ R'(y) &= (\cosh(y\sqrt{\lambda}) - \cosh[(Y-y)\sqrt{\lambda}])(\lambda \sinh(Y\sqrt{\lambda}))^{-1} \\ R'(y_0) &= 0 \implies y_0 = \frac{Y}{2} = \tau. \\ \implies \|K\| &= \sup_{y \in [0, Y]} \|R(y)\|. \end{aligned}$$

Il est clair que l'opérateur K est auto-adjoint, compact et injectif, et donc d'après le théorème de Picard, la solution recherchée f sera donnée par la formule

$$f = K^{-1}g = -\left(A(1 + e^{-Y\sqrt{A}})(e^{-\tau\sqrt{A}} - 1)^{-2}\right)g = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k(1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})(e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}} - 1)^{-2}\right) \langle g, \xi_k \rangle \xi_k, \quad (2.8)$$

En d'autres termes, la solution f du problème inverse est obtenue à partir de la donnée g via l'opérateur non borné $L = K^{-1}$ défini sur les fonctions g du sous espace

$$D(L) = \left\{ g \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k(1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})}{(e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}} - 1)^2} \right)^2 |\langle g, \xi_k \rangle|^2 < +\infty \right\}$$

On note ici que notre problème inverse est instable, ceci découle du comportement des hautes fréquences $\omega_k = \left(\frac{\lambda_k(1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})}{(e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}} - 1)^2} \right) \approx \lambda_k \longrightarrow \infty$ lorsque $k \longrightarrow \infty$.

2.3 Régularisation

Dans cette section on applique la méthode de *troncature spectrale* et la méthode itérative de *Kozlov – Maz'ya* pour obtenir une solution approchée stable de notre problème mal posé.

2.3.1 Régularisation par troncature spectrale

La manière standard pour stabiliser un problème inverse est d'éliminer les hautes fréquences et de considérer la solution tronquée comme une approximation de la solution instable.

Puisque les données g qu'on dispose viennent de l'expérimental et ne sont pas connues de manière exacte, on suppose maintenant que la donnée $u(\tau) = g$ est entachée de bruit

(inexacte), i.e., on dispose d'une approximation g_δ de g tel que : $\|g_\delta - g\| \leq \delta$, où δ désigne le niveau de bruit.

Définition 2.3.1 Pour $N > 0$, on définit la solution régularisée du problème (2.3) pour des données exactes (resp. inexactes) comme suit :

$$f_N = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k (1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})}{(e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}} - 1)^2} \right) g_k \xi_k, \text{ où : } g_k = \langle g, \xi_k \rangle \quad (2.9)$$

$$f_N^\delta = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{\lambda_k (1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})}{(e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}} - 1)^2} \right) g_k^\delta \xi_k, \text{ où : } g_k^\delta = \langle g^\delta, \xi_k \rangle \quad (2.10)$$

Le principe de la méthode de *troncature spectrale* est d'éliminer les hautes fréquences responsables de l'instabilité.

Remarque 2.3.2 Si le paramètre N est suffisamment grand, f_N est proche de la solution exacte f . D'autre part, si le paramètre N est fixé, f_N est bornée.

Le nombre entier positif N joue le rôle de paramètre de régularisation.

Pour obtenir les estimations d'erreurs, on suppose que la solution recherchée satisfait la condition de régularité supplémentaire suivante :

$$\|A^r f\|^2 \leq E^2 < +\infty \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^{2r} \left(\frac{\lambda_k (1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})}{(e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}} - 1)^2} \right)^2 |g_k|^2 \leq E^2$$

où : E est une constante donnée.

Théorème 2.3.3 Soit f_N^δ la solution régularisée donnée par (2.10), et f la solution exacte donnée par (2.8). Si $\|A^r f\| \leq E, r > 0$ et si on choisit N de façon que : $\lambda_N \approx \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+r}}$, alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|f - f_N^\delta\| \leq (1 + C) E^{\frac{1}{1+r}} \delta^{\frac{r}{1+r}}$$

$$\text{où } C = \frac{1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_1}}}{(1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}})^2}$$

Preuve. Notons

$$\omega_k = \lambda_k \frac{(1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_k}})}{(1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_k}})^2} \leq \lambda_k \frac{(1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_1}})}{(1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}})^2} = C \lambda_k.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$\|f - f_N^\delta\| = \|f - f_N + f_N - f_N^\delta\| \leq \|f - f_N\| + \|f_N - f_N^\delta\| = \Delta_1 + \Delta_2. \quad (2.11)$$

$$\Delta_1^2 = \|f - f_N\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_k \xi_k - \sum_{k=1}^N f_k \xi_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k|^2. \quad (2.12)$$

$$\Delta_2^2 = \|f_N - f_N^\delta\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^N \omega_k g_k \xi_k - \sum_{k=1}^N \omega_k g_k^\delta \xi_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2. \quad (2.13)$$

$$\Delta_1^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_k^{-2r} \lambda_k^{2r} |f_k|^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2r} \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_k^{2r} |f_k|^2 \leq \lambda_{N+1}^{-2r} E^2 \leq \lambda_N^{-2r} E^2. \quad (2.14)$$

$$\Delta_2^2 = \sum_{k=1}^N \omega_k^2 |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_N^2 C^2 \sum_{k=1}^N |g_k - g_k^\delta|^2 \leq \lambda_N^2 C^2 \delta^2. \quad (2.15)$$

Ce qui implique que

$$\Delta_1 + \Delta_2 \leq \lambda_N^{-r} E + \lambda_N C \delta \approx \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+r}} E + C \delta \left(\frac{E}{\delta}\right)^{\frac{1}{1+r}} = (1 + C) E^{\frac{1}{1+r}} \delta^{\frac{r}{1+r}}$$

2.3.2 Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya

Dans cette section, on donne une approximation stable de la solution de notre problème "mal posé" en utilisant une méthode itérative de *Kozlov – Maz'ya*.

2.3.2.1 Description de la méthode

Cette méthode est proposée par *V.A. Kozlov* et *V.G. Maz'ya*, dont l'idée principale consiste à résoudre une suite de problèmes bien posés, où l'équation originale est préservée.

L'algorithme itératif pour résoudre le problème inverse (2.3) commence par un choix arbitraire de $f_0 \in H$. La première approximation u^0 est solution du problème direct suivant :

$$\begin{cases} u_{yy}^0(y) - Au^0(y) = f_0, & 0 < y < Y, \\ u^0(0) = u^0(Y) = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

Une fois la paire (u^k, f_k) construite, on définit f_{k+1} par

$$(P_{k+1}): \quad f_{k+1} = f_k + \omega(u^k(\tau) - g). \quad (2.17)$$

où ω vérifie la condition

$$0 < \omega < \frac{1}{\|K\|}, \quad \|K\| = \sup_n \frac{(1 - e^{-\tau\sqrt{\lambda_n}})^2}{\lambda_n(1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_n}})} < \frac{1}{\lambda_1} = C_0$$

Finalement, u^{k+1} s'obtient en résolvant le problème

$$\begin{cases} u_{yy}^{k+1}(y) - Au^{k+1}(y) = f_{k+1}, & 0 < y < Y, \\ u^{k+1}(0) = u^{k+1}(Y) = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

On pose $J = (I + \omega K)$, nous répétons l'itération pour obtenir

$$f_k = J^k f_0 - \omega \sum_{i=0}^{k-1} J^{k-1-i} g \quad (2.19)$$

$$f_k - f = J^k (f_0 - f) \quad (2.20)$$

Donc

$$u^k(y) - u(y) = R(y) J^k (f_0 - f) \quad (2.21)$$

Proposition 2.3.4 *L'opérateur $J = (I + \omega K)$ est auto-adjoint et quasi-contractant sur H . En outre, 1 n'est pas une valeur propre de J .*

Preuve. On a

$$J^* = (I + \omega K)^* = (I + \omega K^*) = (I + \omega K) = J.$$

Montrons maintenant que J est quasi-contractant.

$J = (I + \omega K)$ avec $0 < \omega < \frac{1}{\|K\|}$.

donc $\sigma(J) \subset]0, 1[$.

alors $\|J\| < 1$, et 1 n'est pas une valeur propre de J .

Théorème 2.3.5 *Si ω satisfait la condition $0 < \omega < \frac{1}{\|K\|}$, f_0 étant un élément arbitraire pour la procédure itérative (2.16).*

Soit u^k la $k^{\text{ème}}$ solution approximative de la solution du problème original, alors on a

$$\sup_{y \in [0, Y]} \|u(y) - u^k(y)\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.22)$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u^k(\tau)\| &= \|K J^k (f - f_0)\| \\ &\leq \|K\| \|J^k (f - f_0)\|. \end{aligned}$$

Comme J est quasi-contractant, on a :

$$\|J^k (f - f_0)\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } : k \rightarrow +\infty.$$

D'où :

$$\|u(\tau) - u^k(\tau)\| \leq \|K\|^2 \|J^k (f - f_0)\| \rightarrow 0, \text{ lorsque } : k \rightarrow +\infty \quad (2.23)$$

Montrons que :

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 \leq \|u(\tau) - u^k(\tau)\|^2$$

On a :

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 = \|R(y) J^k (f - f_0)\|^2$$

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \{R^2(y, \lambda_n) J^2(\lambda_n)\} |E_n(f - f_0)|^2$$

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sup_{y \in [0, Y]} R^2(y, \lambda_n) J^2(\lambda_n) \right\} |E_n(f - f_0)|^2$$

D'après la proposition (2.2.6), on a

$$K(\lambda_n)^2 = \sup_{y \in [0, Y]} R(y, \lambda_n)^2$$

ce qui implique que

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \{K^2 J^2(\lambda_n)\} |E_n(f - f_0)|^2 = \|u(\tau) - u^k(\tau)\|^2$$

D'où la convergence.

Théorème 2.3.6 Si ω satisfait la condition $0 < \omega < \frac{1}{\|K\|}$, f_0 étant un élément arbitraire pour la procédure itérative (2.16).

Soit u^k la $k^{\text{ème}}$ solution approchée de la solution du problème original, si $(f - f_0) \in H^\beta$, i.e :

$\|f - f_0\|_{H^\beta}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} |E_n(f - f_0)|^2 < E$, alors on a l'estimation suivante :

$$\|u(y) - u^k(y)\|^2 \leq M \left[\frac{\beta}{C_1(k + \beta)} \right]^{2\beta}$$

où : $M = C_0^2 E^2$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \|u(y) - u^k(y)\|^2 &\leq \|u(\tau) - u^k(\tau)\|^2 \\ &\leq \|K\|^2 \|J^k(f - f_0)\|^2 \\ &\leq C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} [1 + \omega K]^{2k} |E_n(f - f_0)|^2 \\ &\leq C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega(e^{-\tau\sqrt{\lambda_n}} - 1)^2}{\lambda_n [1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_n}}]} \right]^{2k} |E_n(f - f_0)|^2 \\ &\leq C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega(e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}} - 1)^2}{\lambda_n [1 + e^{-Y\sqrt{\lambda_n}}]} \right]^{2k} |E_n(f - f_0)|^2 \\ &\leq C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\omega(e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}} - 1)^2}{2\lambda_n} \right]^{2k} |E_n(f - f_0)|^2 \\ &= C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} [1 - C_1 \lambda_n^{-1}]^{2k} (\lambda_n)^{-2\beta} (\lambda_n)^{2\beta} v |E_n(f - f_0)|^2, \text{ où : } C_1 = \frac{\omega [e^{-\tau\sqrt{\lambda_1}} - 1]^2}{2} \\ &\leq \sup_{\lambda_n} [g(\lambda_n)] C_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n)^{2\beta} |E_n(f - f_0)|^2 \\ &\text{où : } g(\lambda_n) = [1 - C_1 \lambda_n^{-1}]^{2k} (\lambda_n)^{-2\beta} \end{aligned}$$

Calculons $\sup_{\lambda} [g(\lambda)]$;

On pose :

$$\begin{aligned}
 g'(\lambda) &= 2kC_1\lambda^{-2} [1 - C_1\lambda^{-1}]^{2k-1} (\lambda)^{-2\beta} = 0 \\
 &\quad -2\beta[1 - C_1\lambda^{-1}]^{2k} (\lambda)^{-2\beta-1} = 0 \\
 \left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = C_1 \end{array} \right\} &\text{rejetées } (\lambda > 0, \text{ et } g(C_1) = 0) \\
 \Rightarrow &2kC_1\lambda^{-1} - 2\beta[1 - C_1\lambda^{-1}] = 0 \\
 \Rightarrow &\lambda_0 = \frac{C_1(k+\beta)}{\beta} \\
 \Rightarrow &g(\lambda_0) = \left[1 - C_1 \frac{\beta}{C_1(k+\beta)}\right]^{2k} \left[\frac{C_1(k+\beta)}{\beta}\right]^{-2\beta} \\
 &= \left[\frac{k}{k+\beta}\right]^{2k} \left[\frac{\beta}{C_1(k+\beta)}\right]^{2\beta}
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \|u(t) - u^k(t)\|^2 &\leq \|u(\tau) - u^k(\tau)\|^2 \\
 &\leq C_0^2 \left[\frac{\beta}{C_1(k+\beta)}\right]^{2\beta} \left[\frac{k}{k+\beta}\right]^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\beta} |E_n(f - f_0)|^2 \\
 &\leq C_0^2 \left[\frac{\beta}{C_1(k+\beta)}\right]^{2\beta} \|f - f_0\|_{H_\beta}^2 \\
 &\leq M \left[\frac{\beta}{C_1(k+\beta)}\right]^{2\beta}
 \end{aligned}$$

où : $M = C_0^2 E^2$.

Problème inverse de type bi-parabolique : identification de conditions initiales

3.1 Formulation du problème

Soit H un espace de Hilbert séparable, muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de la norme $\|\cdot\|$. On note par $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre de Banach des opérateurs linéaires bornés sur H .

Soit $A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$, un opérateur positif, auto-adjoint et à résolvante compacte. Dans ce cas A admet une base orthonormée formée des vecteurs propres $(\varphi_n) \subset H$ associés aux valeurs propres réelles $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}_+^*$, i.e :

$$A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$0 < \nu \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$$

$$\forall h \in H, \quad h = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n \varphi_n, \quad \text{avec } h_n = \langle h, \varphi_n \rangle.$$

Dans cette section on s'intéresse au problème bi-parabolique suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 u = \left(\frac{d}{dt} + A\right)^2 u = 0, & 0 < t < T \\ u(T) = g, \quad u_t(0) = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

Ici le problème inverse est de déterminer la condition initiale $u(0) = f$ à partir de la condition finale $u(T) = g \in H$.

Il est bien connu que ce genre de problème est mal posé, dans le sens où la solution (*si elle existe*) ne dépend pas continûment de la donnée g .

Dans ce travail, nous étendons la méthode de Kozlov-Maz'ya à notre problème bi-parabolique. A notre connaissance, la littérature consacrée à cette classe de problèmes se caractérise par la rareté des résultats, à l'exception du papier [3]. L'étude de ce type de problème est non seulement motivée par l'intérêt théorique, mais aussi par nécessité pratique.

Comme il est bien connu, l'équation de la chaleur classique ne décrit pas avec précision la conduction de la chaleur [75, 45]. De nombreux modèles ont été proposés pour mieux

décrire ce phénomène, parmi eux, on peut citer le problème biparabolique proposé dans [49] pour une description mathématique du processus de conduction de la chaleur plus adéquate que l'équation de la chaleur classique.

3.2 Motivation physique : Reconstruction du passé connaissant l'état présent.

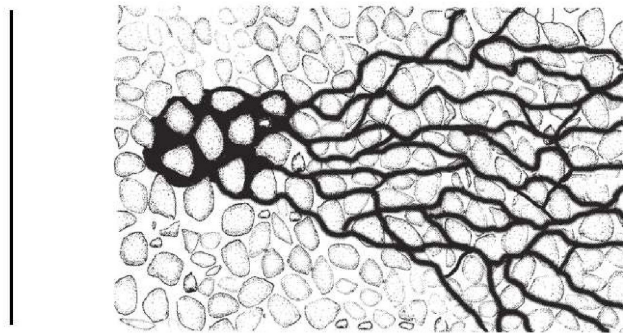
► Les problèmes rétrogrades de transport des contaminants

La recherche sur les problèmes rétrogrades du processus de diffusion était particulièrement un champ actif dans les trentes dernières années, son but est d'obtenir l'état initial d'un phénomène physique à partir d'une mesure donnée à l'instant présent.

Le modèle classique de diffusion de convection est donné par l'équation parabolique :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \cdot \nabla u - D \Delta u = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Les problèmes rétrogrades pour cette équation ont été largement étudiés par plusieurs auteurs (théoriquement et numériquement).



Transport de contaminants dans un milieu poreux

► Identification des sources de pollution des eaux souterraines

Résoudre l'équation rétrograde d'advection dispersion, compte tenu de l'état final $C(x, y, T)$:

$$\begin{cases} C_t + \nabla(vC) - \nabla \cdot (D \cdot \nabla C) = 0, & +BC |_{\partial\Omega} \\ C(x, y, T) = g(x, y) \end{cases} \quad (3.3)$$

► Modèle mathématique du processus de conduction de la chaleur

La théorie mathématique de la conduction de la chaleur dans les systèmes distribués est basée sur l'équation linéaire classique de type parabolique

$$P \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - k \Delta \right) u(x, t) = f(x, t) \quad (3.4)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 < k$: constante caractéristique du milieu physique, et Δ : opérateur Laplacien.

Il est bien connu que cette équation classique ne décrit pas avec précision la conduction de la chaleur : vitesse de propagation infinie.

► **Reconstruction d'une image (Filtrage)**

Résoudre l'équation rétrograde de diffusion logarithmique, compte tenu de l'image bruitée $u(x, y, T) = g(x, y)$:

$$\begin{cases} w_t + b(-\Delta)^\alpha w = 0, & (b > 0, 0 < \alpha \leq 1) \\ w(x, y, T) = g(x, y) + BC(w) |_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} v_t + \lambda \log(1 + c(-\Delta)^\alpha) v = 0, & (\lambda > 0, c > 0, 0 < \alpha \leq 1) \\ v(x, y, T) = g(x, y) + BC(v) |_{\partial\Omega} \end{cases} \quad (3.6)$$

► **Diffusion fractionnaire en temps**

L'équation de diffusion fractionnaire en temps est obtenue en remplaçant la dérivée classique en temps par une autre fractionnaire, cette dernière peut être utile dans la description des phénomènes de superdiffusion et de subdiffusion.

▷ *Diffusion fractionnaire de Caputo*

$$\partial_t^\alpha u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t), \quad [+BC] [+IC] \quad (3.7)$$

∂_t^α représente la dérivée fractionnaire au sens de Caputo par rapport à t , $0 < \alpha < 1$.

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^\alpha} ds, \quad (3.8)$$

$\Gamma(\cdot)$: la fonction- Γ standard définie par :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad s \in \mathbb{C}, R(s) > 0. \quad (3.9)$$

Essentiellement, la dérivée fractionnaire de Caputo pour $\alpha \in (0, 1)$ utilise toutes les informations de la dérivée classique $f'(s)$ pour $s \in (0, t)$, que nous appelons "*effet mémoire*" de la dérivée fractionnaire.

▷ *Applications physiques*

- Diffusion des contaminants dans le sol, comme les substances radioactives.

- Les phénomènes de diffusion dans des milieux hétérogènes (hétérogénéité des particules du sol).
- $\alpha = 1$: diffusion normale.
- $0 < \alpha < 1$: diffusion lente.
- $\alpha = 0$: pas de diffusion.

► **Equations de diffusion subordonnées**

Alfred.S Carasso a mentionné dans [1] trois types de diffusion :

▷ *Diffusion ordinaire (Gaussienne) :*

$$f(\xi) = e^{-\sigma|\xi|^2}, \sigma > 0 \quad (3.10)$$

▷ *Diffusion lente (Lévy stable) :*

$$f(\xi) = e^{-\sigma|\xi|^\alpha}, \sigma > 0, 0 < \alpha \leq 2 \quad (3.11)$$

▷ *Diffusion logarithmique (Linnik) :*

$$f(\xi) = (1 + \sigma|\xi|^\alpha)^{-\lambda}, \sigma, \lambda > 0 \text{ et } 0 < \alpha \leq 2 \quad (3.12)$$

Ces trois types donnent une surface en forme de cloche, mais avec des comportements de queues distincts.

Les deux diffusions, lente et logarithmique qui sont des fonctions de densité de probabilité à queues lourdes, peuvent présenter un comportement Gaussien au voisinage de l'origine, tout en se comportant comme des faibles exposants ailleurs.

Chacun des trois types ci-dessus est associé à une équation de diffusion subordonnée :

- La diffusion Gaussienne, représente le mouvement Brownien correspondant à l'équation de la chaleur (problème direct) :

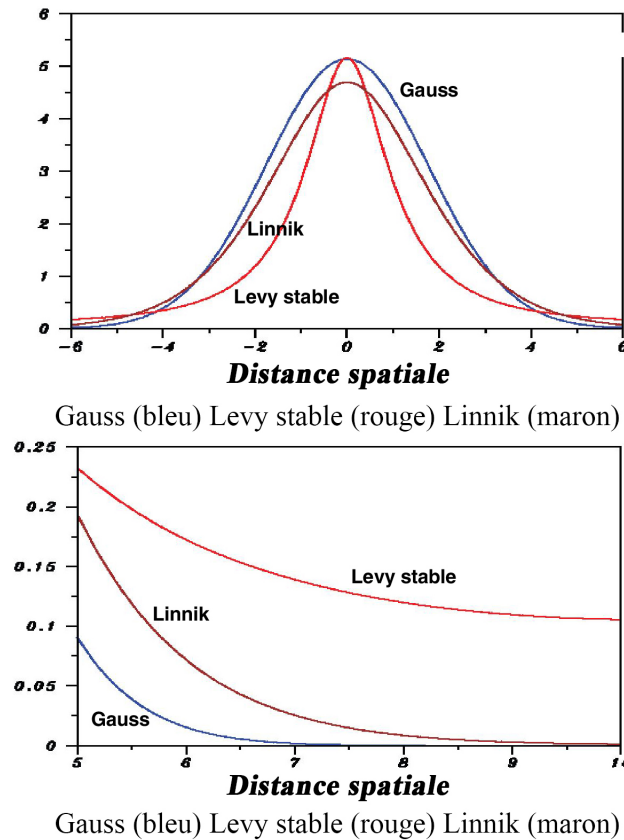
$$w_t = a\Delta w, \quad t > 0, a > 0. \quad (3.13)$$

- La diffusion lente (Lévy stable) correspond à l'équation de diffusion fractionnaire (problème direct) :

$$w_t = -[b(-\Delta)^\beta] w, \quad t > 0, 0 < \beta \leq 1. \quad (3.14)$$

- La diffusion de Linnik généralisée correspond à l'équation de diffusion logarithmique (problème direct) :

$$w_t = -[\lambda \log(1 + c(-\Delta)^\beta)] w, \quad (\lambda > 0, c > 0, 0 < \beta \leq 1) \quad (3.15)$$



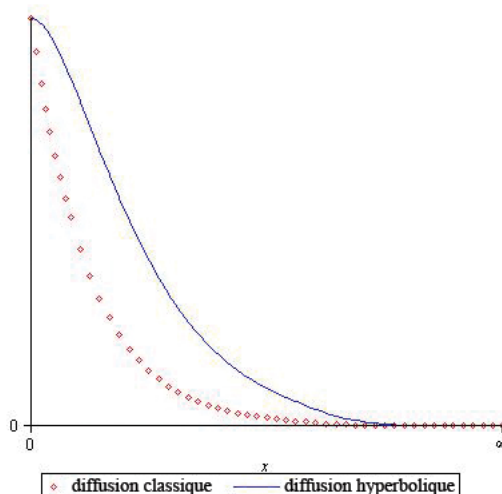
► **Nouveau modèle mathématique du processus de conduction de la chaleur**

En 1990, V.I. Fushchich, A.S. Galitsyn et A.S. Polubinski [49] ont donné un nouveau modèle du processus de conduction de la chaleur sous forme d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre :

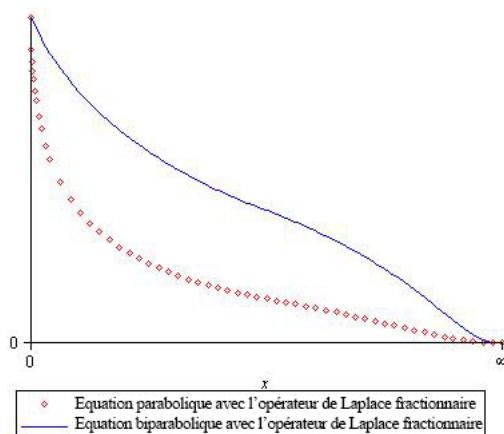
$$H = \alpha P + \beta P^2 = \alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right) + \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\Delta \right)^2, \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

Remarque 3.2.1 H est invariant par rapport au groupe de Galieiei.

- Equation parabolique avec l'opérateur de Laplace : $\left(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta) \right) \Rightarrow$ vitesse de propagation : $\sigma = e^{-t|\xi|^2}$.
- Equation biparabolique avec l'opérateur de Laplace : $\left(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta) \right)^2 \Rightarrow$ vitesse de propagation : $\sigma = (1 + t|\xi|^2)e^{-t|\xi|^2}$.



- Equation parabolique avec l'opérateur de Laplace fractionnaire : $(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha) \Rightarrow$ vitesse de propagation : $\sigma = e^{-t|\xi|^{2\alpha}}$, $(0 < \alpha < 1)$.
- Equation biparabolique avec l'opérateur de Laplace fractionnaire : $(\frac{\partial}{\partial t} + (-\Delta)^\alpha)^2 \Rightarrow$ vitesse de propagation : $\sigma = (1 + t|\xi|^{2\alpha})e^{-t|\xi|^{2\alpha}}$.



3.3 Analyse du problème

Considérons le problème bien posé suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 w = (\frac{d}{dt} + A)^2 w = w''(t) + 2Aw'(t) + A^2 w(t) = 0, & 0 < t < T \\ w(0) = \xi, & w'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

où : $\xi \in \mathcal{D}(A)$.

Désignons par $\mathbb{H}^1 = \mathcal{D}(A) \times H$, notons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, on définit la norme dans \mathbb{H}^1 , par :

$$\|U\|_{\mathbb{H}^1}^2 = \|Au_1\|^2 + \|u_2\|^2 \quad (3.17)$$

Dans ce cadre, l'équation différentielle du second ordre peut être ramenée à un système de premier ordre dans l'espace de Hilbert \mathbb{H}^1 comme suit :

$$W'(t) = \mathcal{A}W(t), \quad W(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

en posant

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(t) \\ w'(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -A^2 & -2A \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

où \mathcal{A} est un opérateur linéaire non borné avec $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A^2) \times \mathcal{D}(A)$.

On peut aisément vérifier que \mathcal{A} est le générateur infinitésimal du semi-groupe fortement continu $\{\mathcal{T}(t) = e^{t\mathcal{A}}\}$ dans \mathbb{H}^1 [[89], théorème 2.1], plus précisément, $\mathcal{T}(t)$ est analytique et sa forme explicite est donnée par :

$$\mathcal{T}(t)Z = e^{t\mathcal{A}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{tB_n} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^1, \quad (3.20)$$

où $B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_n^2 & -2\lambda_n \end{pmatrix}$. En utilisant quelques techniques de l'algèbre matricielle, on peut obtenir la forme de e^{tB_n} comme suit :

$$e^{tB_n} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Cela implique que

$$\mathcal{T}(t)Z = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

En utilisant la théorie des semi-groupes [118], on obtient l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème (3.18).

Théorème 3.3.1 *Pour tout $W(0) \in \mathbb{H}^1$, le problème (3.18) admet une solution unique $W \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{H}^1) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathbb{H}^1) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$, donnée par :*

$$W(t) = \mathcal{F}(t)W(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle z_1, \phi_n \rangle \phi_n \\ \langle z_2, \phi_n \rangle \phi_n \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

En particulier, pour $W(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}$ on a

$$W(t) = \mathcal{F}(t)W(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} e^{-\lambda_n t} + \lambda_n t e^{-\lambda_n t} & t e^{-\lambda_n t} \\ -\lambda_n^2 t e^{-\lambda_n t} & -\lambda_n t e^{-\lambda_n t} + e^{-\lambda_n t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Comme conséquence du théorème (3.3.1), on a le résultat suivant :

Corollaire 3.3.2 *Pour tout $\xi \in \mathcal{D}(A)$, le problème (3.16) admet une solution unique :*

$$w \in \mathcal{C}^2([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; H) \cap \mathcal{C}([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap \mathcal{C}^2([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^2))$$

donnée par

$$w(t) = \mathcal{R}(t; A)\xi = (I + tA)e^{-tA}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t\lambda_n)e^{-t\lambda_n} \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (3.25)$$

Remarque 3.3.3 *Il est facile de vérifier que*

$$\|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} (1 + t\lambda)e^{-t\lambda} \leq (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1}, \quad (3.26)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathcal{R}(t; A)\| = \sup_{0 \leq t \leq T} (1 + t\lambda_1)e^{-t\lambda_1} = 1. \quad (3.27)$$

3.3.1 Position incorrecte du problème (3.1)

Théorème 3.3.4 *Soit $g \in H$, alors l'unique solution formelle du problème (3.1) est donnée par*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (3.28)$$

dans ce cas,

$$f = u(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + T\lambda_n} e^{T\lambda_n} \langle g, \phi_n \rangle \phi_n. \quad (3.29)$$

Preuve. En utilisant le développement de Fourier

$$\begin{aligned} g &= \sum_{n=1}^{+\infty} g_n \varphi_n, & g_n &= \langle g, \varphi_n \rangle \\ u &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \varphi_n, & u_n &= \langle u, \varphi_n \rangle \end{aligned}$$

Ce qui donne la suite d'EDO

$$\begin{cases} u_n''(t) + 2\lambda_n u_n'(t) + \lambda_n^2 u_n = 0, & 0 < t < T \\ u_n(T) = g, & u_n'(0) = 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

Cette équation différentielle admet une solution unique donnée par :

$$u_n(t) = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} g_n = \sigma_n(t, \lambda_n) g_n \quad (3.31)$$

Finalement, la solution du problème (3.1) est donnée par

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} g_n \varphi_n \quad (3.32)$$

■

A partir de cette représentation, on remarque que $u(t)$ est instable dans $[0, T[$. Cela découle des hautes fréquences $\sigma_n(t, \lambda_n) = \left(\frac{1+t\lambda_n}{1+T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} \rightarrow +\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Remarque 3.3.5 Dans le modèle classique :

$$v_t + Av = 0, \quad 0 < t < T, \quad v(T) = g. \quad (3.33)$$

La solution formelle est donnée par

$$v(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \theta_n(t, \lambda_n) g_n \varphi_n \quad (3.34)$$

où :

$$\theta_n(t, \lambda_n) = e^{(T-t)\lambda_n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow +\infty.$$

Dans ce cas, le problème est fortement mal posé.

Dans le cas du modèle biparabolique, on a : $\sigma_n = r_n \theta_n$, où :

$$r_n = \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) \quad (3.35)$$

est le paramètre de relaxation issu du caractère hyperbolique du modèle biparabolique.

$$\frac{t}{T} \leq r_n \leq \left(\frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1} \right) \leq 1 \quad (3.36)$$

et

$$u(t) = R(t)v(t)$$

où

$$\|R(t)\| = \sup_n \{r_n\} = r_1 = \frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1} \quad (3.37)$$

De cette remarque, on observe que le caractère "mal posé" du modèle biparabolique est modéré par rapport au cas parabolique classique.

3.3.2 Stabilisation du problème

On voudrait avoir une estimation de la forme :

$$\|u(t)\| \leq \Psi(\|g\|),$$

pour une certaine fonction $\Psi(\cdot)$ qui satisfait la condition $\Psi(s) \rightarrow 0$, lorsque $s \rightarrow 0$.

Comme le problème de détermination de $u(t)$ à partir de la condition finale $u(T) = g$ est mal posé, une telle estimation ne peut être possible à moins d'une restriction de la solution $u(t)$ à un certain ensemble source $\mathcal{M} \subset H$.

Ainsi, il est nécessaire d'identifier un ensemble $\mathcal{M} \subset H$ et obtenir une fonction $\Psi_{\mathcal{M}}(\cdot)$ telle que :

$$\Psi_{\mathcal{M}}(s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0$$

et

$$\|u(t)\| \leq \Psi_{\mathcal{M}}(\|g\|),$$

Avec, $u(t) \in \mathcal{M}$.

Dans notre modèle, on va utiliser la méthode de convexité logarithmique pour identifier cet ensemble source :

$$\mathcal{M}_\rho = \{u(t) \in H : u(t) \text{ satisfait (3.1), } \|u(0)\| + T\|Au(0)\| \leq \rho\} \quad (3.38)$$

Maintenant, on énonce un résultat utile pour la démonstration. (voir : [[2].p.19][[47].p.375]).

Théorème 3.3.6 Soit $v(t)$ la solution du problème (3.33), alors on a l'estimation suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \|v(t)\| \leq \|v(T)\|^{\frac{t}{T}} \|v(0)\|^{\frac{T-t}{T}}. \quad (3.39)$$

Supposons maintenant que $u(0) = f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \phi_n$ tel que $\|Au(0)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n|^2 \leq \infty$, alors on a :

$$\|TAu(0)\|^2 = T^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1 + T\lambda_n)^2 |f_n|^2 = \|(I + TA)u(0)\|^2,$$

et

$$\|(I + TA)u(0)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + T\lambda_n}{\lambda_n} \right)^2 |f_n|^2 \leq \left(\frac{1 + T\lambda_1}{\lambda_1} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 |f_n|^2,$$

cela implique que

$$T\|Au(0)\| \leq \|(I + TA)u(0)\| \leq \left(\frac{1 + T\lambda_1}{\lambda_1} \right) \|Au(0)\| \quad (3.40)$$

En vertu de l'estimation (3.39) et de la formule

$$v(t) = \exp((T - t)A)g = \sum_{n=1}^{\infty} e^{(T-t)\lambda_n} g_n \phi_n,$$

$$\begin{aligned} u(t) = R(t)v(t) &= (I + tA)(I + TA)^{-1}v(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + t\lambda_n}{1 + T\lambda_n} \right) e^{(T-t)\lambda_n} g_n \phi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{(T-t)\lambda_n} g_n \phi_n, \end{aligned}$$

et

$$v(0) = (I + TA)u(0), \quad v(T) = u(T) = g,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \leq \|R(t)\| \|v(t)\| &\leq \|R(t)\| \left(\|v(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|v(T)\|^{\frac{t}{T}} \right) \\ &\leq \|R(t)\| \left(\|(I + TA)u(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|g\|^{\frac{t}{T}} \right). \end{aligned} \quad (3.41)$$

En combinant (3.41) et (3.37), on obtient l'estimation suivante :

$$\|u(t)\| \leq C(t, T, \lambda_1) \left\{ \|Au(0)\|^{\frac{T-t}{T}} \|g\|^{\frac{t}{T}} \right\}, \quad (3.42)$$

où :

$$C(t, T, \lambda_1) = \left(\frac{1 + t\lambda_1}{1 + T\lambda_1} \right) \left(\frac{1 + T\lambda_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{T-t}{T}} \leq \left(\frac{1 + T\lambda_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{T-t}{T}} = \gamma.$$

Dans la base $\{\phi_n\}$ on introduit l'échelle de Hilbert $(H^s)_{s \in \mathbb{R}}$ (resp. $(\mathfrak{E}^s)_{s \in \mathbb{R}}$) induite par A comme suit

$$\begin{aligned} H^s &= \mathcal{D}(A^s) = \{h \in H : \|h\|_{H^s}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2s} |\langle h, \phi_n \rangle|^2 < +\infty\}, \\ \mathfrak{E}^s &= \mathcal{D}(e^{sTA}) = \{h \in H : \|h\|_{\mathfrak{E}^s}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2Ts\lambda_n} |\langle h, \phi_n \rangle|^2 < +\infty\}, \end{aligned}$$

Remarque 3.3.7 On a

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \left(\frac{\lambda_1}{1+T\lambda_n} \right) \leq \left(\frac{\lambda_n}{1+T\lambda_n} \right) &\implies \frac{1}{1+T\lambda_n} \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} \right) \left(\frac{\lambda_n}{1+T\lambda_n} \right) \implies \\ \|u(0)\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+T\lambda_n} \right)^2 e^{2T\lambda_n} |g_n|^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{\lambda_1} \right)^2 \|Au(0)\|^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \left(\frac{\lambda_1}{1+T\lambda_1} \right) \leq \left(\frac{\lambda_n}{1+T\lambda_n} \right) &\leq \frac{1}{T} \implies \\ \left(\frac{\lambda_1}{1+T\lambda_1} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2T\lambda_n} |g_n|^2 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_n}{1+T\lambda_n} \right)^2 e^{2T\lambda_n} |g_n|^2 \leq \left(\frac{1}{T} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2T\lambda_n} |g_n|^2 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Alors, on en déduit

$$\|u(0)\| + \|Au(0)\| < \infty \iff \|Au(0)\| < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} e^{2T\lambda_n} |g_n|^2 < \infty. \quad (3.45)$$

Théorème 3.3.8 Le problème (3.1) est conditionnellement bien posé sur l'ensemble

$$M = \{w(t) \in H : \|Aw(0)\| < \infty\}$$

si et seulement si

$$g \in \mathfrak{E}^1 = \{h \in H : \sum_{n=1}^{\infty} e^{2T\lambda_n} |(h, \varphi_n)|^2 < \infty\}.$$

De plus, si $u(t) \in M_p$, alors on a l'estimation de continuité de Hölder suivante :

$$\|u(t)\| \leq \Psi(\|g\|) = \gamma \left(\rho^{\frac{T-t}{T}} \right) \|g\|^{\frac{t}{T}}. \quad (3.46)$$

3.4 Régularisation par la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya

L'algorithme itératif pour résoudre le problème (3.1) commence par le choix arbitraire de $f_0 \in H$, la première approximation $u^0(t)$ est solution du problème direct suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 u^0(t) = \left(\frac{d}{dt} + A \right)^2 u^0(t) = 0, & 0 < t < T \\ u^0(0) = f_0, \quad u_t^0(0) = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

Une fois la paire (u^k, f_k) construite, on définit f_{k+1} par

$$(P_{k+1}) : f_{k+1} = f_k - \omega(u^k(T) - g) \quad (3.48)$$

où ω vérifie la condition suivante

$$0 < \omega < \omega^* = \frac{1}{\|K\|} = \frac{e^{T\lambda_1}}{(1 + T\lambda_1)}$$

avec : $\|K\| = \|\mathcal{R}(T; A)\| = \sup_{n \geq 1} \{(1 + T\lambda_n)e^{-T\lambda_n}\} = (1 + T\lambda_1)e^{-T\lambda_1}$, où $\mathcal{R}(t)$ est l'opérateur résolvant associé au problème (3.16), donnée par (3.25)

Finalement, u^{k+1} s'obtient en résolvant le problème

$$\begin{cases} \mathcal{B}^2 u^{k+1}(t) = (\frac{d}{dt} + A)^2 u^{k+1}(t) = 0, & 0 < t < T \\ u^{k+1}(0) = f_{k+1}, & u_t^{k+1}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.49)$$

On pose $G = (I - \omega K)$. Si on itère l'expression dans (P_{k+1}) , on obtient :

$$f_k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i f = G^k f_0 + (I - G^k)K^{-1} f = G^k f_0 + u(0) - G^k u(0) \quad (3.50)$$

Cela implique que

$$u(0) - f_k = G^k(u(0) - f_0), \quad u^k - u = \mathcal{R}(t; A)G^k(f_0 - u(0)). \quad (3.51)$$

Proposition 3.4.1 *L'opérateur $G = (I - \omega K)$ est auto-adjoint et quasi-contractant sur H . En outre, 1 n'est pas une valeur propre de G .*

Preuve.

Le fait que G soit auto-adjoint découle de la définition de cet opérateur.

A partir de l'inégalité $0 < 1 - \omega(1 + T\lambda)e^{T\lambda} < 1$ pour $\lambda \in \sigma(A)$, on a $\sigma_p(G) \subset]0, 1[$, d'où 1 n'est pas valeur propre de G .

Remarque 3.4.2 *soit $k \in \mathbb{N}^*$; alors on a*

$$\|G\| = \|I - \omega K\| < 1 \implies \left\| \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \|G^i\| \leq k. \quad (3.52)$$

En général, la solution exacte $u(0) = f \in H$ doit satisfaire une condition de régularité dite condition de sources, sinon la convergence de la méthode de régularisation peut être lente. Afin d'accélérer la méthode de régularisation, on suppose la condition de sources suivante :

$$(u(0) - f_0) \in \mathcal{D}(A^{\beta+1}), \quad \beta > 0$$

Maintenant, on donne un lemme auquel on fera appel pour la démonstration de l'estimation de l'erreur.

Lemme 3.4.3 soit $\sigma > 0$, $k \geq 2$ et Φ une fonction d'une variable réelle définie par :

$$\Phi(\lambda) = \left(1 - \omega(1 + T\lambda)e^{-T\lambda}\right)^k \lambda^{-\sigma}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \infty[, \quad (3.53)$$

où $\lambda_1 > 0$ et $\omega < \frac{e^{T\lambda_1}}{(1+T\lambda_1)}$. Alors on a

$$\Phi_\infty = \sup_{\lambda \geq \lambda_1} \Phi(\lambda) \leq C_1 \left(\frac{1}{\ln(k)}\right)^\sigma. \quad (3.54)$$

Preuve.

On a

$$\Phi(\lambda) \leq \hat{\Phi}(\lambda) = \left(1 - \omega(1 + T\lambda_1)e^{-T\lambda}\right)^k \lambda^{-\sigma}, \quad \lambda \in [\lambda_1, \infty[.$$

Afin de simplifier l'expression de Φ , on note :

$$\mu = T\lambda, \quad \tau = \omega(1 + T\lambda_1), \quad \mu_1 = T\lambda_1,$$

$$\hat{\Phi}(\lambda) = (1 - \tau e^{-\mu})^k (T^{-1}\mu)^{-\sigma} = T^\sigma (1 - \tau e^{-\mu})^k \mu^{-\sigma} = T^\sigma \tilde{\Phi}(\mu), \quad \mu \in [\mu_1, \infty[.$$

Maintenant, la question est de trouver une constante positive μ^* telle que $\tilde{\Phi}(\mu) = (1 - \tau e^{-\mu})^k \mu^{-\sigma}$ soit strictement croissante sur $[\mu_1, \mu^*[$ et strictement décroissante sur $] \mu^*, \infty[$.

Puisque $\tilde{\Phi}(\mu)$ est continûment dérivable sur $[\mu_1, \infty[$ et

$$\tilde{\Phi}(\mu_1) > 0, \quad \tilde{\Phi}(\infty) = 0, \quad \tilde{\Phi}(\mu) \geq 0,$$

alors le maximum de $\tilde{\Phi}(\mu)$ est atteint en un point intérieur, qui est un point critique de $\tilde{\Phi}(\mu)$. D'après

$$\frac{d\tilde{\Phi}(\mu)}{d\mu} = \mu^{-\sigma-1} (1 - \tau e^{-\mu})^{k-1} \{\tau(k\mu + \sigma)e^{-\mu} - \sigma\}$$

il s'ensuit que le point critique de $\tilde{\Phi}(\mu)$ sur $] \mu_1, \infty[$ satisfait

$$\tau(k\mu + \sigma)e^{-\mu} - \sigma = 0 \iff (k\mu + \sigma)e^{-\mu} - \frac{\sigma}{\tau} = 0.$$

On introduit la fonction auxiliaire

$$D(\mu) = (k\mu + \sigma)e^{-\mu} - \frac{\sigma}{\tau}, \quad \mu \in [\mu_1, \infty[.$$

Pour k suffisamment grand, $D(\mu^* = \ln(k)) = \frac{k\ln(k) + \sigma}{k} - \frac{\sigma}{\tau} > 0$. pour $a > 1$ et k suffisamment grand, on a $D(\mu^{**} = \ln(k^a)) = \frac{ak\ln(k) + \sigma}{k^a} - \frac{\sigma}{\tau} < 0$. Cependant, il existe $\hat{k}(a)$ tel que

$$\begin{aligned} D(\ln(k)) &> 0, \quad \forall k \geq \hat{k}(a), \\ D(\ln(k^a)) &< 0 \quad \forall k \geq \hat{k}(a). \end{aligned}$$

Par conséquent le point critique ν de $D(\mu)$ doit être entre $\mu^* = \ln(k)$ et $\mu^{**} = \ln(k^a)$, ie., $\nu \in]\mu^*, \mu^{**}[$. Soit maintenant $k \geq \max(2, \hat{k}(a))$, alors on a

$$\sup_{\mu \in]\mu_1, +\infty[} \tilde{\Phi}(\mu) = \tilde{\Phi}(\nu) = (1 - \tau e^{-\nu})^k \nu^{-\sigma} \leq \nu^{-\sigma} \leq (\mu^*)^{-\sigma} = (\ln(k))^{-\sigma}.$$

Donc, la borne supérieure de $\Phi(\lambda)$ peut être estimée comme suit :

$$\sup_{\lambda \in]\lambda_1, +\infty[} \Phi(\lambda) \leq \sup_{\lambda \in]\lambda_1, +\infty[} \hat{\Phi}(\lambda) = T^\sigma \sup_{\mu \in]\mu_1, +\infty[} \tilde{\Phi}(\mu) \leq T^\sigma (\ln(k))^{-\sigma}. \square$$

On énonce maintenant le résultat principal de cette méthode.

Théorème 3.4.4 Soit $g \in \mathcal{E}^1$ et ω satisfait $0 < \omega < \frac{1}{\|k\|}$, f_0 étant un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et u^k la $k^{\text{ème}}$ solution approchée. Alors on a :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u^k(t)\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (3.55)$$

De plus, si $(u(0) - f_0) \in H^\sigma$ ($\sigma > 1$), $\sigma = \beta + 1$ ($\beta > 0$), i.e :

$$\|u(0) - f_0\|_{H^\sigma}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2\sigma} |\langle u(0) - f, \phi_n \rangle|^2 \leq E^2$$

alors l'ordre de convergence de la méthode est donné par

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u^k(t)\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\sigma, k \geq 2. \quad (3.56)$$

Preuve.

En vertu de la proposition (3.4.1), le théorème (2.2.3) et l'estimation (3.27) , il s'ensuit immédiatement

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u^k(t)\| &= \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{R}(t; A)G^k(f_0 - u(0))\| \\ &\leq \sup_{t \in [0, T]} \|\mathcal{R}(t; A)\| \|G^k(f_0 - u(0))\| \\ &\leq \|G^k(f_0 - u(0))\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \|u(t) - u^k(t)\|^2 &= \|\mathcal{R}(t; A)G^k(f_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \|\mathcal{R}(t; A)\|^2 \|G^k(f_0 - u(0))\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(\lambda_n)^2 \lambda_n^{2\sigma} |\langle f_0 - u(0), \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \left(\sup_n \Phi(\lambda_n) \right)^2 \|f_0 - u(0)\|_{H^\sigma}^2 \leq \left(\sup_n \Phi(\lambda_n) \right)^2 E^2, \end{aligned}$$

et en vertu du Lemme (3.4.3) (estimation (3.54)), on conclue l'estimation désirée. \square

Remarque 3.4.5 sous la condition $(f_0 - u(0)) \in H^\sigma$, $\sigma = 1 + \beta$, $\beta > 0$, et

$$\sup_{\lambda \geq \lambda_1} \{\lambda \Phi(\lambda)\} \leq C \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta,$$

on peut écrire

$$\|A(u(t) - u^k(t))\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta. \quad (3.57)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \|A(u(t) - u^k(t))\|^2 &= \|A\mathcal{R}(t; A)G^k(f_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \|\mathcal{R}(t; A)\|^2 \|AG^k(f_0 - u(0))\|^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \{\lambda_n \Phi(\lambda_n)\}^2 \lambda_n^{2\sigma} |\langle f_0 - u(0), \phi_n \rangle|^2 \\ &\leq \left(\sup_n \lambda_n \Phi(\lambda_n) \right)^2 \|f_0 - u(0)\|_{H^\sigma}^2 \\ &\leq \left(\sup_n \lambda_n \Phi(\lambda_n) \right)^2 E^2 \\ &\leq \left\{ CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^\beta \right\}^2. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.6 Soit $g \in \mathfrak{E}^1$ et ω satisfait $0 < \omega < \frac{1}{\|K\|}$, f_0 étant un élément quelconque du processus itératif proposé ci-dessus et u^k (resp. u_k^δ) la $k^{\text{ème}}$ solution approchée pour la donnée exacte g (resp. pour la donnée inexacte g^δ) tel que $\|g - g^\delta\| \leq \delta$. Alors on a :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(t) - u_k^\delta(t)\| \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^{1+\beta} + \varepsilon(k)\delta,$$

où : $\varepsilon(k) = \|\omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega K)^i\| \leq k\omega$.

Preuve.

En utilisant (3.50) et l'inégalité triangulaire, on peut écrire

$$f^k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g, \quad u_k(t) = \mathcal{R}(t; A) f^k, \quad (3.58)$$

$$f_{\delta}^k = G^k f_0 + \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i g^{\delta}, \quad u_k^{\delta}(y) = \mathcal{R}(t; A) f_{\delta}^k, \quad (3.59)$$

$$\|u(t) - u_{\delta}^k(t)\| = \|(u(t) - u^k(t)) + (u^k(t) - u_{\delta}^k(t))\| \leq \Delta_1 + \Delta_2,$$

où

$$\Delta_1 = \|u(t) - u^k(t)\| \leq \|u(t) - u^k(t)\|_{\infty} \leq CE \left(\frac{1}{\ln(k)} \right)^{1+\beta}, \quad k \geq 2, \quad (3.60)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \|u^k(t) - u_{\delta}^k(t)\| = \|\mathcal{R}(t; A)(f^k - f_{\delta}^k)\| = \left\| \omega \mathcal{R}(t; A) \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^{\delta}) \right\| \\ &\leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i (g - g^{\delta}) \right\| \leq \left\| \omega \sum_{i=0}^{k-1} G^i \right\| \delta = \hat{\Delta}_2. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (3.52), la quantité $\hat{\Delta}_2$ peut être estimée comme suit

$$\hat{\Delta}_2 \leq \omega k \delta \quad (3.61)$$

Combinons (3.60) et (3.61) et prenons le sup par rapport à $t \in [0, T]$ de $\|u(t) - u_{\delta}^k(t)\|$, on obtient la borne désirée.

Remarque 3.4.7 Choisissons $k = k(\delta)$ tel que $\omega k \delta \rightarrow 0$ lorsque $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u^k(t) - u_{\delta}^k(t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } k \rightarrow +\infty.$$

Implémentations numériques



ans ce chapitre, on donne quelques exemples numériques illustrant les différentes méthodes d'approximation utilisées dans ce travail. Tous les résultats sont obtenus par MATLAB

4.1 Problème inverse elliptique

4.1.1 Application

En utilisant les différences finies centrées avec un pas $h = \frac{\pi}{N+1}$ pour approcher la première dérivée u_x et la seconde dérivée u_{xx} , on obtient le problème semi-discret suivant (équation différentielle ordinaire) :

$$\begin{cases} u_{yy}(x_i, y) - \mathbb{A}_h(x_i, y) = f(x_i), & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N; \quad y \in (0, \pi), \\ u(x_0 = 0, y) = u(x_{N+1} = \pi, y) = 0, & y \in (0, \pi), \\ u(x_i, 0) = u(x_i, \pi) = 0, & x_i = ih, \quad i = 1, \dots, N; \\ u(x_i, \tau) = g(x_i), & \tau = \frac{\pi}{2}; \end{cases} \quad (4.1)$$

où \mathbb{A}_h est la matrice de discrétisation découlant de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

qui est symétrique définie positive. Nous supposons que la discrétisation est assez fine de sorte que les erreurs sont petites par rapport à l'incertitude δ au niveau des données; cela signifie que \mathbb{A}_h est une bonne approximation de l'opérateur différentiel $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, au sens que le caractère non-borné de l'opérateur entraîne la grande norme de la matrice \mathbb{A}_h . Les couples propres (μ_k, e_k) de \mathbb{A}_h sont donnés par

$$\mu_k = 4 \left(\frac{N+1}{\pi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2(N+1)} \right), \quad e_k = \left(\sin \left(\frac{jk\pi}{N+1} \right) \right)_{j=1}^N, \quad k = 1, \dots, N.$$

on obtient

$$f_N^\delta = \sum_{n=1}^N -\frac{n^2(1 + \exp(-n))}{(1 - \exp(\frac{-n}{2}))^2} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin(ns) g(s) ds \right] \sin(nx). \quad (4.2)$$

En utilisant la règle de Trapèze, on approche l'intégrale comme suit :

$$f_N^\delta = \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{M+1} \sum_{n=1}^N - \frac{n^2(1 + \exp(-n))}{(1 - \exp(\frac{-n}{2}))^2} \sin(nx_i) g(x_i) \sin(nx_j)$$

4.1.2 Exemple

Nous considérons le problème inverse suivant

Trouver le couple de fonctions $(u(x, y), f(x))$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta_{xy} u(x, y) = f(x), & 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & 0 \leq y < \pi, \\ u(x, 0) = u(x, \pi) = 0, & 0 < x < \pi, \\ u(x, \tau) = g(x) \end{cases} \quad (4.3)$$

Il est facile de voir que les deux fonctions

$$u(x, y) = \left(\frac{[\exp(y)(1 - \exp(-1)) + \exp(-y)(\exp(1) - 1)]}{2(\exp(1) - \exp(-1))} - 1 \right) \sin(x),$$

$$f(x) = \sin(x),$$

forment la solution exacte du problème (4.3). Par conséquent, la donnée est

$$g(x) = \left(\frac{[\exp(\frac{\pi}{2})(1 - \exp(-1)) + \exp(-\frac{\pi}{2})(\exp(1) - 1)]}{2(\exp(1) - \exp(-1))} - 1 \right) \sin(x).$$

On applique les différentes méthodes d'approximation citées précédemment (Kozlov-Maz'ya et Troncature) sur l'exemple (4.3) où l'opérateur $A = -\Delta$,

4.1.3 Résultats numériques

4.1.3.1 Résultats numériques par la méthode de Troncature

- On fixe le paramètre de troncature $N = 4$ et le niveau de bruit $\varepsilon = 10^{-3}$ pour calculer la solution approchée avec différents nombres de noeuds pour la méthode de Trapèze (fig. 4.1, fig. 4.2, fig. 4.3). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.1).

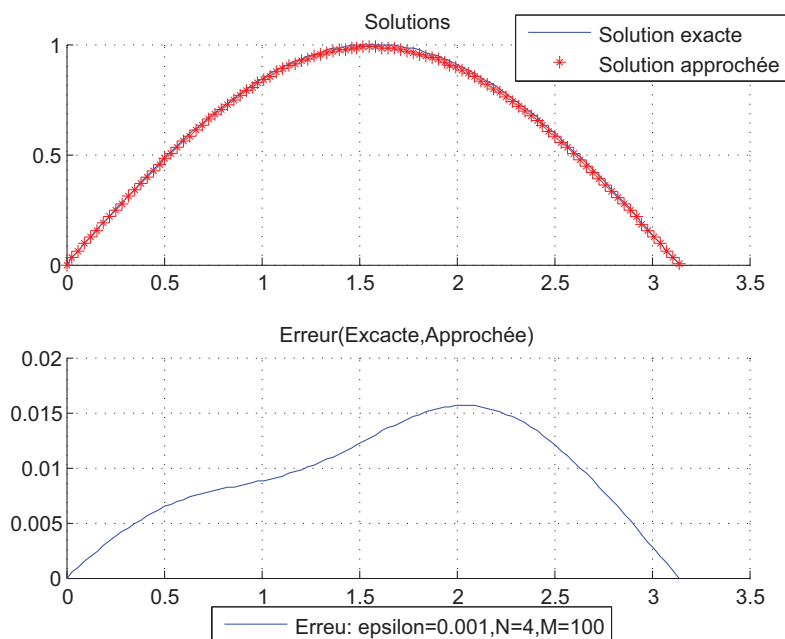


FIGURE 4.1 – Méthode de troncature : $N = 4, M = 100, \varepsilon = 10^{-3}$.

TABLE 4.1 – Troncature. Erreur relative avec des données bruitées $N=4$.

N	ε	M	$E_r(f)$
4	0.001	100	0.0099
4	0.001	200	0.0049
4	0.001	500	0.0020

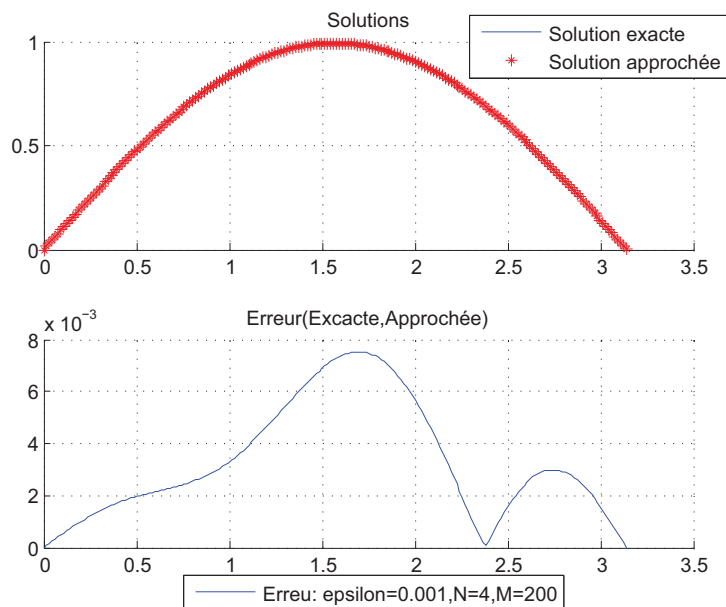


FIGURE 4.2 – Méthode de troncature : $N = 4$, $M = 200$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

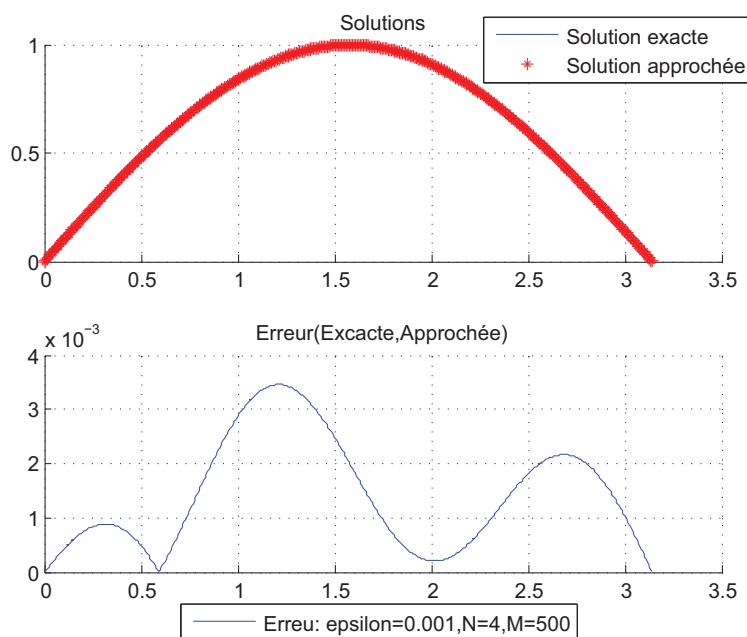


FIGURE 4.3 – Méthode de troncature : $N = 4$, $M = 500$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

- On change le paramètre de troncature $N = 8$, les solutions approchées obtenues avec un niveau de bruit : $\varepsilon = 10^{-3}$ (fig. 4.4, fig. 4.5, fig. 4.6). L'erreur relative est donnée par le tableau (Tab. 4.2).

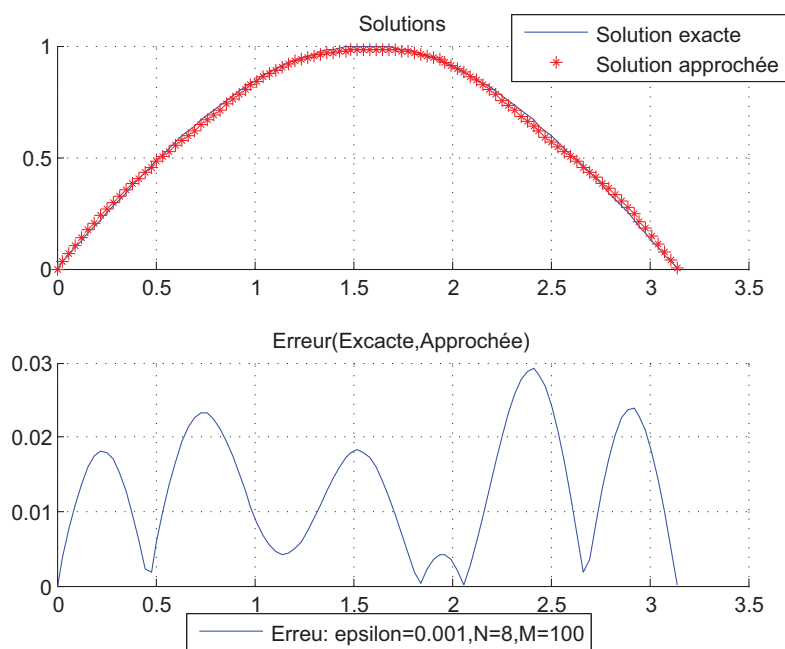


FIGURE 4.4 – Méthode de troncature : $N = 8, M = 100, \varepsilon = 10^{-3}$.

TABLE 4.2 – Troncature. Erreur relative avec des données bruitées $N=8$.

N	ε	M	$E_r(f)$
8	0.001	100	0.0101
8	0.001	200	0.0051
8	0.001	500	0.0022

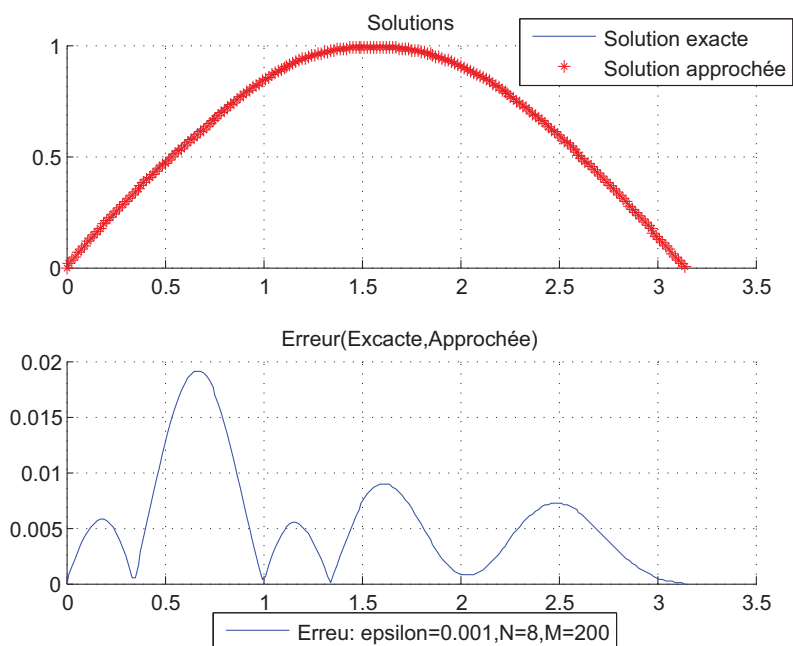


FIGURE 4.5 – Méthode de troncature : $N = 8$, $M = 200$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

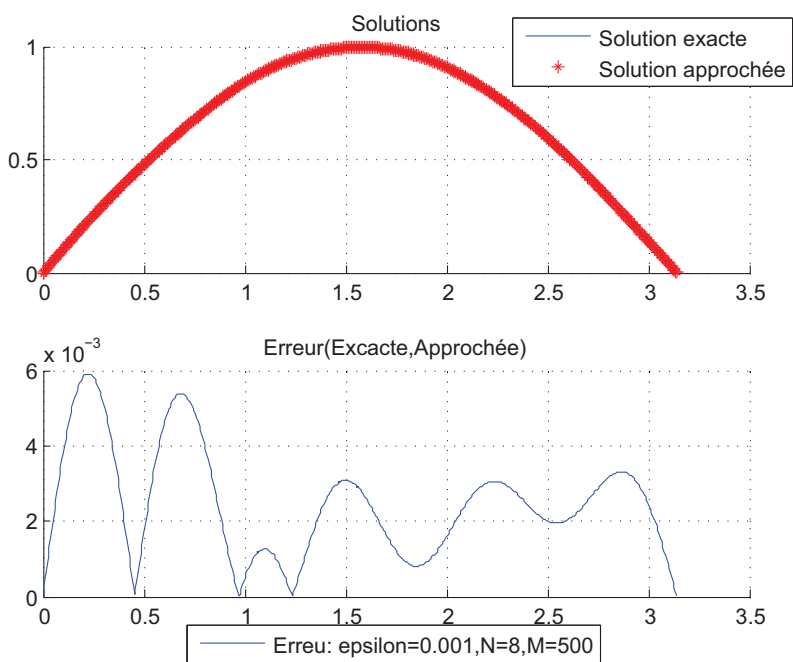


FIGURE 4.6 – Méthode de troncature : $N = 8$, $M = 500$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

- On change le niveau du bruit $\varepsilon = 10^{-2}$, les solutions approchées obtenues pour $N = 4$ (fig. 4.7, fig. 4.8, fig. 4.9). L'erreur relative est donnée par le tableau (Tab. 4.3).

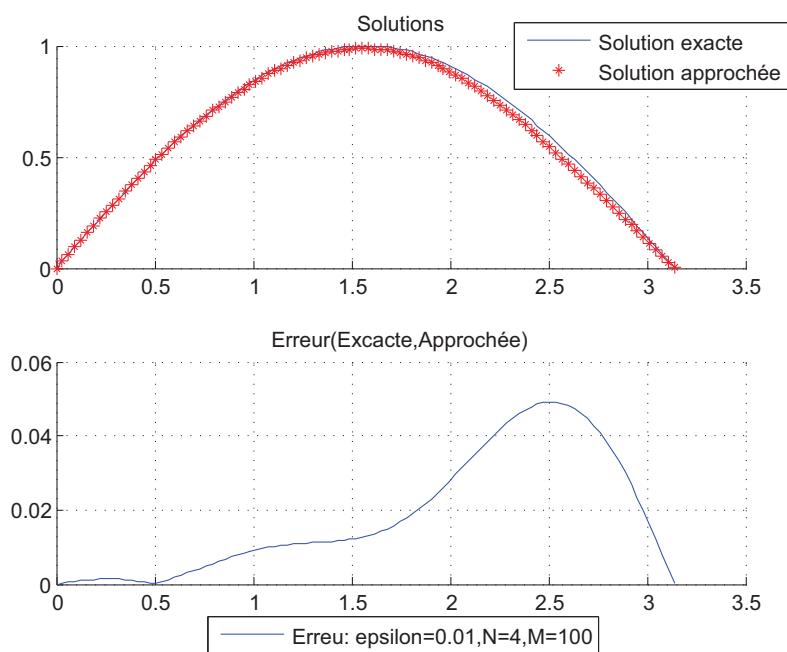


FIGURE 4.7 – Méthode de troncature : $N = 4$, $M = 100$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

TABLE 4.3 – Troncature. Erreur relative avec des données bruitées $N=4$.

N	ε	M	$E_r(f)$
4	0.01	100	0.0532
4	0.01	200	0.0302
4	0.01	500	0.0168

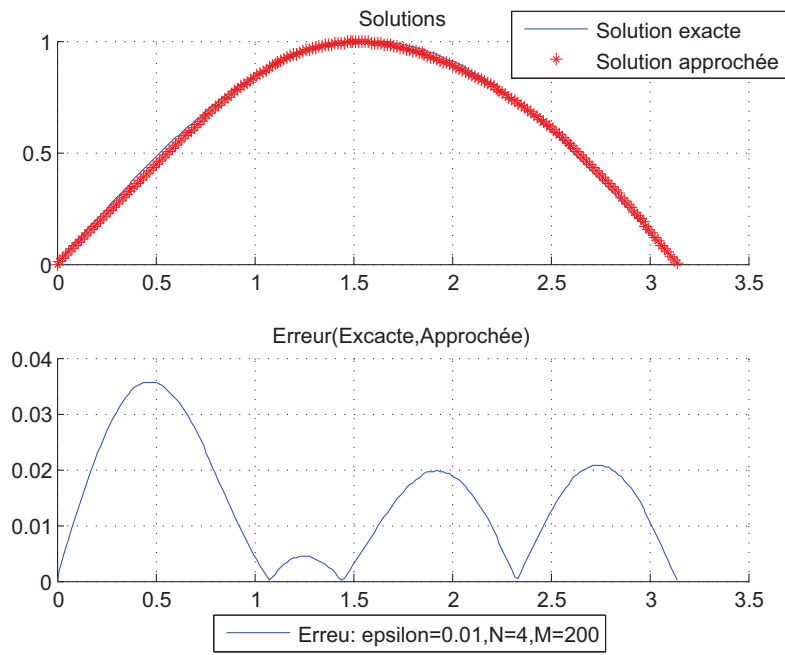


FIGURE 4.8 – Méthode de troncature : $N = 4$, $M = 200$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

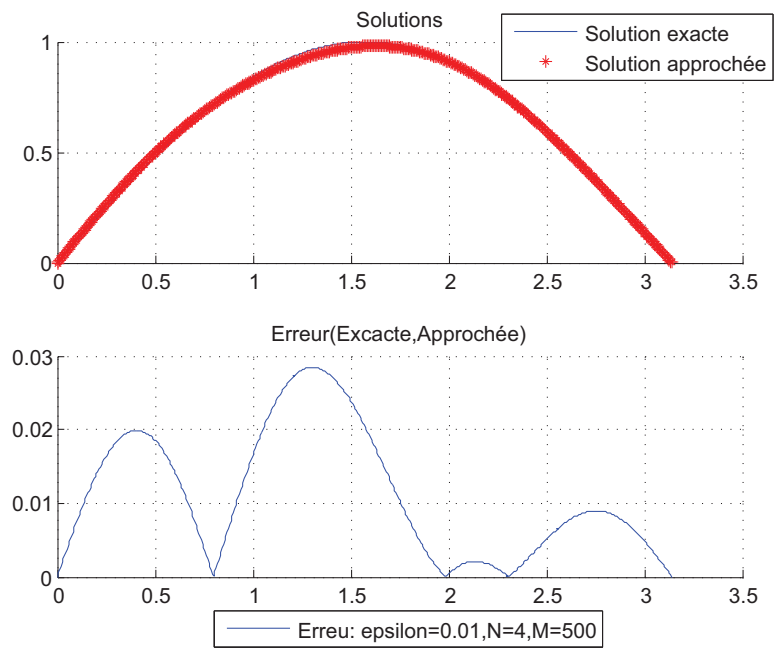


FIGURE 4.9 – Méthode de troncature : $N = 4$, $M = 500$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

4.1.3.2 Résultats numériques par la méthode itérative de Kozlov-Maz'ya

- On fixe une discrétisation $N = 40$ pour calculer la solution approchée avec différents nombres d'itérations avec un niveau de bruit ($\varepsilon = 10^{-3}$) (fig. 4.10, fig. 4.11). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.4)

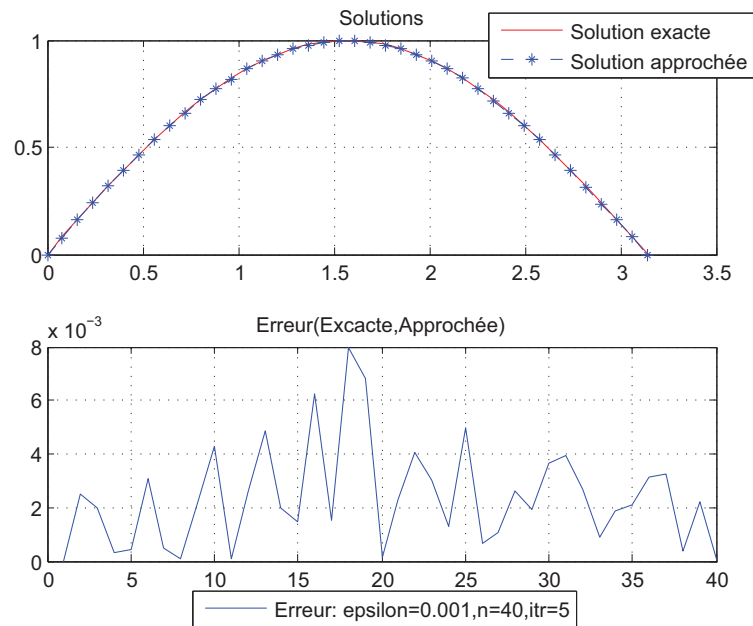


FIGURE 4.10 – Méthode de Kozlov-Maz'ya : $N = 40$, $k = 5$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

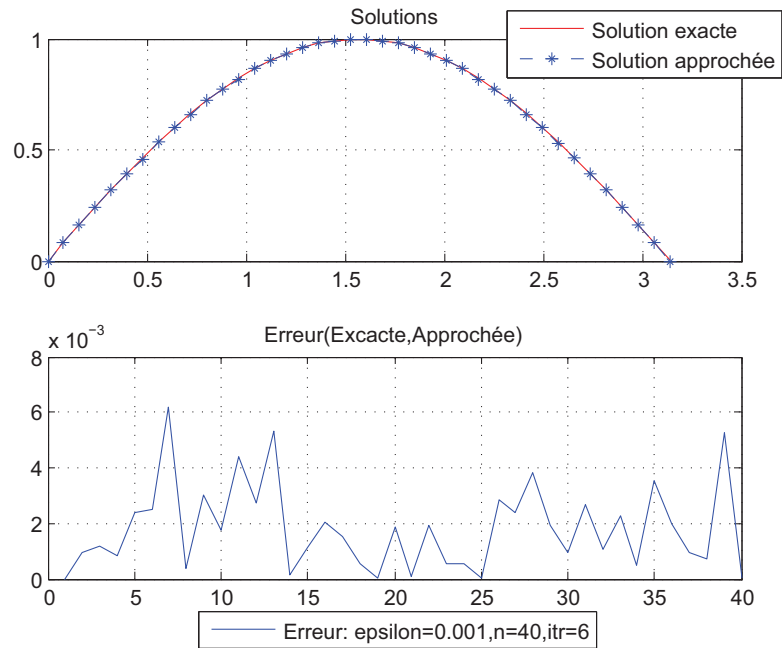


FIGURE 4.11 – Méthode de Kozlov-Maz'ya : $N = 40$, $k = 6$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

- On change le niveau de bruit ($\varepsilon = 10^{-2}$) pour calculer la solution approchée avec différents nombres d'itérations, (fig. 4.12, fig. 4.13). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.4)

TABLE 4.4 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec des données bruitées.

N	ε	k	$E_r(f)$
40	0.001	5	0.0042
40	0.001	6	0.0035
40	0.01	5	0.0285
40	0.01	6	0.0359

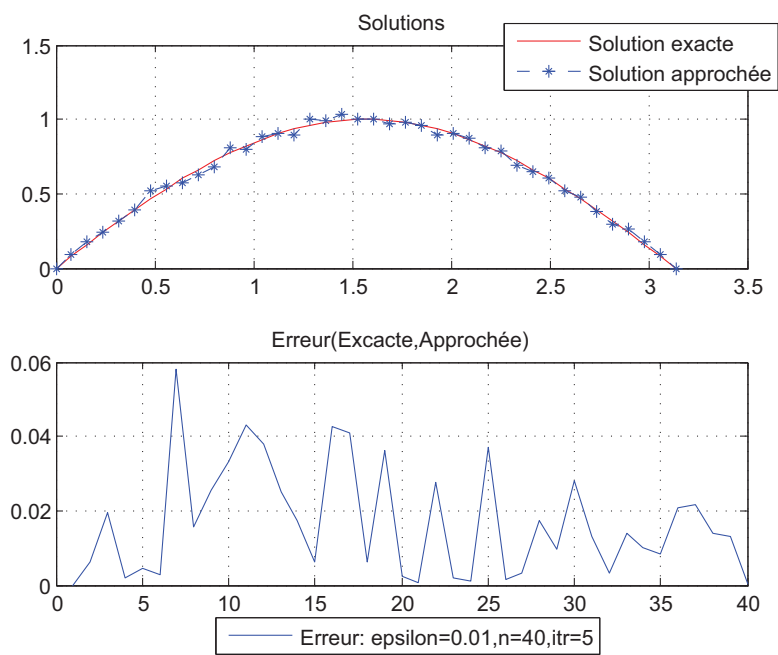


FIGURE 4.12 – Méthode de Kozlov-Maz'ya : $N = 40$, $k = 5$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

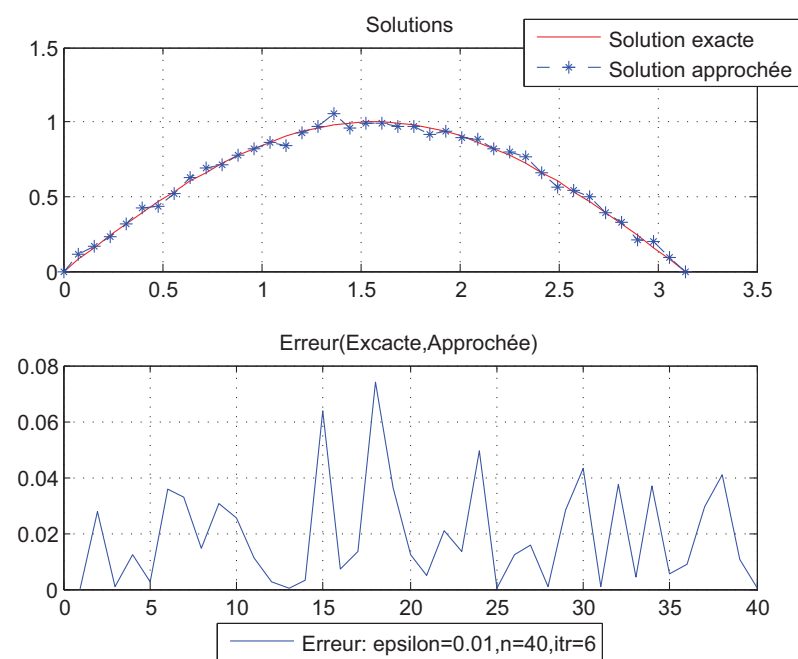


FIGURE 4.13 – Méthode de Kozlov-Maz'ya : $N = 40$, $k = 6$, $\varepsilon = 10^{-2}$.

- Maintenant on donne une comparaison entre la méthode de troncature spectrale et celle de Kozlov Maz'ya avec un niveau de bruit ($\varepsilon = 10^{-2}$) pour calculer la solution approchée (fig. 4.14). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.5)

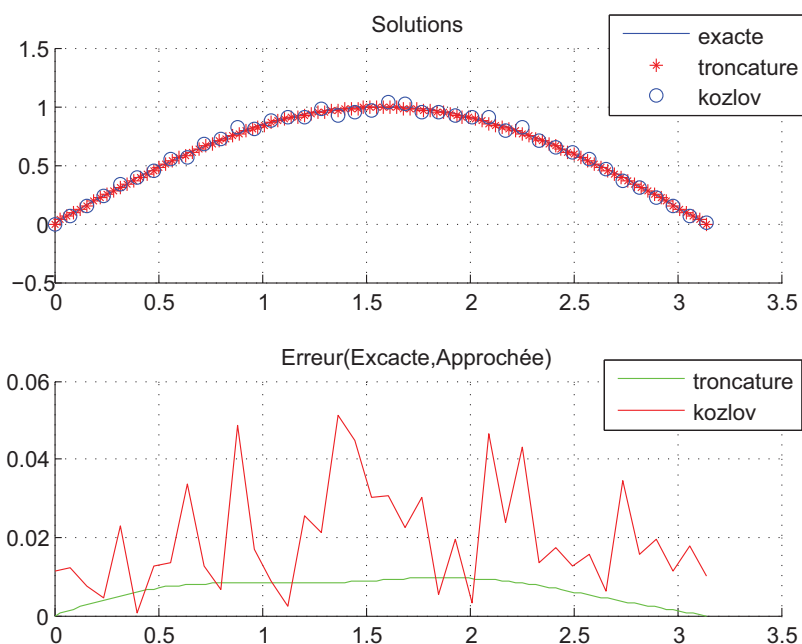


FIGURE 4.14 – comparaison : $N = 40, k = 5, N = 4, M = 100, \varepsilon = 10^{-2}$.

TABLE 4.5 – Comparaison.

Méthodes	$E_r(f)$
Kozlov Maz'ya	0.0326
Troncature	0.0109

Remarque 4.1.1 On remarque que l'erreur commise par la méthode de troncature est faible par rapport à celle de Kozlov-Maz'ya, et cela ne veut pas dire qu'elle est meilleure parce que les couples propres de l'opérateur considéré dans notre exemple sont données de manière exactes, et les erreurs commises sont induites par l'erreur de troncature et celle de l'intégration numérique, qui sont négligeables par rapport aux erreurs induites par l'approximation des couples propres.

4.2 Problème inverse bipolarabolique

4.2.1 Application

On considère le problème inverse suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 u(x, t) = 0, & x \in (0, \pi), t \in (0, 1), \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x, 1) = g(x), u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi], \end{cases} \quad (4.4)$$

où $f(x) = u(x, 0)$ la condition initiale inconnue et $u(x, 1) = g(x)$ la condition finale.

L'opérateur :

$$A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \mathcal{D}(A) = H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi) \subset H = L^2(0, \pi),$$

est positif, auto-adjoint à résolvante compacte (A est diagonalisable). Les couples propres de A sont donnés par :

$$\lambda_n = n^2, \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Dans ce cas, la formule (3.29) prend la forme

$$f(x) = u(x, 0) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{n^2} \left(\int_0^\pi g(x) \sin(nx) dx \right) \sin(nx). \quad (4.5)$$

Dans ce qui suit, on donne un exemple avec les expressions exactes des solutions ($u(x, t), f(x)$).

4.2.2 Exemple

Si $u(x, 0) = \phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(x)$, alors la fonction

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + t\lambda_n) e^{-t\lambda_n} \langle \phi_1, \phi_n \rangle \phi_n(x) = (1 + t\lambda_1) e^{-t\lambda_1} \phi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1 + t\lambda_1) e^{-t\lambda_1} \sin(x)$$

est la solution exacte du problème (4.4). Par conséquent, la donnée $g(x) = u(x, 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2}{e} \sin(x)$.

4.2.3 Résultats numériques

Méthode itérative de Kozlov-Maz'ya. En utilisant les différences finies centrées avec un pas $h = \frac{\pi}{N+1}$ pour approcher la première dérivée u_x et la seconde dérivée u_{xx} , on obtient le problème semi-discret suivant (équation différentielle ordinaire) :

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} - \mathbb{A}_h\right)^2 u(x_i, t) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, t \in (0, 1), \\ u(x_0 = 0, t) = u(x_{N+1} = \pi, t) = 0, & t \in (0, 1), \\ u(x_i, 0) = g(x_i), u_t(x_i, 0) = 0, & x_i = ih, i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.6)$$

où \mathbb{A}_h est la matrice de discrétisation découlant de l'opérateur $A = -\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\mathbb{A}_h = \frac{1}{h^2} \text{Tridiag}(-1, 2, -1) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$$

qui est symétrique définie positive. Nous supposons que la discrétisation est assez fine de sorte que les erreurs sont petites par rapport à l'incertitude δ au niveau des données ; cela signifie que \mathbb{A}_h est une bonne approximation de l'opérateur différentiel $A = -\frac{d^2}{dx^2}$, au sens que le caractère non-borné de l'opérateur entraîne la grande norme de la matrice \mathbb{A}_h . Les couples propres (μ_k, e_k) de \mathbb{A}_h sont donnés par

$$\mu_k = 4 \left(\frac{N+1}{\pi}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k\pi}{2(N+1)}\right), e_k = \left(\sin\left(\frac{jk\pi}{N+1}\right)\right)_{j=1}^N, k = 1, \dots, N.$$

En ajoutant une perturbation à distribution aléatoire gaussienne (obtenue par la commande MATLAB `randn`) à notre donnée g , on obtient le vecteur g^δ :

$$g^\delta = g + \varepsilon \text{randn}(\text{size}(g)),$$

où ε indique le niveau de bruit et la commande "`randn(.)`" génère un vecteur d'éléments de distribution normalisée avec moyenne 0 et de variance $\sigma^2 = 1$ de même taille que g .

L'approximation itérative discrète of (3.59) prend la forme

$$f_k^\delta(x_j) = (I - \omega K_h)^k f_0(x_j) + \omega \sum_{i=0}^{k-1} (I - \omega K_h)^i g^\delta(x_j), \quad j = 1 \dots N, \quad (4.7)$$

où $K_h = (I_N + \mathbb{A}_h)e^{-\mathbb{A}_h}$ and $\omega < \omega^* = \frac{1}{\|K_h\|} = \frac{e^{\mu_1}}{1 + \mu_1}$.

- On fixe une discrétisation $N = 40$ pour calculer la solution approchée avec différents nombres d'itérations avec un niveau de bruit ($\varepsilon = 10^{-3}$) (fig. 4.15, fig. 4.16. Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.6)

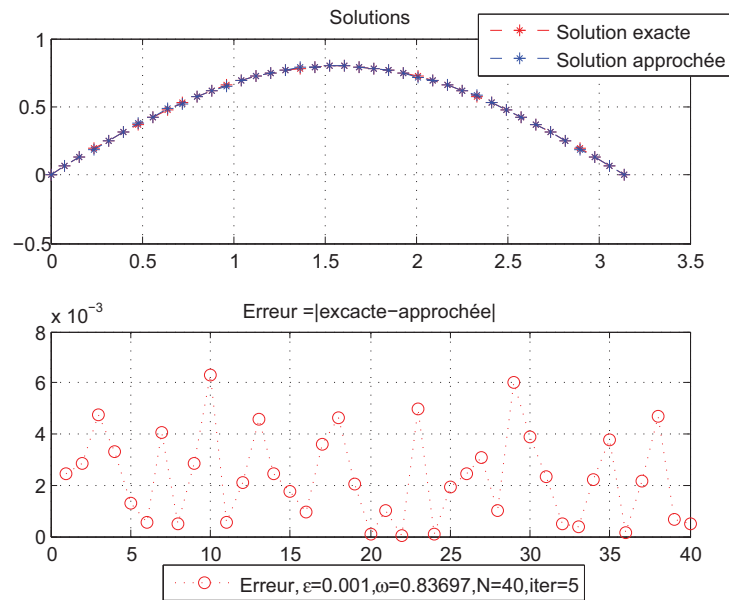


FIGURE 4.15 – Kozlov Maz'ya.

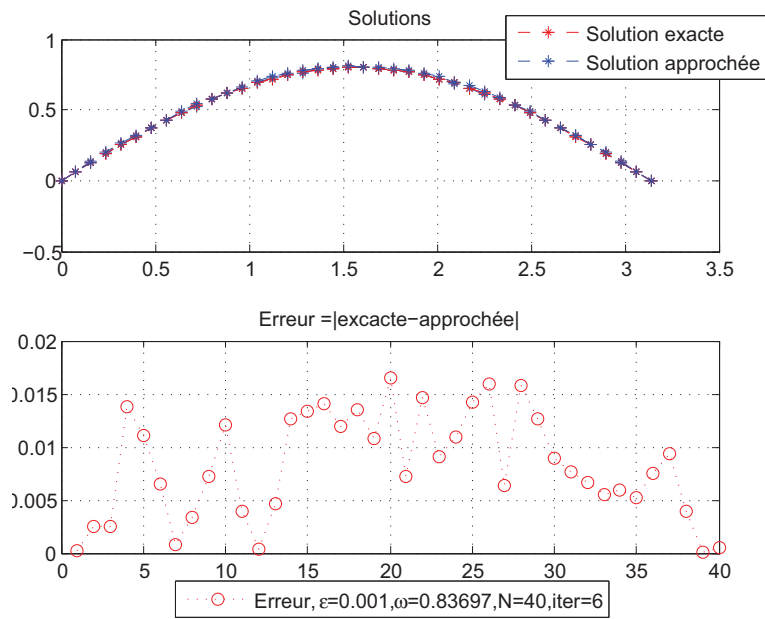


FIGURE 4.16 – Kozlov Maz'ya.

- On change le niveau de bruit ($\varepsilon = 10^{-2}$) On fixe une discrétisation $N = 40$ pour calculer la solution approchée avec différents nombres d'itérations (fig. 4.17, fig. 4.18). Le calcul de l'erreur relative est donné dans le tableau (Tab. 4.6)

TABLE 4.6 – Kozlov-Maz'ya. Erreur relative avec des données bruitées.

N	k	ε	ω	$E_r(f)$
40	5	0.01	0.83697	0.0523
40	6	0.01	0.83697	0.0612
40	5	0.001	0.83697	0.0054
40	6	0.001	0.83697	0.0162

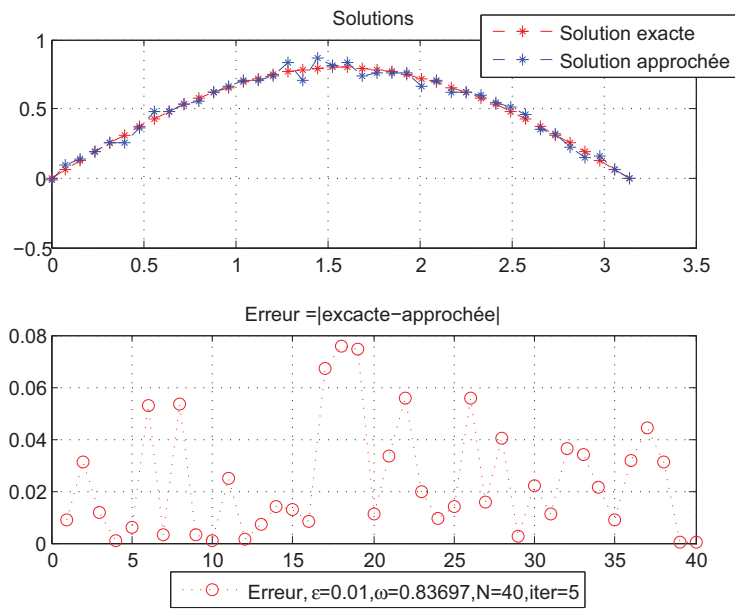


FIGURE 4.17 – Kozlov Maz'ya.

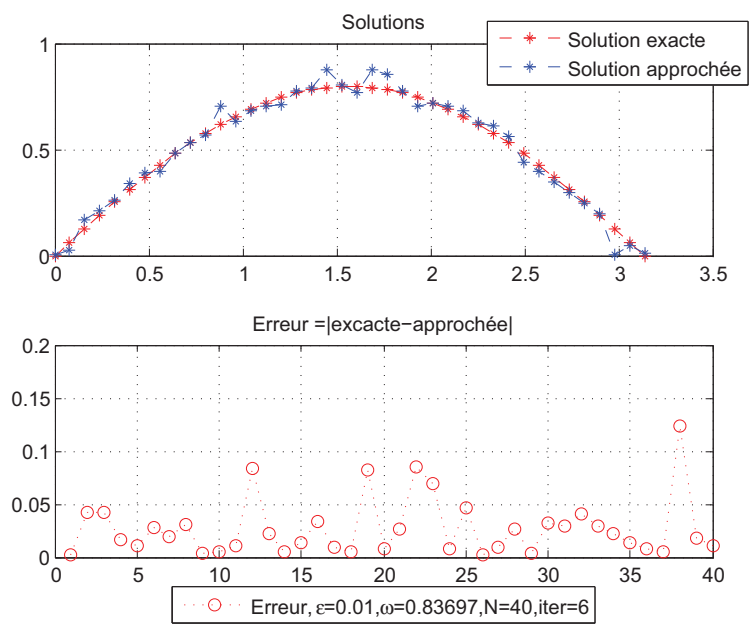


FIGURE 4.18 – Kozlov Maz'ya.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse nous avons étudié deux classes de problèmes inverses engendrés par des équations de type elliptique et bi-parabolique. On a appliqué une procédure de régularisation itérative afin de stabiliser leurs solutions. L'approche théorique adoptée est accompagnée d'une série d'expérimentations numériques justifiant le choix judicieux de la méthode de régularisation.

Les résultats obtenus dans le présent travail, ouvrent de nouveaux horizons dans le développement des méthodes numériques pour la résolution de certains problèmes aux dérivées partielles particulièrement les problèmes inverses.

Comme perspectives, on projette d'élargir cette investigation pour des exemples en dimension supérieure en utilisant des schémas de discrétisation sophistiqués.

Bibliographie

- [1] Alfred S. Carasso, Bochner Subordination, Logarithmic Diffusion Equations, and Blind Deconvolution of Hubble Space Telescope Imagery and Other Scientific Data, SIAM 2010.
- [2] Ames, KA, Straughan, B : Non-Standard and Improperly Posed Problems, Academic Press (1997).
- [3] Atakhadzhaev, MA, Egamberdiev, OM : The Cauchy problem for the abstract bicaloric equation, *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, Vol. 31, No. 4, 187-191 (1990).
- [4] L. Amodei & J.P. Dedieu, *Analyse numérique matricielle*, DUNOD 2008.
- [5] Ch. Ashyralyev, M. Dedetürk, *Approximate solution of inverse problem for elliptic equation with overdetermination*, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2013, Article ID 548017, 11 pages.
- [6] Ch. Ashyralyev, M. Dedetürk, *A finite difference method for the inverse elliptic problem with the Dirichlet condition*, *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, (2013) vol. 1, no. 2, 132-155.
- [7] D.D. Ang, R. Gorenflo, V.K.Le & D.D. Trong, *Moment theory and some inverse problems in potential theory and heat conduction*, *Lecture Notes in Mathematics 1792*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [8] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset & S. Vessella, *The stability for the Cauchy problem for elliptic equations*, *Inverse Problems*, 25 (2009), 123004 (47pp).
- [9] L.S. Abdulkirimov, *Regularization of an ill-posed Cauchy problem for evolution equations in a Banach space*, *Azerbaijan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Fiz. Mat.*, 1 (1977), 32-36 (MR0492645) (in Russian).
- [10] M. Azaïez, F.B. Belgacem & H. El. Fekih, *On Cauchy's problem : II. Completion, regularization and approximation*, *Inverse Problems* 22 (2006), 1307-1036.
- [11] R.S. Anderssen & V.A. Sault, *Surface temperature history from bore hole measurements*, *Mathematical Geology*, 1975.
- [12] S. Andrieux, T.N. Baranger & A. Ben Abda, *Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional*, *Inverse Problems* 22 (2006), 115-133.
- [13] A.B. Bakushinsky & M.Yu. Kokurin, *Iterative methods for approximate solution of inverse problems*, Springer 2004.
- [14] A. Ben Abda, J. Henry & F. Jday, *Missing boundary data reconstruction by the factorization method*, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 347 (2009).
- [15] C. Brezinski & M. Redivo-zaglia, *Méthodes numériques itératives*, Ellipse (2006).
- [16] F. Berntsson & L. Eldén, *Numerical solution of a Cauchy problem for the Laplace equation*, *Inverse Problems* 17 (2001), 839-854.
- [17] F.B. Belgacem, *Why is the Cauchy problem severely ill-posed*, *Inverse Problems* 23 (2007), 823-836.

- [18] G. Bastay, Iterative methods for ill-posed boundary value problems, Linkoping Studies in Science and Technology, Dissertations No.392, Linkoping Univ., Linkoping, 1995.
- [19] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer New York Dordrecht Heidelberg London 2011.
- [20] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson, Paris, 1983 .
- [21] H.D. Bui, Fracture mechanics, inverse problems and solutions, Springer (2006).
- [22] J.V. Beck, B. Blackwell & C.R.St. Clair, Inverse heat conduction, Ill-posed Problem, Wiley, New York, 1985.
- [23] J. Baumeister & A. Leitao, *On iterative methods for solving ill-posed problems modeled by partial differential equations*, J. Inverse Ill-Posed Probl., 9 (2001), no. 1, 13-29.
- [24] L. Bourgeois, *Convergence rates for the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems 21 (2005), No. 3, 1087-1104.
- [25] L. Bourgeois, *A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation*, Inverse Problems 22 (2006), 413-430.
- [26] N.S. Bernard, Y. Saad, & B.S. Roger, *Computing $\exp(-\tau A)$ with laguerre polynomials*, ETNA (2010), Vol. 37, 147-165.
- [27] Z. Bai, J. Demmel, J. Dongarra , A. Ruhe, & H. Van Der Vorst, Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems : a practical guide, SIAM, Philadelphia (2000).
- [28] A. Bouzitouna, N. Boussetila et F. Rebbani, Two regularization methods for a class of inverse boundary value problems of elliptic type, Bouzitouna et al. Boundary Value Problems 2013, 2013 :178.
- [29] A. Bouzitouna, Sur quelques méthodes itératives appliquées à certains problèmes inverses, Thèse de Doctorat (LMD), Université Badji Mokhtar Annaba. 2014.
- [30] A. Carasso, *Determining surface temperature from interior observations*, SIAM . Appl. Math., 42 (1982), 558-574.
- [31] C. Cosner & W. Rundell, *Extension of solutions of second order partial differential equations by the method of quasireversibility*, Houston Journal of Mathematics, (1984), Vol. 10, No. 3, 357-370.
- [32] D. Colton, H.W. Engl, A.K. Louis, J.R. Mc Laughlin & W. Rundell (editors), Surveys on solution methods for inverse problems, Springer, Wien, New York, (2000).
- [33] G. Cain & G. Meyer, Separation of variables for partial differential equations : an eigenfunction approach, Studies in Advanced Mathematics vol. 46, London : Chapman and Hall (2006).
- [34] H. Chebli, Analyse Hilbertienne, Centre des Publication Universitaire, Tunis, 2001.
- [35] H. Cheng, Chu-Li Fu & Xiao-Li Feng, *Determining surface heat flux in the steady state for the Cauchy problem for the Laplace equation*, Applied Mathematics and Computation 211 (2009), 374-382.
- [36] M. Chipot, Elliptic equations : an introductory course, Birkhäuser Verlag AG (2009).
- [37] M. Choulli, Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2009).

- [38] Bc. Darja Sucha, Matrix functions and their numerical approximations, Master Thesis 2011.
- [39] A.M. Denisov, E. V. Zakharov, A. V. Kalinin & V. V. Kalinin, *Numerical methods for some inverse problems of heart electrophysiology*, Differential Equations (2009) Vol. 45, No. 7, 1034-1043.
- [40] N. Dunford & J. Schwartz, Linear operators, part II : spectral theory, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
- [41] P. Deuffhardy, H.W. Engl & O. Scherzer, *A convergence analysis of iterative methods for the solution of nonlinear ill-posed problems under a new invariant conditions*, Inverse Problems 14 (1998), 1081-1106.
- [42] V. Druskin & L.A. Knizhnerman, *Two polynomial methods of calculating functions of symmetric matrices*, USSR Comput. Math. Math. Phys., Pergamon Press, Inc., Vol. 29 (6) (1989) ,112-121.
- [43] H.W. Engel, M. Hanke & A. Neubauer, Regularization of inverse problems, Kluwer Academic, (2000).
- [44] H.W. Engel, W. Rundel, eds., Inverse problems in diffusion processes, SIAM, Philadelphia, (1995).
- [45] Fichera, G : Is The Fourier Theory of Heat Propagation Paradoxical?, Rendicont 1 Del Circolo Matematico Di Palermo, Serie II. Tomo XLI, pp. 5-28 (1992)
- [46] A. Frommer & V. Simoncini, Matrix functions in model order reduction : theory, research aspects and applications, Mathematics in Industry, Schilders, Wil H. A. and van der Vorst, Henk A. eds, Springer, 2008.
- [47] H.O. Fattorini, The Cauchy problem, encyclopedia of mathematics and its applications, 18, Cambridge University Press 1983.
- [48] R.A. Friesner, L. S. Tuckerman, B. C. Dornblaser, & T. V. Russo, *A method for exponential propagation of large systems of stiff nonlinear differential equations*. Journal of Scientific Computing, 4 :327–354, 1989.
- [49] Fushchich, VL, Galitsyn, AS, Polubinskii, AS : A new mathematical model of heat conduction processes, Ukrainian Math. J., 42, 210-216 (1990)
- [50] C.W. Groetsch, The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations of the first kind, Pitman, Boston, (1984).
- [51] C.W. Groetsch, Inverse Problems in the mathematical sciences, Vieweg, Wiesbaden, (1993).
- [52] C. W. Groetsch, Stable approximate evaluation of unbounded operators, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2007).
- [53] E. Gallopoulos & Y. Saad, *Parallel solution of parabolic equations using polynomial approximations to the exponential*, Technical report, Research Institute for Advanced Computer Science, Technical report number 90-14.
- [54] F.R. Gantmacher, The theory of matrices, volume one. Chelsea, New York, 1959.
- [55] G.H. Golub & C.F. Van Loan. Matrix computations, Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, USA, third edition, 1996.
- [56] G.H. Golub & G. Meurant, Matrices, Moments and quadrature with applications, Princeton University Press (2010).

- [57] R. Gorenflo & S. Vessella, *Abel integral equations*, Lecture Notes in Mathematics 1461, Springer Verlag, Berlin, 1991.
- [58] V.I. Gorbachuk & M.L. Gorbachuk, *Boundary value problems for operator differential equations*, Kluwer, Dordrecht (1991).
- [59] V. Grimm & M. Hochbruck, *Rational approximation to trigonometric operators*, BIT (2008), vol. 48, no. 2, 215-229.
- [60] D.N. Hào, N.V. Duc & D. Lesnic, *A non-local boundary value problem method for the Cauchy problem for elliptic equations*, Inverse Problems, 25 (2009), 055002(27pp).
- [61] I. Hnetynkova, M. Plesinger, & Z. Strakos, *The regularizing effect of the Golub-Kahan iterative bidiagonalization and revealing the noise level in the data*, BIT Numerical Analysis (2009), No. 4, 669-696.
- [62] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy problem in linear partial equations*, Dover, New York (1953).
- [63] M.E. Hochstenbach, *Subspace methods for eigenvalue problems*, Ph.D. Thesis, Utrecht University (2003).
- [64] N.J. Higham, *Functions of matrices : theory and computation*, SIAM (2008).
- [65] P.C. Hansen, *Rank-deficient and discrete ill-posed problems, Numerical Aspects of Linear Inversion*, SIAM Philadelphia (1997).
- [66] R.A. Horn & Charles R. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1991.
- [67] T. Hohage, *Regularization of exponentially ill-posed problems*, Numer. Funct. Anal. Optim., 21 (2000), 439-464.
- [68] D.Y. Ivanov, *Inverse boundary value problem for an abstract elliptic equation*, Differential Equations, (2000), Vol. 36, no. 4, 579-586.
- [69] G. Inglese, *An inverse problem in corrosion detection*, Inverse problem, (1997) 13, 977-994.
- [70] V. Isakov, *Inverse problems for partial differential equations*, Springer-Verlag (2006).
- [71] B.T. Johansson & D. Lesnic, *A procedure for determining a spacewise dependent heat source and the initial temperature*, Applicable Analysis, (2008), Vol. 87, no. 3, 265-276.
- [72] F. John, *Continuous dependence on the data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound*, Comm. Pure and Appl. Math., 13 (1960), 551-585.
- [73] T. Johansson & D. Lesnic, *Determination of a spacewise dependent heat source*, J. Comput. Appl. Math., 209 (2007), 66-80.
- [74] T.K. Jensen, *Stabilization algorithms for large-scale problems*, PHD Thesis, Technical University of Denmark, Informatics and Mathematical Modelling, Denmark (2006).
- [75] Joseph, L, Preziosi, DD : *Heat Waves*, Rev.Mod. Physics, 41-73 (1989)
- [76] A. Kirsch, *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*, Springer (2011).
- [77] P.G. Kaup, F. Santosa, *Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic boundary measurements*, J. Nondestruct. Eval., 14 (1995) 127-136.
- [78] J.B. Keller, *Inverse problems*, Amer. Math. Monthly, 83 : 107-118, (1976).

- [79] M.A. Krasnosel'skii, G.M. Vainikko, P.P. Zabreiko & Y.B. Rutitskii, *Approximate solutions of operator equations*, Wolters-Noordho Publishing, Groningen, 1972.
- [80] M.V. Klibanov, F. Santosa, *A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace's equation*, SIAM J. Appl. Math. 51, 1653-1675, 1991.
- [81] R. Kress, *Linear integral equations*, vol. 82 of Applied Mathematical Sciences, Springer (1989).
- [82] R. Kress, D. Colton, *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Applied Mathematical Sciences, Springer (2010).
- [83] S.G. Krein & Ju.I. Petunin, *Scales of Banach spaces*, Uspehi Mat. Nauk, 21 (1966), 89-168.
- [84] S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 02904 (1971).
- [85] S.H. Kulkarni & M.T. Nair, *A characterization of closed range operators*, Indian J. Pure Appl. Math., 31(4) (2000), 353-361.
- [86] S.H. Kulkarni, M.T. Nair & G. Ramesh, *Some properties of unbounded operators with closed range*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 118, No. 4, (2008), 613-625.
- [87] V.A. Kozlov & V.G. Maz'ya, *On the iterative method for solving ill-posed boundary value problems that preserve differential equations*, Leningrad Math. J., 1 (1990), No. 5, 1207-1228.
- [88] V.A. Kozlov, V.G. Maz'ya, & A.V. Fomin, *An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations*, U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 31 (1991), no. 1, 45-52.
- [89] Leiva, H : *Controllability of a Generalized Damped Wave Equation*, Notas de Matemática, No. 244, Mérida (2006)
- [90] B. Lewis & L. Reichel, *Arnoldi-Tikhonov regularization methods*, J. Comput. Appl. Math., 226 (2009), 92-102.
- [91] H.A. Levine & S. Vessella, *Estimates and regularization for solutions of some ill-posed problems of elliptic and parabolic type*, Rend. Circolo Matem. Palermo, 34 (1985), 141-160.
- [92] M.M. Lavrentyev, V.G. Romanov & S.P. Shishatski, *Ill-posed problem of mathematical physics and analysis*, American Mathematical Society, Providence, RI, (1986).
- [93] M.M. Lavrentiev, *On the Cauchy problem for the Laplace equation*, (In Russian). Izvest. Akad. Nauk SSSR (Ser. Matem.) 20 (1956), 819-842.
- [94] M.M. Lavrentiev, *Some improperly posed problems in mathematical physics*, Springer-Verlag, New York (1967).
- [95] Pe. Lancaster & M. Tismenetsky, *The theory of matrices*. Academic Press, London, second edition, 1985.
- [96] R. Lattès & J.-L. Lions, *The method of quasi-reversibility, Applications to partial differential equations*, Elsevier, New York (1969).
- [97] X.X. Li, H.Z. Guo, S.M. Wan & F. Yang, *Inverse source identification by the modified regularization method on poisson equation*, Journal of Applied Mathematics Volume 2012, Article ID 971952, 13 pages.

- [98] D. Maxwell, *Kozlov-Maz'ya iteration as a form of Landweber iteration*, arXiv :1107.2194v1, math.AP, 12 Jul 2011.
- [99] L. Marin, *An alternating iterative MFS algorithm for the Cauchy problem for the modified Helmholtz equation*, *Comput Mech* (2010) 45, 665-677.
- [100] V.A. Morozov, *On the solution of functional equations by the method of regularization*, *Soviet Math. Doklady*, 7 (1966), 414-417.
- [101] V.A. Morozov, *Methods for solving incorrectly posed problems*, Springer-Verlag, (1984).
- [102] M.T. Nair, *Linear operator equations : approximation and regularization*, World Scientific (2009).
- [103] Z. Nashed, *Approximate regularized solutions to improperly posed linear integral and operator equations*, In A. Dold, B. Eckmann (eds.), *Constructive and computational methods for differential and integral equations*. Springer-Verlag (1974).
- [104] D.G. Orlovsky, *Inverse Dirichlet problem for an equation of elliptic type*, *Differential Equations*, (2008), Vol. 44, No. 1, 124-134.
- [105] D.G. Orlovsky & S. Piskarev, *On approximation of inverse problems for abstract elliptic problems*, *J. Inv. Ill-Posed Problems* 17 (2009), 765-782.
- [106] D.G. Orlovsky, *Inverse problem for elliptic equation in a Banach space with Bitsadze-Samarsky boundary value conditions*, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 21 (2013), 141-157.
- [107] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and application to partial differential equations*, Springer-Verlag, 1983.
- [108] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky & I.A. Vasin, *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*, p. cm. *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics 222*, Marcel Dekker (2000).
- [109] B.N. Parlett, *The symmetric eigenvalues problem*, SIAM Philadelphia (1998).
- [110] L.E. Payne, *Improperly posed problems in partial differential equations*, SIAM, Philadelphia, PA, (1975).
- [111] M. Popolizio, *Acceleration techniques for approximating the matrix exponential*, PHD Thesis, Università degli Studi di Bari, Italy (2008).
- [112] M. Popolizio & V. Simoncini, *Acceleration techniques for approximating the matrix exponential operator*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 30 (2008), 657-683.
- [113] N.H. Pollack & S. Huang, *Climate reconstruction from subsurface temperatures*. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, (2000), 28, 339-65.
- [114] A.L. Qian, *Identifying an unknown source in the poisson equation by a mollification regularization method*, *International J. of Math. Sci. and Engg. Appls.*, (2013) Vol. 7 No. V, 193-201.
- [115] A.L. Qian, *Identifying an unknown source in the Poisson equation by a wavelet dual least square method*, *Boundary Value Problems* 2013, 2013 :267.
- [116] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Méthodes numériques algorithmes, analyse et applications*, Springer. Verlag Italia, Milano 2004, 2007

- [117] P.H. Quan, D.D. Trong, A.P. Ngoc Dinh, *A nonlinearly ill-posed problem of reconstructing the temperature from interior data*, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 29, Issue 3 & 4, (2008), 445-469.
- [118] Radu, P, Todorova, G, Yordanov, B : Diffusion phenomenon in Hilbert spaces and applications, J. Differential Equations 250, 4200-4218 (2011)
- [119] R.J. Radke, A Matlab implementation of the implicitly restarted Arnoldi method for large scale eigenvalue problems, Ph.D. Thesis, Rice University (1996).
- [120] Z. Ranjbar, Numerical solution of ill-posed Cauchy problems for parabolic equations, PHD Thesis, Department of Mathematics, Scientific Computing Link.ping University (2010).
- [121] A.A. Samarskii, P.N. Vabishchevich, Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics, Walter de Gruyter. Berlin. New York (2007).
- [122] A. Shlapunov, *On Iterations of non-negative operators and their applications to elliptic systems*, Math. Nachr., 218 (2000), 165-174.
- [123] P.Y. Shen, A.E. Beck, *Determination of surface temperature history from borehole temperature gradients*, Journal of Geophysical Research, Vol. 88, No. B9, 7385-7493 1983.
- [124] R.B. Sidje, *Expokit : a software package for computing matrix exponentials*, ACM Trans. Math. Softw., ACM, Vol. 24(1) (1998), 130-156.
- [125] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, SIAM (2003).
- [126] A.N. Tikhonov & V.Y. Arsenin, Solution of ill-posed problems, Winston & Sons, Washington, DC, (1977).
- [127] A. Tarantola, Inverse problems theory, Elsevier, (1987).
- [128] L.N. Trefethen. *The asymptotic accuracy of rational best approximation to e^z in a disk*, J. Approx. Theory, 40 :380-383, 1984.
- [129] H.A. Van Der Vorst, Iterative methods for large linear systems, Mathematical Institute Utrecht University (2000).
- [130] M.L. Whitney, Theoretical and numerical study of tikhonov's regularization and Morozov's discrepancy principle, Ph.D. Thesis, Georgia State University (2009).
- [131] P. Wikstrom, W. Lodzimierz Blasiak & F. Berntsson, *Estimation of the transient surface temperature and heat flux of a steel slab using an inverse method*, Applied Thermal Engineering, 27 (2007). 2463-2472.
- [132] J.T. Wloka, B. Rowley & B. Lawruk, Boundary value problems for elliptic systems, Cambridge University Press (1995).
- [133] F. Yang, L. Yan & T. Wei, *Reconstruction of the corrosion boundary for the Laplace equation by using a boundary collocation method*, Mathematics and Computers in Simulation, 79 (2009), 2148-2156.
- [134] X. Yang Xin, M. Choulli, J. Cheng, *An iterative BEM for the inverse problem of detecting corrosion in a pipe*, Numerical Mathematics, (2005), Vol.14, No.3, 252-266.