République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

En vue de l'obtention du Diplôme de
Master Académique en Mathématiques

Option :Équations aux Dérivées Partielles et Analyse Numérique

Thème

Approximation par différences finies-éléments finis et comportement asymptotique d'une inéquation variationnelle parabolique

---

Présenté par : Boutaghane Mohamed Nadjib

Devant le jury :

Président :	D^r *Benrabah* Abderrafik	M.C.A, Université 8 Mai 1945 Guelma
Rapporteur :	D^r *Mehri* Allaoua	M.C.A, Université 8 Mai 1945 Guelma
Examinateur :	D^r *Fernane* Khaireddine	M.C.A, Université 8 Mai 1945 Guelma

Session Septembre 2020

Table des matières

Résumé

Ce mémoire est une analyse numérique du problème variationnel d'une inéquation parabolique liée à l'opérateur de Laplace. Nous avons approché le problème par une approximation mixte différences finies-éléments finis de degré un. L'objectif principal de ce travail est l'étude de la convergence et le comportement asymptotique de la solution.

Abstract

This thesis is a numerical analysis of the variational problem of a parabolic inequality linked to the Laplace operator. We approached the problem by a mixed approximation : Finite difference method - Finite element of first order . The main objective of this work is the study of convergence and the asymptotic behavior of the solution.

Introduction

Dans les soixante dernières années, les inéquations variationnelles sont devenues un outil redoutable dans l'étude mathématique de nombreux problèmes non linéaires en physique et en mécanique, la compléxité des conditions aux limites et la diversité des équations constitutives conduisant aux formulations variationnelles de type inéquations [5,10,12,13].

Un problème d'inéquation variationnelle englobe en les généralisant un certain nombre de problèmes classiques tels que la recherche d'un zéro d'une fonction, la recherche d'un point stationnaire d'un problème d'optimisation, le problème de complémentarité linéaire, etc [12,16,21]. Les inéquations variationnelles permettent souvent par une résolution approchée de proposer une modélisation des courants océaniques et des mouvements des masses d'air de l'atmosphère pour les météorologistes, la simulation numérique du comportement des gratte-ciel ou des ponts sous l'action du vent pour les architectes et ingénieurs et des plusieurs problèmes non linéaires en physique et en mécanique [11,12].

En 1972, Duvaut et Lions [8] ont écrit un livre modélisant des phénomènes importants de la physique et de l'ingénierie en termes d'inéquations variationnelles qui sont devenues la principale source de future recherche appliquée dans ce domaine.

En 1933, A. Signorini [20] a formulé un problème de contact sans frottement entre un corps linéairement élastique et une fondation rigide. Ce n'est qu'en 1964, que G.

Fichera [9] a pu résoudre ce problème en utilisant quelques propriétés des inéquations variationnelles elliptique. L'étude mathématique des problèmes de contact a commencé en 1972, avec l'ouvrage de Duvaut et Lions, où on trouve des résultats d'existence et d'unicité de plusieurs problèmes de contact, mais dans le cas linéaire.

Stampacchia [13,21] a présenté une théorie des inéquations variationnelles impliquant une forme bilinéaire non symétrique et a publié le document pionnier conjointement avec Lions en 1967.

Dans [15,18] les auteurs ont établi une analyse numérique par éléments finis d' une inéquation variationnelle appelé problème d'obstacle et une analyse du problème variationnel de la torsion elasto-plastique. Pour d'autres études sur les inéquations variationnelles nous renvoyons aux travaux de [2,14,15,17,18].

Nous présentons dans ce mémoire un problème d'inéquation parabolique qui a été établit par [3,4]. Ce mémoire est divisé en deux chapitres. Le premier chapitre est dédié à des généralités sur l'inéquation variationnelle parabolique, où nous définissons le problème continu et nous annonçons deux théorèmes d'existence et d'unicité, et de régularité de la solution. Le deuxième chapitre est le plus important. Il est consacré à l'étude du problème variationnel parabolique lié à l'opérateur de Laplace. Nous commençons ce chapitre par une définition du problème continu différentiel et variationnel. Dans la deuxième section nous discrétisons le problème par éléments finis pour la variable d'espace et nous démontrons une estimation de l'inergie de la solution. Pour la variable temps nous choisissons une discrétisation par différences finies en particulier le $\theta-$schéma et cela nous permet d'établir la stabilité du schéma sous certaine condition sur le paramètre θ. la troixième section est consacrée entièrement au résultat principal de ce mémoire, nous introduisons un opérateur contractant et nous étudions le comportement asymptotique de la solution.

Chapitre 1

Généralités sur l'inéquation variationnelle parabolique (I.V.P)

1.1 Hypothèses, notations et définitions

Soit V, H deux espaces de Hilbert tel que $V \subset H, V$ dense dans H $(\overline{V} = H)$. Supposons que le dual $H^\star = H$, alors on a $V \subset H \subset V^\star$. On munit $H(resp.V)$ du produit scalaire $(.,.)$ et de la norme $\|.\|_H$ $(resp.((.,.)), \|.\|_V)$. De plus on considère $(.,.)$ comme produit scalaire de dualité entre V et $V^\star$.

Nous introduisons,

- un intervalle de temps $[0, T]$, avec $0 < T < \infty$,
- une forme bilinéaire $a(.,.) : V \times V \longrightarrow R$, continue, fortement coercive dans le sens suivant :

$$\begin{gathered} \exists \gamma > 0 \quad et \quad \mu > 0 \qquad tel\, que \\ a(v, v) + \mu \|v\|_H^2 \geq \gamma \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V, \end{gathered}$$

- un espace

$$L^2(0, T; V) = \left\{ v :]0, T[\longrightarrow V, t \longrightarrow v(t) \quad tel\, que \quad \int_0^T \|v\|_V^2 dt < \infty \right\},$$

- une fonction $f \in L^2(0, T; V^\star)$,
- une donnée initiale $u_0 \in H$,
- un ensemble K convexe fermé non vide inclus dans V,
- un ensemble K_1 convexe fermé non vide inclus dans $L^2(0, T; V)$ définit par,

$$K_1 = \left\{ v \in L^2(0, T; V) \ / \ v(t) \in K, \forall t \in]0, T[\right\}.$$

On considère le problème de l'inéquation variationnelle parabolique (I.V.P) suivant, étant données $f \in L^2(0,T;V^\star)$ et $u_0 \in H$,

$$\begin{cases} \text{on cherche une fonction } u \in K_1 \text{ tel que } \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star) \text{ vérifiant,} \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a\left(u, v-u\right) \geq \left(f, v-u\right) \qquad \forall v \in K_1,\ \forall t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.1. *On appelle solution forte, une fonction $u \in K_1$ vérifiant (1.1).*

On associe à cette formulation forte la notion de solution faible. Notons d'abord que si u est une solution forte, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) + a\left(u, v-u\right) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a\left(u, v-u\right) + \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) \\ &\geq \left(f, v-u\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v-u|^2, \quad \forall v \in K_1,\ \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star). \end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité sur $]0,T[$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) dt + \int_0^T a\left(u, v-u\right) dt &\geq \int_0^T \left(f, v-u\right) dt + \frac{1}{2}|v(T)-u(T)|^2 - \frac{1}{2}|v(0)-u(0)|^2 \\ &\geq \int_0^T (f, v-u) dt - \frac{1}{2}|v(0)-u(0)|^2. \end{aligned}$$

Car $\frac{1}{2}|v(T)-u(T)|^2$ est positif.

Définition 1.2. *On appelle solution faible, une fonction $u \in K_1$ qui vérifie*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^T \left(\frac{\partial v}{\partial t}, v-u\right) dt + \int_0^T a\left(u, v-u\right) dt \geq \int_0^T \left(f, v-u\right) dt - \frac{1}{2}|v(0)-u(0)|^2, \forall v \in K_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial v}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

1.2 Résultat d'existence, d'unicité et de régularité

Théorème 1.1. *[5, 12, 13] Pour toute $f \in L^2(0,T;V^\star)$ et $u_0 \in H$, il existe une solution faible unique u appartenant à l'espace $L^2(0,T;V) \cap C^0(0,T;H)$.*

Indiquons un théorème de régularité, qui est valable lorsque $a(.,.)$ est symétrique.

Théorème 1.2. *[5, 12, 13] Pour toute $f \in L^2(0,T;V^\star)$ et $u_0 \in H$, il existe une solution forte unique. Plus précisément,*

$$\exists u \in C^0(0,T;V), \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H), u(t) \in K, \forall t \in [0,T] \quad \textit{et on a}$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a\left(u, v-u\right) \geq \left(f, v-u\right) & \forall v \in K_1, \quad \forall t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Remarque 1.1. *Si $K = V$ le problème variationnel (1.1) se réduit à une équation variationnelle parabolique. étant données $f \in L^2(0,T;V^\star)$ et $u_0 \in H$, on cherche une fonction $u \in V$ tel que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;V^\star)$ vérifiant,*

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a\left(u, v\right) = \left(f, v\right) & \forall v \in V, \quad \forall t \in]0,T[\\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Chapitre 2

Inéquation variationnelle parabolique liée à l'opérateur de Laplace

2.1 Le problème continu

Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{R}^2$, de frontière Γ suffisamment régulière. On pose $Q =]0,T[\times\Omega,\ \Sigma =]0,T[\times\Gamma$. Considérons le problème différentiel de l'inéquation parabolique pour l'opérateur de Laplace $\mathcal{A} = -\Delta + a_0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u \leq f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in]0,T[\times\Gamma \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ u(t,x) \leq \psi(t,x) & \forall (t,x) \in]0,T[\times\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

avec

$$f \in L^2(0,T;L^\infty(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^{-1}(\Omega)),\ f \geq 0,\ u_0 \in L^2(\Omega)$$

$$\psi \in L^2(0,T;W^{2,\infty}(\Omega)),\ \psi \geq 0\ \ \forall (t,x) \in]0,T[\times\Gamma.$$

La fonction donnée ψ s'appelle obstacle, en général c'est une fonction de $x = (x_1, x_2)$ qui ne dépend pas du temps t. Supposons qu'il existe une constante,

$$\beta > 0,\ \text{tel que } a_0 \geq \beta > 0. \tag{2.2}$$

Le problème (2.1) est équivalent à un problème de frontière libre,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u \leq f & \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ u(t,x) = 0 & \forall (t,x) \in]0,T[\times\Gamma \\ u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega \\ u(t,x) \leq \psi(t,x) & \forall (t,x) \in]0,T[\times\Omega \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u - f\right)(u-\psi) = 0 & \text{dans }]0,T[\times\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

On pose $V = H_0^1(\Omega), H = L^2(\Omega)$, alors on a $V \subset H \subset V^\star$.

Soit $v \in H_0^1(\Omega), u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u, v\right)_{L^2(\Omega)} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right)_{L^2(\Omega)} + (\mathcal{A}u, v)_{L^2(\Omega)},$$

or

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}u, v)_{L^2(\Omega)} &= -\int_\Omega \Delta uv dx + \int_\Omega a_0 uv dx \\
&= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega a_0 uv dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).
\end{aligned}$$

On pose

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Omega a_0 uv dx, \ u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue fortement coercive sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. On définit l'ensemble convexe fermé non vide K_1 par,

$$K_1 = \left\{ v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \ / \ v \leq \psi \text{ dans }]0, T[\times \Omega \right\}.$$

Posons

$$\Omega^0 = \{x \in \Omega / u = \psi\}, \ \Omega^+ = \{x \in \Omega / u < \psi\},$$

alors

$$\Omega = \Omega^0 \cup \Omega^+.$$

Pour tout $v \in K_1, u \in K_1 \cap H^2(\Omega)$ on a,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u\right) + a(u, v - u) &= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u\right)(v - u)\, dx \\
&= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u\right)(v - u)\, dx + \int_{\Omega^+} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u\right)(v - u)\, dx \\
&= \int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u\right)(v - \psi)\, dx + \int_{\Omega^+} f\,(v - u)\, dx,
\end{aligned}$$

comme $v - \psi \leq 0, \ \forall v \in K_1$, ce qui donne

$$\int_{\Omega^0} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}u\right)(v - \psi)\, dx \geq \int_{\Omega^0} f\,(v - \psi)\, dx.$$

Par conséquent on a,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a(u, v-u) &\geq \int_{\Omega^0} f\,(v-\psi)\,dx + \int_{\Omega^+} f\,(v-u)\,dx \\
&= \int_{\Omega^0} f\,(v-u)\,dx + \int_{\Omega^+} f\,(v-u)\,dx \\
&= \int_{\Omega} f\,(v-u)\,dx.
\end{aligned}$$

Donc le problème continue de l'inéquation variationnelle parabolique consiste à

$$\left\{\begin{array}{lr}
\text{trouver } u \in K_1, \text{ tel que } \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \text{ vérifiant,} & \\
\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) + a\,(u, v-u) \geq (f, v-u) & \forall v \in K_1 \\
u(0,x) = u_0(x) & \forall x \in \Omega
\end{array}\right. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1. *Si $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ alors $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. En effet*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &= \left(\int_0^T \|f\|^2_{H^{-1}(\Omega)} dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left\{\int_0^T \left(\sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} \int_\Omega f(t,x)v(t,x)dx\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(\int_\Omega fvdx\right)^2 dt &\leq \int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right)\left(\int_\Omega |v|^2 dx\right) dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right) dt, \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \ \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1.
\end{aligned}$$

Ce qui prouve que

$$\left\{\int_0^T \left(\sup_{\|v\|_{H_0^1} \leq 1} \int_\Omega f(t,x)v(t,x)dx\right)^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{\int_0^T \left(\int_\Omega |f|^2 dx\right) dt\right\}^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$\|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

2.2 Le problème discret

Dans cette section nous allons discrétiser le problème variationnel (2.4) par la méthode des éléments finis pour la variable d'espace x, et par la méthode des différences finies pour la variable temps t.

2.2.1 Discrétisation par éléments finis pour la variable d'espace

Supposons toujours Ω un domaine polygonal borné de R^2. Considérons une famille de triangulation classique τ_h de Ω, i.e τ_h est un ensemble fini de triangles k tels que

$$k \in \overline{\Omega},\ \forall k \in \tau_h,\ \cup_{k\in\tau_h} = \overline{\Omega},$$

$$k_1^0 \cap k_2^0 = \emptyset,\ \forall k_1, k_2 \in \tau_h\ et\ k_1 \neq k_2,$$

où k_1^0 désigne l'intérieur du triangle k_1.

De plus $\forall k_1, k_2 \in \tau_h$ et $k_1 \neq k_2$ l'une des conditions suivantes doit être vraie,

1. $k_1 \cap k_2 = \emptyset$,
2. k_1 et k_2 ont au moins un seul sommet en commun,
3. k_1 et k_2 ont une seule arrête en commun.

h désigne la longueur de la plus grande arrête de ces triangles, h est destiné à tendre vers zéro. Considérons une hypothèse géométrique sur la qualité du maillage : soit $k \in \tau_h$, on définit le diamètre de k par

$$diam(k) = \max_{x_1, x_2 \in k} |x_1 - x_2|,$$

et la rondeur de k par

$$\rho(k) = \max_{B_r \subset k}(2r),$$

où B_r est la plus grande boule de rayon r contenue dans k. Evidemment on a toujours

$$\frac{diam(k)}{\rho(k)} > 1.$$

Ce rapport est d'autant plus grand que k est aplati.

Définition 2.1. *On dit qu'une famille de triangulation τ_h est régulière, s'il existe une constante $c > 0$ telle que on a*

$$\forall h > 0,\ \forall k \in \tau_h,\ \frac{diam(k)}{\rho(k)} \leq c. \tag{2.5}$$

Dans ce qui suit nous supposons toujours que τ_h est une famille de triangulation régulière quasi-uniforme. Pour le moment nous considérons l'approximation par éléments finis linéaires. Considérons une base naturelle de fonctions affines $\{\varphi_i\}, i = 1, ..., m(h)$ définie par $\varphi_i(M_j) = \delta_{ij}$ où M_j est un noeud de $k \in \tau_h$.

Nous introduisons les espaces discrets par éléments finis suivants,

$$\begin{aligned} V_h &= \left\{ v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \cap V \ / \ v_{h|k} \in P_1, \forall k \in \tau_h \right\} \\ K_h &= \{ v_h \in V_h \ / \ v_h \leq r_h \psi \} \\ K_{1h} &= \left\{ v_h \in L^2(0,T;V_h) \cap C^0(0,T;H_0^1(\overline{\Omega})) \ / \ v_h(t) \in K_h \right\}. \end{aligned}$$

Où P_1 est l'espace des polynômes de Lagrange de degré inférieur ou égal à un, et r_h est un opérateur d'interpolation linéaire de Lagrange défini par,

$$r_h v = \sum_{i=1}^{m(h)} v(M_i)\varphi_i,\ \forall v \in L^2(0,T;V_h) \cap C^0(0,T;H_0^1(\overline{\Omega})).$$

Hypothèse du principe du maximum discret

Définition 2.2. *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ une matrice carré tels que $a_{ij} > 0$ et $a_{ij} \leq 0\ \forall i \neq j$. On dit que A est une M-matrice si A^{-1} existe et ses éléments sont tous non négatifs.*

Dans ce qui suit, nous supposons toujours que la matrice de discrétisation par éléments finis $\{a(\varphi_i, \varphi_j)\}_{i,j\in I}$ est une M-matrice, on dit alors que le principe du maximum discret est vérifié (pour plus de détails voir [6]).

L'analogue discret par éléments finis du problème (2.4) consiste à,

$$\begin{cases} \text{étant donnée } u_{0h} \in V_h, \text{ trouver } u_h \in K_{1h} \text{ solution de} & \\ \left(\dfrac{\partial u_h}{\partial t}, v_h - u_h\right) + a\left(u_h, v_h - u_h\right) \geq \left(f, v_h - u_h\right) & \forall v_h \in K_{1h} \\ u_h(0) = u_{0h} & dans\ \ \Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

Lemme 2.1. *(Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathcal{R}^2$, de frontière Γ suffisamment régulière. Alors il existe une constante $c^\star > 0$ telle que*

$$\|u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c^\star \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega}).$$

Estimation de l'inergie discrète

Dans cette section nous introduisons une inégalité de l'énergie qui traduit l'unicité et la continuité de la solution par rapport aux données du problème u_0 et f. Considérons à tout instant t la fonctionnelle de l'inergie discrète,

$$E_h(t) = \int_\Omega |u_h(t,x)|^2 dx \tag{2.7}$$

Théorème 2.1. *Sous les notations et les hypothèses données ci-dessus, on a l'estimation de l'energie suivante,*

$$E_h(t) \leq \exp(-\eta t) E_h(0) + \int_0^t \left[\exp(-\eta(t-s)) \left(\int_\Omega |f(s,x)|^2 dx\right)\right] ds$$

avec $\eta = 2\alpha\left(1 + \dfrac{1}{c^\star}\right) - 1$, α est la constante de coercivité de la forme bilinéaire $a(.,.)$.

Preuve. Posons $v_h = 0$ dans l'inéquation (2.6) et introduisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_h}{\partial t}, u_h\right) + a\left(u_h, u_h\right) &\leq (f, u_h)\\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}.\|u_h\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_h|^2 dx + a(u_h, u_h) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.8}$$

En introduisant la constante de coercivité ($\alpha > 0$) et la constante de l'inégalité de Poincaré ($c^\star > 0$) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_h|^2 dx + a(u_h, u_h) &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_h(t) + \alpha\|u_h\|^2_{H_0^1(\Omega)},\\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_h(t) + \alpha\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\|\nabla u_h\|^2_{L^2(\Omega)},\\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_h(t) + \alpha\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha\frac{1}{c^\star}\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)},\\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}E_h(t) + \alpha\left(1 + \frac{1}{c^\star}\right)E_h(t).\end{aligned}$$

En combinant avec (2.8), on trouve

$$\frac{d}{dt}E_h(t) + 2\alpha\left(1 + \frac{1}{c^\star}\right)E_h(t) \leq 2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Comme

$$\begin{aligned}2\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_h\|^2_{L^2(\Omega)},\\ &= \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + E_h(t),\end{aligned}$$

alors on a

$$\frac{d}{dt}E_h(t) + 2\alpha\left(1 + \frac{1}{c^\star}\right)E_h(t) \leq \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + E_h(t),$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}E_h(t) + \left[2\alpha\left(1+\frac{1}{c^\star}\right)-1\right]E_h(t) \leq \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Posons $\eta = 2\alpha\left(1+\dfrac{1}{c^\star}\right)-1$, alors on a

$$[\exp(\eta t)\, E_h(t)]' \leq \exp(\eta t)\int_\Omega |f(t,x)|^2 dx,$$

en intégrant cette dernière expression de 0 à t, on obtient

$$E_h(t) \leq \exp(-\eta t)E_h(0) + \int_0^t \left[\exp(-\eta(t-s))\int_\Omega |f(s,x)|^2 dx\right] ds, \quad 0 < s \leq t.$$

Finalement on déduit l'estimation suivante

$$\|u_h\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \exp(-\eta t)\|u_{0h}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \exp(-\eta(t-s))\|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds, \quad 0 < s \leq t. \quad (2.9)$$

□

Remarque 2.2. *Si* $f = 0$ *et* $\eta > 0$, *alors*

$$E_h(t) \leq \exp(-\eta t)E_h(0),$$

ce qui montre que l'inergie discrète décroit exponentiellement en temps t, de sorte qu'à tout instant t, elle est contrôlée par l'inergie à l'instant initial, qui est une donnée du problème. On remarque par ailleurs que cette proprièté reste vraie même si la variable de temps décrit un intervalle non borné, i.e. pour $t \in [0, \infty[$.

Remarque 2.3. *L'inégalité (2.9) traduit la notion de* ***stabilité*** *de la solution par rapport aux données* u_{0h} *et* f *dans le sens usuel suivant : une petite perturbation, d'ordre* ε *(où* ε *désigne un nombre très petit), des données va induire une petite perturbation (du même ordre de grandeur) de la solution. En effet, supposons que les données* u_{0h} *et* f *soient légèrement perturbées ; en d'autres termes, prenons pour nouvelles données* u^ε_{0h} *et* f^ε *avec*

$$\|u_{0h} - u^\varepsilon_{0h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon, \text{ et } \|f - f^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$$

alors

$$\|u_h - u_h^{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\varepsilon$$

2.2.2 Discrétisation par différences finies pour la variable temps

Dans cette section nous appliquons la méthode des différences finies, en particulier le $\theta-$schéma pour le problème semi-discret (2.6).

Posons $\triangle t = \frac{T}{N}, N \in \mathcal{N}^{\star}, t_n = n\triangle t; n = 1, ..., N$ et soit u_h^n une approximation de $u_h(t)$ au noeud $t = t_n$. Pour $\theta \in [0, 1]$, posons $u_h^{\theta,n} = \theta u_h^n + (1-\theta)u_h^{n-1},\ f^{\theta,n} = \theta f(t_n) + (1-\theta)f(t_{n-1})$.
Alors le problème discret par $\theta-$schéma consiste à

$$\begin{cases} \text{étant donnée } u_{0h} \in V_h, \text{ pour } n = 1, ..., N, \text{ trouver } u_h^{\theta,n} \in K_{1h} \text{ solution de } \quad \left(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) \\ \left(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) + \triangle t.a\left(u_h^{\theta,n}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) \geq \triangle t.\left(f^{\theta,n}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) \\ u_h^0 = u_{0h} \end{cases} \tag{2.10}$$

On rappelle un théorème d'injection compacte due à Rellich et la décomposition spectrale des problèmes de valeurs propres.

Théorème 2.2. *[19] L'espace $H_0^1(\Omega)$ s'injecte compactement dans l'espace $L^2(\Omega)$. De plus il existe une suite infinie de valeurs propres $\{\lambda_j\}_{j\geq 1}$ croissante de réels positifs qui tend vers l'infini, et il existe une base Hilbertienne $\{w_j\}_{j\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ de vecteurs propres tels que*

$$a(w_j, v) = \lambda_j(w_j, v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), w_j \in H_0^1(\Omega) \tag{2.11}$$

En outre, la suite $\left\{\lambda_j^{-\frac{1}{2}} w_j\right\}_{j\geq 1}$ forme une base hilbertienne de l'espace $H_0^1(\Omega)$ pour le produit scalaire $a(.,.)$.

Par analogie en dimension finie, considérons le problème de valeurs propres dans V_h : On peut trouver une suite de valeurs propres croissante $0 < \lambda_{1h} \leq \lambda_{2h} \leq \ldots\ldots \leq \lambda_{m(h)h}$, et une base $\{w_{jh}\}_{1\leq j\leq m(h)}$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$, tels que

$$a(w_{jh}, v_h) = \lambda_{jh}(w_{jh}, v_h)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall v_h \in V_h, w_{j_h} \in V_h \tag{2.12}$$

Une fonction $v_h \in V_h$ peut être décomposée dans la base $\{w_{jh}\}_{1\leq j\leq m(h)}$ (décomposition spectrale) par,

$$v_h = \sum_{i=1}^{m(h)} \beta_{ih} w_{ih}, \quad \beta_{ih} \in \mathcal{R},$$

en multipliant par $\{w_{jh}\}$ et en intégrant sur Ω, on trouve

$$(v_h, w_{jh}) = \sum_{i=1}^{m(h)} \beta_{ih}(w_{ih}, w_{jh}) = \beta_{jh}.$$

Donc v_h s'écrit sous la forme de décomposition spectrale

$$v_h = \sum_{i=1}^{m(h)} (v_h, w_{ih}) w_{ih}. \tag{2.13}$$

En particulier

$$u_h^n = \sum_{i=1}^{m(h)} u_i^n w_{ih}, \quad \text{avec } u_i^n = (u_h^n, w_{ih}) \tag{2.14}$$

De même, soit f_h^n la projection L^2-orthogonale de $f^{\theta,n}$ sur V_h,

$$L^2(\Omega) \longrightarrow V_h$$

$$f^{\theta,n} \longrightarrow f_h^n$$

telle que

$$(f^{\theta,n}, v_h) = (f_h^n, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

On peut mettre f_h^n sous la forme de décomposition spectrale,

$$f_h^n = \sum_{i=1}^{m(h)} f_i^n w_{ih}, \quad \text{avec } f_i^n = (f_h^n, w_{ih}) \tag{2.15}$$

2.2.3 Stabilité de l'inéquation variationnelle parabolique

Nous démontrons un théorème de stabilité du schéma (2.10) qui sera important dans la preuve de l'estimation de l'erreur.

Théorème 2.3. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, le $\theta-$schéma (2.10) est $L^\infty-$**stable** si et seulement si*

$$\triangle t < \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_{ih}}, \quad i = 1, ..., m(h) \tag{2.16}$$

*pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, et **inconditionnellement stable** pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$. De plus, on l'estimation suivante*

$$\|u_i^n\|_{L^\infty} < \|u_i^0\|_{L^\infty} + \left\|\frac{\triangle t}{1+\theta\triangle t}\right\|_{L^\infty} . \sum_{n=1}^{N} \|f_i^n\|_{L^\infty}, \quad i = 1, ..., m(h) \tag{2.17}$$

Preuve. Choisissons $v_h = 0$ dans l'inéquation (2.10), il vient

$$\frac{1}{\triangle t}\left(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^{\theta,n}\right) + a\left(u_h^{\theta,n}, u_h^{\theta,n}\right) \leq \left(f^{\theta,n}, u_h^{\theta,n}\right) \quad u_h^{\theta,n} \in K_{1h}.$$

En posant

$$u_h^n - u_h^{n-1} = \sum_{i=1}^{m(h)} (u_i^n - u_i^{n-1}) w_{ih},$$

et en appliquant (2.12), on obtient

$$\sum_{i=1}^{m(h)} \frac{1}{\triangle t}\left(\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right) w_{ih}, u_h^{\theta,n}\right) + \sum_{i=1}^{m(h)} u_i^{\theta,n} \lambda_{ih} \left(w_{ih}, u_h^{\theta,n}\right) \leq \sum_{i=1}^{m(h)} f_i^n \left(w_{ih}, u_h^{\theta,n}\right).$$

Posons $u_h^{\theta,n} = w_{ih}$ et en tenant compte de l'orthonormalité des fonctions propres $\{w_{ih}\}_i$:

$$(w_{ih}, w_{jh}) = \delta_{ij}$$

on trouve

$$\frac{1}{\triangle t}\left(u_i^n - u_i^{n-1}\right) + \lambda_{ih} u_i^{\theta,n} \leq f_i^n, \quad n = 1, ..., N; \ i = 1, ..., m(h). \tag{2.18}$$

Par conséquent, pour $i = 1, ..., m(h)$, on a

$$u_i^n \leq \frac{1 - (1-\theta)\triangle t \lambda_{ih}}{1 + \theta \triangle t \lambda_{ih}} u_i^{n-1} + \frac{\triangle t}{1 + \theta \triangle t \lambda_{ih}} f_i^n. \tag{2.19}$$

On conclut que le système d'inéquations discrètes (2.19) est $L^\infty-$stable si et seulement si

$$\left| \frac{1 - (1-\theta)\triangle t \lambda_{ih}}{1 + \theta \triangle t \lambda_{ih}} \right| < 1 \tag{2.20}$$

veut dire que

$$2\theta - 1 > -\frac{2}{\triangle t \lambda_{ih}}, \quad i = 1, ..., m(h)$$

et par conséquent

$$\triangle t < \frac{2}{(1-2\theta)\lambda_{ih}}, \quad i = 1, ..., m(h). \tag{2.21}$$

En choisissant la plus grande valeur propre $\rho(A) = \max_i \lambda_{ih}$, où $\rho(A)$ est le rayon spectral de la matrice $\{a(w_{ih}, w_{jh})\}_{i,j}$, on déduit que pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ le $\theta-$schéma (2.10) est $L^\infty-$stable si et seulement si

$$\triangle t < \frac{2}{(1-2\theta)\rho(A)}. \tag{2.22}$$

Et pour $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ le $\theta-$schéma (2.10) est inconditionnellement stable. En prenant la valeur absolue de l'expression (2.19), il vient

$$|u_i^n| \leq |u_i^0| + \left| \frac{\triangle t}{1 + \theta \triangle t \lambda_{ih}} \right| \sum_{n=1}^{N} |f_i^n|, \quad i = 1, ..., m(h).$$

D'où

$$\|u_i^n\|_\infty \leq \|u_i^0\|_\infty + \left\| \frac{\triangle t}{1 + \theta \triangle t \lambda_{ih}} \right\|_\infty \sum_{n=1}^{N} \|f_i^n\|_\infty, \quad i = 1, ..., m(h). \tag{2.23}$$

$\square$

Remarque 2.4. *On peut prouver qu'il existe deux constantes c_1, c_2 tel que*

$$\frac{c_1}{h^2} \leq \max_i \lambda_{ih} \leq \frac{c_2}{h^2}.$$

Par conséquent pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ *le* $\theta-$*schéma (2.10) est* $L^{\infty}-$*stable si et seulement si*

$$\triangle t < \frac{2c}{(1-2\theta)}h^2. \tag{2.24}$$

Nous prouvons un autre résultat de **stabilité** pour la norme de l'espace $L^2(\Omega)$.

Proposition 2.1. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, on a l'estimation suivante*

$$\| u_h^n \|_{L^2}^2 + \triangle t \sum_{m=1}^{n} a(u_h^{\theta,m}, u_h^{\theta,m}) \leq \| u_{0h} \|_{L^2}^2 + \frac{\triangle t}{\alpha} \sum_{m=1}^{n} \| f^{\theta,m} \|_{L^2}^2, \quad n = 1, ..., N$$

pour $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Preuve. Posons $v_h = 0$ dans l'expression (2.10) et considérons le membre gauche de l'inéquation, alors on a

$$\begin{aligned}\left(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^{\theta,n}\right) + \triangle t.a\left(u_h^{\theta,n}, u_h^{\theta,n}\right) &= \frac{1}{2}\left(\| u_h^n \|_{L^2}^2 - \| u_h^{n-1} \|_{L^2}^2\right) + \left(\theta - \frac{1}{2}\right)\left(\| u_h^n - u_h^{n-1} \|_{L^2}\right) + \\ &\quad \triangle t.a\left(u_h^{\theta,n}, u_h^{\theta,n}\right)\end{aligned}$$

pour $\theta \geq \frac{1}{2}$ on a

$$\left(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^{\theta,n}\right) + \triangle t.a\left(u_h^{\theta,n}, u_h^{\theta,n}\right) \geq \frac{1}{2}\left(\| u_h^n \|_{L^2}^2 - \| u_h^{n-1} \|_{L^2}^2\right) + \triangle t.a\left(u_h^{\theta,n}, u_h^{\theta,n}\right).$$

Pour le second membre de (2.10) on utilise l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2, \quad a > 0, b > 0, \alpha > 0,$$

et en appliquant l'hypothèse de coercivité de $a(.,.)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\triangle t\left(f^{\theta,n},u_h^{\theta,n}\right) &= \triangle t\int_\Omega f^{\theta,n}.u_h^{\theta,n}dx\\
&\leq \triangle t\int_\Omega \mid f^{\theta,n}\mid . \mid u_h^{\theta,n}\mid dx\\
&\leq \triangle t\int_\Omega\left(\frac{\alpha}{2}\mid u_h^{\theta,n}\mid^2+\frac{1}{2\alpha}\mid f^{\theta,n}\mid^2\right)dx\\
&\leq \triangle t\left(\frac{\alpha}{2}\parallel u_h^{\theta,n}\parallel_{L^2}^2+\frac{1}{2\alpha}\parallel f^{\theta,n}\parallel_{L^2}^2\right)dx\\
&\leq \triangle t\left(\frac{1}{2}a\left(u_h^{\theta,n},u_h^{\theta,n}\right)+\frac{1}{2\alpha}\parallel f^{\theta,n}\parallel_{L^2}^2\right)
\end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$\frac{1}{2}\left(\parallel u_h^n\parallel_{L^2}^2-\parallel u_h^{n-1}\parallel_{L^2}^2\right)+\triangle t.a\left(u_h^{\theta,n},u_h^{\theta,n}\right)\leq\triangle t\left(\frac{1}{2}a\left(u_h^{\theta,n},u_h^{\theta,n}\right)+\frac{1}{2\alpha}\parallel f^{\theta,n}\parallel_{L^2}^2\right)$$

ce qui donne

$$\parallel u_h^n\parallel_{L^2}^2-\parallel u_h^{n-1}\parallel_{L^2}^2+\triangle t.a\left(u_h^{\theta,n},u_h^{\theta,n}\right)\leq\frac{\triangle t}{\alpha}\parallel f^{\theta,n}\parallel_{L^2}^2$$

Par induction sur n, on déduit que

$$\parallel u_h^n\parallel_{L^2}^2+\triangle t\sum_{m=1}^{n}a\left(u_h^{\theta,m},u_h^{\theta,m}\right)\leq\parallel u_{0h}\parallel_{L^2}^2+\frac{\triangle t}{\alpha}\sum_{m=1}^{n}\parallel f^{\theta,m}\parallel_{L^2}^2$$

On conclut que le $\theta-$schéma est inconditionnellement stable pour $\frac{1}{2}\leq\theta\leq 1$ et vérifie l'estimation ci-dessus. □

2.3 Comportement asymptotique du $\theta-$schéma pour l'inéquation variationnelle parabolique

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat principal de ce travail. Nous donnons d'abord quelques notions que nous aurons besoin ultérieurement.

2.3.1 Existence et unicité de la solution discrète

On a

$$u_h^{\theta,n} = \theta u_h^n + (1-\theta)u_h^{n-1}$$

donc

$$u_h^n - u_h^{n-1} = \frac{1}{\theta}\left(u_h^{\theta,n} - u_h^{n-1}\right)$$

en posant $\mu = \dfrac{1}{\theta \triangle t}$, alors l'inéquation (2.10) devient

$$\mu\left(u_h^{\theta,n}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) + a\left(u_h^{\theta,n}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) \geq \left(f^{\theta,n} + \mu u_h^{n-1}, v_h - u_h^{\theta,n}\right)$$

posons

$$b\left(u_h, v_h\right) = a\left(u_h, v_h\right) + \mu\left(u_h, v_h\right).$$

Alors le problème (2.10) devient un problème d'inéquation variationnelle elliptique,

$$\begin{cases} \text{pour } n = 1, ..., N, \text{ trouver } u_h^{\theta,n} \in K_{1h} \text{ tel que} \\ b\left(u_h^{\theta,n}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) \geq \left(f + \mu u_h^{n-1}, v_h - u_h^{\theta,n}\right) \quad \forall v_h \in K_{1h} \\ u_h^0 = u_{0h} \quad \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.25}$$

Lemme 2.2. *[11] La forme bilinéaire $b(.,.)$ est fortement coercive, c'est à dire, il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$b(v_h, v_h) = a(v_h, v_h) + \mu(v_h, v_h) \geq \gamma \parallel v_h \parallel_{H^1}^2, \quad \forall v_h \in V_h$$

avec $\gamma = \min(\alpha, \mu)$.

Application du théorème du point fixe

Considérons l'application discrète

$$T_h : L_+^\infty(\Omega) \longrightarrow K_{1h},\ w \longrightarrow T_h(w) = \xi_h,$$

avec

$$L_+^\infty(\Omega) = \{w \in L^\infty(\Omega) \ / \ w \geq 0\}$$

et ξ_h est une solution de l'inéquation variationnelle elliptique (I.V.E) suivante,

$$\begin{cases} \text{trouver } \xi_h \in K_{1h} \text{ tel que} & b(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq \left(f^{\theta,n} + \mu.w, v_h - \xi_h\right), \\ b(\xi_h, v_h - \xi_h) \geq \left(f^{\theta,n} + \mu.w, v_h - \xi_h\right), & \forall v_h \in K_{1h}. \end{cases} \tag{2.26}$$

Soit une paire de données (w, ψ), $\left(\widetilde{w}, \widetilde{\psi}\right)$ et soient

$$T_h(w) = \xi_h = \partial_h\left(f^{\theta,n} + \mu w, r_h\psi\right); \text{ (resp.) } T_h(\widetilde{w}) = \widetilde{\xi}_h = \partial_h\left(f^{\theta,n} + \mu\widetilde{w}, r_h\widetilde{\psi}\right)$$

les solutions correspondantes (resp.) de l'I.V (2.26). Nous démontrons une propriètè de monotonie de la solution discrète par rapport au second membre $f^{\theta,n} + \mu w$ et l'obstacle ψ, qui sera utile ci-aprés.

Posons

$$F^{\theta,n}(w) = f^{\theta,n} + \mu w, \ \text{ et } \widetilde{F}^{\theta,n}(\widetilde{w}) = f^{\theta,n} + \mu\widetilde{w}.$$

Proposition 2.2. *(Monotonie de la solution). Sous les notations et les hypothèses précédentes, on a*

$$si\ F^{\theta,n} \geq \widetilde{F}^{\theta,n} \ et\ \psi \geq \widetilde{\psi} \ alors\ \partial_h\left(F^{\theta,n}, r_h\psi\right) \geq \partial_h\left(\widetilde{F}^{\theta,n}, r_h\widetilde{\psi}\right).$$

Preuve. On pose

$$v_h^- = \max(-v_h, 0) \ \text{ qui est une fonction de } V_h.$$

La fonction

$$v_h = \xi_h + \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^- \quad \text{est une fonction admissible pour le problème (2.26), i.e}$$

$$b\left(\xi_h, \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right) \geq \left(F^{\theta,n}, \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right), \tag{2.27}$$

De même

$$v_h = \widetilde{\xi}_h - \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^- \quad \text{est une fonction admissible pour le problème (2.26), i.e}$$

$$b\left(\widetilde{\xi}_h, -\left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right) \geq \left(\widetilde{F}^{\theta,n}, -\left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right), \tag{2.28}$$

par addition de (2.27) et (2.28) nous obtenons

$$b\left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h, \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right) \geq \left(F^{\theta,n} - \widetilde{F}^{\theta,n}, \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right) \geq 0,$$

ce qui donne

$$b\left(\left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-, \left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^-\right) \leq 0.$$

Comme $b(.,.)$ est fortement coercive, ceci implique que

$$\left(\xi_h - \widetilde{\xi}_h\right)^- = 0.$$

D'où

$$\xi_h \geq \widetilde{\xi}_h.$$

□

Proposition 2.3. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, si $\theta \geq \frac{1}{2}$, l'application T_h est une contraction sur $L^\infty_+(\Omega)$ avec une constante de contraction $\dfrac{1}{1+\beta\theta\triangle t}$. Par conséquent T_h admet un unique point fixe qui coincide avec la solution discrète de (2.26). Si $0 < \theta < \frac{1}{2}$, l'application T_h est une contraction sur $L^\infty_+(\Omega)$ avec une constante de contraction $\dfrac{2}{2+\beta\theta(1-2\theta)\rho(\mathcal{A})}$, où $\rho(\mathcal{A})$ est le rayon spectral de l'opérateur $\mathcal{A}$.*

Preuve. Posons

$$\Phi = \frac{1}{\beta+\mu} \parallel F^{\theta,n}(w) - \widetilde{F}^{\theta,n}(\widetilde{w}) \parallel_{L^\infty} \tag{2.29}$$

On peut montrer facilement que $\xi_h + \Phi$ est une solution de

$$\begin{aligned} b\left(\xi_h + \Phi, (v_h + \Phi) - (\xi_h + \Phi)\right) &\geq \left(F^{\theta,n} + a_0\Phi + \mu\Phi, (v_h + \Phi) - (\xi_h + \Phi)\right), \ v_h \in K_{1h} \\ \xi_h + \Phi \leq r_h\psi + \Phi & \qquad v_h + \Phi \leq r_h\psi + \Phi, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \partial_h\left(F^{\theta,n} + a_0\Phi + \mu\Phi, r_h\psi + \Phi\right) &= \xi_h + \Phi \\ &= \partial_h\left(F^{\theta,n}, r_h\psi\right) + \Phi. \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \widetilde{F}^{\theta,n} &\leq F^{\theta,n} + \parallel F^{\theta,n} - \widetilde{F}^{\theta,n} \parallel_\infty \\ &\leq F^{\theta,n} + \frac{a_0 + \mu}{\beta + \mu} \parallel F^{\theta,n} - \widetilde{F}^{\theta,n} \parallel_\infty \\ &\leq F^{\theta,n} + a_0.\Phi + \mu.\Phi. \end{aligned}$$

D'aprés la proposition (2.2), on a

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}_h &= \partial_h\left(\widetilde{F}^{\theta,n}, r_h\widetilde{\psi}\right) \\ &\leq \partial_h\left(F^{\theta,n} + a_0\Phi + \mu\Phi, r_h\psi + \Phi\right) \\ &= \xi_h + \Phi. \end{aligned}$$

Donc

$$\widetilde{\xi}_h - \xi_h \leq \Phi. \tag{2.30}$$

En changeant les rôles de $\left(F^{\theta,n}, r_h\psi\right)$ et $\left(\widetilde{F}^{\theta,n}, r_h\widetilde{\psi}\right)$, on déduit que

$$\xi_h - \widetilde{\xi}_h \leq \Phi. \tag{2.31}$$

De (2.30) et (2.31), on obtient

$$\begin{aligned}
\| \xi_h - \widetilde{\xi}_h \|_\infty &\leq \Phi \\
&= \frac{1}{\beta+\mu} \| F^{\theta,n}(w) - \widetilde{F}^{\theta,n}(\widetilde{w}) \|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{\mu}{\beta+\mu} \| w - \widetilde{w} \|_{L^\infty} .
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\| T_h(w) - T_h(\widetilde{w}) \|_{L^\infty} &\leq \frac{\mu}{\beta+\mu} \| w - \widetilde{w} \|_{L^\infty} \\
&\leq \frac{1}{1+\beta\theta\triangle t} \| w - \widetilde{w} \|_{L^\infty}
\end{aligned}$$

avec

$$\frac{1}{1+\beta\theta\triangle t} < 1.$$

Donc T_h est une contraction.

Maintenant soit $0 < \theta < \frac{1}{2}$. On sait que d'aprés le théorème (2.3), si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ le $\theta-$schéma est stable si et seulement si

$$\triangle t < \frac{2}{(1-2\theta)\rho(\mathcal{A})},$$

choisissant

$$\triangle t = \frac{(1-2\theta)\rho(\mathcal{A})}{2},$$

alors on a

$$\begin{aligned}
\| T_h(w) - T_h(\widetilde{w}) \|_{L^\infty} &\leq \frac{1}{1+\beta\theta\triangle t} \| w - \widetilde{w} \|_{L^\infty} \\
&= \frac{2}{2+\beta\theta(1-2\theta)\rho(\mathcal{A})} \| w - \widetilde{w} \|_{L^\infty} \\
&= \frac{2ch^2}{2ch^2+\beta\theta(1-2\theta)} \| w - \widetilde{w} \|_{L^\infty} .
\end{aligned}$$

Donc pour $0 < \theta < \frac{1}{2}$, l'application T_h est une contraction de constante égale à $\dfrac{2ch^2}{2ch^2+\beta\theta(1-2\theta)}$.

Ce qui achève la démonstration. $\square$

2.3.2 Algorithme discret

Nous donnons d'abord un résultat classique de l'estimation de l'erreur due à Cortey-Dumont [7].

Soit u^∞ la solution de l'inéquation variationnelle stationnaire continue,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u^\infty \in K \text{ tel que} \\ b\left(u^\infty, v - u^\infty\right) \geq \left(f + \mu u^\infty, v - u^\infty\right) \quad \forall v \in K, \end{array} \right. \tag{2.32}$$

respectivement soit u_h^∞ la solution de l'inéquation variationnelle stationnaire discrète,

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{trouver } u_h^\infty \in K_h \text{ tel que} \\ b\left(u_h^\infty, v_h - u_h^\infty\right) \geq \left(f + \mu u_h^\infty, v_h - u_h^\infty\right) \quad \forall v_h \in K_h, \end{array} \right. \tag{2.33}$$

avec

$$b\left(u, v\right) = a\left(u, v\right) + \mu\left(u, v\right), \quad \mu > 0$$

Théorème 2.4. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, et l'hypothèse du principe du maximum discret, il existe une constante $c > 0$ indépendante de h telle que*

$$\| u^\infty - u_h^\infty \|_{L^\infty} \leq ch^2 \mid \log h \mid^2 . \tag{2.34}$$

Nous introduisons maintenant un algorithme due à Lions-Bensoussan[1], puis nous démontrons un résultat de convergence de la suite itérée discrète.

Partant de $u_h^0 = u_{0h}$, nous définissons l'algorithme discret suivant,

$$u_h^{\theta,n} = T_h u_h^{n-1}, \quad n = 1, ..., N. \tag{2.35}$$

Proposition 2.4. *Sous les notations et les hypothèses précédentes, on a l'estimation de convergence suivante,*

$$\| u_h^{\theta,n} - u_h^\infty \|_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t}\right)^n \| u_h^0 - u_h^\infty \|_{L^\infty}, \tag{2.36}$$

pour $\theta \geq \dfrac{1}{2}$. *Et on a*

$$\parallel u_h^{\theta,n} - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \leq \left(\frac{2ch^2}{2ch^2 + \beta\theta\,(1 - 2\theta)} \right)^n \parallel u_h^0 - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty}, \tag{2.37}$$

pour $0 \leq \theta < \dfrac{1}{2}$.

Preuve.

1) Soit $\theta \geq \frac{1}{2}$, on a

$$u_h^{\infty} = T_h u_h^{\infty}.$$

pour $n = 1$, en appliquant la proposition 2.3, on obtient,

$$\begin{aligned} \parallel u_h^{\theta,1} - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} &= \parallel T_h u_h^0 - T_h u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t} \right) \parallel u_h^0 - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} . \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, supposons qu'on a

$$\parallel u_h^{\theta,n} - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t} \right)^n \parallel u_h^0 - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} .$$

Introduisons l'algorithme discret de Lions-Bensoussan[1] (dans le cas $\theta = 1$),

$$u_h^n = T_h u_h^{n-1}, \quad n = 1, 2, ...$$

alors pour $n + 1$, on a,

$$\begin{aligned} \parallel u_h^{\theta,n+1} - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} &= \parallel T_h u_h^n - T_h u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t} \right) \parallel u_h^n - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \\ &= \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t} \right) \parallel T_h u_h^{n-1} - T_h u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t} \right)^2 \parallel u_h^{n-1} - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty} \\ &\leq .... \\ &\leq \left(\frac{1}{1 + \beta\theta\triangle t} \right)^{n+1} \parallel u_h^0 - u_h^{\infty} \parallel_{L^\infty}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la première assertion.

2) Si $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, et par le même raisonnement précédent, on peut montrer que,

$$\| u_h^{\theta,n} - u_h^{\infty} \|_{L^\infty} \leq \left(\frac{2ch^2}{2ch^2 + \beta\theta\,(1-2\theta)} \right)^n \| u_h^0 - u_h^{\infty} \|_{L^\infty} .$$

□

2.3.3 Comportement asymptotique de la solution

Dans cette section nous prouvons un théorème du comportement asymptotique en norme L^∞ de la solution de l'inéquation variationnelle parabolique. Plus précisément, nous évaluons la variation en norme L^∞ entre la solution $u_h(T,x)$ calculée à l'instant $T = N\triangle t$ et la solution asymptotique continue u^∞ de l'inéquation (2.32).

Théorème 2.5. *Sous les conditions du théorème 2.4 et la proposition 2.4, on a pour* $\theta \geq \frac{1}{2}$,

$$\| u^{\infty} - u_h^{\theta,N} \|_{L^\infty} \leq c \left[h^2 \mid \log h \mid^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\triangle t} \right)^N \right], \tag{2.38}$$

et pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, *on a*

$$\| u^{\infty} - u_h^{\theta,N} \|_{L^\infty} \leq c \left[h^2 \mid \log h \mid^2 + \left(\frac{2ch^2}{2ch^2 + \beta\theta\,(1-2\theta)} \right)^N \right]. \tag{2.39}$$

Où c est une constante indépendante de h et N.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} u_h^{\theta,n}(x) &= u_h(t,x), \qquad \text{pour } t \in](n-1)\triangle t, n\triangle t[\\ &= \theta u_h^n(x) + (1-\theta)u_h^{n-1}(x), \qquad \text{pour } n = 1, \ldots\ldots, N. \end{aligned}$$

Donc

$$u_h^{\theta,N}(x) = u_h(T,x).$$

En outre, on a aussi

$$\begin{aligned} \| u^{\infty} - u_h(T,x) \|_{L^{\infty}} &= \| u^{\infty} - u_h^{\theta,N} \|_{L^{\infty}} \\ &\leq \| u^{\infty} - u_h^{\infty} \|_{L^{\infty}} + \| u_h^{\infty} - u_h^{\theta,N} \|_{L^{\infty}} . \end{aligned}$$

Appliquons le théorème 2.4 et la proposition 2.4, alors on obtient pour $\theta \geq \frac{1}{2}$,

$$\| u^{\infty} - u_h^{\theta,N} \|_{L^{\infty}} \leq c \left[h^2 \mid \log h \mid^2 + \left(\frac{1}{1+\beta\theta\triangle t} \right)^N \right].$$

Et pour $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$, on trouve

$$\| u^{\infty} - u_h^{\theta,N} \|_{L^{\infty}} \leq c \left[h^2 \mid \log h \mid^2 + \left(\frac{2ch^2}{2ch^2+\beta\theta\,(1-2\theta)} \right)^N \right].$$

Ce qui achève la démonstration. □

Conclusion

Dans ce mémoire, on a établit une approximation mixte par différences finies et éléments finis de l'inéquation variationnelle parabolique. En premier lieu on a prouvé la stabilité du $\theta-$schéma qui dépend continument de l'argument θ, puis on a montré l'existence et l'unicité de la solution discrète. En second lieu, on a prouvé la convergence et le comportement asymptotique de la solution, lesquels ont fait l'objet principal de ce travail. En perspective nous souhaitons faire une simulation numérique en FreeFem ++ de ce problème.

Bibliographie

[1] A. Bensoussan and J. L. Lions, Impulse Control and Quasi-variational Inequalities, Gauthier Villars, Paris, 1984.

[2] Ib. Boukhdena, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de Friction, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2018).

[3] S. Boulaaras, M. Haiour, $L^{\infty}-$asymptotic behavior for a finite element approximation in parabolic quasi-variational inequalities related to impulse control problem, Applied Mathematics and Computation 217, 6443-6450 (2011).

[4] S. Boulaaras, M. Haiour , A new approach to asymptotic behavior for a finite element approximation in parabolic variational inequalities , Hindawi Publishing Corporation, J.Mathematical Analysis, doi :10.5402/2011/703670.

[5] H. Brezis, Inéquations variationnelles paraboliques, http ://www.numdam.org/, exp.n°7 pp.1-10, 1971.

[6] P. G. Ciarlet and P.-A. Raviart, "Maximum principle and uniform convergence for the finite element method",Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.2, no.1, pp.17-31, 1973.

[7] Ph. Cortey-Dumont, On finite element approximation in the $L^{\infty}-$norm of variational inequalities, Numerich. Math. 47 (1985) 45-57.

[8] G.Duvant and J.L.Lions, Les inéquations en mécanique et en physique (Dunod,Paris 1972).

[9] G.Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : ilproblema di signorini con ambigue condizioni al contorno, Mem. Accad. Naz. Lincei Ser., VIII(7), 91-140 (1964).

[10] R.Glowinsky , Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems, (springer,1984).

[11] R.Glowinsky, J.L.Lions , R.Tremolieres : Numerical Analysis of Variational Inequalities, studies in mathematics and its applications, volume 8,(North-holand, Amsterdam, 1981).

[12] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires, Dunod, Paris, 1969.

[13] J. L. Lions, G. Stampacchia, Variational inequalities, Comm.Pure Appl. Math., XX, 1967.

[14] A. Mehri, $L^{\infty}-$Error Estimate of Schwarz Algorithm for Noncoercive Variational Inequalities, Applied Mathematics, (http ://www.scirp.org/journal/am) 5, N°3 (2014), 572-580.

[15] A. Mehri, Polycopié du cours, Inéquations Variationnelles Elliptiques et leurs Approximations, Cours et Exercices, Niveau : Master2 Mathématiques Appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2016-2017).

[16] U. Mosco, An introduction to the approximate solution of variational inequalities, Constructive aspects of functional analysis, Erice 1971, 497-684, Ed. Cremonese, 1973.

[17] W. Mrabti, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de Signorini, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2017).

[18] A. Oumeddour, Analyse Numérique par Eléments Finis du Problème variationnel de la Torsion Elasto-Plastique, mémoire de Master2 mathématiques appliquées, Université 08 Mai 1945 Guelma (2016).

[19] P.A. Raviart et J.-M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, 1983.

[20] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, Atti Societa Italiana per il Progresso della Scienze, 1933.

[21] G. Stampacchia, Variational inequalities, Theory and application of monotone operators, Proceedings of a NATO Advanced Study Institute, Venice, Italy, 1968.