République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master Académique en Mathématiques

Option : **Equations aux Dérivées Partielles**

Et analyse numérique

Par :

M^{me}. REZAIGUIA Ahlem

Intitulé

Solution d'une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle avec condition intégrale.

Dirigé par : Dr. REZGUI Nassima

Devant le jury

PRESIDENT	**Dr.**	**S. DJENAOUI**	**MCB**	**Univ-Guelma**
RAPPORTEUR	**Dr.**	**N. REZGUI**	**MCB**	**Univ-Guelma**
EXAMINATEUR	**Dr.**	**N. BENDJAZIA**	**MCB**	**Univ-Guelma**

Session Septembre 2020

Remerciements

Nous remercions avant tout Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, le courage, la volonté, la patience et la santé durant toute cette période.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord adresser toute ma gratitude à la directrice de ce mémoire :

Dr. REZGUI Nassima pour le grand plaisir de travailler avec elle, de m'avoir proposé ce sujet, dirigé ce travail et pour sa patience et sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie également les membres de jury à savoir :

Dr. DJENAOUI Saliha et Dr. BENDJAZIA Nassima, de nous avoir fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire.

Nous tenons à remercier tous les membres de département, enseignantes, étudiants, mes camarades et amis de près comme de loin.

REZAIGUIA Ahlem

Table des matières

ملخص

نهدف في هذه المذكرة إلى تقديم تحديث مهم لطريقة روث لتشمل معالجة معادلات تفاضلية-تكاملية منحلة، مرفقة بشروط ابتدائية تكاملية.

الفكرة الأساسية المطروحة هي إجراء الحسابات في فضاءات مناسبة وإدخال مفهوم الحل الضعيف في الموضوع المطروح. بعد ذلك نعطي تقديرات أولية مهمة التي على أساسها يتم البرهان على تقارب المخطط التقريبي المناسب. يتم إثبات وجود ووحدانية الحل الضعيف وكذلك بعض النتائج المنتظمة.

<u>كلمات مفتاحية</u>

معادلة تفاضلية-تكاملية منحلة، طريقة روث، تقديرات مسبقة، حل ضعيف.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle munie des conditions : initiale, de Neumann et non locale de type intégrale, en utilisant la méthode de discrétisation de Rothe. L'idée principale proposée est de mener les calculs dans des espaces convenables et d'introduire la notion de solution faible pour le problème étudié. Par la suite, nous établissons les estimations a priori nécéssaires, sur la base desquelles la convergence du schéma d'approximation correspondant est démontrée. Nous montrons l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux données.

Mots clefs : Equation parabolique dégénérée intégro-différentielle, méthode de Rothe, solution faible, estimations a priori.

Abstract

The aim of this thesis is to develop Rothe's method for the study of a degenerate parabolic integrodifferential equation with initial, Neumann and non local integral conditions.

The main idea proposed is to carry out the calculations in suitable spaces and to introduce the notion of weak solution for the studied problem. Subsequently, we establish the estimates a priori necessary, on the basis of which the convergence of the corresponding approximation scheme is demonstrated.

Key words : degenerate parabolic integrodifferential equation, Rothe's method, estimates a priori, weak solution.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires sont les outils mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes physiques, mécaniques, chimiques et biologiques,...

L'étude de ces équations nécéssite la connaissance de leurs proprietés qualitatives et les différents problèmes qu'elles modélisent, par exemple, les équations de type elliptique interviennent souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaire c-à-d n'évoluant pas au cours du temps, l'équation de Laplace est l'exemple le plus simple. Les équations de type parabolique et hyperbolique modélisent des phénomènes dépendant du temps, de transport ou de propagation d'ondes. Les exemples modèls sont l'équation de la chaleur, l'équation de transport et l'équation des ondes.

Dans les problèmes réels, des fois on peut avoir les trois catégories en même temps comme pour le système de Navier-Stokes. Ainsi, en changeant l'ordre des dérivées ou en changeant les conditions, parfois, en ajoutant d'autres termes, comme une intégrale dans l'équation ou dans les conditions on obtient une nouvelle équation qui correspond au problème que nous voulons étudier.

Bien que la résolution directe des équations aux dérivées partielles trouve des difficultés considérables, l'utilisation des méthodes numériques a pris une grande importance dans la recherche des solutions approchées des problèmes considérés.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle munie des conditions : initiale, de Neumann et non locale de type intégrale, en utilisant la méthode de discrétisation de Rothe. Cette équation est de la forme suivante :

$$\partial t\beta\left(u\right)-\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}=\int_{0}^{t}a\left(t-s\right)k\left(u\left(s,x\right)\right)ds+f\left(t,x,u\right)$$

avec la condition initiale $u\left(0,\ x\right)=u_{0}\left(x\right),\ x\in\left(0,1\right)$, la condition de Neumann $\frac{\partial u}{\partial x}\left(t,0\right)=0,t\in I=\left[0,\ T\right]$ et la condition intégrale non locale$\int_{0}^{1}u\left(t,x\right)=0$, où $\beta\left(u\right)$ est une fonction non linéaire.

Ce problème inclut le modèle mathématique d'une grande classe de problèmes, par exemple, il décrit le transport des contaminants dans des milieux poreux [8]. Il se pose également dans la modélisation du flux d'huile et d'eau dans l'ingénierie des gisements pétroliers et des flux d'air et d'eau dans les champs agricoles [19].

Un exemple de la fonction β est donné dans l'équation différentielle partielle suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c+\frac{\rho_{b}k}{\theta}c^{p}\right)-D\frac{\partial^{2}c}{\partial x^{2}}+q\frac{\partial c}{\partial x}=0$$

Qui modélise l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux unidimensionnel, où le fluide est contaminé par un soluté en cas de réactions d'absorption à l'équilibre au moyen de l'isotherme de Freundlich, ici c est la concentration du fluide, ρ_{b} est la densité apparente du milieu poreux, $\theta>0$ est la porosité, D est le coefficient de dispersion, q est la vitesse moyenne du fluide et $p\in\left(0,1\right)$.

Rappelons que l'effet de régularité se produit pour les équations paraboliques linéaires mais pas pour l'équation parabolique dégénérée non linéaire, c'est-à-dire que la solution peut commencer d'une fonction initiale régulière mais elle devient non régulière dans le temps.

Parmis de nombreuses méthodes adaptés à la résolution des équations aux dérivées partielles, nous allons utiliser la méthode de Rothe ou méthode de discrétisation en temps. Cette méthode est un outil efficace qui consiste à remplacer les dérivées par rapport à une variable par des quotients de différence qui mène finalement à des systèmes d'équations différentielles dépondant des autres variables. La méthode de Rothe comme approche approximative est bient adaptée pour prouver les résultats d'existence. Cette méthode a été introduite par le mathématicien Allemand E. Rothe en 1930 pour résoudre des équations linéaires paraboliques du second ordre unidimensionnelles [18]. Plus tard, cette méthode a été adoptée pour résoudre des problèmes linéaires et quasi linéaires paraboliques de second ordre et d'équations linéaires d'ordre supérieur par Ladyzenskaja [14, 15]. Le développement ultérieur est lié à Rektorys [16, 17] qui a obtenu plus de solutions régulières. Dans les anneés récentes, d'autres mathématiciens ont développées la méthode de Rothe pour couvrir d'autres types d'équations comme pour les équations différentielles avec conditions intégrales dans les travaux de Bouziani [4] et ainsi que les problèmes intégro-differentiels comme nous pouvons le voir dans [2, 7, 11, 12 et 13].

Le schéma de la méthode de Rothe est donné comme suit :

On divise l'intervalle du temps en n sous intervalles $(t_{i\ -1}, t_i)$, $i = 1, ..., n$. où $t_i = ih$ et $h = \frac{T}{n}$.On note par $u_i = u_i(x) = u_i(x,\ ih)$ les approximantes de u.

On remplace les dérivées de la fonction u, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ par $\delta^2 u_i = \dfrac{\delta u_i - \delta u_{i-1}}{h}$ et $\delta u_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$ pour tout $t = t_i, \quad i = 1, ..., n$.

On obtient un système formé de n équations en x où l'inconnu est $u_i(x)$ donc on approche le problème posé en tout point $t = t_i$, $i = 1,\ n$. par un nouveau problème discret.

On détermine les fonctions u^n solutions du système obtenu.

On construit les fonctions de Rothe définies par

$$u^{(n)}(t) = u_{j-1} + \delta u_i (t - t_j), \ t \in [t_{i-1}, \ t_i], \ i = 1, ..., n$$

et les fonctions tests correspondantes

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, \ t_i], \ i = 1, ..., n \\ U_0 & t \in [-h, \ 0] \end{cases}$$

Ce mémoire est composé de quatre chapitres.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle, comme les espaces de Hilbert et les espaces de Bochner ainsi que quelques lemmes et théorèmes utiles.

Dans le deuxième chapitre, nous faisons les hypothèses nécessaires et nous dennons le concept précis de la solution faible.

Dans le troisième chapitre, on traite la discrétisation de l'équation parabolique dégénérée intégro-différentielle en utilisant la méthode de Rothe. A partir d'un schéma implicite on construit une solution numérique du problème discrétisé, et on déduit quelques estimations a priori des approximations.

Dans le dernier chapitre, nous etablissons la convergence de la méthode ainsi que l'existence de la solution faible et certains résultats de régularité sont obtenus. Finalement nous discutons l'unicité de la solution faible.

On termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Rappel d'analyse fonctionnelle

Le contenu de ce chapitre s'appuie sur quelques notions de bases fondamentales d'analyse fonctionnelle, définitions élémentaires et théorèmes essentiels. Le choix étant réduit aux définitions et aux propriétés introduites dans ce mémoire.

La majorité des rappels énoncés dans ce chapitre sont tirés des livres [1, 5, 8 et 10].

1.1 Espaces de Hilbert et de Banach

Définition 1.1 *Une application $\|.\| : V \to \mathbb{R}_+$ est une norme si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\begin{cases} \forall u \in V : \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in E : \|\lambda.u\| = |\lambda| \, \|u\| \\ \forall u, v \in E : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \end{cases}$$

Le couple $(V, \|.\|)$ est alors appelé un espace vectoriel normé.

Définition 1.2 *On dit que deux normes sont équivalentes sur un espace vectoriel V s'il existe* *deux constantes C_1, C_2 telles que :*

$$\forall x \in V, C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1$$

Définition 1.3 *Soit u une fonction définie d'un ensemble V dans un ensemble H.(u est continue en a) $\Leftrightarrow$($\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in V; \|x - a\|_V < \delta : \|u(x) - u(a)\|_H \leq \varepsilon$).*

Définition 1.4 *(Fonction Lipscitzienne). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$,u une fonction de I dans $\mathbb{R}$. On dit que u est lipschitizienne de rapport $k > 0$ si pour tout x, y de I :*

$|u(x) - u(y)| \leq k |x - y|$

Définition 1.5 *(suite de Cauchy) On dit qu'une suite (u_n) de réels ou de complexes est une suite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N};\ \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p \geq N \text{ et } q \geq N \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Définition 1.6 *$L(.)$ est une forme linéaire continue sur V, c'est à dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ et il existe $C > 0$ tel que :*

$|L(v)| \leq C \|v\|$ *pour tout* $v \in V$.

Définition 1.7 *Soit V un espace sur $\mathbb{R}$. On appelle forme bilinéaire sur V , toute application*

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow a(u, v)$$

linéaire par rapport à chaque variable, de plus $a(.,.)$ est continue, s'il existe $M > 0$ tel que $|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$ pour tout $u, v \in V$.

Définition 1.8 *Soit V un espace vectoriel. Un produit scalaire (u,v) est une forme bilinéaire de $(V \times V)$ dans $\mathbb{R}$ telle que*

$$\begin{aligned} (u,v) &= (v,u)\, \forall u,v \in H \text{ (symétrique)} \\ (u,u) &\geq 0 \forall u \in H \text{ et } (u,u) > 0 \forall u \neq 0 \text{ (définie positive)} \end{aligned}$$

Définition 1.9 (*Injection continue*)

Soient $(V, \|.\|_V)$ et $(H, \|.\|_H)$ deux espaces normés avec $V \subset H$.

On dit que I est une injection de V dans H si elle vérifie

$$I : (V, \|.\|_V) \to (H, \|.\|_H)$$

$$u \to I(u) = u$$

de plus elle est continue si $\exists C > 0$ tel que

$$\|u\|_H \leq C \|u\|_V, \forall u \in V.$$

Définition 1.10 *Le support d'une fonction continue est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle (ou, ce qui revient au même, l'adhérence de l'ensemble $\{x; f(x) \neq 0\}$).*

Quand on travaille avec des fonctions mésurables il faut être plus prudent, puisque ces fonctions sont seulement définies presque partout et la définition précédente ne convient plus. La définition appropriée est la suivante

Définition 1.11 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et soit u une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(w_i)_{i \in I}, w_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I, u = 0$ p.p. sur w_i. On pose $w = \underset{i \in I}{\cup} w_i$.*

Alors $u = 0$ p.p.sur w.

Par définition, Supp $u = \Omega \backslash w$.

Définition 1.12 *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.13 *Un espace de* ***Hilbert*** *est un espace vectoriel* H *muni d'un produit scalaire* (u, v) *et qui est* ***complet*** *pour la norme* $(u, u)^{\frac{1}{2}}$ *.*

Définition 1.14 $\big($*Dual d'un espace*$\big)$ *Le dual d'un espace de Hilbert* V *est l'espace des formes linéaires et continues sur* V *noté par* V'*.*

L'espace V' *et muni de la norme duale*

$$\|u\|_{V'} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\| \leq 1}} |u\,(x)|.$$

Lorsque $u \in V^{'}$et $x \in V$ on notera $\langle u, x \rangle$ au lieu de u(x) ; on dit que $\langle , \rangle$ est le produit scalaire dans la dualite $V^{'}$, V.

Théorème 1.1 [5]*(**Théorème de représentation de Riesz-Fréchet**)*

Étant donné $\varphi \in H'$ *il existe* $f \in H$ *unique tel que :*

$$\langle \varphi, v \rangle = \langle u, v \rangle \ \forall v \in H.$$

De plus on a

$$|u| = \|\varphi\|_{H'}$$

1.2 Espaces de Bochner

Nous allons introduire une famille d'espaces fonctionnelles de fonctions de t à valeurs dans des espaces de fonctions de x.

Définition 1.15 *Soit V un espace de Banach de norme $\|.\|_V$; pour tout entier $k \geq 0$, on désigne par $C^k([0,T];V)$, $0 < T < +\infty$, l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur $[0,\ T]$ à valeurs dans$V$; c'est lui même un espace de Banach pour la norme*

$$\|v\|_{C^k\ ([0,T];V)} = \sum_{m=0}^{k} \left(\sup_{0\leq t\leq T} \left\| \frac{d^m}{dt^m}(t) \right\|_V \right).$$

On note $L^2([0,T];V)$ l'espace des fonctions de $[0,\ T]$dans V telles que la fonction $t \rightarrow \|v(t)\|_V$ soit mesurable et de carée intégrable, c-à-d que

$$\|v\|_{L^2([0,T];V)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_V^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Muni de cette norme $L^2([0,T];V)$ est aussi un espace de Banach. De plus, si V est un espace de Hilbert, alors $L^2([0,T];\ V)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{L^2([0,T];V)} = \left(\int_0^T (u(t), v(t))_V\, dt \right).$$

Pour tout $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, on peut généraliser la définition précédente en introduisant l'espace de Banach $L^p([0,T];V)$ des fonctions de $[0,T]$ dans V telles que la fonction $t \rightarrow \|v(t)\|_V$ soit mesurable et tel que

$$\|v\|_{L^p([0,T];V)} = \left(\int_0^T \|v(t)\|_V^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

Maintenant et de manière particulière en posant $I = [0,\ T]$, nous allons définir les espaces suivants

1. $C(I, L^2(\Omega)) = \left\{ v : I \to L^2(\Omega) \text{ qui associe à } t,\ v(t) \in L^2(\Omega) \text{ continue} \right\}$ muni de la norme

$$\|v\|_{C(I,\ L^2(\Omega))} = \underset{I}{max} \|v\|_{L^2(\Omega)} .$$

2. $C(I, B) = \{v : I \to B \text{ qui associé à } t \to v(t) \in B \text{ continue}\}$ muni de la norme

$$\|v\|_{C(I,B)} = \max_I \|v\|_B .$$

3. $L^2\left(I,\ L^2(\Omega)\right) = \left\{ v : I \to L^2(\Omega) \text{ à carré intégrable} \right\}$ muni de la norme

$$\|v\|^2_{L^2(I,\ L^2(\Omega))} = \int_I \|v\|^2_{L^2(\Omega))} dt.$$

4. $L^2(I, B^*) = \{v : I \to B^* \text{ qui associé à } t \to v(t) \in B^*\}$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(I,B^*)} = \int_I (u, v)_{B^*} dt$$

et de la norme

$$\|v\|^2_{L^2(I,B^*)} = \int_I \|v\|^2_{B^*} dt.$$

5. $L^2(I, B) = \{v : I \to B \text{ qui associé à } t \to v(t) \in B\}$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(I,B)} = \int_I (u, v)_B dt$$

et de la norme

$$\|v\|^2_{L^2(I,B)} = \int_I \|v\|^2_B dt$$

6. $L^2(I,V) = \{v : I \to V$ qui associé à $t \to v(t) \in V\}$ muni du produit scalaire

$$(u,v)_{L^2(I,V)} = \int_I (u,v)_V \, dt$$

et de la norme

$$\|v\|^2_{L^2(I,V)} = \int_I \|v\|^2_V \ dt.$$

1.3 Définitions et propriétés élémentaires des espaces L^p

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue.

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} |u(x)| \, dx$$

Définition 1.16 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose*

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R};\ f \ \textit{mesurable et} \ |u|^p \in L^1(\Omega)\right\}$$

On note

$$\|u\|_{L^p} = \left[\int\limits_{\Omega} |u(x)|^p \, dx\right]^{\frac{1}{p}}$$

la norme correspondante.

Définition 1.17 *On pose*

$$L^{\infty}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};\ u \text{ mesurable et } \exists \text{ une constante } C \text{ telle que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\ \}.$$

On note :

$$\|u\|_{L^{\infty}} = Inf\,\{C;\ \ |u(x)| \leq C \ p.p.\ sur\ \Omega\}$$

La norme correspondante.

Définition 1.18 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue. On définit l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables de carré sommable dans Ω. Muni du produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. On note

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

La norme correspondante.

Définition 1.19 *(Dérivation faible). Soit v une fonction de $L^2(\Omega)$. On dit que v est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$ s'il existe des fonctions $w_i \in L^2(\Omega)$,pour $i \in \{1, ..., N\}$, telles que, pour toute fonction $\phi \in C_C^{\infty}(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} v(x)\, \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_{\Omega} w_i(x)\, \phi(x)\, dx$$

Chaque w_i est appelée la i-ème dérivée partielle faible de v et notée $\frac{\partial v}{dx_i}$.

1.4 Quelques inégalités et théorèmes utilisés

Théorème 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *[5]* $\forall u, v \in L^2(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i v_i dx\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N u_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^N v_i^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemme 1.1 *(Inégalité de Cauchy)*

$$uv \leq \frac{\varepsilon}{2}u^2 + \frac{1}{2\varepsilon}v^2, \forall \varepsilon > 0, \forall u \geq 0, v \geq 0$$

Lemme 1.2 (Inégalité de Young) *Soit* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{p'}v^{p'}, \forall u \geq 0, v \geq 0.$$

En effet la fonction log etant concave sur $]0, \infty[$,on a

$log\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}\right) \geq \frac{1}{p}log\left(a^p\right) + \frac{1}{p'}log\left(b^{p'}\right) = log\left(ab\right)$

Lemme 1.3 *Inégalité de Gronwall (forme continue)*

Soient φ, ψ et y trois fonctions continues sur un segment $[a, b]$, à valeurs positives et vérifiant l'inégalité

$$\forall t \in [a, b]\,,\ y(t) \leq \varphi(t) + \int_a^t \psi(s)\, y(s)\, ds$$

alors

$$\forall t\in[a,b]\,,\quad y\left(t\right)\leq\varphi\left(t\right)+\int\limits_{a}^{t}\varphi\left(s\right)\psi\left(s\right)\exp\left(\int\limits_{s}^{t}\psi\left(u\right)du\right)ds$$

Preuve. Posons $F\left(t\right)=\int\limits_{a}^{t}\psi\left(s\right)y\left(s\right)ds$. En multipliant les deux membres de l'égalité donnée par $\psi\left(t\right)$, on obtient $F'\left(t\right)-\psi\left(t\right)\leq\varphi\left(t\right)\psi\left(t\right).$

Ce qui s'écrit aussi

$$G'(t)\leq\varphi(t)\psi(t)\exp(-\int_{a}^{t}\psi\left(s\right)ds)$$

Avec $G(t)=F(t)\exp(-\int\limits_{a}^{t}\psi(s)ds)$

Comme $G(a)=F(a)=0$, on en déduit, par intégration

$$G(t)\leq\int\limits_{a}^{t}\varphi(s)\psi(s)\exp(-\int\limits_{a}^{s}\psi(u)du)ds$$

Or, par hypothèse, $y(t)\leq\varphi(t)+G(t)\exp(\int\limits_{a}^{t}\psi(s)ds)$, d'où le résultat en utilisant l'inégalité ci dessus. ■

On utilise parfois le lemme de Gronwall dans le cas particulier suivant.

Corollaire 1.1 *Soient ψ et $y:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}^{+}$ deux fonctions continues et vérifiant*

$$\exists c\geq 0,\ \forall t\in[a,b]\,,\ y(t)\leq c+\int\limits_{a}^{t}\psi(s)y(s)ds$$

alors

$$\forall t\in[a,b]\,,y(t)\leq c\exp(\int\limits_{a}^{t}\psi(s)ds)$$

Il s'agit du lemme de Gronwall dans le cas particulier où φ est la fonction constante égale à c, on a donc pour tout $t \in [a,b]$,

$$y(t) \leq c + \int_a^t c\psi(s)\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)ds = c + c\left[-\exp\left(\int_s^t \psi(u)du\right)\right]_a^t = c\exp\left(\int_a^t \psi(s)ds\right)$$

Citons enfin une application intéressante du lemme de Gronwall, utile dans les majorations d'erreurs sur les solutions d'équations différentielles.

Corollaire 1.2 *Soit $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 vérifiant*

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta \geq 0, \forall t \in [a,b]\,, \ \ \left\|y'(t)\right\| \leq \beta + \alpha \left\|y(t)\right\|$$

Alors

$$\forall t \in [a,b]\,, \ \ \|y(t)\| \leq \|y(a)\| \exp\left(\alpha\left(t-a\right)\right) + \frac{\beta}{\alpha}\left(\exp\left(\alpha\left(t-a\right)\right) - 1\right)$$

Il suffit d'écrire, pour tout $t \in [a,b]$

$$\|y(t)\| \leq \|y(a)\| + \|y(t)-y(a)\| \leq \|y\left(a\right)\| + \int_a^t \left\|y'\left(s\right)\right\| ds \leq \|y(a)\| + \beta\left(t-a\right) + \alpha\int_a^t \|y(s)\|\, ds$$

puis on applique le lemme de Gronwall et en conclut en intégrant par parties.

Lemme 1.4 *Inégalité de Gronwall (forme discrète)*

$$\gamma_n \geq 0, \alpha_n \geq \alpha_{n\,-1}, \beta_j \geq 0 \ et \ \gamma_n \leq \alpha_n + \sum_{j=1}^{n} \beta_j\gamma_j, \ n \geq 0$$

alors

$$\gamma_n \leq \alpha_n exp(\sum_{j=1}^{n} \beta_j).$$

Définition 1.20 *La forme bilinéaire* $a(.,.)$ *est dite coercive(ou elliptique) s'il existe une constante* $\alpha > 0$ *telle que*

$$\forall v \in V, \ a(v,v) \geqq \alpha \|v\|^2$$

pour tout $v \in V$.

Théorème 1.3 *(Lemme de Lax-Miligram) [5]. Soit* V *un espace de Hilbert réel,* $L(.)$ *une forme linéaire continue sur* V, $a(.,.)$ *une forme bilinéaire continue et coercive(elliptique) sur* V. *Alors la formulation variationnelle :*

Trouver $u \in V$ *tel que* $a(u,v) = L(v)$ *pour toute fonction* $v \in V$, *admet une solution unique* $u \in V$. *De plus cette solution dépend continument de la forme linéaire* L, *c- à- d l'application linéaire* $L \to u$ *est continue de* V' *dans* V.

Chapitre 2

Hypothèses et définitions

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions, notations et hypothèses de base utiles dans ce mémoire.

2.1 Position du problème

Considérons l'équation parabolique dégénérée intégro-différentielle de la forme suivante :

$$\partial_t \beta(u) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_0^t a(t-s)\, k(u(s,x))\, ds + f(t,x,u) \tag{P}$$

Avec condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \ x \in (0,1) \tag{1}$$

Condition de Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = 0, \ t \in I = [0,T] \tag{2}$$

la condition intégrale non locale

$$\int_0^1 u\,(t,x) = 0 \tag{3}$$

La fonction u est l'inconnue, l'intégrale$\int_0^t a\,(t-s)\,k\,(u\,(s,x))\,ds$ est le terme de mémoire, f est la source et $\beta(u)$ est une fonction non linéaire.

2.2 Espaces fonctionnels et hypothèses

Soit $H = L^2(0,1)$ l'espace usuel de Lebesgue des fonctions réelles à carrées intégrables sur $(0,1)$ dont le produit scalaire et la norme seront respectivement notés par $(,)$ et $\|\|$.

V désigne l'espace de Hilbert suivant

$$V = \left\{ \phi \in L^2(0,1); \int_0^1 \phi dx = 0 \right\}.$$

Nous utiliserons dans ce chapitre les espaces de fonctions suivants :

$$C^{0,1}\,(I,X) = \{u : I \to X;\ u \text{ fonction continue de Lipschitz}\}.$$

$C_0^1(0,1)$ est l'espace linéaire des fonctions continues à support compact sur $(0,1)$. Comme de telles fonctions sont intégrables au sens de Lebesgue, on peut définir sur $C_0^1(0,1)$ la forme bilinéaire suivante :

$$(u,v) = \int_0^1 \Im_x u \Im_x v dx,$$

où

$$\Im_x u = \int_0^x u\,(\xi)\,d\xi.$$

La forme bilinéaire (u, v) est considérée comme un produit scalaire sur $C_0^1(0,1)$ pour lequel $C_0^1(0,1)$ n'est pas complet.

Définition 2.1 *On note par $B(0,1)$ le complété de $C_0^1(0,1)$ pour le produit scalaire (u,v), qui est noté par $(.,.)_B$, appelé l'espace de Bouziani* [6] *ou l'espace des fonctions primitives à carrée intégrables sur $(0,1)$. La norme d'une fonction u de $B(0,1)$ est le nombre non négatif.*

$$\|u\|_B = \sqrt{(u,u)_B} = \|\Im_x u\|\,.$$

Pour $u \in L^2\,(0,1)$, nous avons l'inégalité

$$\|u\|_B^2 \leq \frac{1}{2}\|u\|^2,$$

telle que $\|u\|$est la norme de u dans $L^2\,(0,1)$, d'où, l'injection continue $L^2(0,1) \hookrightarrow B(0,1)$.

V_B désigne l'espace de Hilbert

$$V_B = \left\{ \begin{array}{c} \phi \in B(0,1); \int_0^1 \phi. \\ dx = 0 \end{array} \right\}.$$

Pour l'étude de ce problème nous allons faire les hypothèses suivantes :

(H_1) β est une fonction croissante, continue de Lipschitz telle que $h^m \leq \beta' \leq h^{-m}$, et $m \in (0, \frac{1}{3})$. Dans le cas dégénéré, nous remplaçons β' par $\beta_h'\,(s) = \max\left\{h^m, \min\left(\beta'\,(s)\,, h^{-m}\right)\right\}$

(H_2) $f\,(t) \in L^2\,(0,1)$ et $\left\|f\,(t) - f\left(t'\right)\right\|_B \leq l\left|t - t'\right|$.

(H_3) a est une fonction continue telle que :

$$\left|a(t)-a(t^{'})\right| \leq c_1 \left|t-t^{'}\right|, k : I \times B\,(0,1) \rightarrow L^2\,(0,1)$$

est une fonction continue et $\|k\,(t,u)\|_B \leq \|u\|_B$.

(H_4) Pour $u(t), v\,(t) \in V$ nous avons :

$$|k\,(t,u) - k\,(t,v)| \leq L\,(t)\,\|u(t)-v(t)\|_B$$

pour presque tout $t \in I$, où $L \in L^1\,(I)$ est une fonction positive.

(H_5) $\|\beta\,(u_1) - \beta\,(u_2)\|_B \geq C_0\,\|u_1 - u_2\|_B$.

Notons que la monotonie de β implique $(\beta\,(u_1) - \beta\,(u_2)\,,\ u_1 - u_2)_B \geq 0$.

Maintenant, nous allons voir dans quel sens nous avons défini la solution faible du problème posé.

Définition 2.2 *Nous désignons par une solution faible du problème* (P), *une fonction* u *qui satisfait :*

(1) $u \in L^2\,(I,V)$ *et* $\beta\,(u) \in C(I,\ B)$.

(2) $\partial_t \beta\,(u) \in L^2\,(I,\ B^*)$. B^**est l'espace dual de* B.

(3) u *vérifie les conditions* (1) *et* (3).

(4) *Pour toute* $\phi \in V$, *nous avons :*

$$\int_I (\partial_t \beta\,(u)\,,\ \phi)_B + \int_I (u,\ \phi) = \int_I (f,\ \phi)_B + \int_I \left(\int_0^t a\,(t-s)\,k\,(u\,(s,x))\,ds,\ \phi\right)_B.$$

Chapitre 3

Construction d'un schéma de discrétisation et estimation a priori

Dans ce chapitre, on commence par discrétiser en temps le problème continu (P) en utilisant un schéma numérique qui correspond à la méthode de Rothe, puis nous établissons quelques estimations a priori.

3.1 Schéma de discrétisation

Si on multiplie l'équation (P) par une fonction $\phi \in V$ et on intègre sur I on obtient la formulation variationnelle suivante

$\int_I (\partial_t \beta(u), \ \phi)_B + \int_I (u, \ \phi) = \int_I (f, \ \phi)_B + \int_I \left(\int_0^t a(t-s) k(u(s,x)) ds, \ \phi \right)_B, \forall \phi \in V$

Soit l'intervalle $I = [0, T]$.

On divise l'intervalle I en n sous intervalles de longueur $h = \dfrac{T}{n}$ et notons $t_i = ih$, $u_i = u(t_i, x)$, $\delta u_i = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$, $f_i = f_i \ (t_i, x)$, $a_{ij} = a(t_i - t_j)$, $k(u_j) = k(t_j, u_j)$, $i = 1, \ldots.., n.$

Pour simplifier, nous allons négliger x.

Alors le problème (P) est approché par le systeme d'équations suivant :

$$\lambda_{i-1}\left(u_i - u_{i-1)},\ \phi\right)_B - h\left(u_i^{''},\ \phi\right)_B = h\left(f_i, \phi\right)_B + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} k\left(u_j\right),\ \phi)_B, \forall i = 1, ..., n, \quad (4)$$

$$u_i\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), \quad x \in (0,1)$$

$$u_i^{'}\left(0\right) = 0,$$

$$\int_0^1 u_i = 0$$

L'existence d'une solution faible $u_i \in V$ est assurée par le lemme de Lax-Milgram.

On a :

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = \int_0^1 \Im_x u_i^{''} \Im_x \phi dx = \int_0^1 \left(\int_0^x u_i^{''}\right) \Im_x \phi dx = \int_0^1 \left[u_i^{'}\ (x) - u_i^{'}\left(0\right)\right] \Im_x \phi dx.$$

D'après la relation $u_i^{'}\left(0\right) = 0$ Il suit que

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = \int_0^1 u_i^{'}\ (x) \Im_x \phi dx, \quad (5)$$

En integrant par parties la dernière relation on obtient

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = \left[u_i\ (x) \Im_x \phi\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 u_i \phi dx = -\left(u_i, \phi\right), \quad (6)$$

et puisque $\int_0^1 \phi dx = 0$ $(\phi \in V)$, alors

$$\left(u_i^{''}, \phi\right)_B = -\left(u_i, \phi\right).$$

En remplaçant dans (4), on obtient finalement

$$\lambda_{i\ -1}\left(u_i - u_{i-1)},\ \phi\right)_B + h\left(u_i, \phi\right) = h\left(f_i,\ \phi\right)_B + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} k\left(u_j\right),\ \phi)_B \qquad (7)$$

où le schéma de relaxation $\lambda_{i\ -1}$ satisfait, $\lambda_i\ = \beta_h^{'}\left(u_i\right).$

3.2 Estimation a priori

Dans cette section, nous établissons quelques estimations a priori utiles.

Lemme 3.1 *Il existe une constante $C \geq 0$ telle que les estimations suivantes sont vérifiées uniformément en n, i, j et h :*

$$h^m \sum_{i=1}^{j} h\left\|\delta u_i\right\|_B^2 \leq C, \ \ \|u_i\| \leq C, \ \ \sum_{i=1}^{j} \|u_i - u_{i-1}\|^2 \leq C. \qquad (8)$$

Preuve. En posant $\phi = u_i - u_{i-1}$ dans (7) et en faisant la sommation pour $i = 1,..., l$, on obtient

$$\sum_{i=1}^{l} h(\lambda_{i-1}\delta u_i,\ \delta u_i)_B + \sum_{i=1}^{l}(u_i,\ u_i - u_{i-1}) = \sum_{i=1}^{l} h(f_i,\ \delta u_i)_B + \sum_{i=1}^{l}\left(h^2 \sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij} k\left(u_j\right),\ \delta u_i)_B\right) \quad (9)$$

L'égalité (9) est brièvement notée par : $J_1 + J_2\ = J_3 + J_4$. Maintenant nous allons estimer chaque terme.

- On a

$$J_1 = \sum_{i=1}^{l} h\left(\lambda_{i-1}\delta u_i, \delta u_i\right)_B = \sum_{i=1}^{l} h\left(\beta_h^{'}\left(u_i\right)\delta u_i, \delta u_i\right)_B = \sum_{i=1}^{l} h\beta_h^{'}\left(u_i\right)\left\|\delta u_i\right\|_B^2$$

et comme

$$\beta_h^{'}\left(u_i\right) \geq h^m$$

Donc

$$J_1 \geq h^m \sum_{i=1}^{l} h\left\|\delta u_i\right\|_B^2$$

- Pour estimer J_2, nous utilisons la relation :

$$(u, u-v) = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 - \|v\|^2 + \|u-v\|^2\right),$$

alors

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{i=1}^{l}(u_i, u_i - u_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}\left(\|u_i\|_{L^2}^2 - \|u_{i-1}\|_{L^2}^2 + \|u_i - u_{i-1}\|_{L^2}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{l}\|u_i\|_{L^2}^2 - \sum_{i=1}^{l}\|u_{i-1}\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^{l}\|u_i - u_{i-1}\|_{L^2}^2\right), \end{aligned}$$

d'où

$$2J_2 = \|u_l\|^2 - \|u_0\|^2 + \sum_{i=1}^{l}\|u_i - u_{i-1}\|^2 \tag{11}$$

- Pour J_3 l'inégalité de Chauchy-Schwarz donne

$$|J_3| = \left|\sum_{i=1}^{l} h(f_i,\ \delta u_i)_B\right| \leq \sum_{i=1}^{l} h\left\|f_i\right\|_B^2\left\|\delta u_i\right\|_B^2 \ \leq C.h\sum_{i=1}^{l}\left\|\delta u_i\right\|_B^2,$$

et d'aprés l'inégalité de Cauchy

$$|J_3| \ \leq Ch\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\delta u_i\right\|_B^2\right)\leq Ch\ (\sum_{i=1}^{l}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i=1}^{l}\left\|\delta u_i\right\|_B^2),$$

d'où

$$|J_3|\leq C\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{l}h\left\|\delta u_i\right\|_B^2\right). \tag{12}$$

- Maintenant nous allons estimer le terme de mémoire J_4 en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}|J_4| &= \left|\sum_{i=1}^{l}h^2\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}k\left(u_j\right),\delta u_i)_B\right|\leq\sum_{i=1}^{l}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left|(a_{ij}k\left(u_j\right),\delta u_i)_B\right| \\ &\leq C\sum_{i=1}^{l}h^2\sum_{j=1}^{i-1}\left\|\delta u_i\right\|_B^2\leq C\sum_{i=1}^{l}h^2\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\delta u_i\right\|_B^2\right),\end{aligned}$$

d'où

$$|J_4|\leq C\left(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{l}h\left\|\delta u_i\right\|_B^2\right) \tag{13}$$

En résmant toutes ces considérations, en recueillant (10) - (13), en choisissant ε suffisamment petit, alors le lemme discret de Gronwall conclut la preuve du Lemme 3.1. ■

Soit $\overline{u}^n$ une fonction d'état définie par :

$$\overline{u}^n\left(t\right)=\begin{cases}u_i & t\in(t_{i-1},t_i] \\ u_0 & t=0\end{cases}\quad,\qquad i=1,...,n \tag{14}$$

et soit la fonction $\overline{\beta}^n\left(\overline{u}^n\right)$ telle que

$$\overline{\beta}^n\left(\overline{u}^n(t)\right)=\begin{cases}\beta(u_i) & t\in(t_{i-1},t_i]\\ \\ \overline{\beta}^n\left(\overline{u}^n(0)\right)=\beta(u_0), & t=0\end{cases},\quad i=1,...,n \tag{15}$$

On note par f^n et K^n les fonctions

$$f^n(t)=\begin{cases}f_i & t\in[t_{i-1},t_i]\\ \\ f_0, & t=0\end{cases},\qquad i=1,...,n \tag{16}$$

$$K^n(t)=\begin{cases}h\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}k\left(u_j\right) & t\in[t_{i-1},t_i]\\ \\ ha_{10}k_0, & t=0\end{cases},\qquad i=1,...,n \tag{17}$$

Nous définissons les fonctions de Rothe sur l'intervalle I par

$$u^n(t)=u_{i\ -1}+(t-t_{i-1})\,\delta u_i,\quad t\in[t_{i-1},t_i]\,,\qquad i=1,...,n \tag{18}$$

$$\beta^n\left(\overline{u}^n(t)\right)=\beta\left(u_{i-1}\right)+\lambda_{i-1}\left(t-t_{i-1}\right)\delta u_i,\qquad t\in[t_{i-1},t_i]\,,\quad i=1,...,n \tag{19}$$

Lemme 3.2 *L'estimation a priori*

$$\left\|\lambda_{i-1}\ \delta u_i\right\|_*\leq C \tag{20}$$

est vérifiée pour $1\leq i\leq n,$ *où* $\left\|\lambda_{i-1}\delta u_i\right\|_*=\underset{\|\phi\|\leq1,\ \phi\in V}{sup}\left|\left(\lambda_{i-1}\delta u_i,\ \phi\right)\right|.$

Remarque 3.1 *Des lemmes* 3.1 *et* 3.2*, nous déduisons les estimations suivantes*

$$a)\ \|\partial_t\beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,B^*)} \leq C,\ \ b)\ \|\overline{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq C,$$

$$c)\ \|\beta(\overline{u}^n) - \beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,B)} \leq \frac{C}{n^{1-2m}},\ \ d)\, \|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,B)} \leq \frac{C}{n^{\frac{1-m}{2}}}$$

$$e)\ \|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{n}} \tag{21}$$

Preuve. $a)$ On a

$$\beta^n(\overline{u}^n(t)) = \beta(u_{i-1}) + \lambda_{i-1}(t - t_{i-1})\,\delta u_i \qquad t \in [t_{i-1}, t_i]\,,\quad i = 1, ..., n$$

On dérive cette relation par rapport à t, on obtient :

$$\partial_t\beta^n(\overline{u}^n(t)) = \lambda_{i-1}\delta u_i, t \in [t_{i-1}, t_i]\,, i = 1, ..., n$$

En appliquant le lemme 3.2, on obtient :

$$\|\partial_t\beta^n(\overline{u}^n(t))\|^2 = \|\lambda_{i-1}\delta u_i\|_*^2 \leq C,$$

on intègre par rapport à t, on obtient :

$$\int_0^T \|\partial_t\beta^n(\overline{u}^n(t))\|^2\,dt = \int_0^T \|\lambda_{i-1}\delta u_i\|^2\,dt \leq \int_0^T Cdt,$$

ce qui implique que

$$\|\partial_t\beta^n(\overline{u}^n(t))\|_{L^2(I,B^*)} \leq C.$$

b) De (14) on a :

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1},\ t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases},\ i = 1, ..., n$$

alors

$$\|\overline{u}^n\| = \|u_i\| \leq C.$$

On intègre par rapport à t, on obtient :

$$\int_0^T \|\overline{u}^n\|^2 \, dt = \int_0^T \|u_i\|^2 \, dt \leq \int_0^T C dt,$$

donc

$$\|\overline{u}^n\|_{L^2(I,B)} \leq C.$$

d) On a

$$\overline{u}^n(t) = \begin{cases} u_i & t \in [t_{i-1}, t_i] \\ u_0 & t = 0 \end{cases},\ i = 1, ..., n$$

et

$$u^n(t) = u_{i\ -1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i,\ \ t \in [t_{i-1}, t_i],\ \ i = 1, ..., n$$

$$\|u^n - \overline{u}^n\| = \|u_i - u_{i-1} - (t - t_{i-1})\,\delta u_i\| = \|h\delta u_i - (t - t_{i-1})\,\delta u_i\| \leq \|\delta u_i(h - (t - t_{i-1}))\| \leq h\,\|\delta u_i\|_B\,,$$

et on a

$$h^{m+1}\,\|\delta u_i\|_B^2 \leq C,$$

d'où

$$\|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,B)} \leq \frac{C}{n^{\frac{1-m}{2}}}.$$

e) De (18) et (14) on a :

$$u^n - \overline{u}^n = u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i - u_i = u_{i-1} - u_i + (t - t_{i-1})\,\delta u_i = -h\delta u_i + (t - t_{i-1})\,\delta u_i,$$

$$\|u^n - \overline{u}^n\|^2 = \|u_{i-1} + (t - t_{i-1})\,\delta u_i - u_i\|^2 = \|-h\delta u_i + (t - t_{i-1})\,\delta u_i\|^2 \leq 4h^2\,\|\delta u_i\|^2 \leq \frac{C}{n}.$$

Donc

$$\|u^n - \overline{u}^n\|_{L^2(I,L^2(\Omega))} \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$$

■

Chapitre 4

Résultats de convergence et d'existence

4.1 Convergence

Selon le lemme 4.1 dans [9] nous avons

$$h^m \|\beta(u) - \beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,B)} \leq C\left(h + h^{1-2m}\right) \tag{22}$$

Ce qui donne

$$\beta^n(\overline{u}^n) \underset{n \to \infty}{\to} \beta(u) \text{ dans } L^2(I,B). \tag{23}$$

D'autre part, de la remarque (3.1), on a :

$$\|\overline{u}^n\|_{L^2(I,V)} \leq C$$

On déduit que la suite $\{\overline{u}^n\}_n$ est uniformément bornée dans $L^2(I,V)$, donc nous pouvons extraire une sous-suite $\{\overline{u}^{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\overline{u}^{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^2(I,V). \tag{24}$$

D'après (H_2) on a

$$\|f^n(t)-f(t)\|_B \leq l\left|t-t'\right| \leq \frac{C}{n}$$

Comme

$$\|f^n(t)-f(t)\|^2_{L^2(I,B)} = \int_0^T \|f^n(t)-f(t)\|^2_B\, dt \leq \int_0^T \frac{C}{n^2}dt$$

On obtient

$$\|f^n(t)-f(t)\|_{L^2(I,B)} \leq \frac{C}{n}.$$

Donc

$$f^n(t) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} f \ \text{ dans } L^2(I,B). \tag{25}$$

Lemme 4.1 *La suite $\{K^n\}_n$ est uniformément bornée donc nous pouvons extraire une sous-suite $\{K^{n_k}\}_k$ telle que :*

$$K^{n_k} \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightarrow} K \ \textit{dans}\ L^2(I,\ B) \tag{26}$$

Preuve. La preuve est similaire à celle de [3].

$$\begin{aligned}
\|k^n(t)\|_B &= \left\|h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k(u_j)\right\|_B \leq \frac{T}{n}\max|a(t)|\sum_{j=1}^{i-1}\|k(u_j)\|_B \\
\|k^n(t)\|_B &\leq \frac{T}{n}\max_I|a(t)|\sum_{j=1}^{i-1}\|u_j\|_B\,.
\end{aligned}$$

D'après H_3 et le lemme 3.1 on a

$$\|k^n(t)\|_B \leq \frac{T}{n}\max_I |a(t)| \sum_{j=1}^{i-1} \|u_j\|_B \leq C,$$

ce qui implique

$$\|k^n(t)\|^2_{L^2(I,B)} = \int_I \|k^n(t)\|^2_B \, dt \leq C$$

D'autre part, dans [3] l'auteur a démontré que $k^n(t) \underset{n\to\infty}{\to} k(t)$ dans $L^\infty(I,H)$ et pour $H = B(0,1)$ on aura $k^n(t) \underset{n\to\infty}{\to} k(t)$ dans $L^\infty(I,B)$. L'injection $L^\infty(I,B) \hookrightarrow L^2(I,B)$ implique

$$k^n(t) \to k(t) \underset{n\to+\infty}{\text{dans}} L^2(I,B)$$

■

Lemme 4.2 *La convergence suivante est vérifiée :*

$$\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} \partial_t \beta(u) \;\; dans \; L^2(I, \; B^*) \tag{27}$$

Preuve. De la remarque 3.1, on a $\|\partial_t \beta^n(\overline{u}^n)\|_{L^2(I,\;B^*)} \leq C$, d'où $\partial_t \beta^n(\overline{u}^n)$ est uniformément bornée dans B^* et ainsi, elle admet une sous suite $\{\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k})\}_k$ telle que

$$\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) \underset{k\longrightarrow\infty}{\rightharpoonup} \xi. \tag{28}$$

De l'égalité

$$\left(\beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}) - \beta^{n_k}(U_0), \; \phi\right) = \int_0^t \left(\partial_t \beta^{n_k}(\overline{u}^{n_k}(s)), \; \phi\right) ds, \tag{29}$$

on obtient quand $k \longrightarrow \infty$

$$\left(\beta\left(u\right)-\beta\left(U_0\right),\ \phi\right)=\int_0^t\left(\xi,\phi\right)ds, \tag{30}$$

ce qui implique

$$\left(\beta\left(u\right)-\beta\left(U_0\right)-\int_0^t\xi\left(s\right)ds,\ \phi\right)=0 \tag{31}$$

Donc nous avons $\partial_t\beta\left(u\right)=\xi$ $\blacksquare$

4.2 Existence et unicité de solution faible

Le résultat principal de ce chapitre est donné dans le théorème suivant.

Théorème 4.1 *La limite u est une solution faible du problème (P) dans le sens de la définition 2.2.*

En vertu du $(14)-(19)$ l'identité (7) peut être écrite comme suit

$$\int_I\left(\partial_t\beta^n\left(\overline{u}^n\right),\ \phi\right)_B+\int_I\left(\overline{u}^n,\ \phi\right)=\int_I\left(f^n,\ \phi\right)_B+\int_I(K^n,\ \phi)_B,\forall\phi\in V \tag{32}$$

Selon (24) nous avons ; $u\in L^2\left(I,\ V\right)$ et puisque $u\left(t\right)\in V$ presque pour tout $t\in I$, alors u satisfait la condition (3). D'autre part (30) implique que $\beta\left(u\left(0\right)\right)=\beta\left(U_0\right)$ ce qui donne $u\left(0\right)=U_0$ (parce que β est une fonction continue et croissante). Maintenant, remplaçons n par $n_k\rightarrow\infty$ dans (32) et prenons en compte $(24),(26)$, les lemmes 4.1 et 4.2, on obtient

$$\int_I\left(\partial_t\beta\left(u\right),\ \phi\right)_B+\int_I\left(u,\ \phi\right)=\int_I\left(f,\ \phi\right)_B+\int_I(Ku,\ \phi)_B,\ \forall\phi\in V$$

Alors u est une solution faible de (P) dans le sens de la définition 2.2.

Maintenant, nous allons montrer l'unicité de la solution faible.

Théorème 4.2 *Sous les hypothèses* (H_1)*-(* H_5*), le problème* (P) *admet une solution faible unique.*

Preuve. On suppose que le problème (P) a deux solutions faibles u_1, u_2, alors $u = u_1 - u_2$ satisfait :

$$\int_I (\partial_t(\beta(u_1) - \beta(u_2)), \phi)_B dt + \int_I (u,\ \phi) dt = \int_I \left(\int_0^t a\,(t-s)\,[k(s,u_1) - k(s,u_2)]\,ds,\ \phi \right)_B dt \tag{33}$$

Soit $W = \dfrac{1}{C_0} \underset{I}{max} \left|a\,(t)\right| \int_0^T L\,(t)\,dt$, on devise l'intervalle I en sous-intervalles de longeur p tel que ; $W.p \prec 1$, aprés on choisit la fonction ϕ dans (33) telle que :

$$\phi\,(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [0.p] \\ 0 & t \in]p.T] \end{cases}.$$

On voit que $\phi \in L^2\,(I, V)$, alors on obtient :

$$(\beta(u_1\,(p) - \beta(u_2\,(p)), u_1\,(p) - u_2\,(p))_B + \int_0^p \|u\|^2\,dt = \int_0^p \left(\int_0^t a\,(t-s)\,[k(s,u_1) - k(s,u_2)]\,ds, u \right)_B dt \tag{34}$$

En utilisant les conditions (H_4), (H_5) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$C_0 \left\|u\,(p)\right\|_B^2 = C_0 \left\|u_1\,(p)) - u_2\,(p)\right\|_B^2 \leq (\beta(u_1\,(p)) - \beta(u_2\,(p)), u_1 - u_2)_B$$

$$\leq \int_0^p \left\| \int_0^t a\,(t-s)\,[k(s,u_1)-k(s,u_2)]\,ds \right\|_B . \|u\,(t)\|_B\,dt,$$

alors

$$C_0\,\|u\,(p)\|_B^2 \ \leq \max_I |a\,(t)| \int_0^T L\,(t)\,dt.p. \max_{t\in[0,p]} \|u\,(t)\|_B^2\,dt. \tag{35}$$

Soit $t^* \in [0,p]$ tel que $\max_{t\in[0,p]} \|u\,(t)\|_B = \|u\,(t^*)\|_B$,alors

$$\int_0^{t^*} \frac{d}{dt}\,\|u\,(t)\|_B^2\,dt \leq \int_0^p \frac{d}{dt}\,\|u\,(t)\|_B^2\,dt = \|u\,(p)\|_B^2\,, \tag{36}$$

ce qui implique

$$\int_0^{t^*} \frac{d}{dt}\,\|u\,(t)\|_B^2\,dt = \|u\,(t^*)\|_B^2 \preceq W.p.\,\|u\,(t^*)\|_B^2\,. \tag{37}$$

Puisque $W.p \prec 1$, donc

$$u\,(t) = 0, \forall t \in [0,\ p]\,.$$

En répétant la même procédure sur les intervalles $[ip,\ (i+1)p]$, $i = 1, ...,$ on obtient

$$u\,(t) = 0,\ \forall t \in I;$$

et par conséquent

$$u_1 = u_2.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons utilisé la méthode de Rothe pour l'étude d'une équation parabolique dégénérée intégro-différentielle avec des conditions : initiale, Neumann, et non locale de type intégrale, nous avons établis les estimations a priori nécessaires, sur la base des quelles la convergence du schéma d'approximation correspondant est démontrée. A la fin nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution faible.

Bibliographie

[1] Allaire, G. : Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique. Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[2] Bahuguna, D., Abbas, S., Dabas, J. : Partial functional differential equation with an integral condition and applications to population dynamics. Nonliear Anal.69, 2623-2635 (2008).

[3] Bahuguna, D., Raghavendra, V. : Rothe's method to parabolic integrodiferential equation via abstact integrodifferential equation. Appl. Anal 33, 153-167 (1989).

[4] Bouziani, A.,Merazga, N. : Solution to a semi linear pseudoparabolic problem with integral conditions. EJDE 115,1-18(2006).

[5] Brezis, H. : Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Masson, Paris (1983).

[6] Chaoui, A. : Etude de quelques problemes aux limites avec conditions non locales. Thèse de Doctorat, université d'annaba, 2010.

[7] Chaoui, A., Guezane Lakoud, A. : Rothe-Galerkin's method for a non linear integrodifferential equation. Bound. Value Probl. 2012,10 (2012).

[8] Dawson, C.N.,vanDuijn, C.J., Grundy, R.F. : Large time asymptotes in contaminant transport in porous media. SIAMJ. Appl. Math. 56(4) (1996) 965-993.

[9] El-Azab, M.S. : Solution of non linear transport diffusion problem by linearisation. Appl. Math. Comput.192, 205-2015 (2007).

[10] Gourdon, X. : Analyse. $2^{ème}$ edition, Ellipses edition, 2008.

[11] Guezane-Lakoud, A., Belakroum, D. : Rothe's method for a telegraph equation with integral conditions. Nonlinear Anal. 70, 3842-3853 (2009).

[12] Guezane-Lakoud, A., Jasmati, M.S., Chaoui, A. : Rothe's method for an integrodifferential equation with integral conditions. Nonlinear Anal. 72,1522-1530 (2010).

[13] Kuliev, K.,Petersson, L.-E. : An extension of Rothe's method to non-cylindrical domains. Appl. Math.52(5),365-389 (2007).

[14] Ladyzenskaja, O.A. : On solution of non stationary operator equations. Math.Sb.39(4),491-524(1956).

[15] Ladyzenskaja, O.A. : Solution of the third boundary value problem for quasilinear parabolic equation, Trudy mosk.Mat.Obs 7(1957).(in Russian).

[16] Rektorys, K. : On application of direct variational methods to the solution of parabolic boundary value problems of arbitrary order in space variables. Czechoslov. Math.J.21,318-339 (1971).

[17] Rektorys, K. : The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations. D.Reidel Publishing Company, Dordrecht (1982).

[18] Rothe, E. : Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenz fall eindimonsionaler Randwertaufgaben. Math. Ann.102,650-670 (1930).

[19] Sander, G.C., Norbury J.,Weeks S.W. : An exact solution to the non linear diffusion-convection equation for two phase flow. Q.J.Mech. Appl. Math.46(4)709-723 (1993).