

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de 8 Mai 1945 – Guelma -

Faculté des Mathématiques, d'Informatique et des Sciences de la Matière

Département d'Informatique



Mémoire de Fin d'études Master

Filière : Informatique

Option : Science et technologie de l'information
et de la communication

Thème :

**Modélisation et représentation d'objets discrets 2D avec une
décomposition spatiale non uniforme par une
structure algébrique**

Encadré par :

Dr. Salah Derdar

Présenté par :

Reda Douafer

Octobre 2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Remerciements

Au ce terme de ce mémoire nous tiendrons nos remerciement au bon dieu que nous a donné le courage d'achever ce travail et la force pour mener à bien mémoire.

Nous tenons en premier temps à remercier chaleureusement et tout particulièrement notre encadreur Mr DERDAR Salah, de nous avoir encadré et nous guidé avec autant de sérieux, de gentillesse, pour ses précieux conseils et son aide durant tout la période du travail pour une meilleure maitrise du projet.

Des remerciements à tous les enseignants du département d'informatique de l'université 08 mai 45 de Guelma.

Enfin, mes vifs remerciements vous également aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté en acceptant d'examiner et juger notre travail.

Résumé

Ce travail présente une modélisation basée sur les concepts de la théorie de Morse qui conduit à concevoir un algorithme responsable de générer deux structures topologiques notamment le graphe de Reeb et le complexe simplicial associé. Cette modélisation permet de représenter des objets discrets 2D inclus dans des images numériques avec une subdivision spatiale initiale avec une grille irrégulière (sous forme de blocs rectangulaires de pixels ou des quadrants pour l'image de quadtree) par des structures topologiques et algébriques et de montrer l'aptitude d'appliquer des traitements topologiques tels que le calcul d'homologie, la localisation des invariants topologiques, la mise en appariement de ces invariants, et d'autres. L'approche est évaluée sur une base de formes 2D en représentation de quadtree avec différents résultats de tests appliqués.

Mots clés : graphe de Reeb, complexe simplicial, théorie de Morse, blocs de pixels, quadrants.

Abstract

This work presents a modeling based on the concepts of Morse theory which leads to design an algorithm responsible for generating two topological structures in particular the Reeb graph and the associated simplicial complex. This modeling makes it possible to represent 2D discrete objects included in digital images with an initial spatial subdivision with an irregular grid (in the form of rectangular blocks of pixels or quadrants of quadtree image) by topological and algebraic structures and showing the ability to apply topological treatments such as the homology computing, the localization of topological invariants, the matching of these invariants, and others. The approach is evaluated on the basis of 2D shapes in quadtree representation with different results of applied tests.

Key words: Reeb graph, simplicial complex, Morse theory, blocks of pixels, quadrants.

Table des matières

Introduction Générale	1
-----------------------------	---

Chapitre 1 : Etat de l'art

1. Introduction.....	4
2. Approches pour le graphe de Reeb.....	5
3. Approches pour les structures de complexes.....	7
3.1 Structures simpliciales	7
3.2 Structures cellulaires.....	7
3.3 Structures cubicales	8
4. Conclusion.....	9

Chapitre 2 : Graphe de Reeb et théorie de Morse

1. Introduction	11
2. Graphe de Reeb et théorie de Morse	11
2.1 Théorie de Morse.....	11
2.1.1 Les points critiques.....	11
2.1.2 Fonction de Morse.....	12
2.2 Graphe de Reeb	13
2.2.1 Topologie de l'ensemble de niveaux	16
2.2.2 Applications du graphe de Reeb.....	17
3. Représentation d'objets 2D et 3D.....	17
3.1 Représentation quadtree et octree	17
3.2 Représentation en blocs de pixels ou voxels.....	18
4. Conclusion.....	18

Chapitre 3 : Modélisation de l'approche

1. Introduction.....	20
2. Modèle topologique	20
2.1. Construction du graphe de Reeb	21
a. Entrée des données des blocs.....	21
b. Calcul des cercles centrés (ou niveaux topologiques).....	22
c. Détermination des points d'intersection entre blocs et calcul des arcs circulaires.....	22
d. Extraction des nœuds et des arêtes du graphe.....	23
2.2. Construction du complexe simplicial.....	26
3. Conclusion	27

Chapitre 4 : Implémentation et résultats expérimentaux

1. Introduction.....	29
2. Implémentation de l'approche	29
2.1. Environnement de matériels	29
2.2. Environnement logiciel	29
2.2.1. Environnement de développement Eclipse.....	29
2.2.2. Langage Java.....	29
2.3. Structure du programme.....	30
3. Résultats expérimentaux	33
4. Conclusion	41
Conclusion Générale	42
Bibliographie.....	43
Webographie	48

Liste des Figures

Figure 2.1 : Pour une fonction $f(x, y)$, les points critiques dégénérés et non-dégénéré.	12
Figure 2.2 : Graphe de Reeb de la fonction d'hauteur sur le tore	14
Figure 2.3 : Quatre points critiques et deux points de type régulier de la fonction hauteur avec son graphe de Reeb correspondant.....	15
Figure 2.4 : Evolution du niveau qui passe par un point critique.....	16
Figure 3.1 : Exemple de représentation en blocs 2D avec six (06) blocs.....	21
Figure 3.2 : Représentation en blocs avec calcul des cercles centriques et des points d'intersections.....	23
Figure 3.3 : Extraction des arcs circulaires avec les nœuds du futur graphe.....	24
Figure 3.4 : Construction du graphe de Reeb.....	25

Liste des Tableaux

Tableau 4.1 :16 formes en représentation de quadtree de la base de données Kimia-99.....	35
Tableau 4.2 : Exemple de génération du graphe de Reeb.	36
Tableau 4.3 : génération des graphes de Reeb aux 16 formes précédentes:.....	40

Introduction Générale

La modélisation et la représentation d'objets bidimensionnels (2D) et tridimensionnels (3D) basés sur des systèmes informatiques sont devenues très utiles dans des nombreux domaines traitant des phénomènes régionaux ou spatiaux [01]. Parmi les représentations d'objets avec lesquelles nous donnons beaucoup de soucis, on peut citer les représentations à caractère topologique qui codent l'espace topologique différentes subdivisions (triangulaires, cubiques, hexagonales et autres) [02]. Les objets discrets sont caractérisés par des propriétés géométriques et topologiques intrinsèques qui aident leur représentation et leur reconnaissance, tels que le groupe fondamental, les groupes supérieurs d'homotopie, les groupes d'homologie. L'homologie est un outil de la topologie algébrique employé en topologie calculatoire, et l'analyse topologique. Parmi les caractéristiques calculées par l'homologie, on trouve les groupes d'homologie qui sont des invariants topologiques, classiquement étudiés en topologie algébrique, et qui caractérisent les objets par les cycles d'homologie. En 2D, les 0- et 1-cycles d'homologie représentent respectivement les composants connexes et les trous. En 3D, les 0-, 1- et 2-cycles d'homologie représentent respectivement les composants connexes, les tunnels et les cavités [03].

En analyse et traitement d'images et infographie, de nombreux algorithmes ont été proposés pour calculer des caractéristiques topologiques des objets dans les images, y compris le nombre de composants connexes et le nombre de trous [04] et d'autres pour générer des squelettes pour des formes 2D et 3D. Les squelettes sont des représentations médiales compactes qui décrivent la forme et la connectivité des objets [05] et certains d'eux sont basés sur le graphe de Reeb. Par définition, le graphe de Reeb est considéré comme un descripteur de forme robuste et discriminant; et aussi une structure puissante de représentation d'objets, de traitement d'interprétation et d'analyse capable de maintenir les propriétés topologiques de la forme en prenant en compte l'intégration des propriétés géométriques de la forme (c.-à-d., une structure capable de coder simplement et efficacement les formes en respectant les propriétés topologiques et géométriques).

Ce travail présente une modélisation basée sur les concepts de la théorie de Morse qui conduit à concevoir un algorithme responsable de générer deux structures topologiques notamment le graphe de Reeb et le complexe simplicial associé.

Cette modélisation permet de représenter des objets discrets 2D inclus dans des images numériques avec une subdivision spatiale initiale avec une grille irrégulière (sous forme de blocs rectangulaires de pixels ou des quadrants pour l'image de quadtree) par des structures topologiques et algébriques plus complexes (graphe de Reeb, complexes combinatoires, complexes à chaînes,...)

capable de montrer l'aptitude d'appliquer l'analyse et des traitements topologiques tels que le calcul d'homologie, la localisation des invariants topologiques, la mise en appariement de ces invariants, et d'autres. Au cœur de l'approche, la génération de la structure de graphe se réalise à partir des points d'intersection entre la bordure des blocs et les cercles centrés calculés suivant une distance centrée calculée depuis le point de centrifuge. Ces points d'intersection servent à extraire les arcs centrés avec des points centres qui forment les futurs nœuds du graphe. Les arêtes du graphe constituent l'interconnexion des nœuds ou la persistance topologique de la forme est maintenue. Le complexe simplicial se construit après avec une manière plus aisée à partir du graphe généré.

Cette modélisation adopte une approche qui permet d'introduire et discuter des concepts traduits en langage algébrique approprié qui conduit à générer les deux structures (graphe de Reeb et le complexe simplicial associé).

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres. Le premier chapitre est destiné à consulter les approches ou les travaux liés aux deux structures topologiques, le graphe de Reeb et le complexe simplicial. Dans le deuxième chapitre, les concepts de graphe de Reeb et la théorie de Morse avec les représentations d'objets 2D et 3D sont illustrés. Le troisième chapitre présente l'approche de modélisation des formes 2D en utilisant les concepts cités précédemment. Le dernier chapitre est consacré à présenter l'implémentation en java de notre approche ainsi que les différents résultats de tests appliqués sur une base des formes 2D.

Chapitre 1

Etat de l'art

1. Introduction :

Les techniques de topologie computationnelle fournissent plusieurs outils et mesures pour l'analyse et le codage des données [06] tels que l'équation d'Euler, la théorie de Morse, et les graphes de Reeb capables de fournir des descriptions de formes très abstraites, avec plusieurs applications pour la compréhension, la simplification et le rendu minimal de grands ensembles de données [07].

Le problème de l'adaptation des méthodes basées sur la topologie à des données discrètes est un domaine de recherche actif. L'ensemble d'outils algorithmiques pour calculer les propriétés topologiques dans le contexte de l'imagerie numérique est relativement petit. Principalement, nombres de Betti, caractéristique d'Euler, squelettisation et caractérisation topologique locale. Récemment, des groupes d'homologie ont également été calculés en imagerie numérique [08].

En topologie algébrique, le complexe simplicial est une structure combinatoire versatile, largement utilisée pour représenter des données multidimensionnelles, telles que la représentation en maillages, ou en graphes. Ces deux représentations respectivement peuvent être interprétées comme des complexes tri- et bi-dimensionnels [09]. Par contre un complexe cellulaire ou bien un complexe CW est un type d'espace topologique introduit pour répondre aux besoins de la théorie de l'homotopie. Cette classe d'espace est plus large et possède de meilleures propriétés catégorielles que les complexes simpliciaux, mais conserve toujours une nature combinatoire qui permet le calcul.

Des graphes de Reeb ont déjà été mis en pratique à tout moment pour la compression et la reconstruction de surface, et pour la compréhension de la surface. Les graphes de Reeb sont également un outil intéressant pour la visualisation de données scientifiques spatio-temporelles [10]. Le graphe de Reeb repose sur des propriétés mathématiques prouvant qu'il capture dans une certaine mesure la morphologie des formes 3D, son intérêt est présenté dans [11]. Les nœuds du graphe de Reeb correspondent aux points critiques d'une fonction définie sur la surface étudiée, et plusieurs fonctions peuvent être utilisées, le choix dépend principalement de l'application visée, et donne également des critères de classer les modèles 3D, par exemple dans une base de données [12].

Ce chapitre présente l'état de l'art autour des approches de graphe de Reeb et celles de structures de complexes de nature simpliciale, cellulaire ou cubicale.

2. Approches pour le graphe de Reeb :

Le graphe de Reeb a été largement utilisé dans un large éventail d'applications telles que la correspondance des formes et le codage [13], la compression [14], le paramétrage de surface [15], le remaillage iso-surface [16], la simplification [17], la compréhension des formes, l'estimation de la similarité, la récupération de la base de données, et la création des croquis graphiques, dont la conservation de la topologie et la connectivité de la forme d'origine est assurée [18]. Les graphes de Reeb peuvent déterminer si une surface a été correctement reconstruite, indiquer les zones problématiques et peuvent être utilisés pour coder et animer un modèle. Le concept de graphe de Reeb est particulièrement utile dans le traitement de modèles massifs comme ceux générés par le balayage Laser à haute résolution [19]. Aussi, le graphe est utilisé dans plusieurs domaines importants tels que la cartographie à cause de la modélisation de terrain pour extraire des entités et construire des graphiques topologiques [20]. De plus, plusieurs approches qui adoptent le graphe de Reeb sont proposées dans la littérature et cela pour :

- résoudre le problème de la segmentation du scan 3D du corps humain [21];
- l'appariement des formes 3D [22];
- représenter l'image par le graphe dans le cas de phéno-typage des plantes [23];
- indexer de modèles 3D avec des graphes multi-résolution appliqués aux recherches par similarité des formes et d'aspect dans des bases de données d'objets 3D [24];
- la mise en correspondance de graphes en comparant les chemins les plus courts relatifs entre les points d'extrémité des squelettes représentant les objets 3D [25];
- construire une représentation ERG (Extended Reeb Graph), qui peut gérer les points critiques dégénérés [26];
- créer un morphisme entre des objets 3D ayant une topologie différente [27];
- concevoir un système de localisation automatique des repères céphalométriques à l'aide des graphes de Reeb [28];
- analyser la topologie des données multi-fluides en fonction du temps à l'aide du graphe [29];

- calculer des graphes simplifiés pour les mailles triangulaires fermées du striatum humain extraites d'images RM pondérées 3D [30];
- calculer le graphe des maillages triangulaires basés sur les lignes de niveau continues extraits de contours discrets et actifs [31];
- extraire des graphes à partir des données binaires segmentées 2D ou 3D conjointement avec une analyse basée sur une fonction de Morse [32];
- proposer une technique d'appariement topologique, dans lequel l'appariement entre les modèles polyédriques est réalisé en comparant les graphes de Reeb multi-résolutions (MRG) correspondants, sachant que cette structure de MRG fonctionne bien avec les données des formes 3D [33];
- une classification des orbites co-adjointes génériques pour les groupes de surfaces fermées [34];
- encoder et décrire le contenu d'une vidéo 3D par un modèle topologique. Le modèle consiste en un dictionnaire de descripteurs de forme de haut niveau basé sur la topologie générés à partir des motifs extraits ou de séquences d'apprentissage. Le modèle est basé sur la description et la classification de la topologie à l'aide de graphe de Reeb, et un graphe de mouvement de Markov pour représenter les états de changements de la topologie [35];
- construire un graphe de Reeb invariant de haut niveau représentant la forme en suivant un algorithme d'extraction de points caractéristique précis et simple [36];
- la recherche de formes 3D avec les informations géométriques à partir d'une collection de modèles 3D, une méthode de description basée sur le graphe de Reeb avec la définition d'une mesure de similarité correspondante est proposée [37];
- permettre de calculer un squelette de modèle 3D d'un maillage des surfaces sous forme de graphe bruité en s'appuyant sur une fonction conduisant au calcul de nombreux extrema locaux avec d'ensemble de niveaux [38];
- calculer une structure de graphe avec un algorithme efficace et rapide [58]. Cette structure topologique est utilisée comme interface utilisateur efficace pour sélectionner des ensembles de niveaux significatifs, pour concevoir des fonctions de transfert pour le rendu de volume et pour explorer des données de grande dimension ;
- adopter une approche topologique basée sur la notion de graphe de Reeb étendu (ERG). Cette approche repose sur une stratégie de caractérisation adaptée pour des surfaces discrètes, qui définit les points et zones critiques en analysant l'évolution des niveaux de contour sur une forme, y compris également les configurations dites dégénérées [07].

3. Approches pour les structures de complexes :

Les invariants topologiques sont extrêmement utiles dans de nombreuses applications liées à l'imagerie numérique et à la modélisation géométrique, et l'homologie et l'homotopie avec ses groupes forment un exemple de ces invariants, qui n'ont pas encore été pleinement exploré dans les applications d'imagerie. En topologie algébrique, pour extraire ces invariants topologiques, des structures de complexe sont nécessaires. Les plus utilisées sont les structures simpliciales, cubicales et cellulaires.

3.1. Structures simpliciales :

Un modèle topologique appelé *AM-modèle* basé sur un complexe simplicial est conçu dans [08]. Ce modèle est destiné pour extraire des informations topologiques d'images numériques par déterminer une homotopie à chaînes concrète et fournir, en particulier, des générateurs d'homotopie et des cycles représentatifs de ces générateurs et pour stocker les mêmes informations avec moins d'espace mémoire. A travers des complexes simpliciaux, un nouvel algorithme itératif a été proposé dans [39] pour calculer l'homologie des formes arbitraires discrètes. Il montre comment l'homologie simpliciale d'une forme peut être efficacement exprimée en termes de l'homologie de ses sous-composantes. Pour ça on dit que l'homologie d'un espace topologique signifie l'homologie de ses sous-composantes. Des groupes d'homologie simpliciale des images numériques 2D sont calculés dans [40]. Dans [41], un algorithme qui calcule l'homologie simpliciale d'un objet de dimension arbitraire : nombres de Betti, coefficients de torsion et générateurs est présenté.

3.2. Structures cellulaires :

L'élément de base qui forme le complexe cellulaire est la cellule qui est morphique à une boule topologique de géométrie différente. Un complexe cellulaire est une suite de collections ou chaque collection regroupe des cellules de même dimension. Beaucoup d'approches liées à ce type de complexe sont proposées en littérature. Dans [42], une subdivision initiale formée de cellules pour des surfaces fermées 2D, représentée par une carte généralisée est utilisée pour construire un complexe cellulaire destiné au calcul de l'homologie. Un algorithme d'amincissement opérant sur des objets représentés par des complexes cellulaires est proposé dans [43].

Cet algorithme d'amincissement qui préserve la simplicité donne des squelettes stables et contrôlables capable de capter les caractéristiques globales de la forme. Dans [03], des cartes généralisées sont utilisées pour calculer une décomposition cellulaire d'une surface fermée, pour construire un complexe cellulaire destiné au calcul de l'homologie.

Dans [44], un algorithme donné pour calculer des générateurs d'homologie d'objets orientables subdivisés en 3D. Il commence par une subdivision initiale, représentée par une carte généralisée où chaque cellule est une boule topologique, le nombre de cellules est réduit grâce à des opérations de simplification (suppression des cellules), tout en préservant l'homologie pour obtenir une représentation minimale homologue à l'objet initial.

Un autre algorithme d'amincissement préservant la topologie, basé sur la suppression des cellules simples d'un complexe cellulaire est proposé dans [45]. Cet algorithme permet, de réduire un complexe simplicial général non structuré. Même idée est dans [43] où un algorithme d'amincissement, fonctionne sur des complexes cellulaires, qui préservent la simplicité d'amincissement, et génère des squelettes qui capturent de manière plus robuste les caractéristiques de la forme globale.

Dans [46], une structure du complexe cellulaire est construit avec des collections de blocs cubiques (un bloc de dimension q , pour $q=0\dots d$, où d est la dimension du complexe). Un bloc cubique est considéré comme une cellule dans chaque collection du complexe cellulaire. Un bloc cubique en dimension 2 représente géométriquement un bloc de pixels (bloc cubique en dimension 3 représente un bloc de voxels).

3.3. Structures cubicales :

Le complexe cubique est constitué de cube élémentaire qui prend la forme cubique. Géométriquement, un cube est volume avec huit parois ou faces rectangulaires, ou un carré, ou une arête ou un sommet respectivement en dimensions 3, 2, 1 ou 0. Beaucoup d'approches liées à la structure de complexe cubique sont proposées en littérature.

Dans [47], une méthode est présentée pour réparer localement un complexe cubique (intégré dans R^3) associé à une image binaire 3D, pour obtenir un complexe polyèdre homotopie équivalent à ce complexe cubique. Une autre méthode basée sur la structure du complexe cubique pour calculer le nombre d'Euler d'un objet est donnée dans [48].

Une méthode de topologie combinatoire est introduite pour calculer l'homologie cubique (le nombre de composants connexes et de trous dans une image donnée) avec des méthodes de segmentation rapide pour extraire les objets [49].

Dans [50], un algorithme d'amincissement parallèle est proposé pour fournir un résultat mince sur un espace cubique discret 3D, avec des sous-étapes directionnelles basées sur l'opération de réduction, qui garantit la préservation de la topologie.

Dans [51], un complexe cubique est construit à partir d'une image de volume binaire qui selon le principe de 6- ou 26-connexion. Le complexe est réduit suivant la méthode de réduction, qui préserve des caractéristiques géométriques importantes. La dernière étape consiste à réduire le nombre de cellules à l'aide de la théorie de Morse discrète.

4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'état de l'art en deux parties. Les approches liées au graphe de Reeb sont illustrées dans la première partie. Dans ces approches, le graphe de Reeb a montré sa robustesse et son efficacité comme un outil utilisé de façon très diverse dans nombreuses applications. Les approches liées aux structures de complexe sont données dans la deuxième partie avec trois types de structures : simpliciale, cellulaire et cubicale.

Chapitre 2

Graphe de Reeb et théorie de Morse

1. Introduction

Le graphe de Reeb est considéré comme un descripteur de forme et aussi une structure de données puissante et fondamentale qui code la topologie d'une forme. Elle est obtenue en contractant en un point les composants connexes des ensembles de niveaux d'une fonction définie sur des données spatiales (maillage, plan, image, ...). Un graphe de Reeb qui capture la topologie d'une forme a été largement utilisé dans un large éventail d'applications telles que l'adaptation des formes, la compression, le paramétrage de surface et la simplification, la modélisation du solide et la visualisation [19]. La notion de graphe de Reeb fait partie de la théorie de Morse qui fournit une analyse de la relation entre la topologie et les informations géométriques d'un espace donné. Cette relation est donnée par une fonction de valeurs réelles appelée souvent une fonction de Morse [10].

2. Graphe de Reeb et théorie de Morse :

2.1. Théorie de Morse :

La théorie de Morse est un outil puissant pour capturer la structure topologique d'une forme. Elle est utilisée dans les calculs variationnels pour établir une relation entre les points critiques d'une fonction réelle définie sur une variété différentiable et sa topologie globale. La théorie de Morse révèle la structure topologique d'une forme basée sur les points critiques d'une fonction réelle. Le mauvais choix de cette fonction réelle peut conduire à une configuration complexe d'un nombre inutilement élevé de points critiques [52].

2.1.1. Les points critiques :

Pour une fonction réelle f , un point critique est non-dégénéré si sa dérivée seconde est non-nulle ($f''(x) \neq 0$).

Par exemple, l'étude des points critiques d'une fonction à une variable permet d'obtenir les maxima, minima, et points d'inflexion de cette fonction, et par définition, les points critiques sont les points x_0 satisfaisant $f'(x_0) = 0$.

De même, pour les fonctions à deux variables telles que $f(x, y)$, les points critiques sont les points de gradient nul ($\nabla f = 0$, soit $\partial f / \partial x = 0$ et $\partial f / \partial y = 0$). Un point critique est dit non-dégénéré pour une fonction à deux variables si le déterminant de la Hessienne de f en ce point est non nul [24].

La figure 2.1. montre quelques exemples de points critiques non dégénérés et dégénérés [53].

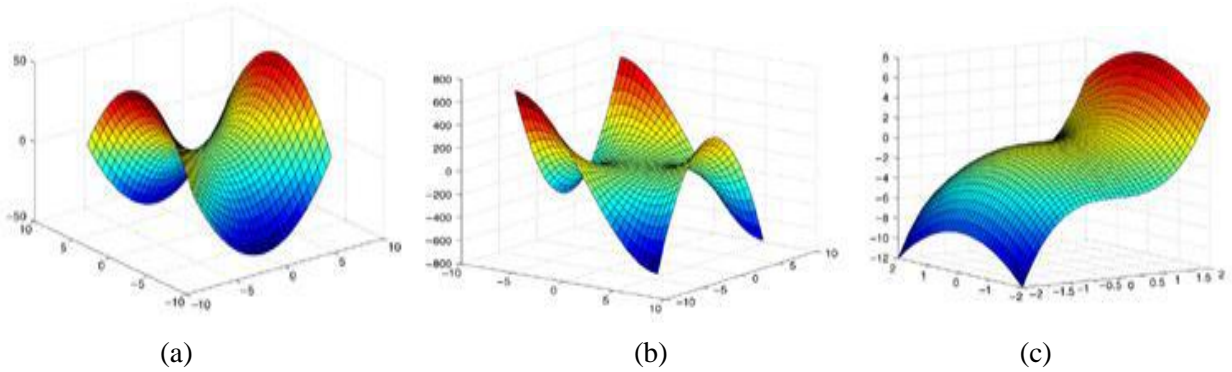


Fig. 2.1. (a) pour une fonction $f(x, y)$, le point $(0, 0)$ est un point critique non-dégénéré. (b) et (c) le point $(0, 0)$ est un point critique dégénéré.

2.1.2. Fonction de Morse :

La fonction f est appelée fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés, où un point critique est non dégénéré si la matrice Hessienne H des dérivées secondes de f est non singulière à ce point.

Définition 1. (Point dégénéré) Soit $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ peut être différentiable en 2 sur M et p un point critique de f . p est dégénéré si la matrice de Hessienne de f en p est singulière.

Définition 2. (La matrice de Hessienne) : Soient M dénote une variété compacte lisse sans frontières et $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction différentiable 2D. Un point critique de la fonction f est un point où sa dérivation s'annule. Formellement, si p un point critique et un système de coordonnées locales $[X, Y]$, on définit la matrice Hessienne H comme suit :

$$H(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2.1)$$

Définition 3. (Fonction Morse) Soit $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ peut être différentiable en 2 sur M , f est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés et si pour deux points critiques distincts $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$.

Définition 4. (Ensemble de niveau) : Un ensemble de niveaux de la fonction de Morse f est la pré-image d'une valeur constante $f^{-1}(\{t\})$.

Lemme 1. (Lemme de Morse) : Il est possible de choisir des coordonnées locales (x, y) en un point critique $p \in M$, de sorte que f prenne la forme : $f(x, y) = \pm x^2 \pm y^2$.

Lemme 2. Soit $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction lisse. Soit $a < b$ et supposons que l'ensemble compact $f^{-1}([a, b])$ ne contient aucun point critique.

Alors $f^{-1}(\{a\})$ est homotope à $f^{-1}(\{b\})$, de plus $f^{-1}(\{a\})$ est un retrait de déformation de $f^{-1}(\{b\})$, de sorte que la carte d'inclusion $f^{-1}(\{a\}) \rightarrow f^{-1}(\{b\})$ est une équivalence d'homotopie [10].

2.2. Graphe de Reeb :

Les graphes de Reeb sont des descripteurs de formes compactes qui véhiculent des informations topologiques liées aux ensembles de niveaux d'une fonction réelle définie sur la forme. Leur définition remonte à 1946 et trouve sa racine dans la théorie de Morse. Les graphes de Reeb en tant que descripteurs de formes ont été proposés pour résoudre différents problèmes qui se posent en analyse et traitement d'images et infographie, et de nos jours ils jouent un rôle fondamental dans le domaine de la topologie computationnelle pour l'analyse des formes [53]. Les graphes de Reeb sont obtenus en contractant les composants connexes des ensembles de niveaux aux points. Ils pourraient être un outil analytique visuel utile car ils expriment la connectivité des ensembles de niveaux. La création et la destruction de composants de l'ensemble de niveaux pourraient être une technique visuelle importante à cet effet [51].

Les graphes de Reeb peuvent être utilisés pour créer des croquis graphiques simples qui conservent la topologie et la connectivité de la forme d'origine [18]. Nous pouvons dire maintenant que la structure du graphe de Reeb dont les nœuds sont les composants de l'ensemble de niveaux qui contient un point critique et les arêtes sont la persistance qui donne la connectivité de l'ensemble de niveaux [10].

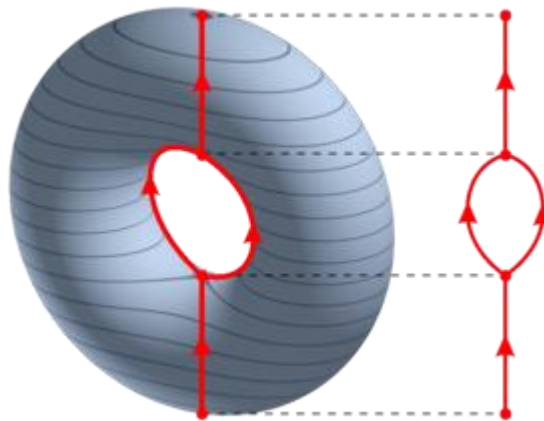


Fig. 2.2. Graphe de Reeb de la fonction d'hauteur sur le tore [59]. Dans cette description, quatre points particuliers (ou points critiques) sont distingués pour la fonction d'hauteur. Deux points sont de types: minima, maxima, et deux autres sont qualifiés de « point-selle » ou « point col » .

Définition 5.

Le graphe de Reeb qui est une structure ou construction topologique a été défini par le mathématicien, George Reeb, dans son travail daté en 1946 et trouve ses racines dans la théorie de Morse. Avant de passer à la définition du graphe de Reeb, étant donné une variété S et une fonction de valeur réelle f définie sur S , la relation d'équivalence est définie comme suit :

Deux points p et $q \in S$ sont équivalents, i.e., $p \sim q$, s'ils appartiennent à la même composante connexe de ligne de niveau de la fonction f . Mathématiquement, $p \sim q$ si $f(p) = f(q)$ et $p \in \text{ConnComp } d(q)$, ou formellement :

$$p \sim q \Leftrightarrow \begin{cases} f(p) = f(q) \\ p \text{ et } q \text{ sont dans une même composante connexe } f^{-1}(f(p)) \end{cases}$$

Maintenant, le graphe de Reeb, plus précisément est l'espace quotient défini par la relation d'équivalence qui identifie les points appartenant à la même composante connexe des lignes de niveau de f . Sous certaines hypothèses sur S et f , Reeb a énoncé le théorème suivant, qui est en fait la définition de ce que l'on appellera le graphe de Reeb [53].

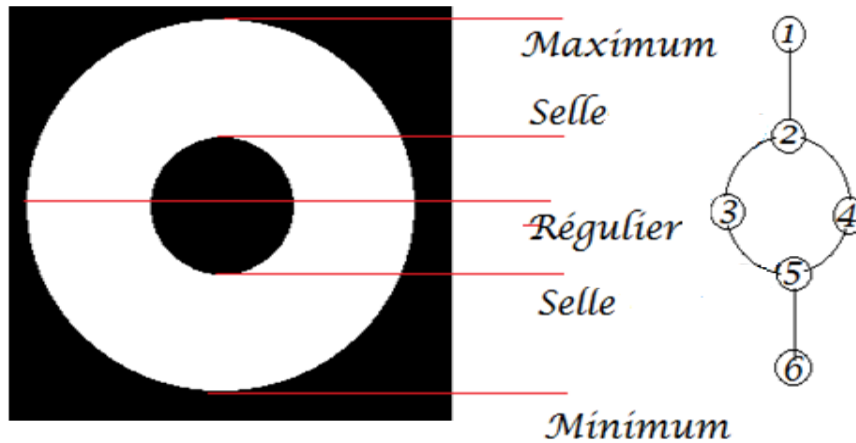


Fig. 2.3. Quatre points critiques (un minimum : (6), deux selles : (2) et (5), et un maximum : (1)) et deux points de type régulier (3) et (4) de la fonction hauteur avec son graphe de Reeb correspondant. Les points critiques calculés sur le contour de l'anneau représentent les nœuds du graphe.

Définition 6. (Graphe de Reeb) : Soit $f : M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction réelle définie sur une variété compacte $M \subset \mathbf{R}^2$. Le graphe de Reeb de f est l'espace quotient de f dans $M \times \mathbf{R}$ par la relation d'équivalence $(p, f(p)) \sim (q, f(q))$, $q \in M$.

Pour une fonction d'hauteur f tel que $f(x, y) = y$. $\forall p_1 = (x_1, y_1) \in M$ et $p_2 = (x_2, y_2) \in M$:

- $p_1 = p_2$ si et seulement si $y_1 = y_2$,
- $f^{-1}((p_1)) = f^{-1}(y_1)$ est la restriction de M à $M \cap (\mathbf{R} \times y_1)$, donc à l'ordonnée y_1 .

Donc, deux points appartiendront à la même classe d'équivalence si et seulement s'ils ont la même ordonnée, et s'ils sont dans la même composante connexe de ligne de niveau (voir la figure 2.3).

La représentation en graphe est, par conséquent, un ensemble de toutes ces classes d'équivalence avec chaque classe d'équivalence associée à la même valeur au moyen d'une fonction de valeurs réelles [54].

Concrètement, et en se basant sur ce qui a été présenté précédemment, le graphe de Reeb est obtenu en partitionnant itérativement l'objet suivant des intervalles réguliers de valeurs de f , et en affectant un nœud à chaque ensemble connexe. Les ensembles connexes (les nœuds) sont reliés entre eux par des arêtes [55].

2.2.1. Topologie de l'ensemble de niveaux :

Un ensemble de niveaux se compose de tous les points où la fonction atteint une valeur donnée, appelée iso-valeur. Les ensembles de niveaux sont largement utilisés pour visualiser des données scientifiques tridimensionnelles et supérieures. Le graphe de Reeb suit les changements de topologie dans les ensembles de niveaux d'une fonction scalaire et fournit donc une bonne abstraction pour les données. Les graphs de Reeb et leur version sans boucle, appelés arbres de contour, ont une variété d'applications, y compris la correspondance de forme basée sur la topologie, la simplification et le nettoyage topologique, la segmentation et le paramétrage de la surface et le calcul efficace des ensembles de niveaux.

Théorème 1. (Topologie de l'ensemble de niveaux) :

Soit $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse sur M . En balayant l'ensemble de niveaux de f de $+\infty$ à $-\infty$, les changements de topologie de l'ensemble de niveaux se produisent uniquement aux points critiques comme est montré dans la figure 2.3.

Un point maximum (point (1) dans la figure) induit un nouveau composant connexe pour l'ensemble de niveaux. Un point de selle (point (5) dans la figure) scinde le composant concerné en deux composants. Un point de selle (point (2) dans la figure) fait fusionner deux composants concernés en un seul composant connexe. Un point minimum (point (6) dans la figure) réduit le composant connexe concerné [10].

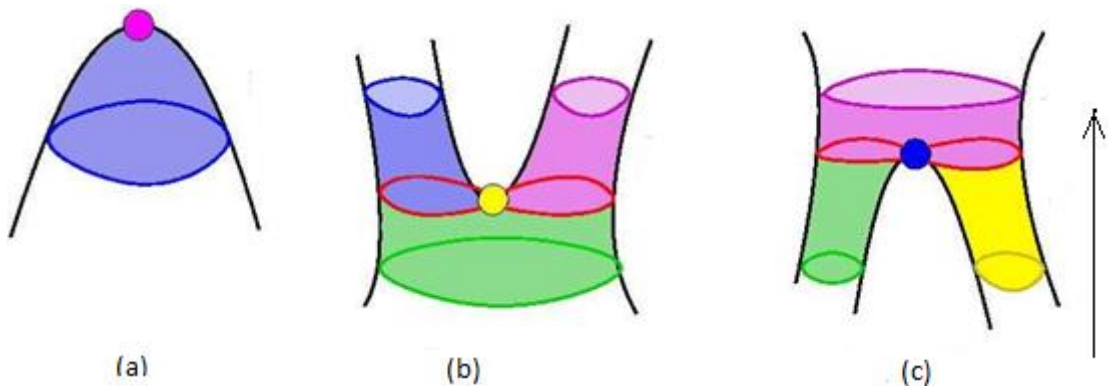


Fig. 2.4. Evolution du niveau qui passe par un point critique: (a) maximum, (b) point selle pour scinder le composant, (c) point selle pour fusionner les deux morceaux du composant.

Nous pouvons maintenant comprendre la structure d'un graphe de Reeb comme un graphe dont les nœuds sont les composants de l'ensemble de niveaux qui contient un point critique et dont les arcs donnent la connectivité de l'ensemble de niveaux.

2.2.2. Applications du graphe de Reeb :

Parmi les caractéristiques les plus importantes des graphes de Reeb est qu'ils fournissent une structure qui code efficacement les formes d'un point de vue topologique et géométrique. Et grâce à sa capacité à extraire des caractéristiques de haut niveau des formes, le graphe de Reeb a acquis une position de premier plan en tant qu'outil puissant pour diverses tâches d'analyse et de description de formes.

Les principaux domaines d'application liés à l'utilisation des graphes de Reeb sont l'analyse et la compréhension de surface, l'identification des quads topologiques, la simplification des données, l'animation, la segmentation du corps humain, le paramétrage de la surface, la reconstruction d'objets et l'édition. De plus, la connaissance de la topologie des formes donnée par la structure de graphe améliore le placage de texture à partir des lignes de contour.

3. Représentation d'objets 2D et 3D :

En topologie calculatoire, on trouve plusieurs modèles de représentation d'objets 2D et 3D. Parmi eux, on peut classer les représentations en deux catégories selon la subdivision spatiale de l'image : subdivision avec une grille régulière (pavage en pixels ou voxels) et subdivision avec une grille irrégulière ou non uniforme (représentation en blocs, quadtree ou octree, ...).

3.1. Représentation quadtree et octree :

Une représentation quadtree d'une image binaire est une représentation à quatre arbres dont un arbre a quatre branches dont les feuilles représentent des zones carrées ou des quadrants de l'image et sont étiquetées avec la couleur de la zone correspondante, à savoir noir, blanc ou niveau de gris [01]. La description proposée du quadtree est de haut en bas, mais pas la seule profondeur connue. Cela signifie que la subdivision des quadrants est effectuée pas à pas toujours pour tous les nœuds non terminaux au même niveau simultanément. Par conséquent, lors de la génération de quadtree, nous avons un arbre de taille complète et minimale jusqu'au niveau récent avec (éventuellement) des nœuds non terminaux non examinés [01].

L'octree est une structure de données permettant un stockage efficace des données 3D. L'octree est une généralisation 3D d'un quadtree (pour 2D). Chaque nœud dans un octree a huit enfants qu'on appelle les octants. L'octree décrit une partition récursive d'un volume en cellules complètement pleines ou vides [56].

La méthode d'octree consiste à compresser les données en stockant les données de voxels dans une structure arborescente hiérarchique, qui est construite de manière descendante en subdivisant récursivement les régions hétérogènes du volume en huit sous-octants jusqu'à ce que chaque nœud terminal de l'arborescence corresponde à un octant du volume dans lequel tous les voxels partagent la même valeur [56].

3.2. Représentation en blocs de pixels ou voxels :

La représentation en blocs de pixels dans le cas des images 2D (de pixels dans le cas des images 2D) est un modèle de représentation d'images numériques où les pixels ou les voxels objet adjacents sont regroupés en blocs rectangulaires selon leurs coordonnées sur les axes du plan (axes du volume en 3D).

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les notions préliminaires en deux parties. La première partie est consacrée aux notions liées au graphe de Reeb (définition, topologie d'ensemble de niveaux, calcul et exemple de graphe de Reeb et leurs domaines d'application), conjointement avec la théorie de Morse (définition, théorie lisse, point critique et point dégénéré). Les deux concepts qui sont auto-corrélés à travers des points critiques, aident et conduisent à la génération du graphe de Reeb selon le choix de fonction réelle qualifiée d'être de Morse. Dans la seconde partie, les représentations d'objets 2D et 3D sont expliquées (en blocs, quadtree et octree) pour son intérêt à l'application des concepts de la théorie de Morse et la génération du graphe de Reeb correspondant.

Chapitre 3

Modélisation de l'approche

1. Introduction

Ce travail présente une approche basée sur le concept du graphe de Reeb, qui analyse la topologie des données. L'objectif de cette approche est de concevoir un modèle topologique qui aide à reconnaître et diagnostiquer des images 2D et 3D. Le modèle conçu est basé sur des concepts mathématiques englobant la géométrie discrète et la théorie de Morse. L'avantage du modèle est qu'il facilite le processus de reconnaissance des formes avec des objets discrets en entrée et qui conduit à générer des structures topologiques en sortie qui sont le graphe de Reeb et le complexe simplicial associé (le graphe est destiné pour la caractérisation géométriques et topologiques des objets, le complexe participe à assurer et réaliser certains traitement ou applications topologiques: calcul les groupes de (co)homologie, nombre d'Euler, coefficients de torsion, homologie persistante, etc.). Les deux structures générées sont homotopiquement équivalentes aux objets de l'image originale et aussi préservent les changements topologiques.

Dans notre approche, le profil topologique du modèle est contrôlé par la théorie de Morse en calculant la structure du graphe de Reeb en fonction des changements topologiques qui se produisent sur la forme originale. Le nouveau modèle conçu se caractérise par son jumelage de la topologie et de la géométrie. Dans ce qui suit, nous présenterons notre approche du modèle topologique en définissant les différentes étapes de conception.

2. Modèle topologique :

Comme est mentionné précédemment, le modèle proposé est basé sur une approche qui conduit à générer deux structures topologiques qui sont le graphe de Reeb et son associé le complexe simplicial. Le choix de ces structures est due à leur capacité de :

- être des descripteurs de formes de haut niveau ;
- assurer la reconnaissance des formes avec robustesse et efficacité ;
- maintenir les caractéristiques topologiques et géométriques des objets discrets inclus dans la forme.

Pour générer les structures de ce modèle (graphe de Reeb et complexe simplicial), une nouvelle approche est proposée et qui adopte les axes suivants :

2.1. Construction du graphe de Reeb :

Le graphe de Reeb n'est pas construit de manière continue, mais de manière discrète. Les graphes associés à la fonction de distance centrique peut être décrit comme un espace quotient S/\sim où \sim est la relation d'équivalence. La construction du graphe se réalise au début par la sélection d'une fonction de valeurs réelles qu'on applique sur la forme (cette fonction peut être dite de Morse si elle vérifie certains critères de Morse). Dans ce travail, la fonction de distance centrique est choisie. La distance maximale d_{max} de la fonction centrique est exigée pour déterminer les niveaux topologiques du graphe dont sa construction nécessite les étapes suivantes :

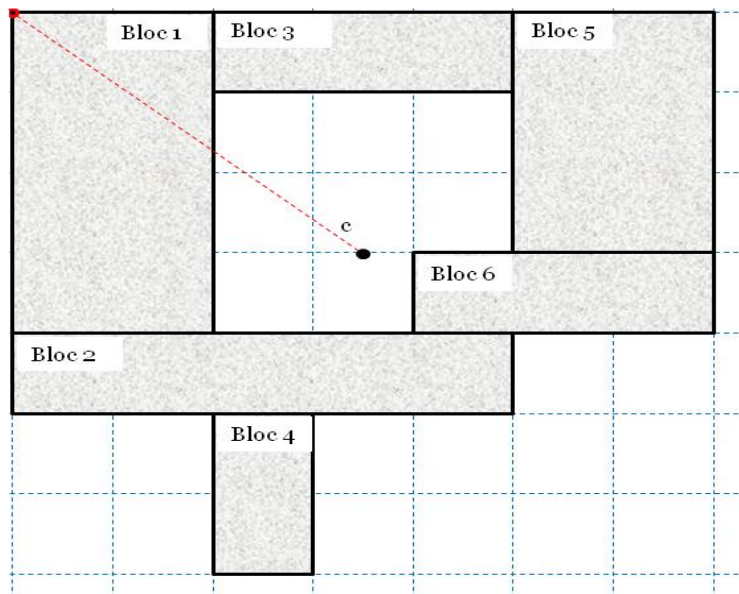


Fig. 3.1. Exemple de représentation en blocs 2D avec six (06) blocs, la distance maximale d_{max} est mentionnée en ligne discontinue rouge.

a. Entrée des données des blocs :

A partir d'une représentation en blocs rectangulaires ou de quadtree avec une subdivision non uniforme (grille irrégulière), qui est prédéfinie ou obtenue suivant des prétraitements (programme de conversion en blocs ou en quadtree) ou chaque blocs (ou quad) est défini avec des informations spatiales (point de départ, largeur et hauteur), c'est-à-dire les positions des quatre coins de chaque bloc. Ces informations spatiales sont stockées, dans des fichiers de format texte pour les utiliser comme des entrées dans l'application.

b. Calcul des cercles centrés (ou niveaux topologiques) :

La fonction de distance peut donc être utilisée pour la construction des graphes de Reeb pour l'analyse des formes compactes. La distance centrée maximale d_{max} et la valeur de résolution qu'on note W (calculée automatiquement en fonction de la petite dimension des blocs) participe en réalité à la division de la forme en $(K+1)$ régions annulaires selon l'expression suivante:

$$K = \lfloor d_{max}/W \rfloor + 1 \dots\dots\dots (3.1)$$

L'opérateur $\lfloor \]$ signifie qu'on prend la partie entière et où K représente le nombre de cercles centrés. Les cercles centrés appliqués sur la forme représentent les lignes de niveau de connectivité du graphe.

En plan algorithmique, on commence avec un cercle de rayon plus petit, cela correspond à la plus petite arête de tous les blocs de la représentation en blocs (ou quadtree), ensuite on augmente progressivement la taille des rayons des cercles centrés jusqu'à K .

Remarque : on commence par le rayon nul (égale à zéro) si et seulement si le centre de la forme (centre de gravité) se situe sur un bloc de l'objet.

c. Détermination des points d'intersection entre blocs et calcul d'arcs circulaires :

Les arcs circulaires sont les points d'intersection entre l'objet (les blocs de la forme) et le cercle centré ou le niveau topologique. Chaque arc d'intersection est ensuite défini par un point centre qui est la moyenne arithmétique des points de l'arc. Dans ce qui suit, nous montrons comment extraire les arcs circulaires :

Afin de discrétiser spatialement la forme en cercles centrés, le nombre des cercles (ou les niveaux topologiques) est calculé dès que le centre de gravité cg et le pas de résolution (ou largeur de chaque région annulaire coincée entre deux cercles consécutives) sont déterminés. Supposons $f_c \in [0, d_{max}]$ est la fonction centrée, nous commençons à $f_c(cg) = 0$ et augmentons progressivement la valeur de la fonction en K étapes jusqu'à la valeur maximale d_{max} . Puis on prend les points d'intersection entre les blocs et chaque cercle c_i (avec index i) de rayon $R_c[i] \in [0, d_{max}]$ pour $i=0..K$ (voir la figure 3.2).

Comme résultat, l'intersection de la forme (l'ensemble des blocs) avec un cercle c_i de rayon $R_c[i]$ génère un ensemble des arcs circulaires.

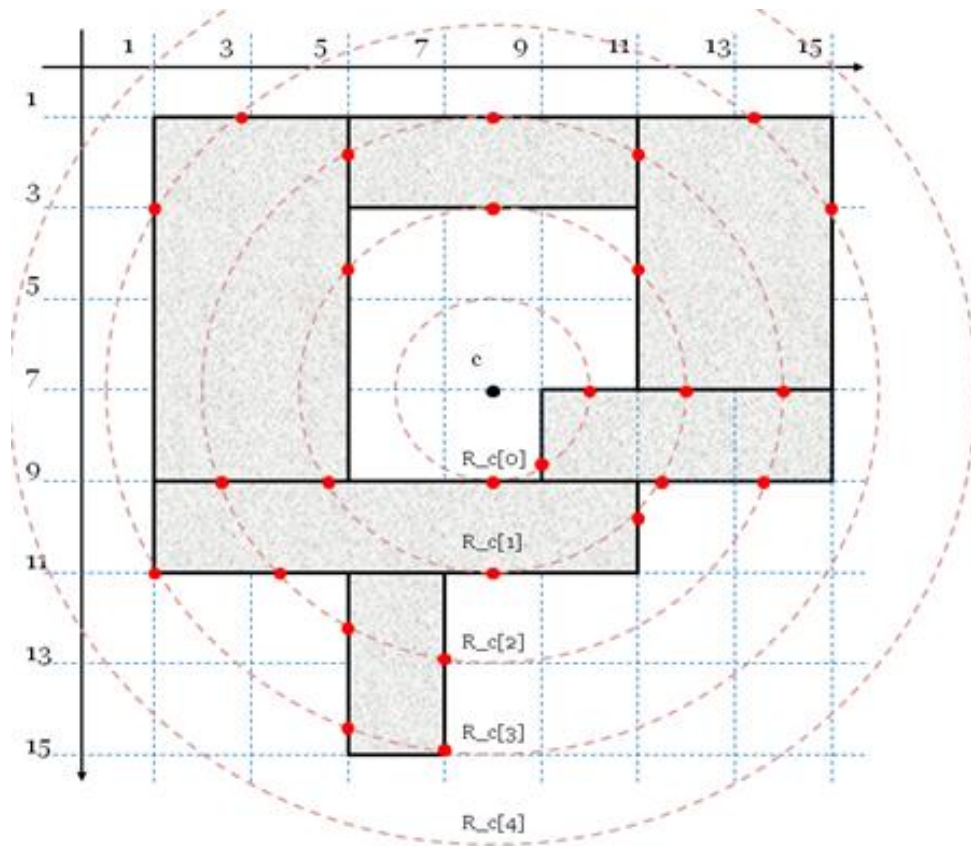


Fig. 3.2. Représentation en blocs avec calcul des cercles centrés et des points d'intersections.

- Valeur de résolution W (distance minimale entre cercle i et cercle $(i+1)$) = 2.0
- Nombre des cercles ou rayons $N = (\text{int})(d_{max}/W) + 1 = (\text{int})(9.219/2) + 1 = 5$
- Nombre de points d'intersection = 27.

d. Extraction des nœuds et des arêtes du graphe :

Une région connexe est une partie de l'objet coincée entre deux cercles centrés c_i et c_{i+1} , dont tous ces points qu'elle contient sont liés ou connexes.

Les nœuds et les arêtes du graphe de Reeb discrétisé sont définis comme suit.

- **Les nœuds :** chaque point du centre de l'arc est considéré comme un nœud dans le futur graphe comme est illustré dans la figure 3.3.

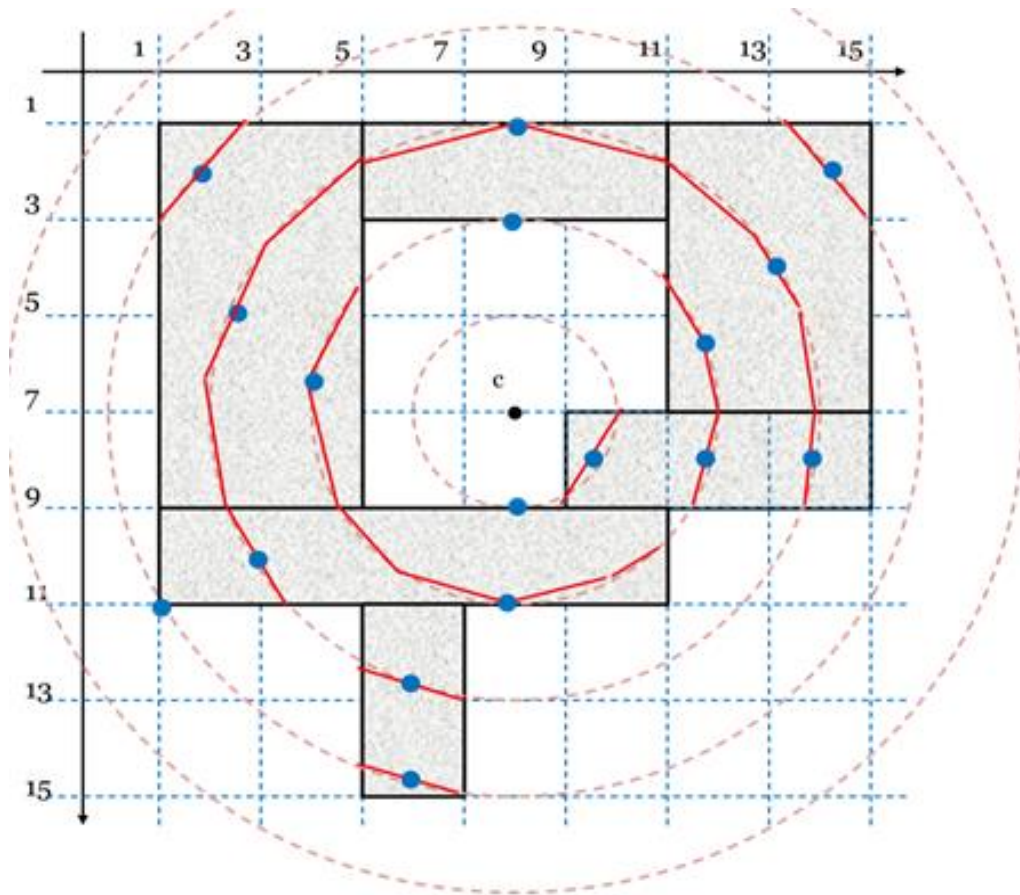


Fig. 3.3. Extraction des arcs circulaires (en couleur rouge) avec les nœuds du futur graphe (les points de centre en couleur bleue).

- **Les arêtes du graphe :** La construction des arêtes du graphe de Reeb se fait selon deux niveaux d'interconnexions. La première est intra bloc qui consiste à connecter avec des arêtes les nœuds du même bloc successivement à travers les différents niveaux successifs (c_i , c_{i+1}).
- La deuxième interconnexion est entre blocs qui consiste à connecter les nœuds des blocs adjacentes entre eux (voisins par rapport aux arêtes ou bien aux coins). L'interconnexion se réalise une seule fois entre deux blocs entre deux niveaux successifs (c_i , c_{i+1}) si ces deux blocs ne sont pas reliés avant dans les niveaux inférieurs.

Le graphe de Reeb qui prend la forme squelettique conserve la structure topologique de la forme et devrait avoir un ensemble des nœuds et un ensemble des arêtes et un schéma d'interconnexion entre eux.

Les figures 3.4(a) et 3.4(b) présentent la construction du graphe de Reeb avec l'extraction de ses arêtes pour l'exemple de représentation en blocs 2D de la figure 3.1. La figure 3.4(a) montre les premières arêtes (en couleur rouge) extraites via l'interconnexion intra bloc et la figure 3.4(b) donne le graphe de Reeb final après l'extraction des arêtes qui relient les blocs (en couleur verte) en utilisant l'interconnexion entre blocs.

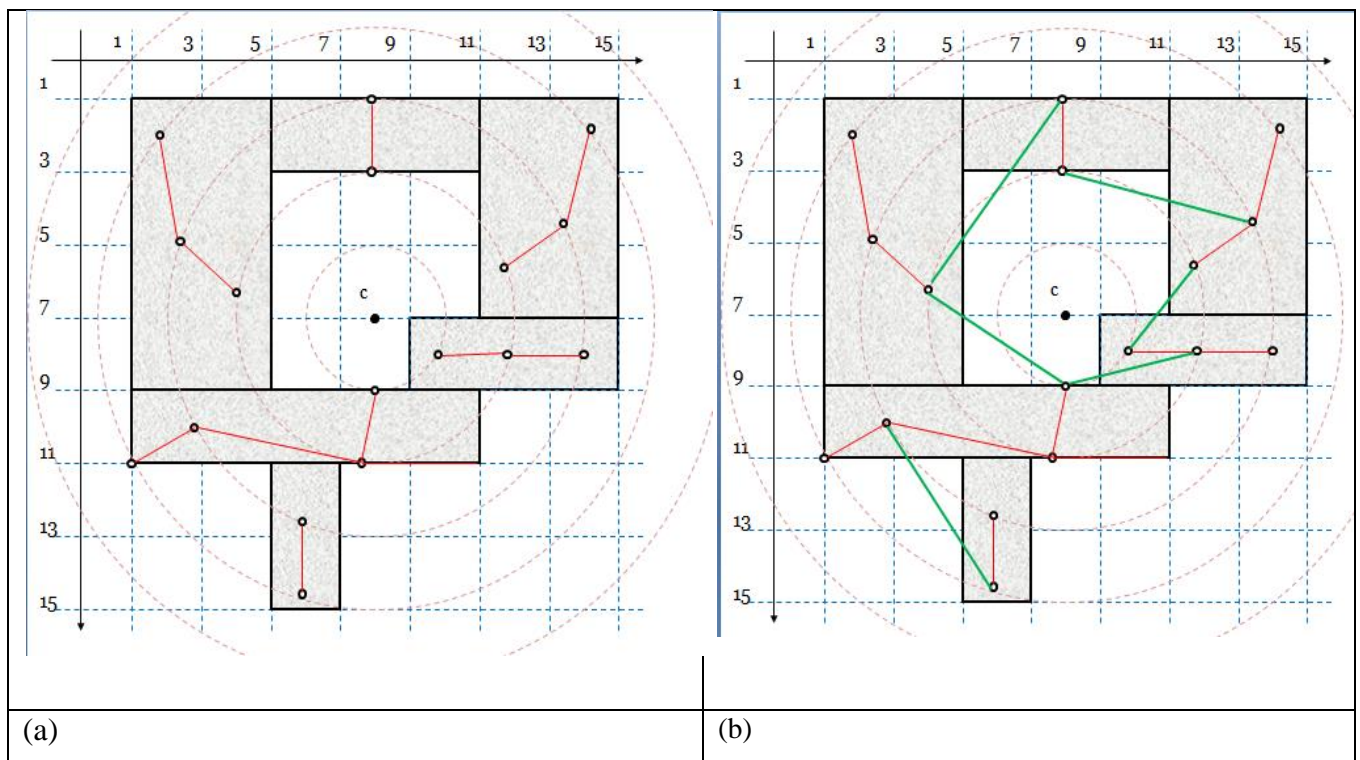


Fig. 3.4. Construction du graphe de Reeb: (a) extraction des premières arêtes (en couleur rouge) avec l'utilisation de l'interconnexion intra bloc, (b) extraction des arêtes (en couleur verte) avec l'utilisation de l'interconnexion entre blocs.

L'algorithme principal pour construire un graphe de Reeb G est illustré dans la méthode suivante :

Méthode 1 : Construction du graphe de Reeb

Entrée : forme 2D représentée en blocs (ou représentation de quadtree).

1. Lecture de la forme à partir d'un fichier texte (liste des blocs).
2. Calculer les caractéristiques géométriques de la forme :
 - centre de gravité cg ;
 - distance maximale d_{max} (déterminée par le point plus éloigné du centre de gravité) ;
 - distance minimale W entre deux cercles successifs;
 - résolution ou pas de discrétisation spatiale centrique K ;
 - tableau des rayons ou distances des cercles centrés $R_c[]$;
3. Extraction des points d'intersections de la forme avec les cercles centrés;
4. Extraction des arcs qui représentent l'intersection de la forme avec les cercles c_i pour $i=0..K$ ou chaque arc est relié par deux points d'interconnexion au maximum;
5. Extraction des nœuds du graphe: ces nœuds représentent les points de centre des arcs ;
6. Extraction des arêtes du graphe : interconnecter les nœuds du cercle c_i et ceux du cercle suivant c_{i+1} , selon deux manières d'interconnexion (verticale et horizontale).

Sortie : structure de graphe de Reeb G .

2.2. Construction du complexe simplicial :

Le complexe simplicial est une entité combinatoire qui décrit généralement une réalisation géométrique d'un espace de points connectés dans R^n (n est la dimension de l'espace). Sa construction nécessite la traduction algébrique du graphe de Reeb. En 2D, les nœuds et les arêtes de connexion dans le graphe représentent respectivement les sommets (ou 0-simplices) et les arêtes (ou 1-simplices) dans le complexe simplicial. En plan algorithmique, pour construire un complexe simplicial S de dimension 2, il est nécessaire et efficace de prendre son graphe de Reeb G comme entrée et en suivant les étapes de la méthode 2 :

Méthode 2 : Construction du complexe simplicial

1. générer la collection des sommets S_0 (ou 0-simplices) du complexe en parcourant les nœuds du graphe G ;
2. générer la collection des arêtes S_1 (ou 1-simplices) du complexe en parcourant les arêtes du graphe G ;
3. générer la collection des triangles S_2 (ou 2-simplices) du complexe avec le critère suivant :
 - un triangle (ou 2-simplex) est généré dans la collection, s'il existe trois nœuds adjacents dans le graphe G , sachant que deux nœuds appartiennent au niveau c_i et le troisième au niveau c_{i+1} . A noter que, les deux niveaux consécutifs $[c_i, c_{i+1}]$ coïncident ou délimitent une région annulaire dans l'objet.

3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons illustré un modèle topologique pour la reconnaissance des formes et la caractérisation des objets 2D et 3D. Nous avons présenté deux algorithmes pour générer les deux structures topologiques : graphe de Reeb et complexe simplicial d'une forme 2D représentée par des blocs (ou représentation quadtree). Le premier algorithme est destiné pour générer le graphe de Reeb à base d'une fonction de distance centrique qui gère des cercles ou niveaux sur la forme. Le graphe de Reeb est caractérisé par des nœuds qui sont en réalité les centres des arcs circulaires. Les arêtes des graphes sont obtenus à partir de l'ensemble des nœuds en parcourant les blocs de la forme selon deux types d'interconnexion : verticale pour créer des arêtes dans le même bloc et horizontale pour créer des arêtes entre les blocs adjacentes. Le deuxième algorithme est présenté pour construire le complexe simplicial à partir du graphe de Reeb construit précédemment.

Chapitre 4

Implémentation et résultats expérimentaux

1. Introduction

Dans ce chapitre, nous concentrons sur l'implémentation de notre modélisation par le des concepts de la théorie de Morse liés principalement au graphe de Reeb de représentation en blocs (ou de quadtree) des objets discrets 2D avec une subdivision non uniforme. L'algorithme résultat de modélisation conduit à générer deux structures topologiques qui sont le graphe de Reeb et le complexe simplicial.

Ce chapitre est composé de deux parties l'implémentation du système et les résultats expérimentaux.

2. Implémentation de l'approche

2.1. Environnement de matériels

Nous avons utilisé un ordinateur qui possède les caractéristiques suivantes :

- ❖ Processeur : AMD E2-7110 APU 1.80 GHz
- ❖ Disque dur : 500 Go
- ❖ RAM : 4.00 Go
- ❖ Carte graphique : AMD Radeon R2.

2.2. Environnement logiciel

2.2.1. Environnement de développement Eclipse

Dans le contexte de l'informatique, l'Eclipse est un environnement de développement intégré (IDE) pour le développement d'applications en utilisant des langages de programmation évolués tels que Java, C/C++ , Python, PERL, Ruby, etc. La plate-forme Eclipse qui fournit la base de l'IDE Eclipse est composée de plug-ins et est conçu pour être extensible à l'aide de plug-ins supplémentaires. Développé à l'aide de Java, la plate-forme Eclipse peut être utilisée pour développer des applications client riche, environnements de développement intégrés, et d'autres outils. Eclipse peut être utilisé comme un IDE pour n'importe quel langage de programmation pour lequel un plug-in est disponible [60].

2.2.2. Langage Java

Java est un langage de programmation à usage général, évolué et orienté objet dont la syntaxe est proche du C. Ses caractéristiques ainsi que la richesse de son écosystème et de sa communauté lui ont permis d'être très largement utilisé pour le développement d'applications d'entreprises et mobiles [61].

2.3. Structure du programme

Cette partie décrit l'implémentation de notre approche de modélisation qui conduit à générer un modèle piloté par deux structures topologiques citées précédemment en suivant les démarches décrites en détails dans le chapitre de la conception. Cette implémentation se réalise en utilisant des classes développées en Java avec ces APIs dans l'environnement Eclipse, et cela dans le but de valider notre approche avec des futurs tests d'expérimentations.

Notre programme est décrit par un package composé de quelques classes Java ou chaque classe est caractérisée par ses propres attributs et méthodes. Les principales classes sont illustrées en ordre selon le degré d'influence dans le programme :

- **class Principale {**
// Attributs
public ArrayList<Bloc> Liste_blocs = null;
public ArrayList<Arete_bloc> Liste_aretes = null;
public ArrayList<Point2D.Double> Liste_coins = null;

// constructeur par défaut
public Principale() {
// lecture les fichiers texte des formes (bdd des formes 2D)
// extraction des blocs (arêtes et des coins).
}
public void Affichage_graphique() {
// affichage swing sous canevas et fichier graphique .png.
}
// d'autres méthodes ...
}
- **class Reeb_graphe {**
// Attributs
public ArrayList<Noeud_graphe> noeuds_graphe = null;
public ArrayList<Arete_graphe> aretes_graphe = null;
public ArrayList<Arc> Liste_arcs = null;

// constructeur par défaut
public Reeb_graphe () { }
public ArrayList<Noeud_graphe> calcul_noeuds_graphe (List<Point2D.Double>
points_intersections) {
// calcul et extraction les nœuds du graphe
}
public ArrayList<Arete_graphe> calcul_aretes_graphe(double[] radius) {
// calcul et extraction les aretes du graphe
}
public void affichage_graphe() {
// affichage graphique du graphe (canvas de Swing + fichier graphique .png)
}

```

// d'autres méthodes ...
}

• class Forme_geometrique {
// Attributs
public Point2D.Double point_centre = null;
public double[] rayons_cercles = null;
public double longueur_rayon;
public double d_max;

// classe destinée pour les prétraitements géométriques sur la BDD des formes
binaires.

public void calculer_distance_maximale_centre_gravité {
// pour calculer le centre de gravité de la forme en cours de traitement
// pour calculer la distance maximale des points de la forme par rapport au centre de
gravité
}

public void calculer_distances_centriques {
// pour calculer les distances centriques pour préparer les ensembles des niveaux
}

//d'autres méthodes .....
}

• class Points_intersections{
// Attributs
public List<Point2D.Double> points_intersection = null;
public ArrayList<Arc> List_arcs = null;

public List<Point2D.Double> calcul_Points_intersection (ArrayList<Bloc> List_blocs,
Point2D.Double center, double[] radius){
// extraction des points d'intersection entre les blocs de la forme et les cercles
centriques.
}
public List<Arc> extraire_arcs (List<Point2D.Double> points_intersection){
// extraction des arcs circulaires
}
//d'autres méthodes .....
}

• class Bloc {
// Attributs
int idx_bloc; // l'indice du bloc
int[] idx_aretes=null; // les indices des aretes du bloc
int[] idx_coins=null; // les indices des coins du bloc

```

```

// constructeur par défaut
public Bloc () { }
// constructeur par copiage
public Bloc (Bloc b) { }

public boolean testAdjacence (Bloc b, ArrayList<Arete_bloc> list_aretes,
ArrayList<Point2D.Double> list_coins){
// tester l'adjacence entre les blocs de la forme
}
//d'autres méthodes .....
}

```

- **class Arete_bloc {**

```

// Attributs
int idx_début; // index du premier point dans la liste des coins
int idx_fin; // index du deuxième point dans la liste des coins

// constructeurs par paramètres
public Arete_bloc(int i, int j) { }
public Arete_bloc(Arete_bloc ar) { }
// Méthodes
public boolean testAdjacence(Arete_bloc arete,
ArrayList<Point2D.Double> list_coins){
// tester l'adjacence entre les arêtes des blocs de la forme
}
//d'autres méthodes .....
}

```

- **class Arc {**

```

// Attributs
Point2D.Double P1 = null; // point de début de l'arc
Point2D.Double P2 = null; // point de fin de l'arc

// constructeur par paramètres
public Arc(Point2D.Double P1, Point2D.Double P2) { }
//d'autres méthodes .....
}

```

- **class Noeud_graphe {**

```

// Attributs
Point2D.Double position_noeud = null;
int idx_bloc; // l'indice du bloc qui inclut le noeud courant
int idx_rayon; // l'indice du rayon centrique

```

```

// constructeur par paramètres
public Noeud_graphe(Point2D.Double cord_noeud, int idx_bloc, int idx_rayon){ }
//d'autres méthodes .....

}

• class Arete_graphe {
// Attributs
Point2D.Double P1 = null; // point de début de l'arête du graphe
Point2D.Double P2 = null; // point de fin de l'arête du graphe

// constructeur par paramètres
public Arete_graphe(Point2D.Double P1, Point2D.Double P2) { }
//d'autres méthodes .....

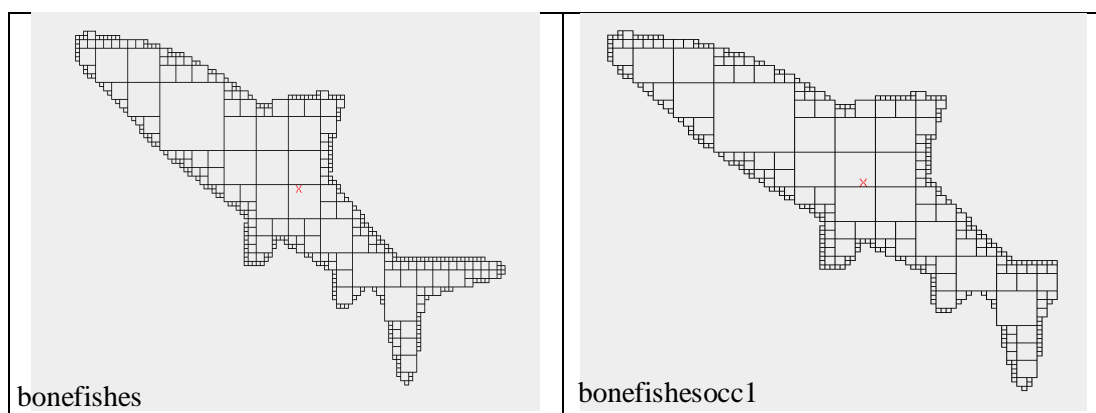
}

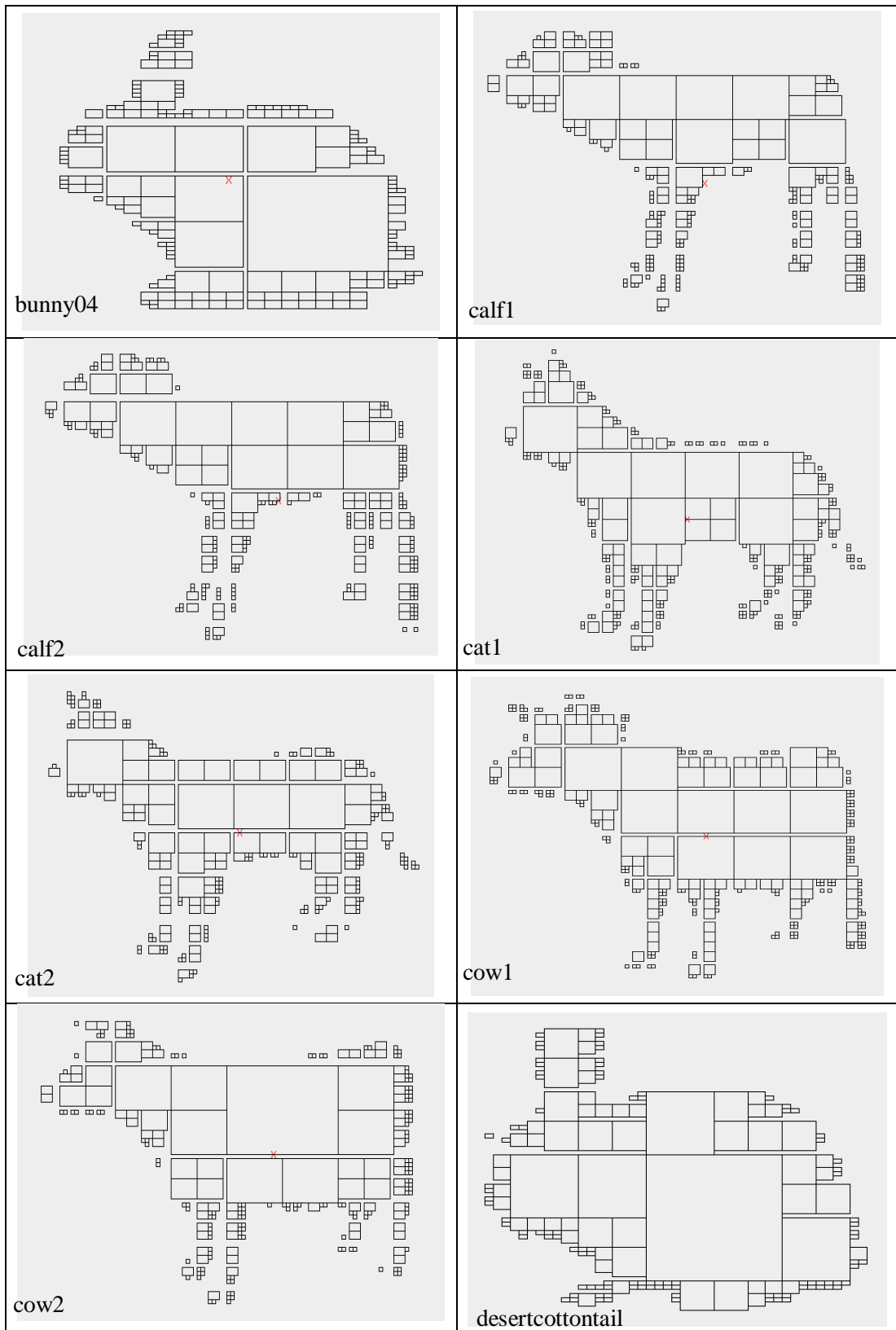
```

3. Résultats expérimentaux

Cette partie est consacrée à présenter les résultats expérimentaux pour valider ce modèle topologique sur une base des formes 2D standard Kimia-99 [57], qui contient des formes des poissons, des vaches, des lapins, des chiens et des chats,...etc. Nos résultats sont répartis en trois sous-sections.

- ❖ La première sous-section est réservée pour montrer en les formes 2D standard Kimia-99 avec la représentation d'images quadtree. Le tableau 4.1 présente les 16 premières formes.





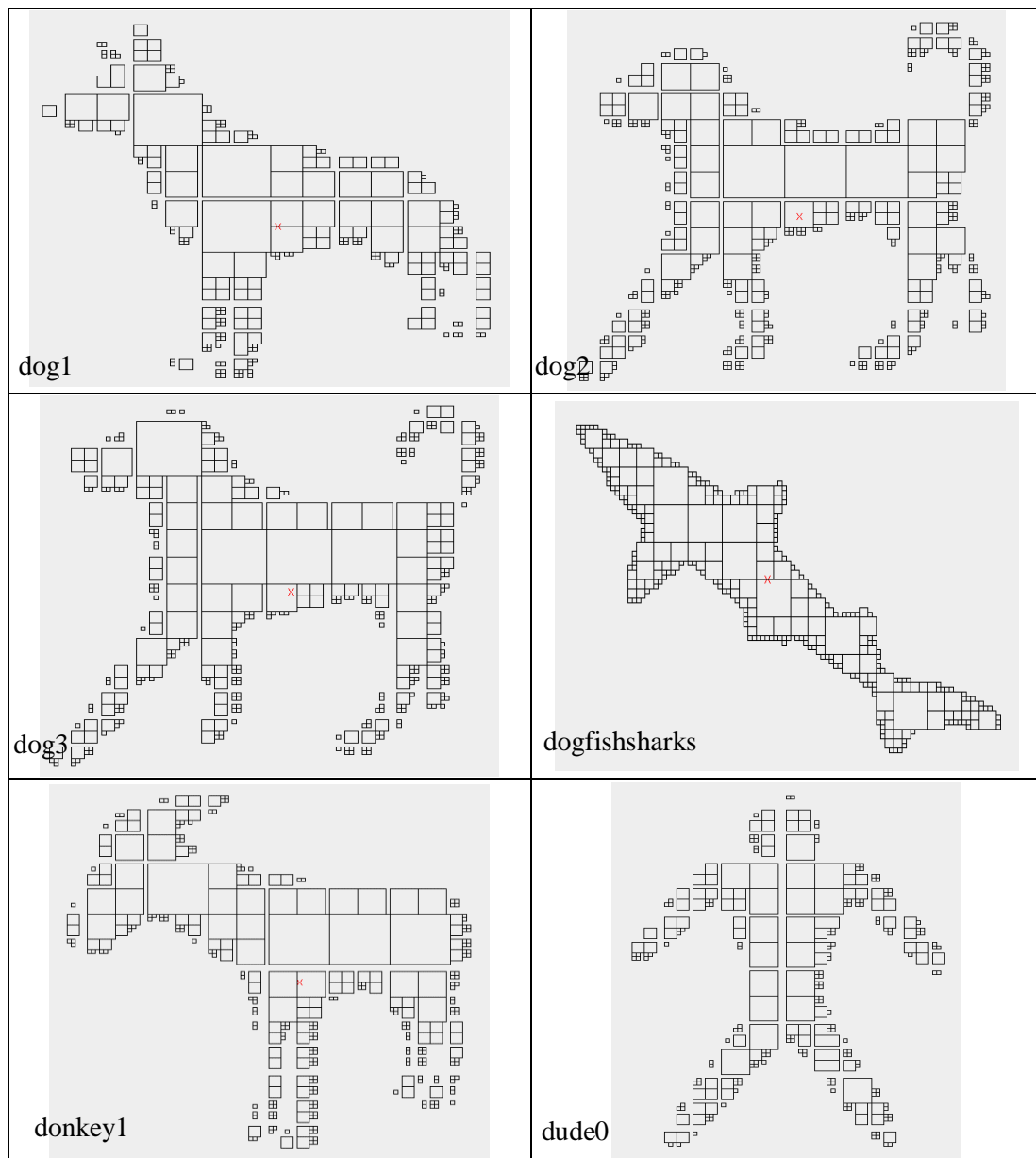
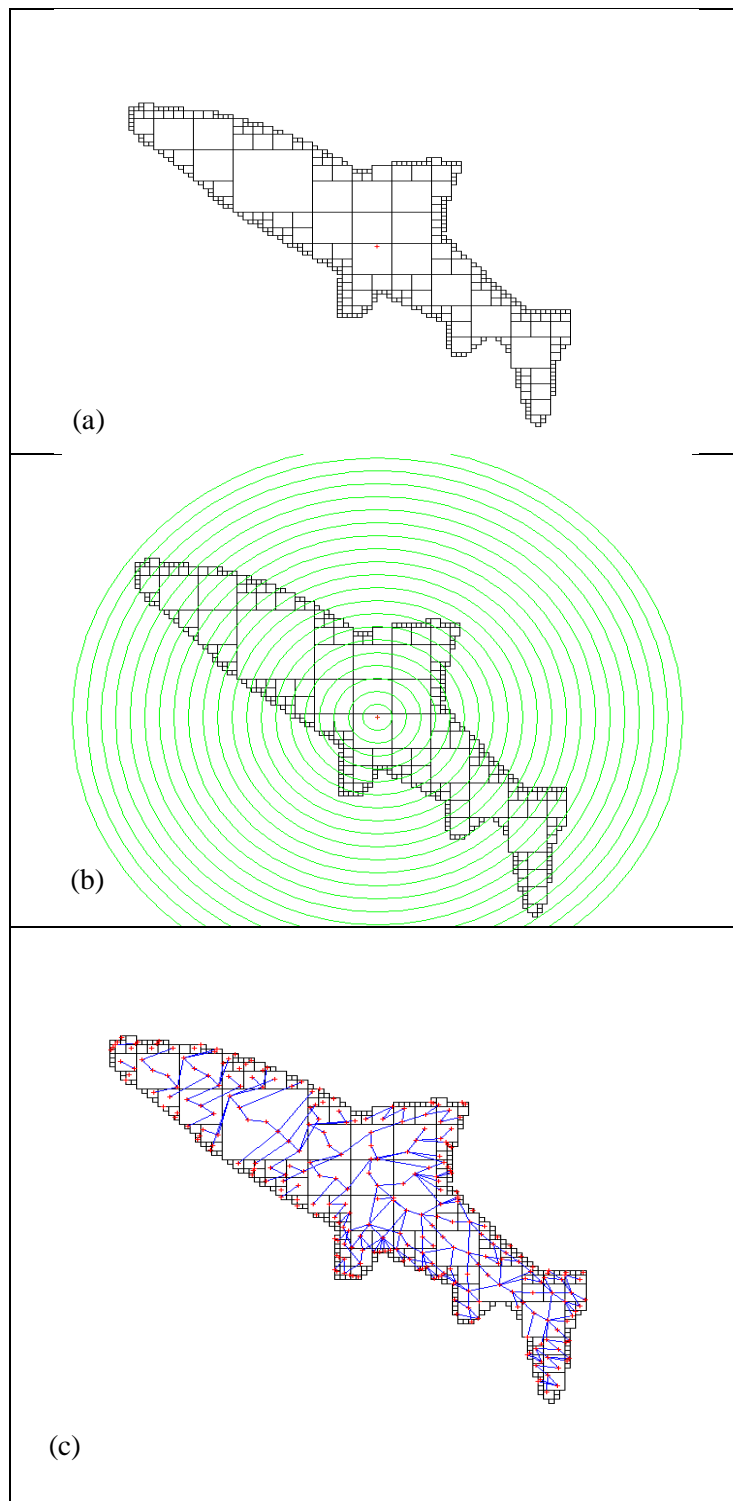


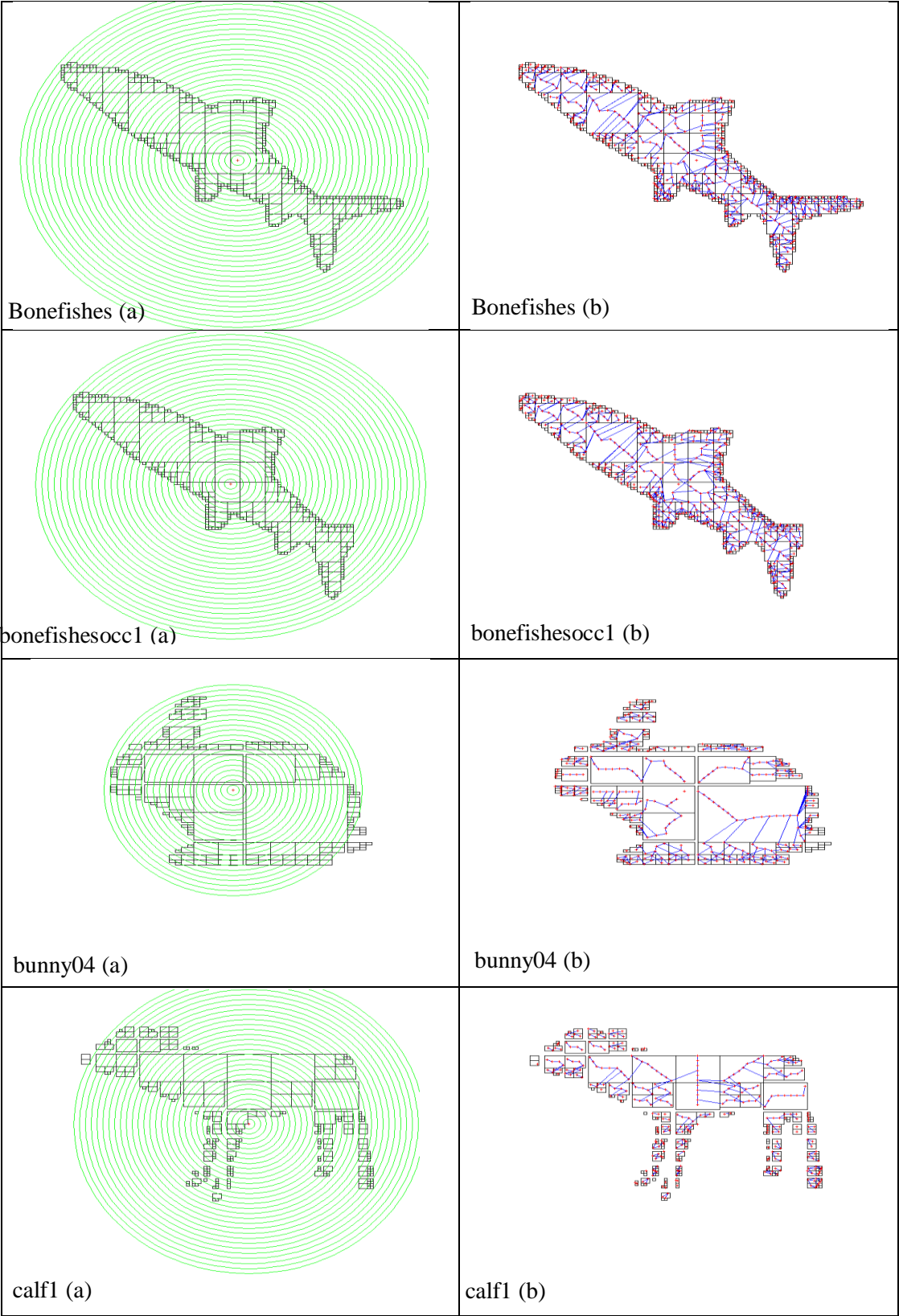
Tableau.4.1. 16 formes en représentation de quadtree de la base de données Kimia-99

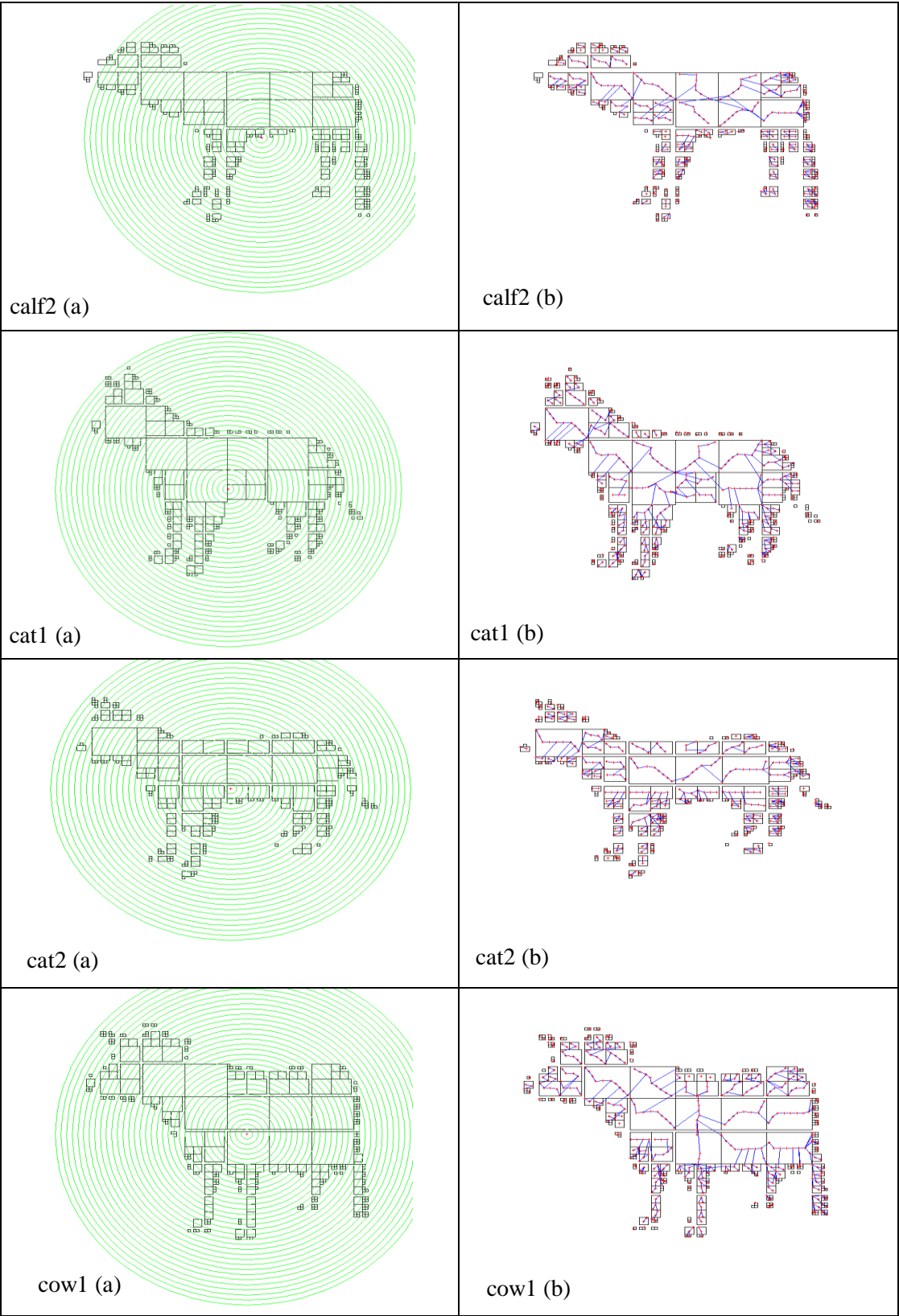
- ❖ La deuxième sous-section est réservée à présenter un exemple d'une forme de la base précédente sous le nom « **bonfishesoccl** » qui est un poisson, avec une grande résolution, pour bien voir les différentes étapes de la génération du graphe de Reeb, et c'est à travers la fixation de K (la résolution du graphe) avec la valeur $K=3$, qui est la longueur de premier rayon des cercles centraux.

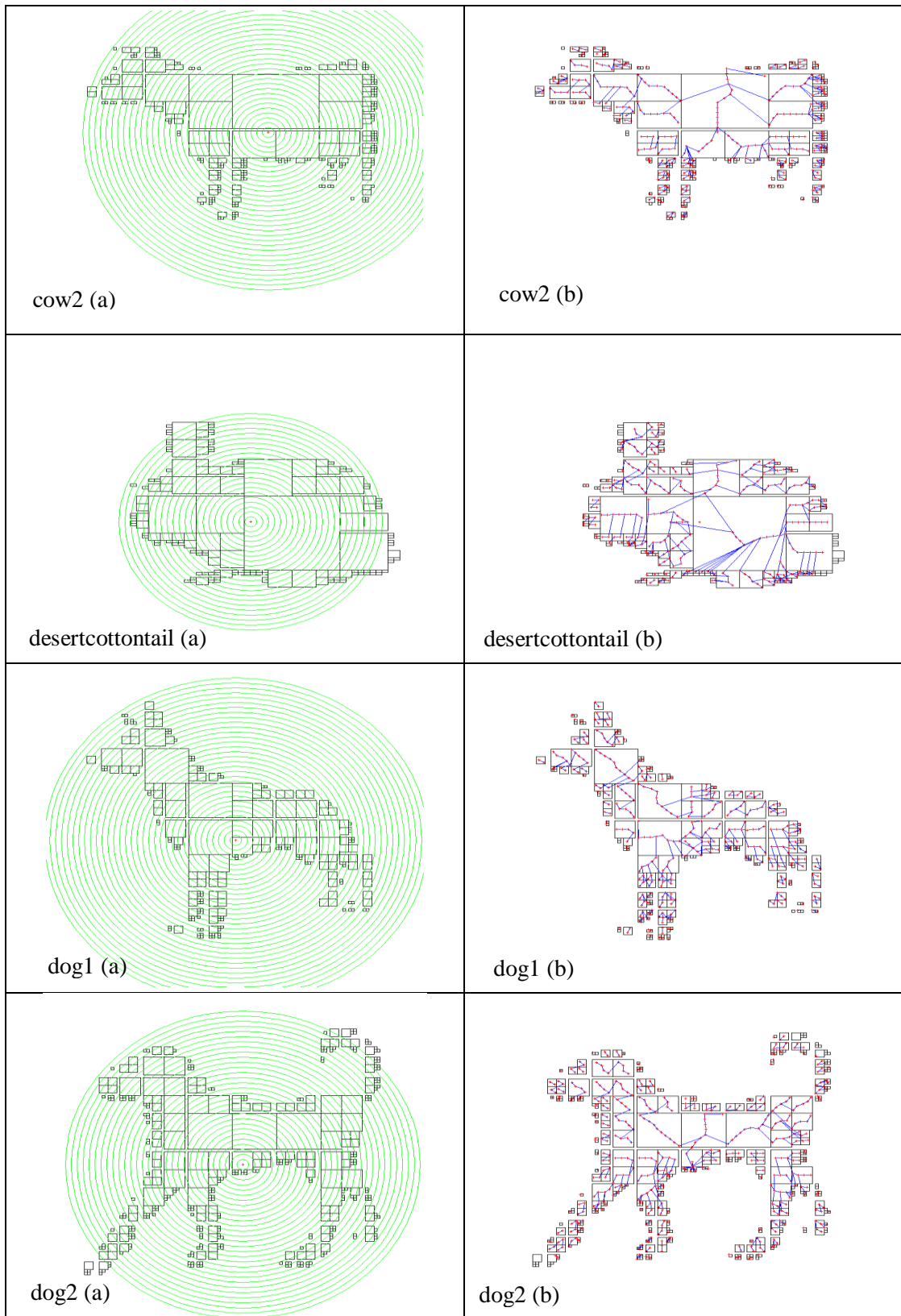
**Tableau. 4.2.**

(a) image d'une forme au format quadtree, (b) la forme avec les cercles centriques ($K=3$), (c) génération du graphe de Reeb correspondant.

- ❖ La troisième sous-section est dédiée à la génération automatique du graphe de Reeb à travers leurs rayons qui liée au volume des blocs de la forme initiale. On s'intéresse aux 16 premières formes de la base Kimia-99 au format de quadtree, et on les représente avec les cercles centriques dans la première colonne du tableau. Dans la deuxième colonne, les graphes de Reeb correspondants sont générés et donnés (voir le tableau 4.3.).







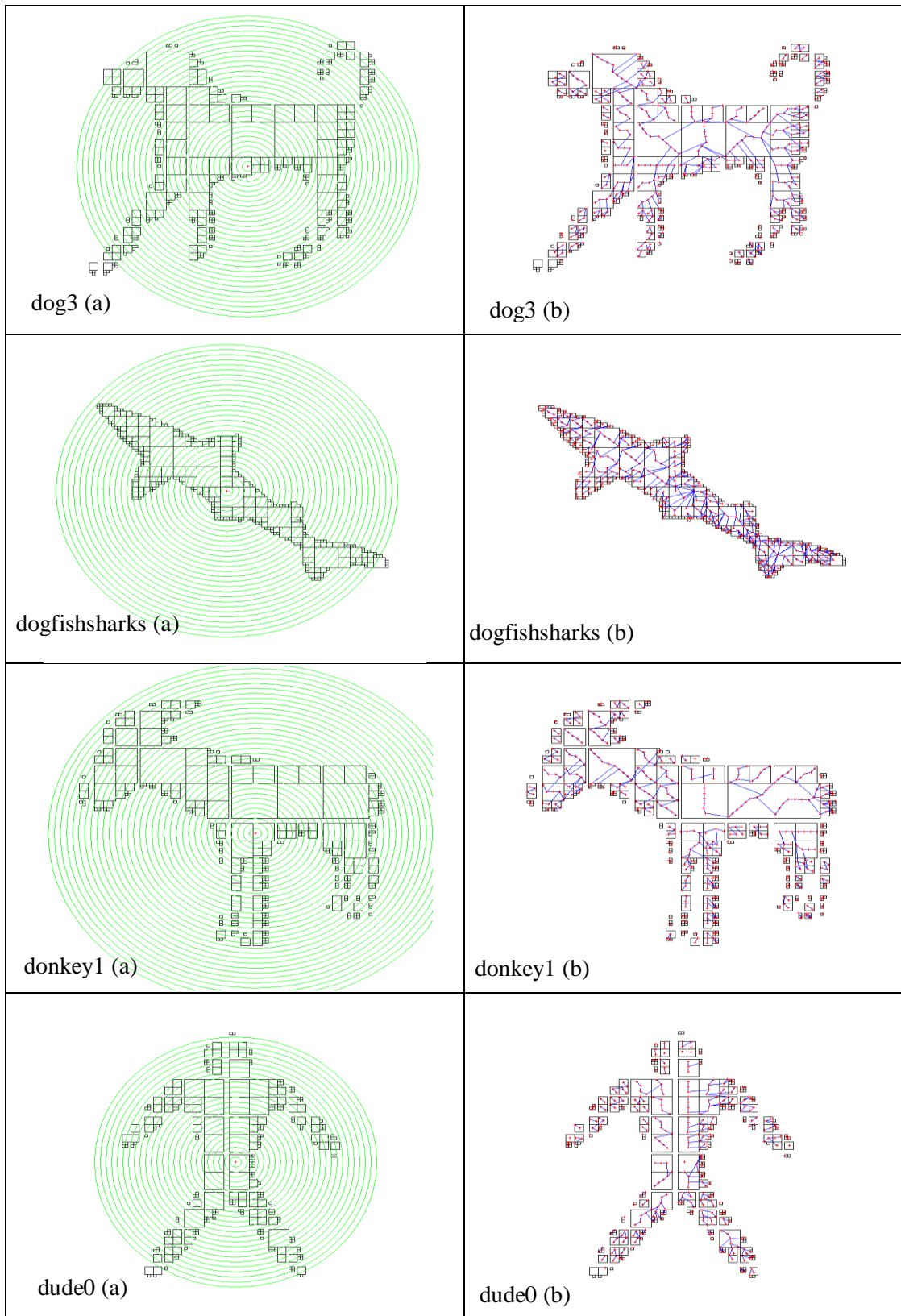


Tableau. 4.3. génération des graphes de Reeb correspondants aux 16 formes précédentes : les nœuds sont en couleur rouge, le graphe de Reeb est en couleur bleue: la première colonne donne les formes avec les cercles centraux, la deuxième colonne illustre les graphes de Reeb correspondants.

D'après les tableaux 4.1, 4.2 et 4.3, nous remarquons que le graphe de Reeb reflète vraiment les formes originales en représentations de quadtree. Ce modèle topologique adopte également les caractéristiques topologiques et géométriques de la forme. Depuis ce modèle, on peut dire que les graphes de Reeb jouent un rôle fondamental dans le domaine de la reconnaissance et l'analyse des formes.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'implémentation en premier lieu et les résultats expérimentaux en deuxième lieu pour valider ce modèle topologique de squelettisation basé principalement sur la structure de graphe de Reeb.

Pour les expérimentations, nous avons utilisé la base de données des formes 2D standard Kimia-99 en représentation de quadtree [57]. La base originale est connue par ses 99 formes 2D sous forme d'images de niveaux de gris. On conclut aussi, que l'application de ce modèle sur cette base des formes a donné des résultats satisfaisants et rationnels.

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous avons développé une approche qui conduit à concevoir un modèle topologique destiné au domaine de la reconnaissance des formes 2D qui représentent un éventuel prototype dans ce domaine. Ce modèle est caractérisé par deux structures qui sont le graphe de Reeb et le complexe simplicial associé.

Depuis leur introduction dans l'infographie, le graphe de Reeb qui est un concept de la théorie de Morse a gagné la popularité en tant qu'un descripteur de forme efficace pour différentes tâches d'analyse et d'interprétation des données contenues dans les formes. La cause de choisir le concept de graphe de Reeb est due à sa capacité et sa robustesse de bien représenter, d'extraire et de reconnaître principalement les caractéristiques ou les propriétés topologiques dans la forme.

Notre approche de modélisation qui conduit à concevoir un algorithme qui génère les deux structures citées précédemment. L'algorithme conçu traite des formes 2D sous forme de blocs rectangulaires (ou représentation quadtree). La construction du graphe de Reeb emploie les concepts de la théorie de Morse pour le choix de la fonction réelle, calcul des ensembles des niveaux ou niveaux topologiques, les points critiques qui sont les points d'intersection des blocs.

En résumé, cette nouvelle approche qui est testée sur une base des formes 2D en représentation de quadtree conduit à concevoir un modèle topologique robuste de squelettisation et qui montre aussi une réussite à travers son efficacité et son invariance aux transformations affines et aux petits changements.

Ce travail ouvre des perspectives nombreuses et prometteuses, notamment à la modélisation des formes 3D avec la structure du graphe de Reeb, et nous pouvons également l'utiliser pour la recherche et l'indexation d'objets 2D et 3D dans des bases de données... etc.

Bibliographie

- [01] J. Voros. Approximate Quadtree and Octree Representations for Manufacturing Tasks. Nabrezna 91, CS-940 73 Nave Zamky, Tchecoslovaquie, 1992.
- [02] H. Molina-Abril and P. Real. A Homological-Based Description of Subdivided nd Objects. *Computer Analysis of Images and Patterns. Part of the Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*, 6854:42–50, 2011.
- [03] G. Damiand, S. Peltier, and L. Fuchs. Computing Homology For Surfaces With Generalized Maps: Application to 3d Images. *In Proceedings of 2nd International Symposium on Visual Computing*, vol. 4292, pp. 235-244, Lake Tahoe, Nevada, USA, LNCS, Springer-verlag. 2006.
- [04] M. Allili and D. Ziou. Topological Feature Extraction in Binary Images. *In Proceedings of the 6th IEEE International Symposium on Signal Processing and its Applications*, pp. 651–654, Malaysia, 2001.
- [05] H. Blum. A Transformation For Extracting New Descriptors of Shape. *in Models for the Perception of Speech and Visual Forms. W. WathenDunn, Ed. Amsterdam: MIT Press*, pp. 362–380, 1967.
- [06] P. Lienhardt, L. Fuchs, Y. Bertrand. Combinatorial Models For Topology-Based Geometric Modeling. *G. Di Maio, S. Naimpally. Theory and applications of proximity, nearness and uniformity, Quaderni di matematica, dipartimento di matematica, seconda universita di Napoli*, pp.151-198, 2009.
- [07] S. Biasotti, B. Falcidieno and M. Spagnuolo. Surface Shape Understanding Based on Extended Reeb Graphs, *Institut de mathématiques appliquées et des technologies de l'information, Conseil National de Recherche, Via De Marini 6 - 16149 Gênes, Italie*.
- [08] R. Gonzalez–Díaz, M. J. Jimenez, B. Medrano and P. Real. Chain Homotopies for Object Topological Representations. *Discrete Applied Mathematics*, vol.157, no.03, pp. 490-499. 2009.
- [09] F. A. S. Dias. A Study of Some Morphological Operators in Simplicial Complex Spaces. *Other [cs.OH]. Université Paris-Est, English. 2012*.
- [10] J. B. Debard and H. S. Min. A Fast Algorithm for Computing Reeb Graph of 2-Manifold. *Tsinghua University*. Janvier 2006.

-
- [11] S. Biasotti, S. Marini, M. Mortara, and G. Patan. An Overview on Properties and Efficacy of Topological Skeletons in Shape Modelling. in *Shape Modeling and Applications, International Conference on*, Seoul, Korea, pp. 245. 2003.
- [12] G. Aujay. D'un Squelette Géométrique à un Squelette d'Animation. *Master de Recherche Image Vision Robotique, INRIA Rhône-Alpes-ZIRSR*. Mars-Juin 2006.
- [13] M. Hilaga, Y. Shinagawa, T. Kohmura, and T. L. Kunii. Topology Matching for Fully Automatic Similarity Estimation of 3D Shapes. In *Proceedings of ACM SIGGRAPH 2001*, E. Fiume, Ed., ACM, 203–212. 2001.
- [14] S. Biasotti, M. Mortara, and M. Spagnuolo. Surface Compression and Reconstruction Using Reeb Graphs and Shape Analysis. In *Proceedings of Spring Conference on Computer Graphics*, 175–184. 2000.
- [15] D. Steiner, and A. Fischer. Cutting 3D Freeform Objects with Genus-n Into Single Boundary Surfaces Using Topological Graphs. In *SMA '02 : Proceedings of the seventh ACM symposium on Solid modeling and applications*, 336–343. 2002.
- [16] Z. J. Wood, M. Desbrun, P. Schroder and D. Breen. Semi-Regular Mesh Extraction From Volumes. *Proceedings Visualization 2000, Salt Lake City, UT, USA*, pp. 275-282. 2000.
- [17] Y. Shinagawa, and T. L. Kunii. Constructing A Reeb Graph Automatically From Cross Sections. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 11, 44–51. 1991.
- [18] S. Biasotti. Reeb Graph Representation of Surfaces with Boundary. *Proceedings Shape Modeling Applications, Genova, Italy*, pp. 371-374, 2004.
- [19] V. Pascucci, G. Scorzelli, P. T. Bremer, and A. Mascarenhas. Robust on-Line Computation of Reeb Graphs : simplicity and speed. *ACM SIGGRAPH conference proceedings, San Diego, California*, vol. 26, no. 3, 05-09 Aug. 2007.
- [20] S. Takahashi, T. Ikeda, Y. Shinagawa, T. L. Kunii, and M. Ueda. Algorithms for Extracting Correct Critical Points and Constructing Topological Graphs From Discrete Geographical Elevation Data, *Computer Graphics Forum*, vol. 14, no. 3, pp. 181–192, Aug. 1995.
- [21] Y. Xiao, P. Siebert, and N. Werghi. A Discrete Reeb Graph Approach for the Segmentation of Human Body Scans. *Fourth International Conference on 3-D Digital Imaging and Modeling, Banff, Alberta, Canada*, pp. 378-385, 6-10 Oct. 2003.

-
- [22] S. Biasotti, S. Marini, M. Mortara, G. Patanè, M. Spagnuolo, and B. Falcidieno. 3D Shape Matching Through Topological Structures. *In : Nyström I., Sanniti di Baja G., Svensson S. (eds) Discrete Geometry for Computer Imagery. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2886. Springer, Berlin, Heidelberg. 2003.
- [23] I. Janusch. Reeb Graph Based Image Representation for Phenotyping of Plants. *Master thesis, faculty of informatics, Vienna University of Technology, Vienna*. 2014.
- [24] T. Tony, and S. Francis. Indexation d’Objets 3D par Graphe de Reeb Multirésolution Augmenté. *Annales des télécommunications, France*, vol. 60, no. 11, pp.1309 – 1336, Dec. 2005.
- [25] W. Mohamed. and A. Ben Hamza. Reeb Graph Path Dissimilarity for 3D Object Matching and Retrieval. *The visual computer, Springer-Verlag*, vol. 28, no. 3, pp. 305-318, Mar. 2012.
- [26] S. Biasotti, B. Falcidieno, and M. Spagnuolo. Extended Reeb Graphs for Surface Understanding and Description. *Borgefors G., Nyström I., di Baja G.S. (eds) Discrete Geometry for Computer Imagery. DGCI. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1953. Springer, Berlin, Heidelberg. 2000.
- [27] P. Kanonchayos, T. Nishita, S. Yoshihisa, and T. L. Kunii. Topological Morphing Using Reeb Graphs, *First International Symposium on Cyber Worlds, Proceedings, Tokyo, Japan*, pp. 465 – 471, 6-8 Nov, 2002.
- [28] M. Mestiri, and K. Hamrouni. Reeb Graph for Automatic 3D Cephalometry. *International Journal of Image Processing (IJIP)*, vol. 8, no. 2, pp. 17-29, Mar. 2014.
- [29] F. Chen, H. Obermaier, H. Hagen, B. Hamann, J. Tierny, and V. Pascucci. Topology Analysis of Time-Dependent Multi-Fluid Data Using the Reeb Graph. *Computer Aided Geometric Design, Germany*, vol. 30, no. 6, pp. 557-566, Jul. 2013.
- [30] P. Antonietta, B. Laura, P. Marco, K. Juha, H. Jarmo, and T. Jussi. Simplified Reeb Graph as Effective Shape Descriptor for the Striatum. *In: Levine J.A., Paulsen R.R., Zhang Y. (eds) Mesh Processing in Medical Image Analysis. Lecture Notes in Computer Science*, vol 7599. Springer, Berlin, Heidelberg. 2012.
- [31] L. Brandolini, and M. Piastra. Computing the Reeb Graph for Triangle Meshes with Active Contours. *Proceedings of the 1st International Conference on Pattern Recognition Applications and Methods, Vilamoura, Algarve, Portugal*, pp. 80-89, 2012.
- [32] H. Doraiswamy, and V. Natarajan. Efficient Algorithms for Computing Reeb Graphs. *Computational Geometry, India*, vol.42, no. 6-7, pp. 606-616, Aug. 2009.

-
- [33] M. Hilaga, Y. Shinagawa, T. Kohmura, and L. T. Kunii. Topology Matching for Fully Automatic Similarity Estimation of 3D Shapes. *SIGGRAPH '01 Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, ACM, New York, USA*, pp. 203-212, 2001.
- [34] A. Izosimov, B. Khesin, and M. Mousavi. Coadjoint Orbits of Symplectic Diffeomorphisms of Surfaces and Ideal Hydrodynamics. *Annales Institut Fourier*, vol. 66, no 6, pp. 2385-2433, 22 Apr 2015.
- [35] T. Tung, and T. Matsuyama. Topology Dictionary for 3D Video Understanding. *IEEE Transactions Pattern Analysis Machine Intelligence*, vol. 34, no. 8, pp. 1645-1657, Aug. 2012.
- [36] J. Tierny, J. P. Vandeborre, and M. Daoudi. Invariant High Level Reeb Graphs of 3D Polygonal Meshes. *3D Data Processing, Visualization, and Transmission, Third International Symposium on, Chapel Hill, NC, USA*, pp. 105-112, 14-16 Jun. 2006.
- [37] V. Barra, and S. Biasotti. 3D Shape Retrieval Using Kernels on Extended Reeb Graphs. *Pattern Recognition*, vol. 46, no. 11, pp. 2985–2999, Nov. 2013.
- [38] F. Lazarus and A. Verroust. Level Set Diagrams of Polyhedral Objects. *In ACM Solid Modeling '99, Ann Arbor, Michigan, USA, June 1999*.
- [39] D. Boltcheva, D. Canino, S. Merino Aceituno, J. C. Leon, L. De Floriani, and F. Hetroy. An Iterative Algorithm for Homology Computation on Simplicial Shapes. *Computer-Aided Design*, 43(11): 1457–1467, 2011.
- [40] I. Karaka and O. Ege. Some Results On Simplicial Homology Groups of 2D Digital Images. *International Journal of Information and Computer Science*, 1(8) :198–203, 2012.
- [41] S. Peltier, S. Alayrangués, L. Fuchs, and J. O. Lachaud. Computation of Homology Groups and Generators. *Computers & Graphics*, 30(1) :62–69, 2006.
- [42] G. Damiand, S. Peltier, and L. Fuchs. Computing Homology For Surfaces With Generalized Maps: Application to 3d Images. *In Proceedings of 2nd International Symposium on Visual Computing*, vol. 4292, pp. 1151–1160, Lake Tahoe, Nevada, USA, 2006.
- [43] L. Liu, E. W. Chambers, D. Letscher, and T. Ju. A Simple and Robust Thinning Algorithm on Cell Complexes. *Pacific Graphics, P. Alliez, K. Bala, and K. Zhou Editors*, 29(7), 2010.

-
- [44] G. Damiand, S. Peltier, and L. Fuchs. Computing Homology Generators for Volumes Using Minimal Generalized Maps. *International Workshop on Combinatorial Image Analysis IWCIA. Part of the Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg*, 4958:63–74, 2008.
- [45] P. Dlotko and R. Specogna. Topology Preserving Thinning of Cell Complexes. *IEEE Transactions on Image Processing*, 23(10):4486–4495, October 2014.
- [46] S. Derdar. Extraction des Invariants et Mise en Correspondance entre Images en Utilisant la Théorie de L’homologie Cubique de L’approche Topologique. *Thèse Doctorat en Sciences. Université Badji Mokhtar-Annaba*. 2018.
- [47] R. Gonzalez-Diaz, M. J. Jimenez, and B. Medrano. 3D Well-Composed Polyhedral Complexes. *Discrete Applied Mathematics*, 183:59–77, 2015.
- [48] D. Ziou and M. Allili. Generating Cubical Complexes from Image Data and Computation of the Euler Number. *Pattern Recognition*, 35(12):2833–2839, 2002.
- [49] M. Allili, K. Mischaikow, and A. Tannenbaum. Cubical Homology and the Topological Classification of 2d and 3d Imagery. In *IEEE International Conference on Image Processing*, pp 173–176, 2001.
- [50] J. Chaussard and M. Couprie. Surface Thinning in 3D Cubical Complexes. In : *P. Wiederhold, R.P. Barneva (eds) Combinatorial Image Analysis. IWCIA. Lecture Notes in Computer Science*, vol 5852. Springer, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [51] A. Gonzalez-Lorenzo, A. Bac, J. L. Mari, and P. Real. Cellular Skeletons: A New Approach to Topological Skeletons with Geometric Features. *International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns CAIP. Part of the Lecture Notes in Computer Science, SpringerVerlag, Berlin, Heidelberg*, 9257:616–627, 2015.
- [52] X. Ni, M. Garland, and J. C. Hart. Fair Morse Functions for Extracting the Topological Structure of a Surface Mesh. *SIGGRAPH ACM Transactions on Graphics*, 23(3) :613–622, August- 2004.
- [53] S. Biasotti, D. Giorgi, M. Spagnuolo, and B. Falcidieno. Reeb Graphs for Shape Analysis and Applications. *Theoretical Computer Science, Italy*, vol. 392, no. 1-3, pp. 5-22, Febr, 2008.
- [54] S. H. Baloch, H. Karim, 2D Shape Modeling Using Skeletal Graphs in a Morse Theoretic Framework, *Statistics and Analysis of Shapes, Part of the series Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, Birkhäuser Boston* , DOI 10.1007/0-8176-4481-4_3 pp. 61-80, 2006.

- [55] T. Tung. Indexation 3D de Bases de Données d'Objets par Graphes de Reeb Améliorés. *Thèse Phd, Laboratoire de l'informatique, Télécom ParisTech, France*, 10 Juin 2005.
- [56] Master of Technology. Sandeep Sudhir Patil, Voxel-based Solid Models: Representation, Display and Geometric Analysis. *Department of Mechanical Engineering Indian Institute of Technology, Bombay*, June 2005.
- [57] I. Janusch and W.G. Kropatsch. Reeb Graphs Through Local Binary Patterns. *In: Pattern Recognition and Image Processing Group Institute of Computer Graphics and Algorithms Vienna University of Technology, Austria*. vol 9069. 2015.

Webographie:

- [58] Indian Institute of Science, Bangalore. Visualization and Graphics Lab. (<https://vgl.csa.iisc.ac.in/software/software.php?pid=003>), Dernière consultation : Le 18/08/2020.
- [59] wikipedia, Disponible sur : https://en.wikipedia.org/wiki/Reeb_graph.
- [60] Eclipse integrated development environment. Tutorials Point, 2015 disponible sur : https://www.tutorialspoint.com/eclipse/eclipse_tutorial.pdf.
- [61] J. M. Doudoux, Développons en Java avec Eclipse. Disponible sur : http://mmontantin.free.fr/docs/cpp_cs/Java/eclipse_V0_30.pdf