République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'informatique et des sciences de la matière
Département de Mathématiques

THÈSE

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE DOCTORAT EN SCIENCE

Filière : Mathématiques

Présentée par

Kecis Mohammed

Intitulée

Contributions aux problèmes variationnels et aux inclusions différentielles

Soutenue le : 14\02\2021

Devant le Jury composé de :

Mr BOUSSETILA Nadjib	Prof	Univ. de Guelma	Président
Mr Haddad Tahar	Prof	Univ. de Jijel	Rapporteur
Mr ELLAGGOUNE Fateh	Prof	Univ. de Guelma	Co-encadreur
Mr DEBBOUCHE Amar	Prof	Univ. de Guelma	Examinateur
Mr AKROUT Kamel	MCA	Univ. de Tebessa	Examinateur
Mr BOUSSAYOUD Ali	MCA	Univ. de Jijel	Examinateur

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement à **ALLAH** tout puissant pour la volonté, la santé, et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces années d'études.

Je tiens ensuite à remercier vivement mon directeur de thèse, **Haddad Tahar**, professeur de l'Université de Jijel, pour m'avoir confié ce travail de recherche, ainsi que pour son aide et ses précieux conseils au cours de ces années. Sa générosité, sa disponibilité, sa rigueur, ses qualités pédagogiques et scientifiques.

C'est encore le lieu de remercier mon co-Directeur de thèse, **Ellaggoune Fateh**, professeur de l'Université de Guelma, pour sa générosité, son sens du partage de la connaissance et son obsession pour la rigueur. Je le suis reconnaissant de m'avoir accompagné durant toutes ces années de recherche. J'ai pris un grand plaisir à travailler avec lui.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur **Boussetila Nadjib**, Professeur à l'université de Guelma, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse et pour son aide précieuse.

J'adresse, également, mes remerciements chaleureux à Monsieur **Debbouche Amar**, Professeur à l'université de Guelma et Monsieur **Akrout Kamel**, Maître de Conférence à l'université de Tebessa et Monsieur **Boussayoud Ali**, Maître de Conférence à l'université de Jijel, qui ont bien voulu prendre la responsabilité d'évaluer ce travail, qu'ils soient vivement remercié.

Enfin, je tiens à remercier très sincèrement tous les membres de ma famille pour leur soutien et leurs encouragements constants durant toutes ces années. Leur présence de tous les instants a été pour moi un atout indispensable pour mener à bien ce travail.

Dédicace

A ma grande famille :

Mes très chers parents Ammar et Messaouda.

Mes frères : Mahfoud. Elias. Youcef . Hocine. Abd -rahman. Adel et à mes soeurs.

A ma petite famille :

Ma femme et ma très chère fille Bouchra Nada.

Et à tous ceux qui me sont chers.

Table des matières

Table des figures

Abstract

The aim of this thesis is to give some contributions to theory of differential inclusions involving normal cones from the point of view of nonsmooth and variational analysis, on infinite dimensional separable Hilbert spaces. In particular, we are interested in the study the following variant of the sweeping process, which is known the perturbed degenerate sweeping process

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(A\big(x(t)\big) + f\big(t, x(t)\big) \; a.e \; t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

where the perturbation $f: [T_0, T] \times H \to H$ *is a single-valued map which is measurable with respect to the first variable, and Lipschitzian with respect to the second variable.*

Differential inclusion (PDP) and many of its variants appear naturally in several applications such as elastoplasticity, electrical circuits, modeling crowd motions, and complementarity systems, etc. Applications of our results to the differential complementarity problems, and to the quasistatic evolution variational inequalities have been given.

Key words : *Degenerate sweeping process, perturbation, differential inclusion, normal cone, set-valued map, absolutely continuous map, monotonicity, differential complementarity problem, variational inequalities.*

Résumé

Le but de cette thèse est d'apporter quelques contributions à la théorie des inclusions différentielles impliquant des cônes normaux, du point de vue de l'analyse non lisse et variationnelle, sur les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. En particulier, nous nous sommes intéressés à l'étude de la variante suivante du processus de Rafle, qui est connu sous le nom de processus de Rafle dégénéré perturbé

$$(PDP): \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(A\big(x(t)\big) + f(t, x(t))\ p.p\ t \in [T_0, T], \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Où la perturbation $f: [T_0, T] \times H \to H$ *est une application univoque, mesurable par rapport à la première variable et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable.*

L'inclusion différentielle (PDP) et beaucoup de ses variantes apparaissent naturellement dans plusieurs applications telles que l'élastoplasticité, les circuits électriques, la modélisation des mouvements de foule, et les systèmes de complémentarité, etc. Des applications de nos résultats aux problèmes de complémentarité différentielle, et aux inégalités variationnelles d'évolution quasi-statiques ont été données.

Mots clés : *Processus de Rafle dégénéré, perturbation, inclusion différentielle, application multivoque, fonction absolument continue, cône normal, monotonie, problème de complémentarité différentielle, inégalités variationnelles.*

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو تقديم بعض المساهمات في نظرية الاحتواءات التفاضلية التي تتضمن المخاريط الناظمية ، من وجمة نظر التحليل غير السلس والتغايري ، في إطار فضاءات هلبرت القابلة للفصل ذات البعد اللانهائي. على وجه الخصوص ، كنا مهتمين بدراسة مسألة متشعبة من عملية المسح لرافل، والتي تُعرف باسم عملية المسح لرافل المشوهة المضطربة المعطاة بـ

$$(PDP):\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(A\big(x(t)\big) + f(t,x(t))\ p.p\ t \in [T_0,T], \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

حيث يكون الاضطراب $f: [T_0,T] \times H \to H$ عبارة عن تطبيق أحادي القيمة ، قابل للقياس بالنسبة للمتغير الأول و ليبشيزي بالنسبة للمتغير الثاني.

يملك الاحتواء التفاضلي (PDP) والعديد من تشعباته العديد من التطبيقات مثل المرونة والدوائر الكهربائية ونمذجة حركة الحشد و مسائل التتميم التفاضلية. لقد تم تقديم تطبيقات مختلفة لهده المسألة. على وجه الخصوص ، التطبيقات المتعلقة بمسائل التتميم التفاضلية, المتراجحات التغايرية للتطور شبه الساكن.

الكلمات المفتاحية: عملية المسح لرافل المشوهة ، الاضطراب ، الاحتواء التفاضلي ، التطبيقات المتعددة القيم ، التابع المستمر مطلقا ، المخروط الناظمي ، الرتابة ،مسائل التتميم التفاضلية. المتراجحات التغايرية.

Abréviations et notations

Les notations suivantes seront utilisées dans toute la thèse :

c-à-d	C'est-à-dire.
resp	Respectivement.
i. e.	« C'est-à-dire ».
$\min, \max, \inf, \sup$	Minimum,Maximum,Infimum et Supremum respectivement.
p.p	Presque partout.
$:=$	Egal à, par définition.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathcal{P}(E)$	Ensemble des parties de E.
$\mathring{A} = int(A)$	Intérieur topologique de l'ensemble A.
$\overline{A} = cl(A)$	Adhérence topologique ou fermeture de l'ensemble A.
$Fr(A) = \partial A$	Frontière topologique de l'ensemble A.
$B\left[x, r\right]$	Boule fermée centrée en x et de rayon $r \in \left]0, +\infty\right[$.
$B(x, r)$	Boule ouverte centrée en x et de rayon $r \in \left]0, +\infty\right[$.
$\mathbb{B} = B\left[0, 1\right]$	Boule unité fermée centrée en 0.
$co(A)$	Enveloppe convexe d'un sous ensemble A.
$\overline{co}(A)$	Enveloppe convexe fermée d'un sous ensemble A.
$cone(A)$	Enveloppe cônique convexe d'un sous ensemble A.
$\overline{cone}(A)$	Enveloppe cônique convexe fermée d'un sous ensemble A.
$A^{\perp}$	Ensemble orthogonal à l'ensemble A.
$\Vert\cdot\Vert$	Norme sur X.
H	Espace de Hilbert.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire sur H.
s.c.i	Semi-continue inférieurement.
s.c.s	Semi-continue supérieurement.

$\psi_C(\cdot)$	Fonction indicatrice d'un ensemble C.
$\sigma_C(\cdot)$	Fonction support d'un ensemble C.
$P_C(.)$	Projection sur l'ensemble C.
$d(\cdot, C) = d_C(\cdot)$	Fonction distance à C.
$\partial f(\cdot)$	Sous-différentiel de l'analyse convexe d'une fonction convexe f.
$f^*(\cdot)$	Conjuguée de Fenchel d'une fonction.
$f^{**}(\cdot)$	Biconjuguée de Fenchel d'une fonction.
C°	Cône polaire d'un sous-ensemble C.
C^*	Cône dual d'un sous-ensemble C.
$N_C(x)$	Cône normal de l'analyse convexe d'un ensemble convexe C au point x.
$T_C(x)$	Cône tangent de l'analyse convexe d'un ensemble convexe C au point x.
E'	Dual topologique d'un espace vectoriel normé E.
$\sigma(E, E')$	Topologie faible sur E.
$\rightharpoonup$ ou $\xrightarrow{w}$	convergence faible.
$\longrightarrow$ ou $\xrightarrow{\Vert\cdot\Vert}$	convergence forte.
$f : X \longrightarrow Y$	Application univoque définie sur X à valeurs dans Y.
$dom(f)$	Domaine effectif de la fonction f.
$epi(f)$	Epigraphe d'une fonction f.
$hypo(f)$	Hypographe d'une fonction f.
$\{f \leqslant r\}$	Ensemble de sous-niveau $r \in \mathbb{R}$.
$\{f \geqslant r\}$	Ensemble de sur-niveau $r \in \mathbb{R}$.
$F : X \rightrightarrows Y$	Application multivoque de X vers Y.
$dom(F)$	Domaine effectif de l'application multivoque F.
$\Im(F)$	Image de l'application multivoque F.
$gph(F)$	Graphe de l'application multivoque F.
$e(A, B)$	Excès (de Pompeiu- Hausdorff) ou écart de A sur B.
$d_H(A, B)$	Distance de Hausdorff (Pompeiu-Hausdorff) entre A et B.
$\mathcal{C}([T_0, T], H)$	Espace des fonctions continues définies sur $[T_0, T]$ à valeurs dans H.
$L^p([T_0, T], H)$	Espace des fonctions mesurables de puissance $p - ième$ intégrable sur $[T_0, T]$.
$L^\infty([T_0, T], H)$	Espace des fonctions essentiellement bornées sur $[T_0, T]$ à valeurs dans H.
$W^{k,p}([T_0, T], H)$	$:= \left\{ u \in L^p([T_0, T], H) : \Vert u^{(j)} \Vert_{L^p([T_0,T],H)} < \infty, \forall j \leqslant k \right\}$.

Introduction Générale

L'analyse multivoque c'est l'étude des propriétés des applications multivaluées, autrement dit les applications dont l'image est un sous-ensemble de l'espace d'arrivée. Le besoin de l'analyse multivoque s'est ainsi fait sentir pour la résolution de nombreux problèmes émergents dans divers domaines. Parmi les nombreux domaines dans lesquels les outils de l'analyse multivoque sont utilisés, on peut citer le contrôle optimal [44], l'économie mathématique [6], [36], le calcul sous-différentiel [68], [69], l'optimisation, et l'étude des inclusions différentielles.

Les inclusions différentielles représentent une généralisation des équations différentielles ordinaires (une équation différentielle à second membre multivoque) de la forme

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), x(0) = x_0. \tag{1}$$

où $\dot{x}(\cdot)$ indique la dérivée temporelle de $x(\cdot)$, $x_0 \in X$ une condition initiale et $F : [0,T] \times X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ est une application multivoques, c'est- à-dire une application dont les valeurs sont des sous ensembles de X. Quand F est un singleton sur X, on obtient un cas particulier de (1) notamment l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), x(0) = x_0, f \in L^1(I, X),$$

qui est intensément étudiée dans la littérature (voir par exemple [38]). Contrairement aux équations différentielles ordinaires, l'existence de solution pour une inclusion différentielle repose non seulement sur des conditions de régularité sur F (i.e, les divers types de continuité ou semi-continuité) mais aussi à des conditions de type topologique ou géométrique (compacité, convexité) de son image (Pour plus de détails voir [8], [9], [37] et [72]). Aujourd'hui, cette théorie est devenue plus importante et plus attirante. Son champ d'application s'est considérablement développé, et s'est avéré fructueuse dans de nombreux domaines comme : la mécanique unilatérale [56], l'économie mathématique [8], les sciences de l'ingénieurs (circuit électrique) [1], [35], etc... plus récemment, elle est devenue une des méthodes importantes pour l'étude des inégalités variationnelles d'évolution [35], [73], principalement celles gouvernées par le cône normal.

Un autre cas particulier très important, qui d'ailleurs justifie aussi le grand intérêt suscité par les inclusions différentielles est donné par le sous différentiel d'une fonction convexe, on obtient le problème connu sous le nom de processus de Rafle (En anglais : sweeping process) introduit dans les années 70 par J.J. Moreau. Ce problème était formulé sous la forme d'une inclusion différentielle d'évolution du premier ordre associée à un cône normal,

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2}$$

Telles que : H est un espace de Hilbert, $C(\cdot) : [0,T] \rightrightarrows H$ une application multivoque définie sur l'intervalle du temps $[0,T]$ et dont les valeurs sont convexes fermées non vides de H. $N_{C(t)}(x(t))$ est le cône normal au sens de l'analyse convexe à l'ensemble convexe $C(t)$ au point $x(t)$ avec une condition initiale donnée $x_0 \in C(0)$. Selon la définition du cône normal des ensembles convexes, l'inclusion différentielle ci-dessus avec la contrainte $x(t) \in C(t)$ peut être énoncée pour presque tout $t \in [0,T]$ sous la forme d'inégalité variationnelle d'évolution suivante

$$\begin{cases} \langle -\dot{x}(t), y - x(t) \rangle \leqslant 0 \text{ pour tout } y \in C(t), \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{3}$$

Le problème (2) s'écrit aussi

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in \partial\psi_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{4}$$

où $x_0 \in C(0)$ et $\partial\psi_{C(t)}(v)$ est le sous-différentiel de la fonction convexe $v \longmapsto \psi_{C(t)}(v)$ l'indicatrice de l'ensemble $C(t)$ (i.e. $\psi_{C(t)}(v) = 0$ si $v \in C(t)$ et $+\infty$ sinon).

Cette inclusion différentielle peut être interprétée de la manière suivante : Pour interpréter le mécanisme décrit par ce problème, on suppose que $x(t)$ se trouve à l'intérieur de $C(t)$. Alors, le cône normal à l'ensemble $C(t)$ à ce point $x(t)$ est réduit à zéro et donc, la vitesse du point est nulle, c'est-à-dire que le point ne bouge pas. Par contre, tout contact du point $x(t)$ avec la frontière de l'ensemble $C(t)$ produit un choc qui repousse ce premier avec une vitesse opposée à la normale à l'ensemble. C'est-à-dire que le point est repoussé chaque fois vers l'intérieur de l'ensemble (voir figure 1) . Le nom de « processus de Rafle » donné par Jean Jacques Moreau, se réfère à cette expressive interprétation géométrique.

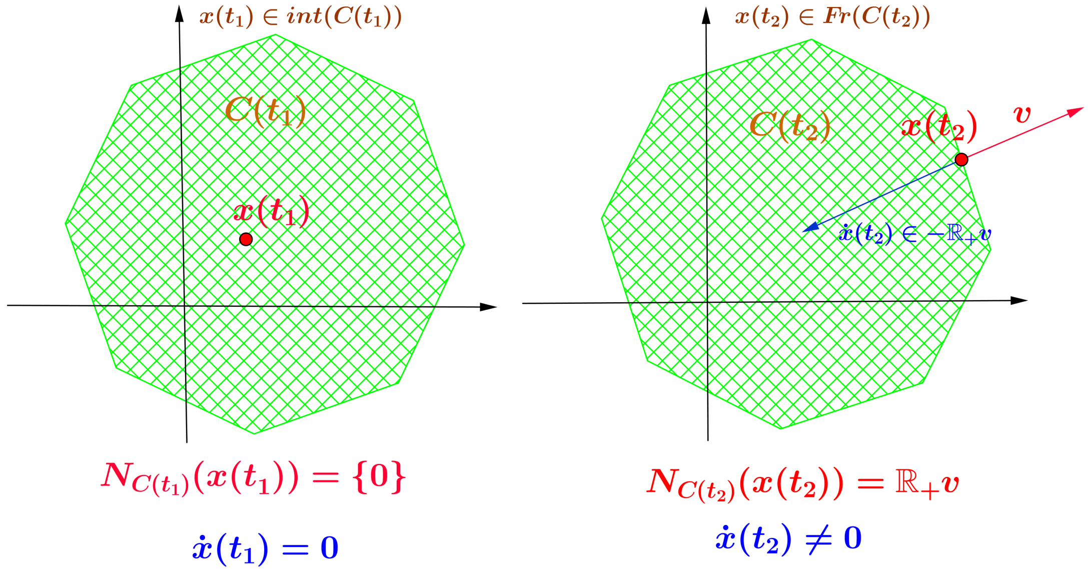

FIGURE 1 – Interprétation physique

Ce problème d'évolution abstrait a été introduit et étudié par Jean Jacques Moreau dans les années 70 dans une série d'articles [60], [61], [62], [63], dans le cas où les ensembles $C(t)$ sont supposés convexes et avec aucune perturbation. Il joue un rôle important dans l'élasto-plasticité, la quasi-statique, la dynamique, notamment en mécanique [25], [58], [59]. Dans le premier article de [62], J.J. Moreau a étudié l'existence d'une solution absolument continue pour (2) sous la convexité de $C(t)$ (La convexité de l'ensemble joue un rôle déterminant pour la résolution de ce type de problèmes) et sous l'hypothèse que les ensembles $(C(t))_t$ bougent de façon absolument continue par rapport à la distance de Pompeiu- Hausdorff, qui est équivalente à l'existence d'une fonction absolument continue $v(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in H, \forall s, t \in [0, T] : |d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)| .$$

Pour résoudre ce problème, J.J. Moreau apporta une nouvelle idée très importante l'algorithme de rattrapage (catching-up algorithm).

Depuis, de nombreuses améliorations ont été apportées dans la littérature : pour ajouter une perturbation, pour diminuer l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$, pour obtenir des résultats dans un contexte Banachique (et pas seulement dans des espaces de Hilbert). Principalement, nous citons les travaux C. Castaing, T.X. Dùc Ha et M. Valadier [30] ainsi que ceux de C. Castaing et M.D.P. Monteiro Marques [29]. Puis une importante amélioration fut apportée pour contourner l'hypothèse de convexité des ensembles $C(t)$ grâce à la notion d'ensemble prox-régulier. La notion de prox-régularité(qui est en fait une version locale de la convexité) a été initialement définie par H. Federer ([43]) dans $\mathbb{R}^d$ sous l'appellation "positively reached sets". Elle fut ensuite étendue aux espaces de Hilbert par F.H. Clarke, R.J. Stern et P.R. Wolenski ([31]) puis par R.A. Poliquin, R.T. Rockafellar et L.Thibault ([66]) et très récemment dans des espaces de Banach par F. Bernard, L. Thibault et N. Zlateva [16], [14]. Cette classe d'ensembles est plus générale et comprend les ensembles convexes. Cette propriété peut être décrite de manière géométrique : un ensemble C est $r-$prox-régulier ($r > 0$) si on peut faire rouler une boule de rayon r continûment sur toute la frontière ∂C de C. Elle est équivalente à la propriété suivante : la projection $P_C(\cdot)$ est univoque et continue en tout point x à distance $d(x, C) < r$.

De nombreux travaux traitent des processus de Rafle par des ensembles uniformément prox-réguliers. Le cas sans perturbation a été tout d'abord traité par G. Colombo, V.V. Goncharov [34], par H. Benabdellah [15] et ensuite par L. Thibault [76] et G. Colombo, M.D.P. Monteiro Marques [33] dans un cadre Hilbertien. Dans le cadre d'un espace de Hilbert de dimension infinie, le problème perturbé a été étudié par M. Bounkhel, J.F. Edmond et L. Thibault [42], [41], [76], [21] et récemment dans un cadre Banachique par F. Bernicot et J. Venel [17].

De plus, vu les nouvelles techniques du traitement des inclusions différentielles gouvernées par le cône normal, plusieurs nouvelles variantes du processus de Rafle ont été introduites, notamment les processus de Rafle dépendant de l'état, les processus de Rafle du second ordre et quelques autres variantes (Voir [19], [47], [50],[52], et [53]).

Le but de cette thèse est d'apporter quelques contributions à la théorie des inclusions différentielles impliquant des cônes normaux du point de vue de l'analyse non lisse et variationnelle. En particulier, nous nous intéressons à l'étude de la variante du processus de Rafle, qui est connu sous le nom de processus de Rafle dégénéré perturbé et qui correspond à l'inclusion différentielle suivante

$$(PDP) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T], \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases} \tag{5}$$

dont la perturbation $f : [T_0, T] \times H \longrightarrow H$ est une application univoque, mesurable par rapport à la première variable et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable sur tout sous ensemble borné de H et vérifiant l'hypothèse de croissance suivante

$$\|f(t, x(t))\| \leqslant \beta(t)(1 + \|x\|), \forall(t, x) \in [T_0, T] \times H, \tag{6}$$

Où $\beta(\cdot) \in L^1([T_0, T], \mathbb{R}^+)$.

Lorsque la perturbation $f \equiv 0$ et les ensembles $C(t)$ sont convexes, M. Kunze et M.D.P Monteiro Marques ([54], théorème 2) ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution du système (PDP) ci-dessus dans le cas où la multiapplication $C(\cdot)$ varie d'une façon Lipschitzienne par rapport à la distance de Hausdorff, c'est-à-dire qu'il existe une constante réelle $L > 0$ telle que, pour tous $s, t \in [T_0, T]$,

$$d_H(C(t), C(s)) \leqslant L\,|t - s|$$

et cette solution est Lipschitzienne. Dans le cas non convexe, précisément lorsque les ensembles $C(t)$ sont prox-réguliers, une version récente de tel problème a été étudiée dans [3] où les auteurs ont prouvé le caractère bien posé de (PDP) en utilisant la réduction de la l'inclusion différentielle avec contrainte (PDP) à l'inclusion différentielle sans contrainte gouvernée par le sous-différentiel de la fonction distance dans un espace Hilbertien de dimension finie.

Nous généralisons les mêmes résultats au cas de dimension infinie, c'est-à-dire que pour assurer le caractère bien posé du problème (PDP) nous montrons l'existence et l'unicité des solutions dans le cadre de dimension infinie.

Le résultat de l'existence et de l'unicité de la solution a été établi en considérant les hypothèses suivantes :

$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [T_0, T]$, $C(t)$ sont des sous ensembles convexes fermés non vides de H.

$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout $t \in [T_0, T]$, $C(t)$ varie de manière absolument continue. C'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in H$ et $s, t \in [T_0, T]$,

$$|d(x, C(t) - d(x, C(s)| \leqslant |v(t) - v(s)|\,. \tag{7}$$

$(\mathcal{H}_3)$ $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire borné symétrique et $\rho-$coercif, c'est-à-dire qu'il existe $\rho > 0$ tels que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \geqslant \rho \left\|x\right\|^2, \forall x \in H. \tag{8}$$

Ces nouveaux résultats sont présentés dans les trois derniers chapitres.

Cette thèse, qui est basée sur les travaux de J.F. Edmond and L. Thibault [42], est divisé conceptuellement en quatre chapitres. On commence par un chapitre introductif qui rappelle et présente les résultats fondamentaux et les concepts de base dont nous avons besoin dans les chapitres postérieurs. Par exemple, nous présentons quelques notions de base de l'analyse multivoque qui sont nécessaires pour l'étude des inclusions différentielles. Par la suite, nous donnons une revue courte sur l'analyse convexe, particulièrement, nous présentons quelques définitions et propriétés d'ensembles et de fonctions convexes ainsi que des propriétés de la sous-différentiabilité des fonctions convexes, cela est suivi par quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle.

Le deuxième chapitre concerne une nouvelle variante du processus de Rafle convexe $(PDPT)$ de premier ordre avec une perturbation univoque dépendante du temps . Telle que

$$(PDPT) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + h(t) \text{ p.p } \; t \in [T_0, T]\,, \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0), \end{cases}$$

Nous y présentons un résultat d'existence de solutions pour le problème $(PDPT)$ en le ramenant à un problème sans perturbation et en appliquant un résultat de Kunze et Monteiro Marques [54].

Dans le chapitre suivant, nous appliquons les résultats du deuxième chapitre pour établir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème perturbé (PDP), où la perturbation est Lipschitzienne dépendante du temps et de l'état.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous appliquons nos résultats principaux aux problèmes de complémentarité différentielle, et aux inégalités variationnelles quasi-statiques d'évolution.
Notons que les résultats de cette thèse ont fait l'objet d'une publication en collaboration avec le professeur Haddad Tahar, et le docteur Moustapha Sene dans le journal "Applicable Analysis", voir [51].

Chapitre 1

Concepts de base et résultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires nécessaires que nous utiliserons dans cette thèse. Il s'agit de résultats fondamentaux d'analyse multivoque, d'analyse convexe et fonctionnelle. Dans la première partie, nous recueillons d'abord les définitions et propriétés relatives aux applications multivoques dont nous aurons besoin dans le cadre de cette thèse, notamment la notion d'application multivoque, les notions de semi-continuité inférieure et supérieure et quelques notions d'excès et de distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer l'écart entre deux ensembles. Nous proposons dans la deuxième partie de ce chapitre, l'étude de la semi-continuité des applications univoques à valeurs réelles étendues et ses propriétés. La troisième partie est consacrée à quelques rappels sur l'analyse convexe, qui sont utiles pour la suite de ce travail. Nous introduisons dans un premier temps la notion d'ensemble convexe, donnons quelques leurs principales propriétés (géométriques et topologiques). Ensuite, nous abordons une classe particulière d'ensembles convexes : les cônes convexes qui jouent un rôle particulier dans la description des ensembles convexes. Nous étudions également, les fonctions convexes et ses propriétés. Nous proposons l'étude du sous différentiel au sens d'analyse convexe d'une fonction convexe, et ses propriétés, qui est très important dans la résolution des problèmes d'évolutions non linéaires. Dans la dernière partie, nous donnons des notions sur les opérateurs monotones, maximaux monotones et quelques résultats classiques de l'analyse fonctionnelle qui nous serviront tout au long de ce travail.

1.1 Généralités sur les applications multivoques

L'analyse multivoque est une importante branche de l'analyse variationnelle. Elle étudie les propriétés des relations F d'un ensemble X dans un ensemble Y ; appelées applications multivoques qui, à chaque élément $x \in X$ associent un sous-ensemble éventuellement non vide de Y. On peut voir les applications multivoques comme une généralisation des applications univoques. Il est bien connu que certains problèmes provenant de divers domaines conduisent tout naturellement à l'utilisation de telles applications. C'est le cas par exemple de nombreux problèmes en théorie du contrôle, en économie et gestion, et en biologie...

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous intéressons dans cette section aux applications dites multivoques. Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles.

Définition 1.1.1 *Étant donné deux ensembles X et Y. Si à chaque élément x de X, on associe un sous-ensemble éventuellement non vide de Y noté $F(x)$, on définit une application multivoque F (ou, multiapplications, multifonctions) de X vers Y et on note $F : X \rightrightarrows Y$ pour faire la différence avec la notation usuelle des applications univoques.*
Les notations $F : X \longrightarrow 2^Y, F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y), F : X \rightarrow Y$ sont aussi utilisées dans la littérature.
Remarquons qu'une application univoque est aussi une application multivoque puisque pour $x \in X$ le singleton $f(x) = \{y\}$ est un sous-ensemble de Y.

Afin de bien travailler dans le cadre de l'analyse multivoque, énonçons maintenant quelques définitions et caractéristiques propres aux applications multivoques.

Définition 1.1.2 *Soient X et Y deux ensembles, $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors*
① *On appelle domaine de F et on note $dom(F)$ l'ensemble des éléments de X dont l'image par F est un sous-ensemble non vide de Y . Autrement dit,*

$$dom(F) := \{x \in X : F(x) \neq \phi\}.$$

L'application F est dite stricte si pour tout $x \in X$, l'ensemble $F(x)$ est non vide.
② *On appelle image de F et on note $Im(F)$ la réunion des valeurs $F(x)$ lorsque x parcourt X. Cet ensemble se définit par,*

$$Im(F) := \{y \in Y, \exists x \in X : y \in F(x)\} = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Si $A \subset X$, alors l'image de A par F est

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x) = \{y \in Y, \exists x \in A : y \in F(x)\}.$$

Ainsi

$$Im(F) = F(E).$$

③ *On appelle le graphe F le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}. \tag{1.1}$$

F est dite non triviale si son graphe est non vide, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément $x \in X$ tel que $F(x)$ soit non vide.

④ *L'inverse de F est l'application multivoque $F^{-1} : Y \rightrightarrows X$ telle que*

$$x \in F^{-1}(y) \iff y \in F(x) \iff (x, y) \in gph(F).$$

⑤ *L'application multivoque F est dite à valeurs fermées, ouvertes ou compactes si, pour chaque $x \in dom(F)$, $F(x)$ est respectivement un ensemble fermé, ouvert ou compact en Y.*

⑥ *L'application multivoque est dite fermée, ouverte ou compacte, si son graphe est un ensemble fermé, ouvert ou compact.*

Définition 1.1.3 *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Pour tout $V \subset Y$, on définit*

① *L'image réciproque (large) de V par l'application multivoque F par*

$$F^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \cap V \neq \phi\}. \tag{1.2}$$

② *L'image réciproque (étroite) de V par l'application multivoque F par*

$$F_{+}^{-1}(V) := \{x \in X : F(x) \subset V\}. \tag{1.3}$$

Remarque 1.1.1 *Si $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors pour tout sous-ensemble $A \subset Y$, on a*

$$(i)\ F^{-1}(C_Y^A) = C_X^{F_{+}^{-1}(A)}. \tag{1.4}$$

et

$$(ii)\ F_{+}^{-1}(C_Y^A) = C_X^{F^{-1}(A)}. \tag{1.5}$$

Définition 1.1.4 *(Continuité des applications multivoques) Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque.*

① *On dit que F est semi-continue supérieurement (en abrégé **s.c.s**) en $x^* \in domF$ si et seulement si pour tout ouvert U de Y contenant $F(x^*)$, il existe un voisinage $V \subset X$ de x^* tel que*

$$F(x) \subset U, \forall x \in V.$$

*Autrement dit F est **s.c.s** à x^* si l'image réciproque (étroite) de tout voisinage de $F(x^*)$ est un voisinage de x^*.*

*Lorsque la propriété est vérifiée à chaque point $x^* \in X$ (resp. $x^* \in A$, où $A \subset E$), on dit que F est **s.c.s** sur X (resp. **s.c.s** sur A).*

② *On dit que F est semi-continue inférieurement (en abrégé **s.c.i**) en $x^* \in domF$ si et seulement si pour ouvert U de Y vérifiant $F(x^*) \cap U \neq \phi$, il existe un ouvert $V \subset X$ de x^* tel que*

$$F(x) \cap U \neq \phi, \forall x \in V.$$

*Autrement dit F est **s.c.i** à x^* si l'image réciproque (large) de tout sous-ensemble ouvert intersecte $F(x^*)$ est un voisinage de x^*.*
*Lorsque la propriété est vérifiée à chaque point $x^* \in X$ (resp. $x^* \in A$, où $A \subset E$), on dit que F est **s.c.i** sur X (resp. **s.c.i** sur A).*
③ *F est dite continue en x si elle est à la fois semi-continue inférieurement et semicontinue supérieurement en x et elle est continue si elle est continue en tout point $x \in dom(F)$.*

Il n'est pas facile de prouver que les applications multivoques sont semi-continues supérieurement ou inférieurement en utilisant les définitions de ces continuités. La proposition suivante exprime la semi-continuité des applications multivoques en termes d'images inverses. Nous avons donc les caractérisations suivantes pour ces définitions.

Proposition 1.1.1 *[10]Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une application multivoque. Alors*
① *Les assertions suivantes sont équivalentes deux à deux.*
(a_1) F est semi-continue supérieurement.
(b_1) $F_+^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \subset V\}$ est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.
(c_1) $F^{-1}(V) = \{x \in X : F(x) \cap V \neq \phi\}$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y.
② *De même les assertions (a_2), (b_2) et (c_2) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :*
(a_2) F est semi-continue inférieurement.
(b_2) $F^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout ouvert U de Y.
(c_2) $F_+^{-1}(V)$ est un fermé de X pour tout fermé V de Y.

La notion de la Lipschitzité dont les origines remontent à quelques siècles, a joué un rôle important dans plusieurs domaines comme la théorie de la mesure et la résolution des équations différentielles ordinaires. Il est donc intéressant d'étendre cette propriété, du cadre univoque au cadre multivoque. À cette fin, et pour passer à la version ensembliste, on aura besoin d'introduire la notion d'excès et la distance de Hausdorff qui sont deux outils importants en analyse multivoque permettant d'évaluer l'écart entre deux ensembles.

Définition 1.1.5 *Soient (E, d) un espace métrique et A un sous ensemble non vide de E. La distance du point $x \in E$ à l'ensemble A notée $d(x, A), d_A(x)$ est définie par*

$$d(x, A) = d_A(x) := \inf_{a \in A} d(x, a). \tag{1.6}$$

Si $A = \phi$, alors $d(x, \phi) = +\infty$.

- Si A est non vide, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $y \in A$ tel que

$$d(x, y) \leqslant d(x, A) + \varepsilon.$$

Définition 1.1.6 *Soient $(E, d), (F, d')$ deux espaces métriques, U un ouvert de E, et $f : E \longrightarrow F$ une fonction.*

(1) *On dit que f est Lipschitzienne sur E de rapport l s'il existe un réel $l \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tous $x, y \in E$,*

$$d(f(x), f(y)) \leqslant l d(x, y).$$

(2) *On dit que f est localement Lipschitzienne de rapport $l \in \mathbb{R}_+$ au voisinage de $x_0 \in E$ si pour un certain $r > 0$, f est l-Lipschitzienne sur l'ensemble $B(x_0, r)$.*

Remarque 1.1.2 *Soient A un sous ensemble non vide d'un espace métrique (E, d) et $x \in E$. Alors*

(a) *La fonction $x \longmapsto d(x, A)$ est Lipschitzienne de rapport 1 pour la distance d, i.e.*

$$\forall x, y \in X : |d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

(b)

$$d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow x \in \bar{A}.$$

Définition 1.1.7 *Soit (E, d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles de E.*

- *On appelle excès (de Pompeiu- Hausdorff) ou écart de A sur B et on le note $e(A, B)$, la quantité suivante*

$$e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left(\inf_{y \in B} d(x, y) \right). \tag{1.7}$$

- *Dans le contexte de l'espace normé une définition équivalente de l'excès se donne par*

$$e(A, B) := \inf \{ r > 0 : A \subset B + r\mathbb{B} \}, \tag{1.8}$$

Telle que

$$B + r\mathbb{B} = \bigcup_{x \in B} B(x, r).$$

Définition 1.1.8 *(Caractérisation de la fonction de l'excès en termes de distance d'un point à un ensemble)*

Une autre formulation équivalente pour la fonction de l'excès en termes de distance d'un point à un ensemble est donnée par

$$e(A, B) = \sup_{x \in E} \left(d(x, B) - d(x, A) \right). \tag{1.9}$$

Proposition 1.1.2 ***(Propriétés)***

Soit (E, d) un espace métrique et soient A, B, C et D des sous-ensembles de E. Alors

(1) $e(\phi, B) = 0$, *si $B \neq \phi$ et $e(A, \phi) = +\infty$ pour tout A. Alors l'excès prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, +\infty]$.*

(2) $e(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A \subset \bar{B}$.

(3) $e(A, C) \leqslant e(A, B) + e(B, C)$ *(l'excès vérifie l'inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.9 *Soit (E,d) un espace métrique et soient A et B deux sous-ensembles non vides de E.*

▸ *La distance de Hausdorff (Pompeiu-Hausdorff) de A à B, notée $d_H(A,B)$ est définie par*

$$d_H(A,B) := \max\{e(A,B), e(B,A)\}. \tag{1.10}$$

▸ *La distance de Hausdorff dans un espace normé prend la forme suivante*

$$d_H(A,B) = \inf\{r > 0 : A \subset B + r\mathbb{B} \text{ et } B \subset A + r\mathbb{B}\}. \tag{1.11}$$

Définition 1.1.10 *(Caractérisation de la distance de Hausdorff)*

Une autre formulation équivalente pour la fonction de Hausdorff en termes de distance d'un point à un ensemble est donnée par

$$d_H(A,B) = \sup_{x \in E} |d(x,B) - d(x,A)|. \tag{1.12}$$

D'après la définition de d_H, on peut facilement vérifier les propriétés suivantes.

Proposition 1.1.3 ***(Propriétés)***
Soit (E,d) un espace métrique. Alors la distance de Hausdorff vérifie les propriétés suivantes.
1 $d_H(A,A) = 0$, *pour tout* $A \in \mathcal{P}(E)$.
2 $d_H(A,B) = d_H(B,A)$, *pour tout* $A, B \in \mathcal{P}(E)$.
3 $d_H(A,B) \leqslant d_H(A,C) + d_H(C,B)$, *pour tout* $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1.11 ***(Applications Lipschitziennes)***

On dit qu'une application multivoque $F : X \rightrightarrows Y$ est lipschitzienne relativement à un sous-ensemble non vide D de $dom(F)$, si elle est à valeurs fermées sur D et s'il existe une constante $l \geqslant 0$ telle que

$$F(x) \subset F(x') + l.d(x,x') \cdot \mathbb{B}_Y. \tag{1.13}$$

L'inclusion (1.13) *peut être réécrite en termes de distance de Hausdorff*

$$d_H(F(x), F(x')) \leqslant l.d(x,x'), \forall x, x' \in X.$$

1.2 Semi-continuité de fonctions à valeurs réelles étendues

On appellera ici fonction à valeurs réelles étendues sur un ensemble non vide E toute fonction de E dans $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si E est muni d'une topologie τ et si $f(x_0)$ est fini, i.e. $f(x_0) \in \mathbb{R}$, alors la continuité de f en x_0 revient à dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x_0 tel que pour tout $x \in V$ on ait

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon. \tag{1.14}$$

En découplant les deux inégalités ci-dessus, on aboutit aux deux concepts de semi-continuité. Observons avant d'énoncer les définitions que pour $f(x_0) = +\infty$ on a $f(x_0) - \varepsilon = f(x_0)$ et donc au lieu de $f(x_0) - \varepsilon$ on est conduit à considérer un réel $r < f(x_0)$ pour la première inégalité. Une remarque similaire est valable pour la seconde inégalité.

Définition 1.2.1 ***(Semi-continuité)***
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues d'un espace topologique dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors on dit que

① *f est semi-continue inférieurement (**s.c.i** en abrégé) en un point $a \in E$ quand pour tout réel $r < f(a)$, il existe un voisinage V de a dans E tel que pour tout $x \in V$ on ait*

$$f(x) > r.$$

② *f est semi-continue supérieurement (**s.c.s** en abrégé) en un point $a \in E$ quand pour tout réel $r > f(a)$, il existe un voisinage V de a dans E tel que pour tout $x \in V$ on ait*

$$f(x) < r$$

③ *Si f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en tout point d'un ensemble $A \subset E$ on dit que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur A. Quand $A = E$, on dit simplement que f est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).*

Exemple 1.2.1 *Soient E un espace topologique, $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions à valeurs réelles étendues et a un point de E. Alors*

① *Toute fonction réelle étendue continue en a est à la fois semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement en a.*

② *La borne supérieure (resp. La borne inférieure) d'une famille quelconque de fonctions réelles étendues **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en un point $a \in E$ est **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en a.*

③ *La fonction f est **s.c.s** (resp. **s.c.i)** en a si et seulement si la fonction $(-f)$ est **s.c.i** (resp. **s.c.s)** en a.*

④ *Si f et g sont **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en a et si $f + g$ est bien définie sur un voisinage de a, alors $f + g$ est **s.c.i** (resp. **s.c.s**) en a.*

⑤ *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ une constante réelle non nulle. Si f est **s.c.i** en a, alors la fonction αf est **s.c.i** en a pour $\alpha > 0$ et **s.c.s** en a pour $\alpha < 0$.*

La **s.c.i** (resp. **s.c.s)** d'une fonction réelle étendue est reliée à son épigraphe et à ses sous-niveaux inférieurs. À une fonction réelle étendue $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ on associe son épigraphe noté $epi(f)$ et son hypographe noté $hypo(f)$ définis comme sous-ensembles de $E \times \mathbb{R}$. On associe aussi à f et à chaque réel $r \in \mathbb{R}$ les ensembles $\{f \leqslant r\}$ et $\{f \geqslant r\}$ de sous-niveau et sur-niveau r respectivement.

Définition 1.2.2 *Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues.*

① *On appelle épigraphe de f, noté $epi(f)$ le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par*

$$epi(f) := \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leqslant r\}.$$

② *On appelle hypographe de f, noté $hypo(f)$ le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par*

$$hypo(f) := \{(x, r) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \geqslant r\}.$$

③ *On appelle ensemble de sous-niveau de f, noté $\{f \leqslant r\}$ le sous-ensemble de E défini par*

$$\{f \leqslant r\} := \{x \in E : f(x) \leqslant r\}.$$

$\{f \leqslant r\}$ est l'ensemble des points où elle prend une valeur inférieure à un niveau r.

④ *On appelle ensemble de sur-niveau de f, noté $\{f \geqslant r\}$ le sous-ensemble de E défini par*

$$\{f \geqslant r\} := \{x \in E : f(x) \geqslant r\}.$$

$\{f \geqslant r\}$ est l'ensemble des points où elle prend une valeur supérieure à un niveau r.

Le résultat suivant établit certaines caractérisations alternatives de semicontinuité inférieure et supérieure.

Théorème 1.2.1 *[70] Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors*
① *Les assertions (a_1), (b_1) et (c_1) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :*
(a_1) La fonction f est semi-continue inférieurement.
(b_1) L'épigraphe $epi(f)$ de f est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
(c_1) Pour chaque réel $r \in \mathbb{R}$ le sous-niveau $\{f \leqslant r\}$ est fermé dans E.
② *De même les assertions (a_2), (b_2) et (c_2) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :*
(a_2) La fonction f est semi-continue supérieurement,
(b_2) L'hypographe $hypo(f)$ de f est fermé dans $E \times \mathbb{R}$.
(c_2) Pour chaque réel $r \in \mathbb{R}$ le sur-niveau $\{f \geqslant r\}$ est fermé dans E.

Notre tâche maintenant est de relier la semi-continuité inférieure (resp. supérieure) à un concept de limite inférieure. Pour cela nous allons introduire la notion de limite inférieure (resp. supérieure) pour une suite (ordinaire) de $\overline{\mathbb{R}}$ et pour une fonction d'un espace topologique E dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.2.3 *Soit $(x_n)_n$ une suite de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure de $(x_n)_n$ comme suit*

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} x_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\inf_{k \geqslant n} x_k \right), \limsup_{n \longrightarrow \infty} x_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} \left(\sup_{k \geqslant n} x_k \right).$$

Ces deux semi-limites vérifient les inégalités suivantes

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} x_n \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} x_n \leqslant \limsup_{n \longrightarrow \infty} x_n.$$

Définition 1.2.4 *Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues. Alors*

(a) *La limite inférieure de f en a est donnée par*

$$\liminf_{x \longrightarrow a} f(x) := \sup \inf \{f(V) : V \in \mathcal{V}(a)\} = \sup_{V \in \mathcal{V}(a)} \left(\inf_{x \in V} f(x) \right). \tag{1.15}$$

(b) *La limite supérieure de f en a est donnée par*

$$\limsup_{x \longrightarrow a} f(x) := \inf \sup \{f(V) : V \in \mathcal{V}(a)\} = \inf_{V \in \mathcal{V}(a)} \left(\sup_{x \in V} f(x) \right). \tag{1.16}$$

où $\mathcal{V}(a)$ désigne l'ensemble des voisinages de a dans E.

Remarque 1.2.1 *Notons que pour toute constante $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on a*

$$\limsup_{x \longrightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \limsup_{x \longrightarrow a} f(x) \text{ et } \liminf_{x \longrightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \liminf_{x \longrightarrow a} f(x) \text{ si } \alpha > 0.$$

Exemple 1.2.2 *Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues. Alors*

$$\liminf_{x \longrightarrow a} f(x) = \sup_{r>0} \inf \{f(x) : |x - x_0| < r\} \tag{1.17}$$

$$\limsup_{x \longrightarrow a} f(x) = \inf_{r>0} \sup \{f(x) : |x - x_0| < r\} \tag{1.18}$$

Le lien entre la semi-continuité inférieure (resp. supérieure) et la limite inférieure (resp. supérieure) se trouve dans la proposition importante suivante.

Proposition 1.2.1 *[74] SoientE un espace topologique, $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction à valeurs réelles étendues et $a \in E$. Alors*
1 *Les assertions (a_1), (b_1) et (c_1) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :*
(a_1) *La fonction f est **sci** en a.*
(b_1) $f(a) \leqslant \liminf_{x \longrightarrow a} f(x)$.
(c_1) *Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E convergeant vers a dans E on a $f(a) \leqslant \liminf_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$.*
2 *De même les assertions (a_2), (b_2) et (c_2) suivantes sont deux-à-deux équivalentes :*
(a_2) *La fonction f est **scs** en a.*
(b_2) $\limsup_{x \longrightarrow a} f(x) \leqslant f(a)$.
(c_2) *Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E convergeant vers a dans E on a $\limsup_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) \leqslant f(a)$.*

1.3 Quelques concepts d'analyse convexe

L'analyse convexe est un des piliers des mathématiques appliquées. Elle intervient dans la modélisation et la résolution numérique de problèmes dans pratiquement tous les secteurs où la modélisation mathématique est pertinente : en ingénierie, en statistiques, en physique, en économie, en finance, dans les sciences de l'information, pour la simulation numérique et des données.

1.3.1 Ensembles et cônes convexes

Définition 1.3.1 *Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-ensemble C de E est dit convexe si et seulement si*

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \in [0,1] : \alpha x + (1-\alpha)y \in C.$$

On dit parfois que le segment $[x, y]$ est inclus dans C.

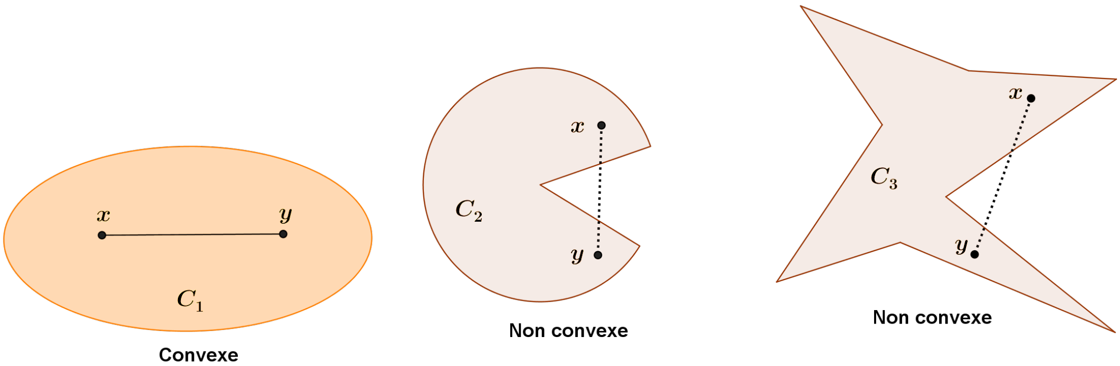

FIGURE 1.1 – Ensembles convexes et non convexes

Exemple 1.3.1

① *Le produit (l'homothétique) $\alpha C := \{\alpha x : x \in C\}$ d'un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$ par un convexe C de E est un convexe.*

② *Pour tout convexe C de E et pour tout $a \in E$, le translaté $a + C := \{a + x : x \in C\}$ est convexe.*

③ *Si $\{C_i\}_{i\in I}$ est une famille quelconque de convexes de E, alors leur intersection est un convexe.*

④ *Soit C un sous-ensemble convexe d'un espace normé E. Alors les ensembles $adh(A)$ et $int(C)$ sont convexes.*

Comme les ensembles convexes sont stables par intersection, on peut définir le plus petit ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant un ensemble donné. On formalise cette observation avec la définition suivante.

Définition 1.3.2 *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'enveloppe convexe de A (ou enveloppe convexe engendré par A) est l'intersection de tous les convexes contenant A et elle est notée $co(A)$.*

$$co(A) := \bigcap \{C : C \text{ est un convexe contenant } A\}.$$

Il est équivalent de dire que $co(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de A,

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \geqslant 1, x_i \in A, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}. \tag{1.19}$$

L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble fermé n'est pas nécessairement fermée. Pour cette raison, il est nécessaire de recourir à la notion d'enveloppe convexe fermée.

Définition 1.3.3 *Soit A un sous-ensemble d'un espace normé E. On appelle enveloppe convexe fermée noté $\overline{co}(A)$ de A l'intersection de tous les ensembles convexes fermés contenant A.*

$$\overline{co}(A) := \bigcap \{C : C \text{ est un convexe fermé contenant } A\}.$$

Une autre manière de définir l'enveloppe convexe fermée $\overline{co}(A)$ est

$$\overline{co}(A) = \overline{co(A)}.$$

Dans un espace vectoriel réel E, on va s'intéresser à certains convexes particuliers, les cônes convexes, qui joueront un rôle important dans la structure des convexes. Parmi tous les types de cônes possibles, nous nous restreignons aux cônes convexes, qui présentent un plus grand intérêt pour notre propos.

Définition 1.3.4

① *Soit E un espace vectoriel réel. Une partie C de E est un cône si si et seulement si*

$$\forall x \in C, \forall \alpha \geqslant 0 : \alpha x \in C.$$

Autrement dit, $\alpha C \subset C$, pour tout $\alpha \geqslant 0$.

② *Si C est convexe, il est alors appelé un cône convexe.*

Remarque 1.3.1 *Une formulation équivalente de cette dernière définition est la suivante :*
Une partie C de E est un cône convexe si et seulement si elle est stable par addition et par multiplication par les réels positifs, c'est à dire, si et seulement si

$$\forall x, y \in C, \forall \alpha \geqslant 0 : \left\{ \begin{array}{c} x + y \in C, \\ et \\ \alpha x \in C. \end{array} \right. \Longleftrightarrow \forall \alpha \geqslant 0 : \left\{ \begin{array}{c} C + C \subset C, \\ et \\ \alpha C \subset C. \end{array} \right.$$

Exemple 1.3.2

① *Soit E un espace normé. L'adhérence d'un cône convexe C de E est un cône convexe.*

② *Il est clair que l'intersection d'une famille quelconque de cônes convexes est convexe. Un produit cartésien de cônes convexes est un cône convexe. La convexité conique est aussi stable par combinaison linéaire. L'image et l'image réciproque d'un cône convexe par une application linéaire est aussi un cône convexe.*

Définition 1.3.5 *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'enveloppe cônique de A ou le cône convexe engendré par A est l'intersection de tous les cônes convexes contenant A et elle est notée $cone(A)$.*

$$cone(A) := \bigcap \{C : C \text{ est un cône convexe contenant } A\}.$$

Il s'agit donc du plus petit cône convexe contenant A.
Il est équivalent de dire que $cone(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons côniques finies d'éléments de A,

$$cone(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \geqslant 1, x_i \in A, \lambda_i \geqslant 0 \right\}. \tag{1.20}$$

Dans l'analyse convexe, les cônes les plus connus sont le cône tangent et le cône normal. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire.

Définition 1.3.6 *Soit C un sous ensemble non vide de H.*
1. *Le cône dual de C dans H est défini par*

$$C^* := \{y \in H : \langle x, y \rangle \geqslant 0, \forall x \in C\}.$$

2. *Le cône polaire C° d'un sous-ensemble non vide C dans H est défini par*

$$C^\circ := \{y \in H : \langle x, y \rangle \leqslant 0, \forall x \in C\} = -C^*.$$

Evidemment C° est une partie non vide puisque $0 \in C^\circ$. De plus, si $y \in C$, alors $y \notin C^\circ$ sauf si $y = 0$. C'est pourquoi la notion de polarité est dans un sens une notion de complémentarité.

Il découle de cette définition que pour tout C un sous ensemble non vide de H. Le cône dual C^* (resp. polair C°) est un cône convexe fermé non vide.
Les cônes tangents et normaux jouent un rôle important dans les inclusions différentielles et sont fondamentaux dans l'étude des problèmes d'optimisation.

Définition 1.3.7 *Soit C un sous ensemble non vide de H. Alors, un vecteur $v \in H$ est dit normal à C au point $a \in C$ si*

$$\langle v, x - a \rangle \leqslant 0, \forall x \in C.$$

Ou d'une manière équivalente si

$$\sup_{x \in C} \langle v, x \rangle = \langle v, a \rangle.$$

Remarquons que si v est un vecteur normal à C, alors αv l'est aussi pour $\alpha \geqslant 0$. Alors l'ensemble de tous les vecteurs normaux à C au point $a \in C$ forme un cône appelé le cône normal à C au point a, noté $N_C(a)$.

Définition 1.3.8 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H et soit $x \in H$. Le cône normal (au sens de l'analyse convexe) à C en x noté $N_C(x)$ est défini par*

$$N_C(x) := \begin{cases} \{y \in H : \langle y, z - x\rangle \leqslant 0, \forall z \in C\}, & \textit{si } x \in C, \\ \phi, \textit{ si } x \notin C. \end{cases} \tag{1.21}$$

Ou d'une manière équivalente

$$N_C(x) := \{y \in H : \sup \langle y, C - x\rangle \leqslant 0\}. \tag{1.22}$$

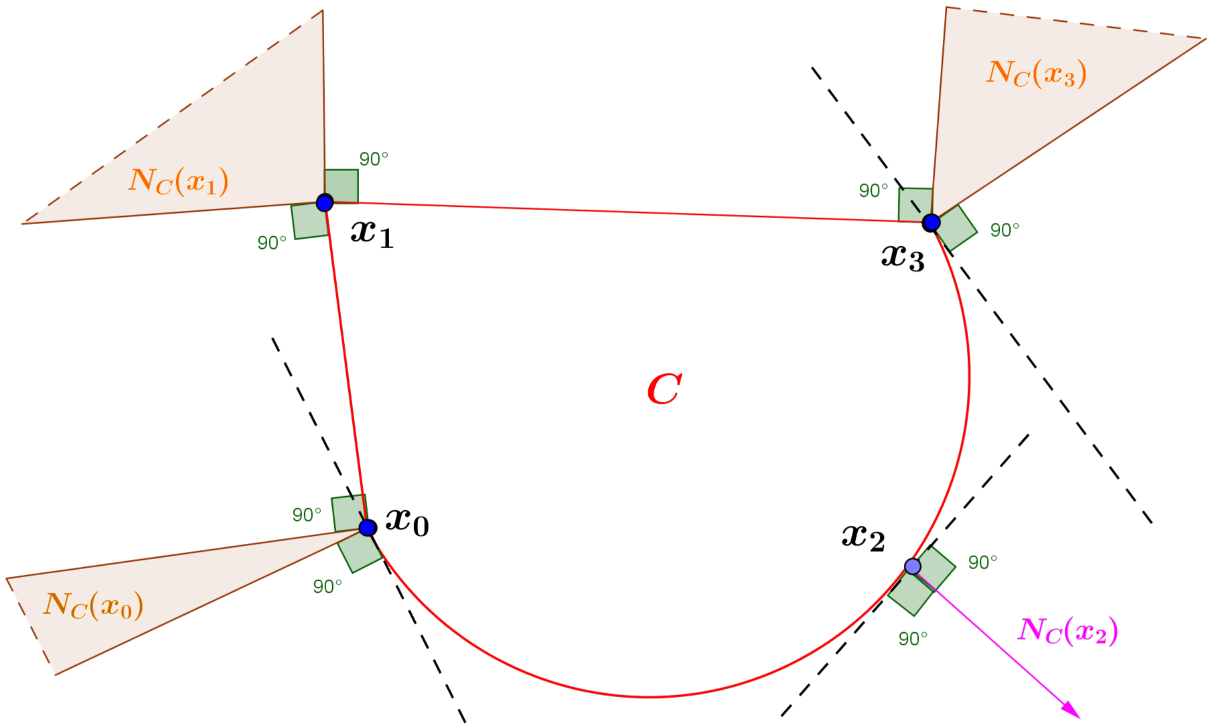

FIGURE 1.2 – Cônes normaux à un sous-ensemble convexe en différents points

Remarque 1.3.2

ⓐ *En utilisant la notion de polarité, on obtient la formulation équivalente des cônes normaux suivante*

$$N_C(x) := \begin{cases} (C - x)^{\circ}, & \textit{si } x \in C, \\ \phi, \textit{ si } x \notin C. \end{cases}$$

Telle que

$$C - x := \{z - x : z \in C\}.$$

ⓑ *Remarquons que les éléments du cône normal forment un angle obtus avec $z - x$ pour tout élément de l'ensemble C.*

c *Le cône normal de C est une application multivoque de H vers H, i.e $N_C(\cdot) : H \rightrightarrows H$.*

d *Si $x \in int(C)$, alors $N_C(x) = \{0\}$ (Les seuls points intéressants sont ceux sur la frontière de C).*

e *$N_C(x)$ est un sous-ensemble convexe fermé de H contenant l'origine.*

Exemple 1.3.3 *Soit $C = [0, 1]$, alors*

$$N_C(x) = \begin{cases} \mathbb{R}_-, & \text{si } x = 0 \\ \mathbb{R}_+, & \text{si } x = 1 \\ \{0\}, & \text{si } x \in]0, 1[\\ \phi, & \text{Par ailleurs.} \end{cases}$$

Proposition 1.3.1 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H. Alors pour tout $x \in -C$ et $y, z \in H$ tels que $y + z \in C$, on a*

$$\begin{aligned} (i)\; N_C(y+z) &= N_{C-z}(y), \\ (ii)\; -N_C(-x) &= N_{-C}(x). \end{aligned}$$

Preuve. Soient $x \in -C$ et $y, z \in H$, alors

i Soit $t \in H$, alors

$$\begin{aligned} t \quad \in \quad & N_C(y+z) \Longleftrightarrow \langle t, s - (y+z) \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ \Longleftrightarrow \quad & \langle t, (s-z) - y \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ \Longleftrightarrow \quad & t \in N_{C-z}(y). \end{aligned}$$

ii Soit $t \in H$, alors

$$\begin{aligned} t \quad \in \quad & N_{-C}(x) \Longleftrightarrow \langle t, -s - x \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ \Longleftrightarrow \quad & -\langle t, s - (-x) \rangle \leqslant 0, \forall s \in C \\ \Longleftrightarrow \quad & t \in -N_C(-x). \end{aligned}$$

□

Définition 1.3.9 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H et soit $x \in H$.*

▸ *Le cône tangent (au sens de l'analyse convexe) à C en x noté $T_C(x)$ est l'adhérence du cône convexe engendré par $C - \{x\}$,*

$$T_C(x) := \overline{cone}(C) = \overline{\mathbb{R}_+(C-x)} = \overline{\bigcup_{\lambda \geqslant 0} \{z \in H : z = \lambda(y-x), y \in C\}}. \tag{1.23}$$

▸ *Si $x \notin C$, alors*

$$T_C(x) = \phi,$$

Autrement dit, $T_C(x)$ est l'ensemble des directions tangentes à C en x.

Exemple 1.3.4 *Sur $\mathbb{R}$ on considère le sous ensemble $C := [0,1]$, alors*

$$T_{[0,1]}(1) =]-\infty, 0] .$$

En effet :

$$C - \{1\} = \{x - 1, x \in [0,1]\} = [-1, 0] ,$$

On obtient

$$\mathbb{R}_+(C - \{1\}) = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \{\lambda x : x \in C - \{1\}\} = \bigcup_{\lambda \geqslant 0} \{\lambda x : x \in [-1, 0]\} =]-\infty, 0] ,$$

Ce qui donne

$$T_{[0,1]}(1) = \overline{\mathbb{R}_+(C - \{1\})} =]-\infty, 0] .$$

Proposition 1.3.2 *[12]Soit C un sous-ensemble convexe non vide de H et soit $x \in C$. Alors*

$$T_C^\circ(x) = N_C(x) \text{ et } N_C^\circ(x) = T_C(x).$$

Proposition 1.3.3 *Soit K un cône convexe fermé non vide de H et soient $u, v \in H$. Alors*

$$K^* \ni u \perp v \in K \Longleftrightarrow -u \in N_K(v).$$

Preuve.

• Soients $u, v \in H$ tel que

$$K^* \ni u \perp v \in K,$$

Cela donne

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle = 0, \\ \langle u, z \rangle \geqslant 0, \forall z \in K. \end{cases}$$

D'autre part, soit $z \in K$, alors

$$\langle -u, z - v \rangle = \langle -u, z \rangle + \langle u, v \rangle = -\langle u, z \rangle \leqslant 0.$$

Par conséquent $-u \in N_K(v)$.

• Supposons maintenant que

$$-u \in N_K(v).$$

Alors

$$\langle -u, z - v \rangle \leqslant 0, \forall z \in K. \tag{1.24}$$

Or $v \in K$, alors on obtient pour $z = 0$ et $z = 2v$,

$$\begin{cases} \langle -u, -v \rangle \leqslant 0, \\ \quad \text{et} \\ \langle -u, v \rangle \leqslant 0, \end{cases}$$

Par suite

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle \leqslant 0 \\ \quad \text{et} \\ \langle u, v \rangle \geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \langle u, v \rangle = 0.$$

Ce qui donne

$$u \perp v. \tag{1.25}$$

Par ailleurs, de (1.24) et de (1.25), on peut deduire que pour tout $z \in K, \langle u, z \rangle \geqslant 0$.

Ceci entraine que $u \in K^*$. □

1.3.2 Projection sur un convexe fermé

La projection sur un ensemble est un problème particulier de minimisation, qui consiste à trouver, s'ils existent, les points d'un ensemble $C \subset E$ les plus proches d'un point de référence donné $x \in E$. La distance d'un point $x \in E$ à un ensemble $C \subset E$ est définie par

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} d(x, y).$$

et il s'agit de trouver les points de C qui réalisent cet infimum. Nous définissons l'opérateur de projection, ou projecteur, par :

Définition 1.3.10 *Soit C un sous ensemble non vide d'un espace normé E, et soit $x \in E$. Un élément $y \in C$ est une projection de x sur C, ou le point de C le plus proche à x (au sens de la distance euclidienne) si*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| = d(x, C). \tag{1.26}$$

▸ *On note $P_C(x)$ l'ensemble de tous les points $y \in C$ vérifiant (1.26), c-à-d*

$$P_C(x) := \{y \in C : \|x - y\| = d(x, C)\}. \tag{1.27}$$

▸ *Si $x \in C$, alors $P_C(x) := \{x\}$. Autrement dit, C est l'ensemble des points fixes par $P_C(\cdot)$.*

Remarque 1.3.3

• *Un cas remarquable est celui où la projection existe toujours et est unique, c'est-à-dire*

$$\forall x \in E : Card(P_C(x)) = 1.$$

Les ensembles ayant cette propriété sont appelés ensembles de Chebyshev.

• *L'opérateur de projection est une application multivoque, $P_C(\cdot) : E \rightrightarrows E$.*

Le théorème de projection sur un convexe fermé est un outil fondamental de la théorie des espaces de Hilbert. IL affirme que si C est un ensemble convexe, fermé et non vide, alors c'est un ensemble de Chebyshev. On a donc un opérateur univoque, de H dans C, que l'on appellera opérateur de projection, ou simplement Projecteur. Le résultat fondamental suivant donne les conditions d'existence et d'unicité de projection. Sa preuve est standard et peut être trouvée, par exemple, dans [23].

Théorème 1.3.1 *Soit H un espace de Hilbert et soit C une partie convexe et fermée, non vide, de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que*

$$d(x, C) = \|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\| .$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C. Cet élément y est caractérisé par l'inéquation variationnelle

$$y = P_C(x) \Longleftrightarrow y \in C \text{ et } \langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0, \forall z \in C. \tag{1.28}$$

L'inégalité (1.28) dit que le produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{yz}$ avec tout vecteur $\overrightarrow{yx}$ ($z \in C$) est $\leqslant 0$, c'est-à-dire que l'angle θ déterminé par ces deux vecteurs est toujours obtus, c-à-d, $\theta \geqslant \frac{\pi}{2}$, voir figure 1.3,

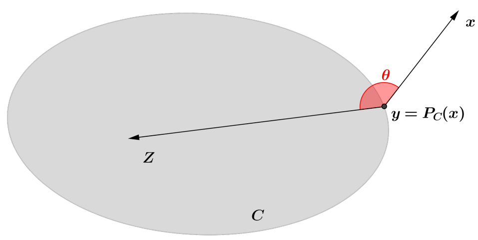

FIGURE 1.3 – Interprétation géométrique de la caractérisation (1.28)

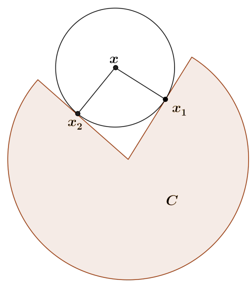

FIGURE 1.4 – Non-unicité de la projection

Dans un espace de Hilbert, le cône normal à un ensemble convexe (fermé) C est fortement lié à l'application de projection, ce que l'on peut voir clairement dans l'équivalence suivante

$$y = P_C(x) \Longleftrightarrow x - y \in N_C(y). \tag{1.29}$$

En effet :

$$\begin{aligned} x - y \quad &\in \quad N_C(y) \Longleftrightarrow \langle x - y, z - y \rangle \leqslant 0, \forall z \in C \\ &\Longleftrightarrow \quad y = P_C(x). \end{aligned}$$

Cette équivalence se justifie en utilisant la caractérisation de la projection sur un convexe fermé énoncée dans (1.28). Il résulte de (1.29) que

$$x - P_C(x) \in N_C(P_C(x)) \Longrightarrow x \in (I + N_C(\cdot))\,(P_C(x)) \Longleftrightarrow P_C(x) \in (I + N_C(\cdot))^{-1}\,(x).$$

ce qui montre que l'application $x \longmapsto (I + N_C(\cdot))^{-1}\,(x)$ est à valeurs univoques et par conséquent

$$(I + N_C(\cdot))^{-1}\,(x) = P_C(x) \text{ pour tout } x \in H.$$

1.3.3 Fonctions convexes

Définition 1.3.11

(1) *Soit E est un espace vectoriel, le domaine effectif (ou simplement domaine) d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est l'ensemble des points où elle ne prend pas la valeur $+\infty$. On le note*

$$dom(f) := \{x \in E : f(x) < +\infty\}.$$

(2) *Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est propre si son domaine effectif est non vide.*

Définition 1.3.12 *Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si pour tous x, y dans E avec $f(x) < +\infty$, $f(y) < +\infty$ et tout $\alpha \in [0, 1]$, on a*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y). \tag{1.30}$$

La convexité d'une fonction peut être caractérisée par la convexité de son épigraphe. Une formulation équivalente de cette définition est la suivante :

Définition 1.3.13 *Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si et seulement si son épigraphe $epi(f)$ est convexe.*

L'exemple suivant permet de déduire des opérations préservant la convexité des fonctions similaire aux opérations préservant la convexité des ensembles.

Exemple 1.3.5

① *Soit* $(f_i)_{i\in I}$ *une famille de fonctions convexes de* E *dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*, alors la fonction* $f := \sup_{i\in I} f_i$ *est également convexe (Un supremum de fonctions convexes est une fonction convexe).*

② *Si* f *et* g *sont des fonctions convexes de* E *dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*, et* α,β *des réels positifs, alors la fonction* $\alpha f+\beta g$ *est convexe.*

③ *Si* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *est convexe alors ses ensembles de niveaux* $\{f \leqslant r\}$ *sont convexes. Mais ceci ne caractérise pas les fonctions convexes, il existe des fonctions non convexes dont les sous-niveaux sont tous convexes. Par exemple,* $f(x) = \sqrt{|x|}$.

④ *Une fonction identiquement égale à* $+\infty$ *est convexe et vérifie l'inégalité* (1.30)*. Autrement dit*

$$f \equiv +\infty \Longleftrightarrow epi(f) = \phi \Longleftrightarrow dom(f) = \phi.$$

⑤ *Toute application de la forme* $x \in E \longmapsto \langle x', x\rangle + a$ *avec* $x' \in E'$ *et* $a \in \mathbb{R}$ *est convexe. Ce sont les fonctions affines à valeurs dans* $\mathbb{R}$.

Proposition 1.3.4 *[7]Soit* E *un espace normé, et soit* C *un sous-ensemble fermé non vide de* E*. Alors la fonction distance* $d(\cdot, C)$ *est convexe si et seulement si* C *est convexe.*

Fonction indicatrice

Nous avons associé à des fonctions des sous-ensembles (épigraphe, ensembles de niveau). Nous allons inversement associer à des sous-ensembles des fonctions, et en premier lieu la fonction indicatrice. Les fonctions d'indicatrices jouent un rôle fondamental dans l'analyse convexe similaire au rôle des fonctions caractéristiques des ensembles dans d'autres branches d'analyse.

Définition 1.3.14 *Soit* C *un sous-ensemble d'un espace vectoriel* E.

- *On appelle fonction indicatrice de* C*, notée* $\psi_C(\cdot)$*, la fonction définie par*

$$\begin{array}{rccl} \psi_C(\cdot): & E & \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ & x & \longmapsto & \psi_C(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } x \in C, \\ \\ +\infty, & \text{si } x \notin C. \end{cases} \end{array}$$

- *On voit facilement que* $dom(\psi_C) = C$.
- *Il est clair que*

$$epi(\psi_C) = C \times [0, +\infty[\,.$$

Proposition 1.3.5 *[77]Soit C un sous-ensemble d'un espace vectoriel E. Alors*

① *La fonction indicatrice $\psi_C(\cdot)$ est propre si et seulement si C est non vide.*

② *La fonction indicatrice $\psi_C(\cdot)$ est convexe si et seulement si C est convexe.*

③ *Si E est un espace normé, alors $\psi_C(\cdot)$ est **s.c.i** si et seulement si C est fermé.*

Fonction support

Une autre fonction importante associée à C est la fonction support.

Définition 1.3.15 *Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique. Soit C un sous-ensemble non vide de E. On appelle fonction support de C, notée $\sigma_C(\cdot)$ la fonction définie sur E' par*

$$\begin{array}{rccl} \sigma_C(\cdot): & E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x' & \longmapsto & \sigma_C(x') := \sup\limits_{x \in C} \langle x', x \rangle . \end{array}$$

Remarque 1.3.4

(i) Il est évident que cette fonction prend la valeur $-\infty$ lorsque le sup est pris sur un ensemble vide. On peut donc considérer que $\sigma_C(\cdot) \equiv -\infty$.

(ii) Il est clair que, par définition de la fonction support, si $x \in C$ alors

$$\forall x' \in E' : \langle x', x \rangle \leqslant \sigma_C(x').$$

(iii) Si $C = \{x\}$, alors

$$\forall x' \in E' : \sigma_C(x') = \langle x', x \rangle .$$

La proposition suivante résume quelques propriétés élémentaires de la fonction support. Sa preuve est standard et peut être trouvée, par exemple, dans [48].

Proposition 1.3.6 *La fonction support possède les propriétés suivantes :*

① *La fonction support est positivement homogène de degré 1, c'est-à-dire que*

$$\forall x' \in E', \forall \alpha > 0 : \sigma_C(\alpha x') = \alpha \sigma_C(x').$$

② *La fonction support est sous-additive, c'est-à-dire que*

$$\forall x', y' \in E' : \sigma_C(x' + y') \leqslant \sigma_C(x') + \sigma_C(y').$$

③ *Si C_1, C_2 deux sous-ensembles de E, alors*

$$\begin{cases} (i) \forall x' \in E' : \sigma_{C_1+C_2}(x') = \sigma_{C_1}(x') + \sigma_{C_2}(x'), \\ (ii) \forall x' \in E', \forall \alpha > 0 : \sigma_{\alpha C_1}(x') = \alpha \sigma_{C_1}(x'). \end{cases}$$

④ *Pour tout sous-ensemble non vide C de E, la fonction $\sigma_C(\cdot)$ est convexe et semi-continue inférieurement.*

Le théorème suivant établit une relation importante entre la fonction support et la fonction distance.

Théorème 1.3.2 *Soit C un sous-ensemble convexe non vide d'un espace normé E. Alors, pour tout $x \in E$, on a*

$$d(x, C) = \sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \left(\langle x', x \rangle - \sigma_C(x') \right).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} d(x,C) &= \inf_{y \in C} \|x-y\| = \inf_{y \in C} \left(\sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \langle x', x-y \rangle \right) = \sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \left(\inf_{y \in C} \langle x', x-y \rangle \right) \\ &= \sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \left(\inf_{y \in C} \left(\langle x', x \rangle - \langle x', y \rangle \right) \right) = \sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \left(\langle x', x \rangle + \inf_{y \in C} \left(-\langle x', y \rangle \right) \right) \\ &= \sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \left(\langle x', x \rangle - \sup_{y \in C} \langle x', y \rangle \right) \\ &= \sup_{x' \in \mathbb{B}_{E'}} \left(\langle x', x \rangle - \sigma_C(x') \right). \end{aligned}$$

□

L'importance du rôle joué par cette fonction est due au théorème suivant.

Théorème 1.3.3 *[7] (Théorème de séparation)*
Soit K un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach E. Alors l'enveloppe convexe fermée de K est caractérisée par des inégalités linéaires de la manière suivante

$$\overline{co}(K) = \{ x \in E, \forall x' \in E' : \langle x', x \rangle \leqslant \sigma_K(x') \}.$$

Sous-différentiel des fonctions convexes

Soit H un espace de Hilbert, plusieurs fonctions convexes f finies en $x_0 \in dom(f)$ et ne sont pas différentiables en ce point admettent des éléments $s \in H$ satisfont

$$\langle s, x - x_0 \rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H. \tag{1.31}$$

Par exemple, la fonction convexe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en 0 mais tous les $s \in [-1, 1]$ vérifient (1.31) pour $x_0 = 0$. D'autre part, il est clair que f atteint son minimum en x_0 si et seulement si l'élément $s = 0$ vérifie l'inégalité (1.31), on peut donc énoncer la définition suivante :

Définition 1.3.16 *Soit H un espace de Hilbert et soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et finie en $x_0 \in H$ (c'est-à-dire, $x_0 \in dom(f)$).*

1 *On définit le sous-différentiel de f (au sens d'analyse convexe) au point x_0 noté $\partial f(x_0)$ comme le sous ensemble de H donné par*

$$\partial f(x_0) := \{ s \in H : \langle s, x - x_0 \rangle \leqslant f(x) - f(x_0), \forall x \in H \}. \tag{1.32}$$

② *Les éléments de* $\partial f(x_0)$ *sont appelés sous-gradients de* f *en* x_0.

③ *On dit que* f *est sous-différentiable en* $x_0 \in H$ *si* $\partial f(x_0) \neq \phi$. *Par convention,* $\partial f(x_0) = \phi$ *si* $x_0 \notin dom(f)$.

Remarque 1.3.5

- *On peut voir* $\partial f(\cdot)$ *comme une application multivoque, i.e,* $\partial f(\cdot) : H \rightrightarrows H$. *Le domaine de l'opérateur* $\partial f(\cdot)$ *est défini par*

$$dom(\partial f(\cdot)) = \{x \in H : \partial f(x) \neq \phi\}.$$

- *Il est clair que* $dom(\partial f(\cdot)) \subset dom(f)$.
- *On peut interpréter géométriquement cette définition de la façon suivante :*

  La définition (1.3.16) *exprime que la fonction affine continue notée* g_{s,x_0} *définie par*

$$g_{s,x_0}(x) := \langle s, x - x_0\rangle + f(x_0) = \langle s, x\rangle + (f(x_0) - \langle s, x_0\rangle), x \in H,$$

de pente s, *minore* f *sur* H, *i.e.*

$$g_{s,x_0}(x) \leqslant f(x),$$

et coïncide avec elle en x_0, *i.e.*

$$g_{s,x_0}(x_0) = f(x_0).$$

Exemple 1.3.6 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = |x|$. *Calculons les sous-gradients de* f *en tout point* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si $x_0 = 0$, *alors*

$$\partial f(0) = [-1, 1].$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
s \in \partial f(0) &\Longleftrightarrow \langle s, x\rangle \leqslant f(x) - f(0), \forall x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow s.x \leqslant |x|, \forall x \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s.x \leqslant x, \text{ si } x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ s.x \leqslant -x, \text{ si } x < 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x(s-1) \leqslant 0, \text{ si } x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x(s+1) \leqslant 0, \text{ si } x < 0 \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} s \leqslant 1, \text{ si } x \geqslant 0 \\ \text{et} \\ s \geqslant -1, \text{ si } x < 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow s \in [-1, 1].
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\partial f(x_0) = \left\{\begin{array}{l} [-1, 1], \text{ si } x_0 = 0 \\ \{1\}, \text{ si } x_0 > 0 \\ \{-1\}, \text{ si } x_0 < 0. \end{array}\right.$$

Citons quelques propriétés fondamentales du sous-différentiel.

Proposition 1.3.7 *[12] Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et convexe.*

1. *Pour tout $x_0 \in dom(f)$, l'ensemble $\partial f(x_0)$ est un sous-ensemble convexe fermé de H.*
2. *Soit $\alpha > 0$, alors pour tout $x_0 \in dom(f)$, on a*

$$\partial (\alpha f) (x_0) = \alpha \partial f(x_0).$$

Une autre interprétation géométrique du sous-différentiel d'une fonction peut être donnée en termes de cône normal à son épigraphe. Le théorème suivant montre que le sous-différentiel de f peut être défini de manière équivalente géométriquement via le cône normal à l'épigraphe de f en $(x_0, f(x_0))$, comme le montre l'exemple illustré à la figure (1.5).

Théorème 1.3.4 *[12] Soit $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction propre et convexe. Soient $x_0 \in dom(f)$ et $s \in H$. Alors*

$$s \in \partial f(x_0) \Longleftrightarrow (s, -1) \in N_{epi(f)}(x_0, f(x_0)). \tag{1.33}$$

Exemple 1.3.7 *Sous-différentiel de la fonction de valeur absolue à l'origine.*

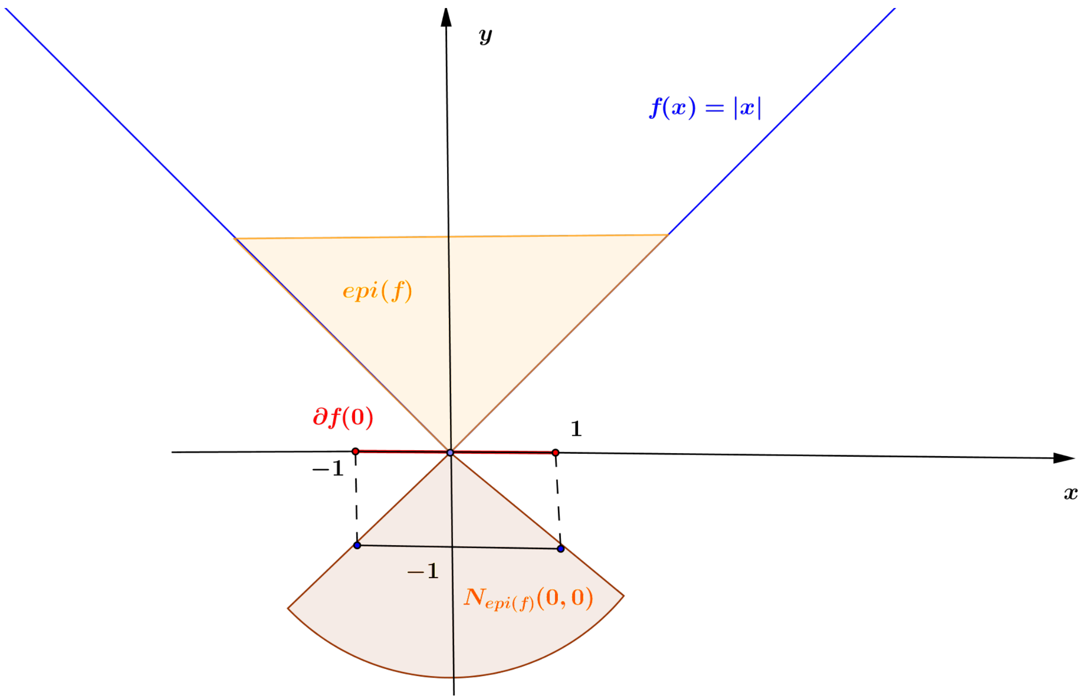

FIGURE 1.5 – Sous-différentiel de valeur absolue via le cone normal à l'épigraphe.

D'autre part, il existe un moyen simple pour exprimer le cône normal à un ensemble via le sous-différentiel de la fonction indicatrice. Nous énonçons cette propriété dans la proposition suivante :

Proposition 1.3.8 *Pour tout sous-ensemble C convexe non vide de H avec $x \in C$. Alors, le sous-différentiel de la fonction indicatrice $\psi_C(\cdot)$ coïncide avec le cône normal $N_C(\cdot)$, c'est-à-dire*

$$\partial\psi_C(x) = N_C(x). \tag{1.34}$$

Preuve. Il est clair que $dom(\psi_C(\cdot)) = C$. D'autre part, on sait que $N_C(x) \neq \phi$ si $x \in C$.

▸ Soit $x \in C$, alors

$$\begin{aligned} s \quad \in \quad & \partial\psi_C(x) \Longleftrightarrow \langle s, y - x\rangle \leqslant \psi_C(y) - \psi_C(x) = 0, \forall y \in C \\ \Longleftrightarrow \quad & \langle s, y - x\rangle \leqslant 0, \forall y \in C \\ \Longleftrightarrow \quad & s \in N_C(x). \end{aligned}$$

▸ Si $x \notin C$, alors

$$N_C(x) = \phi = \partial\psi_C(x).$$

□

Le résultat suivant est fondamental pour notre étude et qui permet de calculer le sous-différentiel de la fonction de distance.

Théorème 1.3.5 *[12] Soient C un sous-ensemble convexe fermé non vide de H et $x \in C$. Alors*

$$\partial d_C(x) = N_C(x) \cap \mathbb{B}. \tag{1.35}$$

Conjuguée de Fenchel d'une fonction

Définition 1.3.17 *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique et $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction (non nécessairement convexe). La conjuguée (de Legendre-Fenchel) de f est la fonction $f^* : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\forall x' \in E' : f^*(x) = \sup_{x \in E} \left(\langle x', x\rangle - f(x)\right).$$

▸ *L'application f^* est appelée aussi transformation de Fenchel ou transformation de Legendre ou encore transformation de Legendre-Fenchel, ou polaire de f.*

Remarque 1.3.6

① *Une conséquence immèdiate de la définition est f^* une fonction convexe et* ***s.c.i*** *sur E'. En effet, Pour chaque $x \in E$ fixé la fonction (affine) $x' \longmapsto \langle x', x\rangle - f(x)$ est convexe et continue, donc* ***s.c.i***. *Par* *suite le supremum de ces fonctions est convexe et* ***s.c.i.*** *De plus, si le domaine effectif de f est non vide (i.e, f est propre), alors f^* ne prend jamais la valeur $(-\infty)$, c'est-à-dire*

$$\forall x' \in E' : f^*(x') > -\infty.$$

(2) *Il est clair que si $f \equiv +\infty$ (f est identiquement égale à $+\infty$), alors $f^* \equiv -\infty$. De même, s'il y a un point de E où f a la valeur $(-\infty)$, alors $f^* \equiv +\infty$. En particulier, $(-\infty)^* = +\infty$.*

Exemple 1.3.8 *Soit C un sous-ensemble non vide de E, alors la conjuguée de Fenchel de la fonction indicatrice $f = \psi_C$ est la fonction dite support de C, i.e*

$$f^* = \psi_C^* = \sigma_C.$$

De façon plus précise

$$\begin{array}{rccl} \sigma_C(\cdot): & E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ & x' & \longmapsto & \sigma_C(x') = \psi_C^*(x') = \sup\limits_{x \in C} \langle x', x \rangle . \end{array}$$

Définition 1.3.18 *Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction et $f^* : E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sa conjuguée. La fonction biconjuguée de f est la fonction $f^{**} : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par*

$$\forall x \in E : f^{**}(x) = (f^*)^* (x) = \sup_{x' \in E'} (\langle x', x \rangle - f^*(x')) .$$

La fonction biconjuguée f^{**} est un supremum de fonctions affines continues (sur E), alors il est convexe et ***s.c.i****.*

Proposition 1.3.9 *[22] (Quelques propriétés de la transformée de Legendre-Fenchel)*
Soient $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ des fonctions, alors
(a) *L'inégalité de Young-Fenchel.*

$$\langle x', x \rangle \leqslant f(x) + f^*(x'), \forall (x, x') \in E \times E'.$$

(b) *$f \leqslant g$ sur E implique $f^* \geqslant g^*$ sur E'.*
(c) $(\lambda f)^* (x') = \lambda f^*(\lambda^{-1} x'), \forall x' \in E', \forall \lambda > 0.$
(d) *$f^{**} \leqslant f$ sur E.*

Le théorème suivant caractérise les fonctions qui coïncident avec leurs biconjuguées.

Théorème 1.3.6 *[22] (Fenchel–Moreau)*
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction propre, alors $f = f^{**}$ si et seulement si f est convexe et semi-continue inférieurement.

Exemple 1.3.9 *Étant donné $C \subset E$, considérons la fonction indicatrice ψ_C de C. On a $\psi_C^*(\cdot) = \sigma_C(\cdot)$. Par suite*

$$\forall x \in E : \psi_C^{**}(x) = \sup_{x' \in E'} (\langle x', x \rangle - \psi_C^*(x')) = \sup_{x' \in E'} (\langle x', x \rangle - \sigma_C(x')) .$$

*D'après le théorème de Fenchel-Moreau, $\psi_C^{**} = \psi_C$ si et seulement si ψ_C est une fonction propre convexe et **s.c.i**, et il est facile de vérifier que cela se produit si et seulement si C est un sous ensemble non vide fermé et convexe. Par conséquent, nous concluons que C est fermé et convexe non vide si et seulement si $\psi_C^{**} = \psi_C$.*

Le résultat suivant donne quelques informations utiles sur la connexion entre le sous-différentiel d'une fonction et sa conjuguée. En combinant l'inégalité Fenchel - Young (proposition $(1.3.9)$) et le théorème $(1.3.6)$, nous obtenons ce qui suit :

Théorème 1.3.7 *[22] (Formule de réciprocité de Legendre-Fenchel)*
Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction, si f est propre, convexe et semi-continue inférieurement, alors

$$v \in \partial f(x) \Longleftrightarrow x \in \partial f^*(v). \tag{1.36}$$

Autrement dit

$$\partial f^*(\cdot) = (\partial f(\cdot))^{-1} \text{ et } \partial f(\cdot) = (\partial f^*(\cdot))^{-1}.$$

Définition 1.3.19 *Soient E un espace vectoriel normé, E' son dual topologique. Alors*
1 $\Gamma(E)$ est l'ensemble de toutes les fonctions $E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ qui sont supremum d'une famille de fonctions (affines continues) sur E de la forme $x \longmapsto \langle x', x\rangle + \alpha$, où $x' \in E', \alpha \in \mathbb{R}$.
2 De façon analogue, nous définissons $\Gamma(E')$ comme l'ensemble de toutes les fonctions $E' \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ qui sont supremum d'une famille de fonctions (affines continues) sur E' de la forme $x' \longmapsto \langle x', x\rangle + \alpha$, où $x \in E, \alpha \in \mathbb{R}$.
3 $\Gamma_0(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions dans $\Gamma(E)$ qui ne sont pas identiquement égale à $+\infty$ et $-\infty$ (i.e, $f \not\equiv +\infty, -\infty$). De façon analogue, nous définissons $\Gamma_0(E')$.

Théorème 1.3.8 *[77]*
Soient E un espace vectoriel normé et E' son dual topologique.
1 Si C est un sous ensemble convexe fermé non vide de E, alors $\psi_C^* \in \Gamma_0(E')$ où ψ_C est la fonction indicatrice de C.
2 Soit $g \in \Gamma_0(E')$ une fonction convexe positivement homogène. Il existe alors un sous-ensemble convexe fermé non vide unique C de E tel que $\psi_C^* = g$.

1.4 Opérateurs maximaux monotones

Les opérateurs monotones jouent un rôle fondamental dans l'optimisation et les inégalités variationnelles. Une classe particulièrement importante d'opérateurs monotones est la classe des opérateurs monotones maximaux, qui représentent une extension naturelle des sous-différentielles des fonctions convexes.

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques notions et résultats concernant les opérateurs maximaux monotones multivoques.

Définition 1.4.1 *Soit H un espace de Hilbert muni de produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\|\cdot\|$.*

(a) L'opérateur $A : H \longrightarrow H$ est dit multivoque s'il est définit de H dans $\mathcal{P}(H)$ l'ensemble des parties de H et on écrit $A : H \rightrightarrows H$ et le domaine (resp. image) de A est l'ensemble

$$D(A) := \{x \in H : Ax \neq \phi\} \text{ (resp. } R(A) := \bigcup_{x \in H} Ax).$$

On identifiera l'opérateur multivoque avec son graphe dans $H \times H$ défini par

$$gph(A) := \{(x, y) \in H \times H : y \in Ax\}.$$

(b) Si pour tout $x \in H$, l'ensemble Ax contient au plus un élément on dira que A est univoque.

Exemple 1.4.1

(1) Soit C un convexe de H, alors l'opérateur cône normal $A = N_C(\cdot)$ associé à C est multivoque.

(2) Soit C un sous ensemble non vide de H, alors l'opérateur projection $A = P_C(\cdot)$ est multivoque.

(3) Pour toute fonction convexe $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'opérateur sous-différentiel $A = \partial f(\cdot)$ est multivoque.

Définition 1.4.2 *Soient $A, B : H \rightrightarrows H$ des opérateurs multivoques, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors*

(a) L'opérateur inverse de A, noté A^{-1} est l'opérateur dont le graphe est symétrique de celui de A, i.e.

$$x \in A^{-1}y \Longleftrightarrow y \in Ax.$$

Il est défini sur $R(A)$ et d'image $D(A)$.

(b) L'opérateur $\alpha A + \beta B$ est défini par

$$\begin{array}{rccl} \alpha A + \beta B : & H & \rightrightarrows & H \\ & x & \longmapsto & (\alpha A + \beta B)(x) := \{\alpha y_1 + \beta y_2 : y_1 \in Ax, y_2 \in Bx\}, \end{array}$$

avec

$$D(\alpha A + \beta B) = D(A) \cap D(B).$$

Définition 1.4.3 *Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur multivoque. Alors*

(1) on dit que A est monotone si pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$, on a

$$\langle Ax_1 - Ax_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

On écrit également

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in gph(A) : \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

Ou plus précisément,

$$\forall y_1 \in Ax_1, \forall y_2 \in Ax_2 : \langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geqslant 0.$$

(2) A *est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones. Ou d'une manière équivalente,* A *est monotone maximal si* A *est monotone et s'il n'existe pas d'opérateur monotone* $B : H \rightrightarrows H$ *autre que* A *tel que* $gph(A)$ *soit inclus dans* $gph(B)$.

Remarque 1.4.1 *L'ensemble des opérateurs multivoques est ordonné par l'inclusion des graphes*

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in H : Ax \subset Bx.$$

Exemple 1.4.2

(1) *Soient* A, B *deux opérateurs monotones, alors les opérateurs* $A^{-1}, A+B$ *et* $\alpha A, \alpha \geqslant 0$ *sont monotones.*

(2) *Soit* C *un sous ensemble convexe fermé non vide de* H*, alors l'opérateur univoque de projection* $P_C(\cdot)$ *est monotone.*

(3) *Soit* C *un sous-ensemble convexe de* H*, alors l'opérateur cône normal* $N_C(\cdot)$ *est monotone.*

(4) *Pour toute fonction convexe* $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*, l'opérateur sous-différentiel* $\partial f(\cdot)$ *est monotone.*

La proposition suivante donne une explication de la définition précédente.

Proposition 1.4.1 *[24] Un opérateur monotone* $A : H \rightrightarrows H$ *est dit maximal monotone si pour tout* $(x, y) \in H^2$ *tel que*

$$\langle y - Az, x - z \rangle \geqslant 0, \forall z \in D(A),$$

alors $y \in Ax$.

Un cas particulier et très important d'opérateurs maximaux monotones est donné par le sous-différentiel.

Théorème 1.4.1 *[73] Soit* H *un espace de Hilbert. Alors le sous-différence* $\partial f(\cdot)$ *d'une fonction convexe propre et semi-continue inférieurement* $f : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est un opérateur maximal monotone.*

Corollaire 1.4.1 *Soit* H *un espace de Hilbert. Pour tout sous-ensemble convexe fermé non vide* C *de* H*, l'opérateur cône normal* $N_C(\cdot)$ *est un opérateur maximal monotone.*

Preuve. On sait que, pour tout sous-ensemble convexe fermé non vide C de H, on a

$$N_C(\cdot) = \partial \psi_C(\cdot)$$

D'autre part, on a d'après la proposition (1.3.5), $\psi_C(\cdot)$ est semi-continue inférieurement car C est fermé. Alors on applique le théorème (1.4.1) précédent, on obtient que $N_C(\cdot)$ est maximal monotone. □

L'une des caractérisations les plus utiles et fondamentales des opérateurs monotones maximaux est donnée par le théorème de Minty. Il réduit la question de la vérification de la monotonie maximale d'un opérateur monotone A à la vérification de la surjectivité de $(I + A)$.

Théorème 1.4.2 *[24] (Minty)*
Soit $A : H \rightrightarrows H$ un opérateur. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :
(a) *A est maximal monotone.*
(b) *A est monotone et $(I + A)$ est surjectif, i.e, $R(I + A) = H$.*

1.5 Autres résultats principaux et définitions

Dans ce qui suit, on utilisera les résultats suivants.

Définition 1.5.1 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé et E' son dual topologique, i.e., l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$. On appelle topologie faible sur E que l'on note $\sigma(E, E')$ la topologie la moins fine sur E, c'est-à-dire, avec le minimum d'ensembles ouverts, rendant toutes les applications $f \in E'$ continues.*

- La topologie associée à la norme $\|\cdot\|$ est dite topologie forte sur E.
- La topologie $\sigma(E, E')$ est dite topologie faible sur E.

On définit la convergence d'une suite de E pour la topologie faible $\sigma(E, E')$ de la façon suivante.

Définition 1.5.2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que x_n converge faiblement vers $x \in E$, et on note $x_n \rightharpoonup x$ (ou, $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$) si et seulement si*

$$\langle f, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E'.$$

Proposition 1.5.1 *[23] Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a les propriétés suivantes :*
1. *Si $x_n \longrightarrow x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$.*
2. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leqslant \liminf_{n\longrightarrow\infty} f(x_n)$.*
3. *Si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \longrightarrow f$ fortement dans E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$), alors $\langle f_n, x_n \rangle \longrightarrow \langle f, x \rangle$.*

Définition 1.5.3 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leqslant p < \infty$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors on désigne par $L^p(\Omega, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable sur Ω, i.e,*

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, alors on définit

$$L^{\infty}(\Omega, \mathbb{R}) := \{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et, } \exists c > 0 \text{ telle que } |f(x)| < c \text{ presque partout sur } \Omega \}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_{L^{\infty}} = \inf \{ c > 0 : \ |f(x)| < c \text{ presque partout sur } \Omega \}.$$

Exemple 1.5.1 *La notion de convergence faible dans L^p devient donc comme suit :*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $p \geqslant 1$. Alors on dit que la suite $(f_n)_n$ de $L^p(\Omega, \mathbb{R})$:

a *converge fortement vers $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ si et seulement si $\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0$.*

b *converge faiblement vers $f \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$ (ou $(f_n)_n$ converge $\sigma(L^p, L^q)$ si $p > 1$ et $\sigma(L^1, L^{\infty})$ si $p = 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) si et seulement si*

$$\langle f_n, g \rangle \longrightarrow \langle f, g \rangle, \forall g \in L^q \iff \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle f_n(x), g(x) \rangle \, dx = \int_{\Omega} \langle f(x), g(x) \rangle \, dx.$$

Théorème 1.5.1 *[23] (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que
(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω.
(b) Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour chaque n, $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ p.p sur Ω.
Alors $f \in L^1(\Omega)$ et $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

On a le théorème important de Mazur suivant (appelé aussi parfois lemme de Mazur).

Lemme 1.5.1 *[73] (Lemme de Mazur)*
Soit E un espace de Banach. Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x dans E, alors il existe une suite $(y_n)_n$ avec chaque y_n combinaison convexe des $(x_k)_{k \geqslant n}$ (i.e. $y_n \in co\{x_k, k \geqslant n\}$) qui converge fortement vers x telle que

$$x \in \bigcap_n \overline{co} \{ x_k : k \geqslant n \}.$$

Définition 1.5.4 *Soit $x(\cdot)$ une application définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$.*

- *On dit que $x(\cdot)$ est absolument continue sur $[\alpha, \beta] \subset I$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $s_i, t_i \in [\alpha, \beta], i = 1, ..., k$, avec $s_{i-1} \leqslant r_i \leqslant s_i$ et $\sum_{i=1}^{k} (s_i - r_i) < \delta$, on a*

$$\sum_{i=1}^{k} \|x(s_i) - x(r_i)\| < \varepsilon.$$

- *La fonction $x(\cdot)$ est dite localement absolument continue sur I si sa restriction à tout intervalle $[\alpha, \beta]$ est absolument continue.*

Il s'ensuit que toute application Lipschitzienne (resp. absolument continue) est absolument continue (resp : uniformément continue).

Théorème 1.5.2 *[39]*
ⓐ *Soit $x(\cdot) : I \longrightarrow H$ une application telle que*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, v(\cdot) \in L^1(I, H) \text{ et } t_0, t \in I,$$

alors $x(\cdot)$ est absolument continue sur I et $\dot{x}(t) = v(t)$ pour presque tout $t \in I$.
ⓑ *Etant donné une application absolument continue $x(\cdot) : I \longrightarrow H$, alors il existe une application $v(\cdot) : I \longrightarrow H$ telle que pour tout $t_0, t \in I$,*

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds.$$

De plus, $\dot{x}(t)$ existe pour presque tout $t \in I$ et coïncide avec $v(t)$ presque partout (i.e, $\dot{x}(t) = v(t)$).

Lemme 1.5.2 *[52] Soit $x(\cdot) : [0, T] \longrightarrow H$ une fonction absolument continue. Alors*

$$\int_0^T \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle dt = \frac{1}{2} \left(\|x(T)\|^2 - \|x(0)\|^2 \right). \tag{1.37}$$

Pour $s(t) := \|x(t)\|^2$, alors

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s(t) = \langle \dot{x}(t), x(t) \rangle. \tag{1.38}$$

Nous rappelons également le lemme de Gronwall pour des solutions absolument continues d'inégalités différentielles.

Lemme 1.5.3 *[55] (Lemme de Gronwall) Soient $\alpha(\cdot), \beta(\cdot), \zeta(\cdot) : I = [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions réelles Lebesgue intégrables. Si la fonction $\zeta(\cdot)$ est absolument continue sur l'intervalle $[T_0, T]$ et si pour presque tout $t \in [T_0, T]$,*

$$\dot{\zeta}(t) \leqslant \alpha(t) + \beta(t)\zeta(t), \tag{1.39}$$

Alors pour tout $t \in [T_0, T]$,

$$\zeta(t) \leqslant \zeta(T_0) \exp\left(\int_{T_0}^{t} \beta(\theta)d\theta \right) + \int_{T_0}^{t} \alpha(s) \exp\left(\int_{s}^{t} \beta(\theta)d\theta \right) ds. \tag{1.40}$$

Chapitre 2

Résultat d'existence pour un processus de Rafle dégénéré

Le concept de processus de Rafle (ou "processus de balayage/Rafle") a été introduit et étudié par Jean Jacques Moreau en vue de l'analyse des systèmes élasto-plastiques. Soient H un espace de Hilbert réel et $T \in]0, +\infty[$. Etant données $C(\cdot) : [0,T] \rightrightarrows H$ une application multivoque définie sur l'intervalle du temps $[0,T]$ et a valeurs convexes fermées non vides H. Alors ce problème d'évolution abstrait était formulé sous la forme d'une inclusion différentielle d'évolution du premier ordre

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } \; t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2.1}$$

Où $N_{C(t)}(x(t))$ représente le cône normal à $C(t)$ au point $x(t)$ au sens d'analyse convexe (i.e, l'ensemble des normales à $C(t)$ au point $x(t)$) et $x_0 \in C(0)$ est une condition initiale donnée.

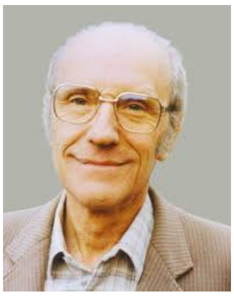

FIGURE 2.1 – Jean Jacques Moreau 1923-2014

L'importance de cette inclusion différentielle dans divers champs d'applications des mathématiques n'est plus à démontrer et a notamment conduit à de remarquables extensions et variantes : stochastique, dépendance en l'état, perturbation, cadre banachique, etc.

En traduisant l'inclusion (2.1) dans un langage mécanique, nous obtenons l'interprétation suivante :

- Si la position $x(t)$ d'une particule se trouve à l'intérieur de l'ensemble mobile $C(t)$, alors $\dot{x}(t) = 0$, ce qui signifie que la particule reste au repos.

▸ Lorsque la frontière de $C(t)$ rattrape la particule, alors celle-ci est poussée dans une direction normale vers l'intérieur par la frontière de $C(t)$ pour rester à l'intérieur de $C(t)$ et satisfait la contrainte.

Cette visualisation mécanique conduit Moreau à appeler ce problème le processus de Rafle (la Rafle) : (la particule est raflée par l'ensemble mobile).

Résoudre un problème de Rafle consiste à trouver les applications $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ absolument continues sur $[0,T]$ satisfaisant $x(t) \in C(t)$ pour tout $t \in [0,T]$ et

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(x(t)) \text{ p.p. } \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

Pour traiter le problème (2.1), trois grandes familles de méthodes co-existent : l'algorithme de rattrapage de Moreau, la réduction à une inclusion différentielle sans contraintes ainsi que la régularisation du cône normal. Moreau a démontré l'existence et l'unicité de la solution pour (2.1) en supposant que les ensembles $(C(t))_t$ bougent de façon absolument continue par rapport à la distance de Hausdorff. Sa méthode consiste à discrétiser l'intervalle $[0,T]$ par une subdivision appropriée

$$0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T,$$

puis, à définir les itérations $x_i^n(\cdot), i = 0, ..., n$ par

$$\begin{cases} x_0^n = x_0 \in C(0), \\ x_i^n \in C(t_i^n), \\ x_{i+1}^n = Proj(C(t_{i+1}^n), x_i^n) \in C(t_{i+1}^n), 0 \leqslant i \leqslant n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Ces itérations sont bien définies grâce à l'existence et l'unicité de la projection sur les ensembles convexes fermés $(C(t))_t$. Ensuite, il a définit la suite de solutions approchées $x_n(\cdot)$ sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$ comme étant l'interpolation par morceau des points x_i^n et x_{i+1}^n (voir Figure 2.3).

$$x_n(t) := x_i^n + \left(\frac{t - t_i^n}{t_{i+1}^n - t_i^n}\right)(x_{i+1}^n - x_i^n), t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]. \tag{2.3}$$

La suite générée $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers la seule solution de (2.1) lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. Cette méthode est connue sous le nom d'algorithme de rattrapage (Moreau's catching-up algorithm en anglais), voir Figure 2.2.

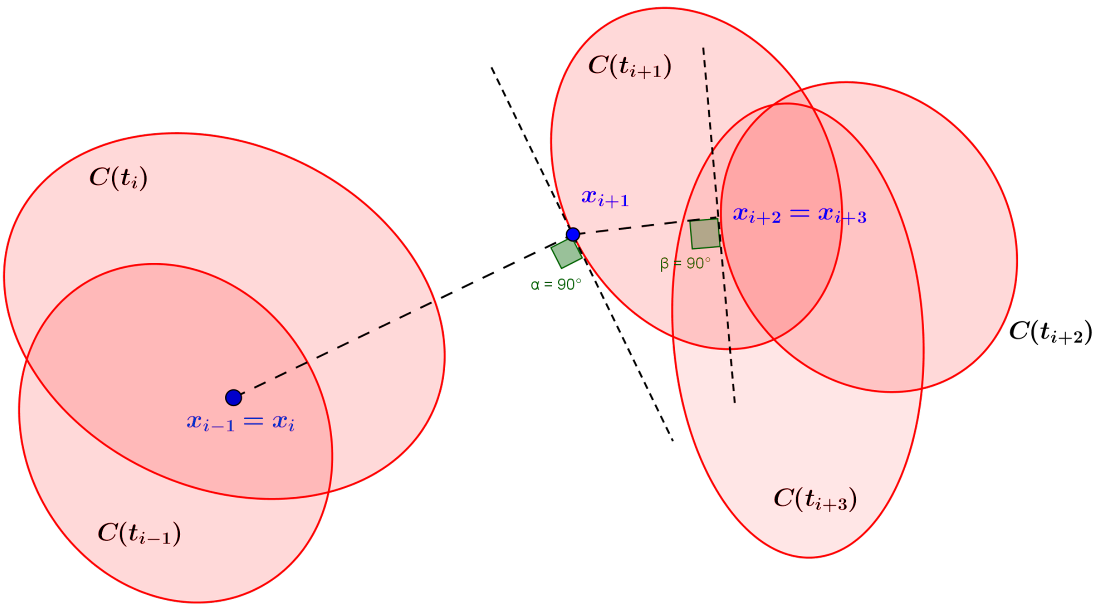

FIGURE 2.2 – Interprétation géométrique de l'algorithme de rattrapage

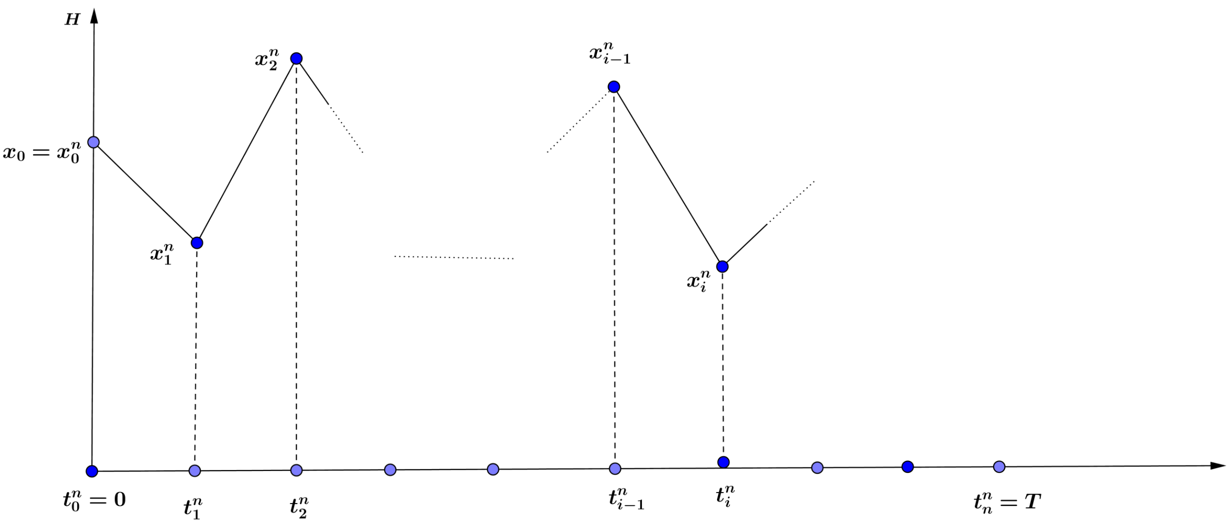

FIGURE 2.3 – Construction de la suite des solutions approchées

Dans ce chapitre, on s'intéresse à étudier une nouvelle variante du processus de Rafle dit perturbé et donnée par l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t) \text{ p.p } \; t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1 Processus de Rafle dégénéré sans perturbation

Le cas sans perturbation ($f \not\equiv 0$) est traité par M. Kunze et M.D.P Monteiro Marques dans ([54]), le problème considéré est

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) \text{ p.p } \ t \in [0,T], \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2.5}$$

Ce problème est connu sous le nom "le processus de Rafle dégénéré" (En anglais : Degenerate sweeping process). Le résultat d'éxistence et d'unicité de la solution du problème (2.5) a été établi par Kunze et Monteiro Marques [54], en supposant que les ensembles $(C(t))_t$ sont convexes et bougent de façon Lipschitzienne par rapport à la distance de Hausdorff. Dans une telle situation la solution est Lipschitzienne. Dans le cas non convexe, précisément lorsque les ensembles $(C(t))_t$ sont prox-réguliers, une version récente de tel problème a été étudiée dans [3] où les auteurs ont prouvé le caractère bien posé de ce problème en utilisant la réduction de la l'inclusion différentielle avec contrainte à l'inclusion différentielle sans contrainte gouvernée par le sous-différentiel de la fonction distance dans un espace Hilbertien de dimension finie. Nous généralisons ces résultats aux ensembles $(C(t))_t$ qui varient d'une manière absolument continue et sous les mêmes hypothèses sur l'opérateur A dans un espace de Hilbert de dimension infinie. Puis, nous appliquons ce résultat pour obtenir l'existence de solutions du problème (2.4), où la perturbation f est supposée ici monovaluée et ne dépend que du temps t .

Soit H un espace de Hilbert et $T > 0$ un nombre réel positif. Soit $C(\cdot) : [0,T] \rightrightarrows H$ une application multivoque à valeurs non vides fermées et convexes de H. Supposons que $t \longrightarrow C(t)$ varie d'une façon Lipschitzienne en fonction du temps, avec L comme constante de Lipschitz. C'est-à- dire :

(H_C) Il existe une constante réelle $L > 0$ telle que pour tout $x \in H$,

$$\forall x \in H : |d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant L. |t - s|,$$

pour tous $s, t \in [0,T]$. Ceci peut aussi être exprimé par un comportement Lipschitzien de $C(\cdot)$ par rapport à la distance de Hausdorff. Kunze et Monteiro Marques [54] ont prouvé le résultat d'existence suivant pour le processus de Rafle dégénéré.

Théorème 2.1.1 *[54] Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $T > 0$ un nombre réel positif. Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné et auto-adjoint tel que $\langle Ax, x\rangle \geqslant \rho. \|x\|^2$ pour tout $x \in H$. Si (H_C) est vérifiée pour $C(\cdot)$ et si $Au_0 \in C(0)$, alors l'inclusion différentielle suivante*

$$(DS) : \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(Au(t)) \text{ p.p. } \ [0,T] \\ \\ u(0) = u_0, Au_0 \in C(0), \end{cases}$$

admet une solution unique et cette solution est Lipschitzienne.

Le résultat suivant généralise le théorème $(2.1.1)$ de Kunze et Monteiro Marques aux ensembles $(C(t))_t$ qui varient d'une manière absolument continue par rapport à la distance de Hausdorff. Avant d'énoncer ce résultat, faisons les hypothèses suivantes :

• **Hypothèses sur l'opérateur** A

$(\mathcal{H}_A)$ $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire, borné et symétrique et $\rho-$coercif, c'est-à-dire qu'il existe $\rho > 0$ tels que

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \rho. \|x\|^2, \forall x \in H. \tag{2.6}$$

• **Hypothèses sur l'application multivoque** $C(\cdot)$

$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [0, T]$, $C(t)$ sont des sous ensembles non vides convexes et fermés de H.

$(\mathcal{H}_2)$ Il existe une fonction absolument continue non négative $v(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $v(0) = 0$ telle que

$$\forall x \in H, \forall s, t \in [0, T] : |d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)|. \tag{2.7}$$

On peut maintenant énoncer le résultat suivant.

Théorème 2.1.2 *Soit H un espace de Hilbert réel avec $\langle\cdot,\cdot\rangle$ comme un produit scalaire. Soit $T > 0$ un nombre réel positif et $C(\cdot) : [0, T] \rightrightarrows H$ une application multivoque. Supposons que les hypothèses $(\mathcal{H}_A)$, $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ soient vérifiées. Alors pour toute valeur initiale $u_0 \in H$ telle que $Au_0 \in C(0)$ l'inclusion différentielle*

$$(DS) : \begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(A(u(t))) \text{ p.p } t \in [0, T], \\ \\ u(0) = u_0, Au_0 \in C(0). \end{cases} \tag{2.8}$$

admet une solution unique absolument continue. De plus, pour presque tout $t \in [0, T]$ la solution vérifie l'inégalité suivante

$$\|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)|. \tag{2.9}$$

Preuve. La preuve du théorème sera établie à travers plusieurs étapes.

Étape 1 **:** Soit $v(\cdot) : I = [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction absolument continue satisfaisant (2.7).

On fixe maintenant un nombre réel $\varepsilon > 0$ de $\mathbb{R}$, et on considère la fonction

$$v_\varepsilon(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie par

$$v_\varepsilon(t) := \int_0^t (|\dot{v}(r)| + \varepsilon)\, dr. \tag{2.10}$$

Il est clair que $v_\varepsilon(0) = 0$.

On observe ensuite que $v_\varepsilon(\cdot)$ vérifie l'inégalité (2.7). En effet, On a

$$v_\varepsilon(t) := \int_0^t (|\dot{v}(r)| + \varepsilon)\, dr = \int_0^t |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon t.$$

Donc pour tout $t, s \in I, (t \geqslant s)$, on a

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| &= \left| \left(\int_0^t |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon t \right) - \left(\int_0^s |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon t \right) \right| \\ &= \left| \int_0^t |\dot{v}(r)|\, dr + \int_s^0 |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon\,(t-s) \right| \\ &= \left| \int_s^t |\dot{v}(r)|\, dr + \varepsilon\,(t-s) \right|. \end{aligned}$$

Or

$$\varepsilon\,(t-s) \geqslant 0.$$

Alors

$$|v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| \geqslant \int_s^t |\dot{v}(r)|\, dr \geqslant \left| \int_s^t \dot{v}(r) dr \right|.$$

Ce qui implique

$$|v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| \geqslant |v(t) - v(s)|\,.$$

Or $v(\cdot)$ vérifie (2.7), alors on a

$$|v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s)| \geqslant |d(x, C(t)) - d(x, C(s))|\,.$$

Autrement dit $v_\varepsilon(\cdot)$ est absolument continue. De plus

$$\dot{v}_\varepsilon(t) \geqslant \varepsilon > 0. \tag{2.11}$$

Par (2.11), nous avons $v_\varepsilon(\cdot)$ est strictement croissante. Il existe donc un inverse continu et croissant

$$v_\varepsilon^{-1}(\cdot) : \left[0, \widehat{T}\right] \longrightarrow [0, T]\,,$$

Telle que

$$\widehat{T} := v_\varepsilon(T). \tag{2.12}$$

Par ailleurs, nous avons $v_\varepsilon^{-1}(\cdot)$ est $\varepsilon^{-1}-$Lipschitzienne sur $\left[0, \widehat{T}\right]$. En effet, soient $\widehat{s}, \widehat{t} \in \left[0, \widehat{T}\right]$ avec $\widehat{s} \leqslant \widehat{t}$ telles que

$$\begin{cases} \widehat{s} = v_\varepsilon(s), s \in [0, T]\,, \\ \widehat{t} = v_\varepsilon(t), t \in [0, T]\,. \end{cases}$$

Alors,

$$\left| v_\varepsilon^{-1}(\widehat{t}) - v_\varepsilon^{-1}(\widehat{s}) \right| = |t - s| = t - s.$$

À partir de (2.11), il s'ensuit que

$$\varepsilon(t-s) = \int_s^t \varepsilon dr \leqslant \int_s^t \dot{v}_s(r) dr = v_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(s).$$

Cela implique

$$|t-s| \leqslant \varepsilon^{-1}\left|v_\varepsilon(t)-v_\varepsilon(s)\right|,$$

On obtient

$$\left|v_\varepsilon^{-1}(\widehat{t})-v_\varepsilon^{-1}(\widehat{s})\right| \leqslant \varepsilon^{-1}\left|\widehat{t}-\widehat{s}\right|.$$

Étape ② : Maintenant, pour récupérer la Lipschitzité, on considère l'application multivoque

$$\widehat{C}(\cdot):\left[0,\widehat{T}\right] \rightrightarrows H, \tag{2.13}$$

définie pour tout $\tau \in \left[0,\widehat{T}\right]$ par

$$\widehat{C}(\tau):=C(v_\varepsilon^{-1}(\tau)). \tag{2.14}$$

L'application multivoque $\widehat{C}(\cdot)$ est $1-$Lipschitzienne. En effet, soient $x \in H, \tau_1, \tau_2 \in \left[0,\widehat{T}\right]$, alors

$$\left|d(x,\widehat{C}(\tau_1))-d(x,\widehat{C}(\tau_2))\right| = \left|d(x,C(v_\varepsilon^{-1}(\tau_1)))-d(x,C(v_\varepsilon^{-1}(\tau_2)))\right| \leqslant \left|v_\varepsilon(v_\varepsilon^{-1}(\tau_1))-v_\varepsilon(v_\varepsilon^{-1}(\tau_2))\right|.$$

Cela donne

$$\left|d(x,\widehat{C}(\tau_1))-d(x,\widehat{C}(\tau_2))\right| \leqslant |\tau_1-\tau_2|.$$

De plus, on remarque que

$$\begin{cases} \widehat{C}(0)=C(v_\varepsilon^{-1}(0))=C(0), \\ \\ Au_0 \in \widehat{C}(0)=C(0). \end{cases} \tag{2.15}$$

D'après le théorème $(2.1.1)$ l'inclusion différentielle associée $\left(\widehat{DS}\right)$ avec $\widehat{C}(\cdot)$ à la place de $C(\cdot)$ suivante

$$\left(\widehat{DS}\right):\begin{cases} -\dot{u}(t) \in N_{\widehat{C}(t)}(A\,(u(t))) \text{ p.p. } \ t \in \left[0,\widehat{T}\right], \\ \\ u(0)=u_0, Au_0 \in \widehat{C}(0), \end{cases} \tag{2.16}$$

admet une solution unique et Lipschitzienne. On note la solution de $\left(\widehat{DS}\right)$ sur $\left[0,\widehat{T}\right]$ par

$$U(\cdot):\left[0,\widehat{T}\right] \longrightarrow H. \tag{2.17}$$

Donc on a

$$-\dot{U}(t) \in N_{\widehat{C}(t)}(A\,(U(t))) \text{ p.p. } \ t \in \left[0,\widehat{T}\right]. \tag{2.18}$$

Pour tout $t \in [0,T]$, on pose

$$u(t):=(U \circ v_\varepsilon)(t)=U(v_\varepsilon(t)). \tag{2.19}$$

Or $U(\cdot)$ est Lipschitzienne et $v(\cdot)$ est absolument continue, alors $u(\cdot)$ est absolument continue. De plus, pour presque tout $t \in [0,T]$, nous avons clairement que

$$\frac{du}{dt}(t)=\frac{dv_\varepsilon}{dt}(t)\frac{dU}{dt}(v_\varepsilon(t)). \tag{2.20}$$

Étape ③ **:** Montrons que $u(\cdot)$ définie par (2.19) est une solution de (DS).

On a
$$\forall t \in [0,T] : v_\varepsilon(t) \in [v_\varepsilon(0), v_\varepsilon(T)] = \left[0, \widehat{T}\right].$$

Alors, en remplaçant t par $v_\varepsilon(t)$ dans (2.18), on obtient pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} -\dot{U}(v_\varepsilon(t)) &\in N_{\widehat{C}(v_\varepsilon(t))}(AU(v_\varepsilon(t))) \Longleftrightarrow -\dot{U}(v_\varepsilon(t)) \in N_{C(t)}(Au(t)) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{v}_\varepsilon(t)\dot{U}(v_\varepsilon(t)) \in N_{C(t)}(Au(t)) \\ &\Longleftrightarrow -\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(Au(t)). \end{aligned}$$

De plus
$$Au_0 = Au(0) = A\left(U(v_\varepsilon(0))\right) = AU(0) \in C(0) = \widehat{C}(0).$$

Par conséquent, $u(\cdot)$ est une solution de (DS).

Étape ④ **:** Montrons maintenant l'unicité.

Soient $u_1(\cdot)$, $u_2(\cdot)$ deux solutions de (DS), alors pour tout $i \in \{1,2\}$, on a
$$\begin{cases} -\dot{u}_i(t) \in N_{C(t)}(Au_i(t)) \text{ p.p. } t \in [0,T], \\ u_i(0) = u_0, Au_0 \in C(0). \end{cases}$$

D'après la monotonie du cône normal, nous avons
$$\left\langle -\dot{u}_1(t) + \dot{u}_2(t), Au_1(t) - Au_2(t)\right\rangle \geqslant 0.$$

Cela implique
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle = \left\langle \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle \leqslant 0.$$

Alors
$$\frac{d}{dt}\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle \leqslant 0,$$

Ce qui donne
$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left\langle u_1(s) - u_2(s), A\left(u_1(s) - u_2(s)\right)\right\rangle \leqslant 0.$$

On obtient
$$\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle - \left\langle u_1(0) - u_2(0), A\left(u_1(0) - u_2(0)\right)\right\rangle \leqslant 0.$$

Comme
$$u_1(0) = u_2(0),$$

Alors
$$\left\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\right\rangle \leqslant 0. \tag{2.21}$$

D'autre part, l'opérateur A est $\rho-$coercif, alors

$$\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\rangle \geqslant \rho \left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|^2.$$

Cela donne

$$\left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho}\langle u_1(t) - u_2(t), A\left(u_1(t) - u_2(t)\right)\rangle. \tag{2.22}$$

Les relations (2.21) et (2.22) impliquent

$$\left\|u_1(t) - u_2(t)\right\|^2 \leqslant 0,$$

On obtient

$$u_1(t) = u_2(t).$$

Étape 5 : Montrons que pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right|. \tag{2.23}$$

Soit $t \in]0, T[$ tel que $\dot{u}(t)$ et $\dot{v}(t)$ existent. Si $\dot{u}(t) = 0$ alors l'inégalité est vérifiée.

Supposons que $\dot{u}(t) \neq 0$. Le développement de Taylor d'ordre 1 de $u(\cdot)$ donne

$$u(t-\delta) = u(t) - \delta\dot{u}(t) - \delta\varepsilon(\delta), \tag{2.24}$$

où $\varepsilon(\delta)$ est une fonction qui tend vers 0 quand δ tend vers 0.

Pour $\delta > 0$ assez petit et comme $C(t)$ sont fermés et varient d'une façon absolument continues, alors on a

$$\begin{cases} Au(t-\delta) \in C(t-\delta), \\ d_H(C(t-\delta), C(t)) \leqslant \left|v(t) - v(t-\delta)\right|. \end{cases} \tag{2.25}$$

D'autre part, on peut écrire (2.7) en termes d'inclusions d'ensembles suivante

$$C(t-\delta) \subset C(t) + \left|v(t) - v(t-\delta)\right| \mathbb{B}_H. \tag{2.26}$$

Alors d'après les relations (2.25) et (2.26), ils existent $\alpha_t \in C(t)$ et $\beta_t \in H$ avec

$$\|\beta_t\| \leqslant \left|v(t) - v(t-\delta)\right|,$$

tels que

$$Au(t-\delta) = \alpha_t + \beta_t.$$

Ceci et (2.24) donne

$$\alpha_t = Au(t) - \delta A\dot{u}(t) - \delta A\varepsilon(\delta) - \beta_t \in C(t). \tag{2.27}$$

Or $-\dot{u}(t) \in N_{C(t)}(Au(t))$, alors

$$\langle -\dot{u}(t), w - Au(t)\rangle \leqslant 0, \forall w \in C(t).$$

En prenant $w = \alpha_t$ et en utilisant (2.27), on obtient

$$\langle -\dot{u}(t), Au(t) - \delta A\dot{u}(t) - \delta A\varepsilon(\delta) - \beta_t - Au(t)\rangle \leqslant 0,$$

Cela implique

$$\left\langle -\dot{u}(t), -A\dot{u}(t) - A\varepsilon(\delta) - \delta^{-1}\beta_t \right\rangle \leqslant 0.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}(t), A\dot{u}(t)\rangle &\leqslant \left\langle -\dot{u}(t), A\varepsilon(\delta) + \delta^{-1}\beta_t \right\rangle \\ &\leqslant \|\dot{u}(t)\| \left\| A\varepsilon(\delta) + \delta^{-1}\beta_t \right\|. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que A est $\rho-$coercif, on a

$$\begin{aligned} \rho \|\dot{u}(t)\|^2 &\leqslant \|\dot{u}(t)\| \left(\|A\| \|\varepsilon(\delta)\| + \delta^{-1} \|\beta_t\|\right) \\ &\leqslant \|\dot{u}(t)\| \left(\|A\| \|\varepsilon(\delta)\| + \delta^{-1} |v(t) - v(t-\delta)|\right). \end{aligned}$$

Lorsque δ tend vers 0, on obtient

$$\rho \|\dot{u}(t)\|^2 \leqslant \|\dot{u}(t)\| |\dot{v}(t)|,$$

Ce qui donne

$$\|\dot{u}(t)\| \leqslant \frac{|\dot{v}(t)|}{\rho}.$$

Ceci achève la preuve. □

2.2 Processus de Rafle dégénéré avec perturbation

Dans cette partie, nous appliquons le théorème $(2.1.2)$ pour établir un résultat d'existence pour un processus dégénéré perturbé, où la perturbation est une application univoque dépend seulement du temps t.

Avant d'énoncer le résultat que nous nous proposons de démontrer, nous aurons besoin des résultats suivants.

Proposition 2.2.1 *Soit H un espace de Hilbert réel et C un sous-ensemble de H. Alors, pour tous $x, y \in H$, on a*

$$d(x, C + y) = d(x - y, C)$$

Preuve. Soient $x, y \in H$, alors

$$d(x, C + y) = \inf_{z\in C+y} \|x - z\| = \inf_{c\in C} \|x - (c + y)\| = \inf_{c\in C} \|(x - y) - c\| = d(x - y, C). \tag{2.28}$$

□

Corollaire 2.2.1 *Soit $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ une fonction absolument continue. Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné et symétrique. Alors pour presque tout $t \in [0,T]$, on a*

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), Ax(t)\rangle = 2\langle \dot{x}(t), Ax(t)\rangle \tag{2.29}$$

Preuve. Pour tout $t \in [0,T]$, on pose $s(t) := \langle x(t), Ax(t)\rangle$. Alors, pour presque tout $t \in [0,T]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}s(t) &= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{s(t+h)-s(t)}{h} \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\langle x(t+h), Ax(t+h)\rangle - \langle x(t), Ax(t)\rangle\right] \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\langle x(t+h)-x(t), Ax(t+h)\rangle + \langle x(t), Ax(t+h)\rangle - \langle x(t), Ax(t)\rangle\right] \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\left[\langle x(t+h)-x(t), Ax(t+h)\rangle + \langle x(t), Ax(t+h)-Ax(t)\rangle\right] \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\left[\left\langle \frac{x(t+h)-x(t)}{h}, Ax(t+h)\right\rangle + \left\langle x(t), \frac{Ax(t+h)-Ax(t)}{h}\right\rangle\right] \\
&= \lim_{h\longrightarrow 0}\left[\left\langle \frac{x(t+h)-x(t)}{h}, Ax(t+h)\right\rangle + \left\langle x(t), \frac{A\left(x(t+h)-x(t)\right)}{h}\right\rangle\right] \\
&= \langle \dot{x}(t), Ax(t)\rangle + \langle x(t), A\dot{x}(t)\rangle = \langle \dot{x}(t), Ax(t)\rangle + \langle Ax(t), \dot{x}(t)\rangle = 2\langle \dot{x}(t), Ax(t)\rangle
\end{aligned}$$

□

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette partie.

Proposition 2.2.2 *Soit H un espace de Hilbert. Soit $h : [T_0,T] \longrightarrow H$ une application univoque de $L^1([T_0,T], H)$. On considère l'application multivoque $C(\cdot)$ de $I = [T_0,T]$ dans H vérifiant les hypothèses suivantes.*
$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [T_0,T]$, $C(t)$ sont des sous ensembles non vides convexes et fermés de H.
$(\mathcal{H}_2)$ $C(t)$ varie d'une façon absolument continue, c'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [T_0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $x \in H$ et pour tous $s,t \in I$, on ait

$$|d(x,C(t)) - d(x,C(s))| \leqslant |v(t)-v(s)|. \tag{2.30}$$

Soit $A : H \longrightarrow H$ un opérateur telle que,
$(\mathcal{H}_A)$ A est un opérateur linéaire, borné et symétrique et $\rho-$coercif, c'est-à-dire

$$\langle Ax, x\rangle \geqslant \rho.\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{2.31}$$

Alors pour toute valeur initiale $x_0 \in H$ telle que $Ax_0 \in C(T_0)$, l'inclusion différentielle

$$(PDPT) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + h(t) \text{ p.p } t \in [T_0,T], \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0), \end{cases} \tag{2.32}$$

admet une solution unique absolument continue. De plus on a l'inégalité suivante

$$\|\dot{x}(t) + h(t)\| \leqslant \frac{\|A\|\,\|h(t)\| + |\dot{v}(t)|}{\rho} \text{ p.p } t \in [T_0,T]. \tag{2.33}$$

Preuve.

▸ Pour tout $t \in [T_0, T]$, on pose

$$\psi(t) := \int_{T_0}^{t} h(s)ds \text{ et } D(t) := C(t) + A\left(\psi(t)\right). \tag{2.34}$$

Il est évident que l'application multivoque $D(\cdot)$ vérifie l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$. De plus

$$D(T_0) = C(T_0). \tag{2.35}$$

En appliquant la propostion $(2.2.1)$, on obtient aussi pour tous $y \in H, t \in [T_0, T]$,

$$d(y, D(t)) = \inf_{d(t)\in D(t)} \|y - d(t)\| = d(y - A\left(\psi(t)\right), C(t)). \tag{2.36}$$

Par ailleurs, $\left(C(t)\right)_t$ varient d'une façon absolument continue. Nous avons donc pour tous $s, t \in [T_0, T]$,

$$\begin{aligned}
|d(y, D(t)) - d(y, D(s))| &= |d(y - A\left(\psi(t)\right), C(t)) - d(y - A\left(\psi(s)\right), C(s))| \\
&\leqslant \|A\left(\psi(t)\right) - A\left(\psi(s)\right)\| + |d(y - A\left(\psi(t)\right), C(t)) - d(y - A\left(\psi(t)\right), C(s))| \\
&\leqslant \|A\left(\psi(t)\right) - A\left(\psi(s)\right)\| + |v(t) - v(s)| \\
&\leqslant \|A\| \, \|\psi(t) - \psi(s)\| + |v(t) - v(s)|\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, on peut écrire

$$\psi(t) - \psi(s) = \int_s^t \dot{\psi}(r)dr = \int_s^t h(r)dr. \tag{2.37}$$

Ce qui implique

$$\|\psi(t) - \psi(s)\| = \left\|\int_s^t h(r)dr\right\| \leqslant \int_s^t \|h(r)\|\, dr. \tag{2.38}$$

Par ailleurs,

$$|v(t) - v(s)| = \left|\int_s^t \dot{v}(r)dr\right| \leqslant \int_s^t |\dot{v}(r)|\, dr \tag{2.39}$$

De $(2.38)\,, (2.39)$, on a

$$\|A\| \, \|\psi(t) - \psi(s)\| + |v(t) - v(s)| \leqslant \int_s^t \left(\|A\| \, \|h(r)\| + |\dot{v}(r)|\right) dr. \tag{2.40}$$

On peut voir facilement que

$$\int_s^t \left(\|A\| \, \|h(r)\| + |\dot{v}(r)|\right) dr = \int_{T_0}^t \left(\|A\| \, \|h(r)\| + |\dot{v}(r)|\right) dr - \int_{T_0}^s \left(\|A\| \, \|h(r)\| + |\dot{v}(r)|\right) dr.$$

On pose

$$V(t) := \int_{T_0}^t \left(\|A\| \, \|h(r)\| + |\dot{v}(r)|\right) dr. \tag{2.41}$$

On obtient

$$|d(y, D(t)) - d(y, D(s))| \leqslant |V(t) - V(s)|\,.$$

Ce qui signifie que l'ensemle fermé $D(t)$ varie de manière absolument continu par rapport à $t \in [T_0, T]$ avec la fonction absolument continue $V(\cdot)$, car on peut écrire

$$V(t) = \int_{T_0}^{t} \left(\|A\| . \left\|\dot{\psi}(r)\right\| + |\dot{v}(r)| \right) dr).$$

▸ Maintenant, pour tout $t \in [T_0, T]$, on pose

$$y(t) := x(t) + \psi(t). \tag{2.42}$$

Ce qui donne, le problème $(PDPT)$ est équivalent à l'inclusion différentielle dégénérée suivante

$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(Ay(t)) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T], \\ y(T_0) = x_0, Ax_0 \in D(T_0). \end{cases}$$

En effet,

$$\begin{aligned} -\dot{y}(t) \quad &\in \quad N_{D(t)}(Ay(t)) \Longleftrightarrow -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}((Ay(t) - A(\psi(t))) + A(\psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\dot{x}(t) - \dot{\psi}(t) \in N_{C(t)+A(\psi(t))}((Ay(t) - A(\psi(t))) + A(\psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\dot{x}(t) - h(t) \in N_{C(t)+A(\psi(t))}(A(y(t) - \psi(t)) + A(\psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\dot{x}(t) - h(t) \in N_{C(t)}(A(y(t) - \psi(t))) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\dot{x}(t) - h(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) \\ &\Longleftrightarrow \quad -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + h(t). \end{aligned}$$

De plus

$$x(T_0) = y(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0) = D(T_0).$$

Alors, il résulte du théorème $(2.1.2)$ que le processus suivant

$$\begin{cases} -\dot{y}(t) \in N_{D(t)}(Ay(t)) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T], \\ y(T_0) = x_0, Ax_0 \in D(T_0), \end{cases} \tag{2.43}$$

admet une solution unique absolument continue $y(\cdot)$. De plus, pour presque tout $t \in [T_0, T]$ cette solution vérifie l'inégalité suivante

$$\|\dot{y}(t)\| \leqslant \frac{1}{\rho} \left|\dot{V}(t)\right|. \tag{2.44}$$

▸ Il est clair que la fonction $x(\cdot)$ définie par

$$x(t) := y(t) - \psi(t).$$

est une solution absolument continue de $(PDPT)$.

▸ Montrons l'estimation (2.33).

De $(2.41), (2.42), (2.44)$, on a pour presque tout $t \in [T_0, T]$

$$\left\|\dot{x}(t) + \dot{\psi}(t)\right\| \leqslant \frac{1}{\rho} (\|A\| \|h(t)\| + |\dot{v}(t)|).$$

Ce qui implique

$$\|\dot{x}(t) + h(t)\| \leqslant \frac{1}{\rho}\left(\|A\|\,\|h(t)\| + |\dot{v}(t)|\right).$$

▸ La dernière étape de la preuve de la proposition $(2.2.2)$ est l'unicité de la solution pour $(PDPT)$. Soient $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ deux solutions de $(PDPT)$ avec la même condition initiale

$$x_1(T_0) = x_2(T_0) = x_0. \tag{2.45}$$

Alors pour presque tout $t \in [T_0, T]$, et pour tout $i \in \{1, 2\}$ on a

$$\begin{cases} -\dot{x}_i(t) - h(t) \in N_{C(t)}(Ax_1(t)), \\ \\ x_i(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

D'après la monotonie du cône normal, on trouve

$$\langle -\dot{x}_1(t) - h(t) + \dot{x}_2(t) + h(t), Ax_1(t) - Ax_2(t)\rangle \geqslant 0.$$

Ce qui implique

$$\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle \leqslant 0.$$

En utilisant le fait que

$$\langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle.$$

On obtient

$$\frac{d}{dt}\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle \leqslant 0,$$

Par suite

$$\int_{T_0}^{t} \frac{d}{ds}\langle x_1(s) - x_2(s), A\left(x_1(s) - x_2(s)\right)\rangle\, ds \leqslant 0.$$

Ce qui donne

$$\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle - \langle x_1(T_0) - x_2(T_0), A\left(x_1(T_0) - x_2(T_0)\right)\rangle \leqslant 0.$$

La relation (2.45) donne

$$\langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle \leqslant 0. \tag{2.46}$$

D'autre part, on a l'opérateur A est $\rho-$coercif, alors

$$\rho\,\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 \leqslant \langle x_1(t) - x_2(t), A\left(x_1(t) - x_2(t)\right)\rangle, \tag{2.47}$$

(2.46) et (2.47) impliquent

$$\|x_1(t) - x_2(t)\| \leqslant 0.$$

En conséquence, on a $x_1(\cdot) = x_2(\cdot)$ et l'unicité des solutions est obtenue. Ce qui complète la preuve. □

Chapitre 3

Résultat d'existence pour un processus de Rafle dégénéré avec une perturbation Lipschitzienne

Ce chapitre est consacré à étudier l'existence (et l'unicité) de la solution du problème (PDP). Grâce à la proposition $(2.2.2)$ précédente, nous allons établir l'existence et l'unicité de la solution de l'inclusion différentielle (PDP), où la perturbation est Lipschitzienne dépendante d'un coté du temps et d'un autre coté de l'état.

$$(PDP): \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T]\,, \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases} \tag{3.1}$$

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.0.1 *Soit H un espace de Hilbert. On considère l'application multivoque $C(\cdot)$ de $I = [T_0, T]$ dans H vérifiant les hypothèses suivantes :*
$(\mathcal{H}_1)$ Pour tout $t \in [T_0, T]$, $C(t)$ sont des sous ensembles convexes fermées non vides de H.
$(\mathcal{H}_2)$ Pour tout $t \in [T_0, T]$, les ensembles $C(t)$ varient d'une façon absolument continue. C'est-à-dire qu'il existe une fonction absolument continue $v(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in H$ et pour tous $s, t \in I$,

$$|d(x, C(t) - d(x, C(s)| \leqslant |v(t) - v(s)| \,. \tag{3.2}$$

Soit une fonction $f : I \times H \longrightarrow H$ telle que pour tout $x \in H, f(\cdot, x)$ soit mesurable sur I et vérifiant
(i) Pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction positive $k_\eta(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que pour tout $t \in I$ et $(x, y) \in B\,[0, \eta] \times B\,[0, \eta]$,

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant k_\eta(t)\, \|x - y\| \,. \tag{3.3}$$

(ii) Il existe une fonction positive $\beta(\cdot) \in L^1([T_0, T]\,, \mathbb{R}^+)$, telle que pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in \bigcup\limits_{s \in I} C(s)$,

$$\|f(t, x(t))\| \leqslant \beta(t)(1 + \|x\|). \tag{3.4}$$

$(\mathcal{H}_3)$ $A : H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire borné symétrique et $\rho-$coercif, c'est-à-dire qu'il existe $\rho > 0$ tels que

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \geqslant \rho\, \|x\|^2 \,, \forall x \in H. \tag{3.5}$$

Alors pour toute valeur initiale $x_0 \in H$ telle que $Ax_0 \in C(T_0)$, l'inclusion différentielle suivante

$$(PDP) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } \; t \in [T_0, T]\,, \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

a une unique solution absolument continue $x(\cdot)$. Cette solution vérifie les inégalités suivantes

$$\|f(t, x(t))\| \leqslant \beta(t)(1 + l) \text{ p.p. } t \in [T_0, T]\,. \tag{3.6}$$

et

$$\|\dot{x}(t) + f(t, x(t))\| \leqslant \frac{\|A\|}{\rho}\beta(t)(1 + l) + \frac{1}{\rho}\,|\dot{v}(t)| \text{ p.p } t \in [T_0, T]\,. \tag{3.7}$$

Telle que

$$l := \|x_0\| + \exp\left(\left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right)\int_{T_0}^{T}\beta(r)dr\right)\int_{T_0}^{T}\left[\left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(s)\,(1 + \|x_0\|) + \frac{1}{\rho}\,|\dot{v}(s)|\right]ds. \tag{3.8}$$

Remarque 3.0.1 *Notre approche pour prouver l'existence d'une solution pour le problème perturbé (PDP) utilisera des subdivisions de I et des estimations en fonction du point initial de chaque sous-intervalle. Donc pour faciliter le principe d'itération, il convient de prendre T_0 au lieu de zéro pour le point initial de I.*

Preuve. La preuve du théorème sera établie à travers plusieurs étapes.

Partie ① : Puisque $\beta(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R})$, on peut donc supposer sans perte de généralité que

$$\int_{T_0}^{T} \beta(s)ds < \frac{\rho}{\rho + \|A\|}. \tag{3.9}$$

Nous allons construire une suite de fonctions dans $\mathcal{C}(I, H)$ qui converge uniformément vers une solution $x(\cdot)$ de (PDP).

Étape ① : Discrétisation de l'intervalle $I = [T_0, T]$:

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on subdivise l'intervalle I en n intervalles de même longueur $h = \frac{T-T_0}{n}$ (appelée subdivision uniforme) et on définit, pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$

$$\begin{cases} t_{k+1}^n := t_k^n + h = T_0 + kh, \\ t_0^n = T_0, t_n^n = T, \\ I_k^n := \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]. \end{cases} \tag{3.10}$$

Telle que

$$T_0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_k^n < t_{k+1}^n < ... < t_n^n = T. \tag{3.11}$$

Étape ② : Construction de la suite des solutions approchées $x_n(\cdot)$.

Nous allons construire une suite de fonctions $(x_n(\cdot))$ en $\mathcal{C}(I, H)$ qui converge uniformément vers une solution $x(\cdot)$ de (PDP). Notre méthode consiste à établir une suite de solutions discrètes $(x_k^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ dans chaque sous intervalle $I_k^n := \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ en utilisant la proposition $(2.2.2)$ (autrement dit la proposition $(2.2.2)$ assure l'existence de la suite $(x_k^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$, et donc l'algorithme est bien défini). En effet, nous procédons comme suit :

Considérons le problème suivant

$$(P_0) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x_0) \text{ p.p } \ t \in \left[T_0, t_1^n\right], \\ x(T_0) = x_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Alors (P_0) est un processus dégénéré perturbé dont la perturbation ne dépend que du temps. Par conséquent, par la proposition $(2.2.2)$, il a une solution absolument continue unique notée par

$$x_0^n(\cdot) : [T_0, t_1^n] \longrightarrow H, \tag{3.13}$$

satisfaisant l'inégalité suivante

$$\|\dot{x}_0^n(t) + f(t, x_0)\| \leqslant \frac{\|A\| \, \|f(t, x_0)\| + |\dot{v}(t)|}{\rho} \text{ p.p } t \in \left[T_0, t_1^n\right].$$

Considérons ensuite le problème suivant

$$(P_1) : \begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x_0^n(t_1^n)) \text{ p.p } \ t \in \left[t_1^n, t_2^n\right], \\ x(t_1^n) = x_0^n(t_1^n). \end{cases} \tag{3.14}$$

Les mêmes arguments que ci-dessus montrent que (P_1) a une solution unique et absolument continue notée par

$$x_1^n(\cdot) : [t_1^n, t_2^n] \longrightarrow H, \tag{3.15}$$

et vérifie l'inégalité suivante

$$\|\dot{x}_1^n(t) + f(t, x_0^n(t_1^n))\| \leqslant \frac{\|A\| . \|f(t, x_0^n(t_1^n))\| + |\dot{v}(t)|}{\rho} \text{ p.p } t \in [t_1^n, t_2^n].$$

Successivement, pour chaque n, il existe une famille finie de fonctions absolument continues

$$x_k^n(\cdot) : \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right] \longrightarrow H, 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{3.16}$$

Tel que pour tout $k \in \{0, ..., n-1\}$, (on pose $x_{-1}^n(T_0) := x_0$, $I_{-1}^n := \{t_0^n = T_0\}$), on a

$$\begin{cases} -\dot{x}_k^n(t) \in N_{C(t)}(Ax_k^n(t)) + f(t, x_{k-1}^n(t_k^n)) \text{ p.p } \ t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right], \\ \\ x_k^n(t_k^n) = x_{k-1}^n(t_k^n). \end{cases} \tag{3.17}$$

En outre,

$$\left\|\dot{x}_k^n(t) + f(t, x_{k-1}^n(t_k^n))\right\| \leqslant \frac{\|A\| \left\|f(t, x_{k-1}^n(t_k^n))\right\| + |\dot{v}(t)|}{\rho} \text{ p.p } t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]. \tag{3.18}$$

Maintenant, nous utilisons la suite discrète $(x_k^n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ pour construire la suite de fonctions $(x_n(\cdot))_n$ de $[T_0, T]$ à H en prenant sa restriction sur chaque intervalle $I_k^n := \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]$ comme suit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n(\cdot) : [T_0, T] \longrightarrow H,$$

tel que

$$x_n(t) := x_k^n(t) \text{ si } t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right], k \in \{0, 1, ..., n-1\}. \tag{3.19}$$

Il est clair d'après cette définition que $x_n(\cdot)$ est absolument continue.

Par ailleurs, soit $\theta_n(\cdot)$ la fonction définie de $[T_0, T]$ vers $[T_0, T]$ par

$$\begin{cases} \theta_n(T_0) := T_0, \\ \\ \theta_n(t) := t_k^n, \text{ si } t \in \left[t_k^n, t_{k+1}^n\right]. \end{cases} \tag{3.20}$$

On obtient par $(3.17), (3.18), (3.19), (3.20)$,

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) \in N_{C(t)}(Ax_n(t)) + f(t, x_n(\theta_n(t))) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T], \\ \\ x_n(T_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.21}$$

et

$$\|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leqslant \frac{\|A\|}{\rho} . \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)| \text{ p.p } t \in [T_0, T] \tag{3.22}$$

Étape 3 : Montrons que la suite $(\dot{x}_n(\cdot))$ est uniformément dominée par une fonction intégrable.

Par construction, on a pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$ et pour presque tout $t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]$,

$$\|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(t_i^n))\| \leqslant \frac{\|A\| \|f(t, x_n(t_i^n))\| + |\dot{v}(t)|}{\rho} = \frac{\|A\|}{\rho} \|f(t, x_n(t_i^n))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)|. \tag{3.23}$$

D'autre part, on a

$$\|\dot{x}_n(t)\| = \|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(t_i^n)) - f(t, x_n(t_i^n))\| \leqslant \|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(t_i^n))\| + \|f(t, x_n(t_i^n))\|.$$

Par (3.23), on obtient

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leqslant \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \|f(t, x_n(t_i^n))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)| \text{ p.p } t \in \left[t_i^n, t_{i+1}^n\right]. \tag{3.24}$$

En utilisant le fait que $x_n(\cdot)$ est absolument continue, on a

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| - \|x_n(t_i^n)\| \leqslant \left\|x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_i^n)\right\| = \left\|\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \dot{x}_n(s)ds\right\| \leqslant \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds.$$

Cela implique que

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leqslant \|x_n(t_i^n)\| + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds. \tag{3.25}$$

Les inégalités (3.24) et (3.25) impliquent que

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leqslant \|x_n(t_i^n)\| + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|f(s, x_n(t_i^n))\| ds + \frac{1}{\rho} \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{v}(s)| ds. \tag{3.26}$$

Par ailleurs, on a

$$\int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds = \int_{t_0^n}^{t_1^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds + \ldots + \int_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds + \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds.$$

En utilisant (3.24), on obtient

$$\int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0^n}^{t_1^n} \left[\left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \|f(s, x_n(t_0^n))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(s)|\right] ds + \int_{t_1^n}^{t_2^n} \left[\left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \|f(s, x_n(t_1^n))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(s)|\right] ds + \ldots +$$

$$+ \int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} \left[\left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \|f(s, x_n(t_i^n))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(s)|\right] ds.$$

Cela implique que

$$\begin{aligned}
\int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n} \|\dot{x}_n(s)\| ds &\leqslant \sum_{k=0}^{i} \left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \left[\left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \|f(s, x_n(t_k^n))\| + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(s)|\right] ds\right) \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i} \left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \frac{1}{\rho} |\dot{v}(s)| ds\right) + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \sum_{k=0}^{i} \left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \|f(s, x_n(t_k^n))\| ds\right) \\
&\leqslant \frac{1}{\rho} \int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n} |\dot{v}(s)| ds + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \sum_{k=0}^{i} \left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \|f(s, x_n(t_k^n))\| ds\right).
\end{aligned}$$

Puisque

$$C(t_k^n) \subset \bigcup_{s \in I} C(s), t_k^n \in I,$$

En utilisant la condition de croissance ii,

$$\|f(t,x(t))\| \leqslant \beta(t)(1+\|x\|), \forall t \in I, \forall x \in \bigcup_{s\in I} C(s),$$

Il s'ensuit que, pour tout $i \in \{0,...,n-1\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{i}\left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} \|f(s,x_n(t_k^n))\|\,ds\right) &\leqslant \sum_{k=0}^{i}\left(\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} (1+\|x_n(t_k^n)\|)\cdot\beta(s)ds\right)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i}\left((1+\|x_n(t_k^n)\|)\cdot\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\beta(s)ds\right)\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{i}\left((1+\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_n(t_k^n)\|)\cdot\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\beta(s)ds\right)\\
&\leqslant (1+\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_n(t_k^n)\|)\cdot\sum_{k=0}^{i}\int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n}\beta(s)ds\\
&\leqslant (1+\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_n(t_k^n)\|)\cdot\int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n}\beta(s)ds.
\end{aligned}$$

Notant donc que $t_0^n = T_0$, nous avons

$$\int_{T_0}^{t_{i+1}^n}\|\dot{x}_n(s)\|\,ds \leqslant \frac{1}{\rho}\int_{T_0}^{t_{i+1}^n}|\dot{v}(s)|\,ds + \left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)(1+\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_n(t_k^n)\|)\int_{T_0}^{t_{i+1}^n}\beta(s)ds. \tag{3.27}$$

En utilisant encore le fait que $x_n(\cdot)$ est absolument continue, nous obtenons

$$x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_0^n) = \int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n}\dot{x}_n(s)ds.$$

Par suite

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| - \|x_n(t_0^n)\| \leqslant \left\|x_n(t_{i+1}^n) - x_n(t_0^n)\right\| = \left\|\int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n}\dot{x}_n(s)ds\right\| \leqslant \int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n}\|\dot{x}_n(s)\|\,ds.$$

Puisque $\|x_n(T_0)\| = \|x_0\|$, on a

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leqslant \|x_0\| + \int_{t_0^n}^{t_{i+1}^n}\|\dot{x}_n(s)\|\,ds.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.27) donne

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leqslant \|x_0\| + \frac{1}{\rho}\int_{T_0}^{t_{i+1}^n}|\dot{v}(s)|\,ds + \left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)(1+\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_n(t_k^n)\|)\int_{T_0}^{t_{i+1}^n}\beta(s)ds. \tag{3.28}$$

En utilisant le fait que

$$\int_{T_0}^{t_{i+1}^n}\beta(s)ds \leqslant \int_{T_0}^{T}\beta(s)ds \quad \text{et} \quad \int_{T_0}^{t_{i+1}^n}|\dot{v}(s)|\,ds \leqslant \int_{T_0}^{T}|\dot{v}(s)|\,ds.$$

On obtient

$$\left\|x_n(t_{i+1}^n)\right\| \leqslant \|x_0\| + \frac{1}{\rho}\int_{T_0}^{T}|\dot{v}(s)|\,ds + \left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)(1+\max_{0\leqslant k\leqslant n}\|x_n(t_k^n)\|)\int_{T_0}^{T}\beta(s)ds. \tag{3.29}$$

La relation (3.29) étant vraie pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, nous avons ce qui suit

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|x_n(t_k^n)\| \leqslant \|x_0\| + \frac{1}{\rho} \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|\, ds + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) (1 + \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|x_n(t_k^n)\|) \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|x_n(t_k^n)\| &\leqslant \|x_0\| + \frac{1}{\rho} \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|\, ds + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds + \\ &+ \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds \left(\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|x_n(t_k^n)\|\right) \end{aligned}$$

Par suite

$$\left(1 - \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \cdot \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds\right) \max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|x_n(t_k^n)\| \leqslant \|x_0\| + \frac{1}{\rho} \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|\, ds + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds.$$

En utilisant l'hypothèse (3.9), on obtient

$$\max_{0 \leqslant k \leqslant n} \|x_n(t_k^n)\| \leqslant M, \tag{3.30}$$

Telle que

$$M := \frac{1}{1 - \left(\frac{\rho + \|A\|}{\rho}\right) \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds} \left[\|x_0\| + \frac{1}{\rho} \int_{T_0}^{T} |\dot{v}(s)|\, ds + \left(1 + \frac{\|A\|}{\rho}\right) \int_{T_0}^{T} \beta(s) ds\right]. \tag{3.31}$$

D'après la condition de croissance de f et (3.20) et (3.30) on a, pour presque tout t et pour tout n,

$$\|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leqslant \beta(t)(1 + \|x_n(\theta_n(t))\|) \leqslant (1 + M)\beta(t). \tag{3.32}$$

Par conséquent (3.22) et (3.32) impliquent pour presque tout t et pour tout n,

$$\|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leqslant \frac{\|A\|}{\rho}(1 + M)\beta(t) + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)|\,.$$

Cela donne

$$\|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leqslant \alpha(t), \tag{3.33}$$

Où

$$\alpha(t) := \frac{\|A\|}{\rho}(1 + M) \cdot \beta(t) + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)|\,. \tag{3.34}$$

Par ailleurs

$$\|\dot{x}_n(t)\| = \|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t))) - f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leqslant \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| + \|\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))\|\,.$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} \|\dot{x}_n(t)\| &\leqslant \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| + \frac{\|A\|}{\rho}(1 + M)\beta(t) + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)| \\ &\leqslant (1 + M)\beta(t) + \frac{\|A\|}{\rho}(1 + M)\beta(t) + \frac{1}{\rho} |\dot{v}(t)|\,. \end{aligned}$$

Ce qui donne pour presque tout t et pour tout n

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leqslant \gamma(t), \tag{3.35}$$

Où

$$\gamma(t) := (1+M)\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t) + \frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right|. \tag{3.36}$$

Étape (4) : Montrons la convergence de la suite $x_n(\cdot)$.

Il suffit de montrer que $x_n(\cdot)$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $(C(I,H), \|\cdot\|_\infty)$, i.e,

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\|_\infty = 0.$$

Telle que

$$\|x_n(\cdot) - x_m(\cdot)\|_\infty = \sup_{t\in[T_0,T]} \|x_n(t) - x_m(t)\|.$$

Soient $m, n \in \mathbb{N}$, alors pour presque tout $t \in [T_0, T]$, on a

$$\begin{cases} -\dot{x}_n(t) - f(t, x_n(\theta_n(t)) \in N_{C(t)}(Ax_n(t)), \\ -\dot{x}_m(t) - f(t, x_m(\theta_m(t)) \in N_{C(t)}(Ax_m(t)). \end{cases} \tag{3.37}$$

En utilisant le fait que le cône normal est monotone, nous obtenons ce qui suit

$$\langle -\dot{x}_n(t) - f(t, x_n(\theta_n(t)) + \dot{x}_m(t) + f(t, x_m(\theta_m(t)), Ax_n(t) - Ax_m(t)\rangle \geqslant 0.$$

Cela implique que

$$\begin{aligned} &\langle \dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)) - \dot{x}_m(t) - f(t, x_m(\theta_m(t)), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right)\rangle = \\ &= \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right)\rangle + \langle f(t, x_n(\theta_n(t)) - f(t, x_m(\theta_m(t)), A\left(x_m(t) - x_n(t)\right)\rangle \\ &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Alors

$$\langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right)\rangle \leqslant \langle f(t, x_n(\theta_n(t)) - f(t, x_m(\theta_m(t)), A\left(x_m(t) - x_n(t)\right)\rangle.$$

Remarquons que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right)\rangle = \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right)\rangle. \tag{3.38}$$

On obtient ce qui suit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right)\rangle &\leqslant \langle f(t, x_n(\theta_n(t)) - f(t, x_m(\theta_m(t)), A\left(x_m(t) - x_n(t)\right)\rangle \\ &\leqslant \|A\| \|x_n(t) - x_m(t)\| \|f(t, x_n(\theta_n(t)) - f(t, x_m(\theta_m(t))\|. \end{aligned} \tag{3.39}$$

D'autre part, on a

$$\|\dot{x}_n(t)\| \leqslant \gamma(t) \text{ p.p } t \in [T_0, T].$$

Or $x_n(\cdot)$ est absolument continue, alors on peut écrire

$$\|x(t)\| - \|x(T_0)\| \leqslant \|x_n(t) - x_n(T_0)\| = \left\| \int_{T_0}^{t} \dot{x}_n(s) ds \right\| \leqslant \int_{T_0}^{t} \|\dot{x}_n(s)\| \, ds \leqslant \int_{T_0}^{t} \gamma(s) ds \leqslant \int_{T_0}^{T} \gamma(s) ds,$$

Cela implique

$$\|x_n(t)\| - \|x_n(T_0)\| \leqslant \int_{T_0}^{T} \gamma(s) ds.$$

Cela donne

$$\|x_n(t)\| \leqslant \|x_n(T_0)\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(s) ds.$$

Par suite pour tout $t \in [T_0, T]$,

$$\|x_n(t)\| \leqslant \eta, \tag{3.40}$$

Telle que

$$\eta := \|x_0\| + \int_{T_0}^{T} \gamma(s) ds. \tag{3.41}$$

Ceci nous donne pour tout $t \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n(t) \in B[0, \eta]. \tag{3.42}$$

Par conséquent

$$x_m(t), x_n(\theta_n(t)), x_m(\theta_m(t)) \in B[0, \eta]. \tag{3.43}$$

En appliquant la Lipschitzité de f avec $k_\eta(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}^+)$ comme constante de Lipschitz, sur le sous-ensemble borné $B[0, \eta]$ et en utilisant (3.39), il s'ensuit que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \langle x_n(t) - x_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right) \rangle \leqslant \|A\| \cdot \|x_n(t) - x_m(t)\| \cdot k(t) \cdot \|x_n(\theta_n(t)) - x_m(\theta_m(t))\|$$

$$\leqslant k(t) \cdot \|A\| \cdot \|x_n(t) - x_m(t)\| \cdot [\|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - x_m(t)\| + \|x_m(t) - x_m(\theta_m(t))\|]$$

$$\leqslant k(t) \cdot \|A\| \cdot \|x_n(t) - x_m(t)\|^2 + k(t) \cdot \|A\| \cdot \|x_n(t) - x_m(t)\| \cdot \left(\|x_n(\theta_n(t)) - x_n(t)\| + \|x_m(t) - x_m(\theta_m(t))\|\right).$$

Par (3.35), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout t

$$\|x_n(t) - x_n(\theta_n(t))\| = \left\| \int_{\theta_n(t)}^{t} \dot{x}_n(s) ds \right\| \leqslant \int_{\theta_n(t)}^{t} \|\dot{x}_n(s)\| \, ds \leqslant \int_{\theta_n(t)}^{t} \gamma(s) ds.$$

On obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \langle x_n(t) - x_m(t), A\left(x_n(t) - x_m(t)\right) \rangle \leqslant k(t) \|A\| \|x_n(t) - x_m(t)\|^2 +$$

$$+ k(t) \|A\| \|x_n(t) - x_m(t)\| \left(\int_{\theta_n(t)}^{t} \gamma(s) ds + \int_{\theta_m(t)}^{t} \gamma(s) ds \right).$$

De plus, par (3.42), on a

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leqslant \|x_n(t)\| + \|x_m(t)\| \leqslant \eta + \eta,$$

On obtient

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leqslant 2\eta.$$

Cela donne que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle \leqslant k(t)\|A\|\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 +$$

$$+2\eta k(t)\|A\|\left(\int_{\theta_n(t)}^t \gamma(s)ds + \int_{\theta_m(t)}^t \gamma(s)ds\right),$$

Par suite

$$\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle \leqslant 2k(t)\|A\|\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 +$$

$$+4\eta k(t)\|A\|\left(\int_{\theta_n(t)}^t \gamma(s)ds + \int_{\theta_m(t)}^t \gamma(s)ds\right),$$

Par conséquent

$$\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle \leqslant 2\|A\|k(t)\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 + G_{n,m}(t), \tag{3.44}$$

Où

$$G_{n,m}(t) := 4\eta k(t)\|A\|\left(\int_{\theta_n(t)}^t \gamma(s)ds + \int_{\theta_m(t)}^t \gamma(s)ds\right). \tag{3.45}$$

D'autre part, on a A est $\rho-$coercif, alors

$$\|x_n(t) - x_m(t)\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho}\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle.$$

Ceci et (3.44) impliquent que

$$\frac{d}{dt}\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle \leqslant \frac{2}{\rho}\|A\|k(t)\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle + G_{n,m}(t).$$

Il découle du lemme de Gronwall que

$$\begin{aligned}
\langle x_n(t) - x_m(t), A(x_n(t) - x_m(t))\rangle &\leqslant \int_{T_0}^t G_{n,m}(s)\exp\left(\int_s^t \frac{2}{\rho}\|A\|k(r)dr\right)ds \\
&\leqslant \int_{T_0}^t G_{n,m}(s)\exp\left(\frac{2}{\rho}\|A\|\int_{T_0}^T k(r)dr\right)ds \\
&\leqslant \int_{T_0}^t G_{n,m}(s)\exp\left(\frac{2}{\rho}\|A\|\|k\|_{L^1([T_0,T],\mathbb{R}^+)}\right)ds \\
&\leqslant \lambda\int_{T_0}^t G_{n,m}(s)ds,
\end{aligned}$$

Où

$$\lambda := \exp\left(\frac{2}{\rho}\left\|A\right\|\left\|k\right\|_{L^1([T_0,T],\mathbb{R}^+)}\right). \tag{3.46}$$

Il est clair que

$$\int_{T_0}^{t} G_{n,m}(s)ds \leqslant \int_{T_0}^{T} G_{n,m}(s)ds,$$

Ce qui donne

$$\langle x_n(t)-x_m(t), A\left(x_n(t)-x_m(t)\right)\rangle \leqslant \lambda \int_{T_0}^{T} G_{n,m}(s)ds. \tag{3.47}$$

Comme $\gamma(\cdot) \in L^1(I,\mathbb{R}^+)$ et pour chaque $t \in I$, on a

$$\theta_n(t), \theta_m(t) \longrightarrow t,$$

Alors pour presque tout $t \in [T_0, T]$

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} G_{n,m}(t) = 0. \tag{3.48}$$

Par ailleurs, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{\theta_n(t)}^{t} \gamma(s)ds \leqslant \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds \text{ et } \int_{\theta_m(t)}^{t} \gamma(s)ds \leqslant \int_{T_0}^{T} \gamma(s)ds. \tag{3.49}$$

Les relations (3.45) et (3.49) impliquent

$$|G_{n,m}(t)| \leqslant 8\eta\left\|A\right\|\left(\int_{T_0}^{T}\gamma(s)ds\right)k(t). \tag{3.50}$$

Alors il résulte du théorème de convergence dominé que pour tout $t \in [T_0, T]$

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \int_{T_0}^{T} G_{n,m}(t)dt = 0. \tag{3.51}$$

Par (3.47) et (3.51), on obtient

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \langle x_n(t)-x_m(t), A\left(x_n(t)-x_m(t)\right)\rangle \leqslant 0. \tag{3.52}$$

De plus, comme A est $\rho-$coercitif, alors

$$\left\|x_n(t)-x_m(t)\right\|^2 \leqslant \frac{1}{\rho}\left\langle x_n(t)-x_m(t), A\left(x_n(t)-x_m(t)\right)\right\rangle. \tag{3.53}$$

De (3.52) et (3.53), on obtient

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \left\|x_n(t)-x_m(t)\right\| = 0.$$

L'égalité ci-dessus étant vraie pour tout $t \in [T_0, T]$, il s'ensuit que

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \sup_{t\in[T_0,T]} \left\|x_n(t)-x_m(t)\right\| = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n,m\longrightarrow\infty} \left\|x_n(\cdot)-x_m(\cdot)\right\|_\infty = 0.$$

Alors, la suite $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\left(\mathcal{C}\left([T_0,T],H\right),\|\cdot\|_\infty\right)$ et donc converge uniformément vers une fonction $x(\cdot)\in\mathcal{C}([T_0,T],H)$, telle que $x(T_0)=x_0$ et $Ax_0\in C(T_0)$.

Étape 5 : Montrons que $x(\cdot)$ est absolument continue.

Nous avons pour presque tout $t\in I$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$\|\dot{x}_n(t)\|\leqslant(1+M)\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)+\frac{1}{\rho}|\dot{v}(t)|:=\gamma(t). \tag{3.54}$$

On peut donc extraire une sous suite de $(\dot{x}_n(\cdot))$ et sans perte de généralité, on peut supposer que cette sous suite encore notée $(\dot{x}_n(\cdot))$ et qui converge faiblement dans $L^1(I,H)$ vers une fonction notée $g(\cdot)\in L^1(I,H)$. Cela équivaut à ce qui suit

$$\int_{T_0}^{T}\langle\dot{x}_n(s),h(s)\rangle ds\longrightarrow\int_{T_0}^{T}\langle g(s),h(s)\rangle ds,\forall h\in L^\infty(I,H).$$

Maintenant pour tout $t\in[T_0,T]$, en fixant $z\in H$ et en écrivant

$$\int_{T_0}^{T}\left\langle\dot{x}_n(s),z.\chi_{[T_0,t]}(s)\right\rangle ds=\int_{T_0}^{t}\langle\dot{x}_n(s),z\rangle ds=<\int_{T_0}^{t}\dot{x}_n(s)ds,z>,$$

Telle que $\chi_{[T_0,t]}(\cdot)$ est la fonction caractéristique de $[T_0,t]$ définie par

$$\chi_{[T_0,t]}(t)=\begin{cases}1,\text{ si } t\in[T_0,t],\\ \\ 0,\text{ si } t\notin[T_0,t].\end{cases} \tag{3.55}$$

D'autre part, on a

$$\int_{T_0}^{T}\left\langle g(s),z.\chi_{[T_0,t]}(s)\right\rangle ds=\int_{T_0}^{t}\langle g(s),z\rangle ds=<\int_{T_0}^{t}g(s)ds,z>.$$

D'après la convergence faible de $(\dot{x}_n(\cdot))$, nous déduisons que

$$\int_{T_0}^{t}\dot{x}_n(s)ds\longrightarrow\int_{T_0}^{t}g(s)ds\text{ faiblement dans } H.$$

Cela implique que

$$x_n(T_0)+\int_{T_0}^{t}\dot{x}_n(s)ds\longrightarrow x_n(T_0)+\int_{T_0}^{t}g(s)ds\text{ faiblement dans } H.$$

En utilisant le fait que $x_n(\cdot)$ est absolument continue, on obtient

$$x_n(t)=x_n(T_0)+\int_{T_0}^{t}\dot{x}_n(s)ds\longrightarrow x(T_0)+\int_{T_0}^{t}g(s)ds\text{ faiblement dans } H.$$

Comme pour tout $t\in[T_0,T]$

$$x_n(t)\longrightarrow x(t)\text{ fortement dans } H,$$

Alors

$$x_n(t)\longrightarrow x(t)\text{ faiblement dans } H.$$

Il découle de l'unicité de la limite que

$$x(t) = x(T_0) + \int_{T_0}^{t} g(s)ds.$$

Par consequent, $x(\cdot)$ est absolument continue avec $\dot{x}(t) = g(t)$, pour presque tout $t \in [T_0, T]$.

Étape 6 : Montrons que $x(\cdot)$ est une solution de (PDP) sur $[T_0, T]$.

Comme $\theta_n(t) \longrightarrow t$ pour tout $t \in I$, et $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers $x(\cdot)$, alors $x_n(\theta_n(t)) \longrightarrow x(t)$ pour tout $t \in I$. D'autre part, la continuité de la fonction $f(t, \cdot)$ sur $B[0, \eta]$ ($x_n(\theta_n(t)) \in B[0, \eta]$) assure que, pour tout $t \in I$,

$$f(t, x_n(\theta_n(t))) \longrightarrow f(t, x(t)) \text{ dans } H. \tag{3.56}$$

Ceci et (3.32) impliquent que

$$\|f(t, x(t))\| \leqslant (1 + M).\beta(t) \text{ p.p } t \in I.$$

Maintenant, on montre que $x(\cdot)$ est une solution de (PDP). Autrement dit

$$\dot{x}(t) + f(t, x(t)) \in -N_{C(t)}(Ax(t)) \;\text{ p.p } t \in [T_0, T].$$

Ceci est équivalent à ce qui suit

$$\exists N \subset I : \mu(N) = 0 \text{ et } \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \in -N_{C(t)}(Ax(t)), \forall t \in I \backslash N.$$

On définit

$$\zeta_n(\cdot) := \dot{x}_n(\cdot) + f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot))) = \zeta_n^{(1)}(\cdot) + \zeta_n^{(2)}(\cdot). \tag{3.57}$$

Telles que

$$\begin{cases} \zeta_n^{(1)}(\cdot) := \dot{x}_n(\cdot), \\ \\ \zeta_n^{(2)}(\cdot) := f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot))). \end{cases} \tag{3.58}$$

Nous avons montré à **l'étape** 5 que $\zeta_n^{(1)}(\cdot) = \dot{x}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{x}(\cdot)$ dans $L^1(I, H)$. En outre, pour presque tout $t \in I$, et pour tout n,

$$\left\|\zeta_n^{(2)}(t)\right\| = \|f(t, x_n(\theta_n(t)))\| \leqslant (1 + M)\beta(t), \beta(\cdot) \in L^1(I, \mathbb{R}^+).$$

Il s'ensuit que

$$\int_{T_0}^{T} \left\|\zeta_n^{(2)}(t)\right\| dt \leqslant (1 + M) \int_{T_0}^{T} \beta(t)dt = (1 + M) \|\beta\|_{L^1(I,\mathbb{R}^+)} .$$

Par conséquent $\zeta_n^{(2)}(\cdot)$ est une suite de $L^1(I, H)$.

D'autre part, on a

$$\zeta_n^{(2)}(t) = f(t, x_n(\theta_n(t))) \longrightarrow \zeta^{(2)}(t) := f(t, x(t)) \text{ dans } H, \tag{3.59}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il s'en suit que

$$\zeta^2(\cdot) \in L^1(I, H), \tag{3.60}$$

et

$$\left\|\zeta_n^{(2)}(\cdot) - \zeta^{(2)}(\cdot)\right\|_{L^1(I,H)} \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \zeta_n^{(2)}(\cdot) \longrightarrow \zeta^{(2)}(\cdot) \text{ fortement dans } L^1(I, H),$$

Par suite

$$f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot))) \longrightarrow f(\cdot, x(\cdot)) \text{ dans } L^1(I, H),$$

Cela implique que

$$f(\cdot, x_n(\theta_n(\cdot))) \longrightarrow f(\cdot, x(\cdot)) \text{ faiblement dans } L^1(I, H).$$

Par conséquent

$$\zeta_n(\cdot) := \dot{x}_n(\cdot) + f(., x_n(\theta_n(\cdot))) \longrightarrow \dot{x}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot)) \text{ faiblement dans } L^1(I, H). \tag{3.61}$$

En appliquant le lemme de Mazur à travers (3.61), on peut extraire une sous suite de $\zeta_n(\cdot)$ et sans perte de généralité, on peut supposer que cette sous suite encore notée $\zeta_n(\cdot)$ telles que :

a Pour presque tout $t \in I$,

$$\zeta_n(t) \in co\left\{\dot{x}_k(t) + f(t, x_k(\theta_k(t))), k \geqslant n\right\}. \tag{3.62}$$

b Cette suite converge fortement dans $L^1(I, H)$ vers $\dot{x}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot))$. Autrement dit

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|\zeta_n(\cdot) - (\dot{x}(\cdot) + f(\cdot, x(\cdot)))\|_{L^1(I,H)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{T_0}^{T} \|\zeta_n(t) - (\dot{x}(t) + f(t, x(t)))\|_H = 0.$$

c Pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{x}(t) + f(t, x(t)) \in \bigcap_n \overline{co}\left\{\dot{x}_k(t) + f(t, x_k(\theta_k(t))), k \geqslant n\right\}. \tag{3.63}$$

Par (3.21), on a pour presque tout $t \in I$,

$$\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t))) \in -N_{C(t)}(Ax_n(t)), \tag{3.64}$$

et par (3.33), on a

$$\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t))) \in \alpha(t)\mathbb{B}_H, \tag{3.65}$$

Où

$$\alpha(t) := \frac{\|A\|}{\rho}(1 + M)\beta(t) + \frac{1}{\rho}|\dot{v}(t)|.$$

Les relations $(3.64), (3.65)$ impliquent

$$-\frac{\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))}{\alpha(t)} \in N_{C(t)}(Ax_n(t)) \cap \mathbb{B}_H.$$

En appliquant le théorème (1.3.5), il s'en suit que

$$\frac{\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))}{\alpha(t)} \in \left(-\partial d_{C(t)}(Ax_n(t))\right).$$

Il en résulte que, pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$

$$\left\langle \xi, \frac{\dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t)))}{\alpha(t)} \right\rangle \leqslant \sigma(-\partial d_{C(t)}(Ax_n(t), \xi).$$

Par suite

$$\langle \xi, \dot{x}_n(t) + f(t, x_n(\theta_n(t))) \rangle \leqslant \alpha(t).\sigma(-\partial d_{C(t)}(x_n(t)), \xi), \tag{3.66}$$

Où $\sigma(-\partial d_{C(t)}(x_n(t)), \cdot)$ est la fonction support associée à $\left(-\partial d_{C(t)}(x_n(t))\right)$.

Par ailleurs, de (3.63) et (3.66), on peut déduire que pour presque tout $t \in I$, et pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle \leqslant \inf_n \sup_{k \geqslant n} \langle \xi, \dot{x}_k(t) + f(t, x_k(\theta_k(t))) \rangle \leqslant \inf_n \sup_{k \geqslant n} \left(\alpha(t).\sigma(-\partial d_{C(t)}(Ax_k(t)), \xi)\right),$$

On obtient

$$\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle \leqslant \alpha(t).\inf_n \sup_{k \geqslant n} \sigma(-\partial d_{C(t)}(Ax_k(t)), \xi).$$

Ce qui donne

$$\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle \leqslant \alpha(t) \limsup_{n \longrightarrow \infty} \sigma(-\partial d_{C(t)}(Ax_n(t)), \xi).$$

En outre, le fait que la fonction distance $d_{C(\cdot)}(\cdot)$ est Lipschitzienne (en particulier localement Lipschitzienne), alors pour tout $t \in I$, $\sigma(-\partial d_{C(t)}(\cdot), \xi)$ est semicontinue supérieurement sur H. Ce qui donne , pour presque tout $t \in I$, pour tout $\xi \in H$,

$$\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle \leqslant \alpha(t)\sigma(-\partial d_{C(t)}(Ax(t)), \xi).$$

Cela implique

$$\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle - \alpha(t)\sigma(-\partial d_{C(t)}(Ax(t)), \xi) \leqslant 0,$$

Par suite

$$\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle - \sigma(-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(x(t)), \xi) \leqslant 0.$$

Puisque ξ est choisi arbitrairement, nous avons

$$\sup_{\xi \in H} \left[\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t)) \rangle - \sigma(-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t)), \xi)\right] \leqslant 0. \tag{3.67}$$

En utilisant le théorème (1.3.2), le fait que $\partial d_{C(t)}(Ax(t))$ est un sous ensemble convexe fermé de H, il découle que

$$\begin{aligned} d\left(\dot{x}(t) + f(t, x(t)), -\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t))\right) &= \sup_{\xi \in \mathbb{B}_H} \left\{\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t))) \rangle - \sigma(-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t)), \xi)\right\} \\ &\leqslant \sup_{\xi \in H} \left\{\langle \xi, \dot{x}(t) + f(t, x(t))) \rangle - \sigma(-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t)), \xi)\right\}. \end{aligned}$$

Il découle de ceci et (3.67) que

$$d\left(\dot{x}(t)+f(t,x(t)),-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t))\right)\leqslant 0.$$

Ce qui donne

$$d\left(\dot{x}(t)+f(t,x(t)),-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t))\right)=0$$

Par conséquent

$$\dot{x}(t)+f(t,x(t))\in\overline{\left(-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t))\right)}=\left(-\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t))\right). \qquad (3.68)$$

Ce qui donne

$$-\dot{x}(t)-f(t,x(t))\in\alpha(t)\partial d_{C(t)}(Ax(t)).$$

Par ailleurs, pour tout $t\in I$

$$\partial d_{C(t)}(Ax(t))\subset N_{C(t)}(A(x(t)).$$

On déduit de la définition du cône normal et le fait que $\alpha(t)\geqslant 0$, on a

$$-\dot{x}(t)-f(t,x(t))\in N_{C(t)}(Ax(t))\text{ p.p }t\in I.$$

On observe que

$$x(T_0)=\lim_{n\longrightarrow\infty}x_n(T_0)=x_0.$$

Par conséquent, la fonction $x(\cdot)$ est une solution de (PDP).

Étape 7 : Montrons les estimations (3.6) et (3.7)**.**

Soit $x(\cdot)$ la solution unique de (PDP). Selon la proposition (2.2.2), on a

$$\|\dot{x}(t)+f(t,x(t))\|\leqslant\frac{\|A\|}{\rho}\|f(t,x(t))\|+\frac{1}{\rho}|\dot{v}(t)|\text{ p.p }[T_0,T]. \qquad (3.69)$$

D'autre part, on a

$$\|\dot{x}(t)\|=\|\dot{x}(t)+f(t,x(t))-f(t,x(t))\|\leqslant\|\dot{x}(t)+f(t,x(t))\|+\|f(t,x(t)\|.$$

Ce qui donne

$$\|\dot{x}(t)\|\leqslant\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\|f(t,x(t))\|+\frac{1}{\rho}|\dot{v}(t)|.$$

Par conséquent, d'après la condition de croissance de f, on a

$$\|\dot{x}(t)\|\leqslant\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\left(1+\|x(t)\|\right)+\frac{1}{\rho}|\dot{v}(t)|\quad\text{p.p }t\in[T_0,T]. \qquad (3.70)$$

Par ailleurs, puisque la fonction $x(\cdot)$ est absolument continue, alors on déduit

$$\|x(t)\|\leqslant\|x_0\|+\int_{T_0}^{t}\|\dot{x}(s)\|\,ds, \qquad (3.71)$$

Ce qui donne

$$1+\|x(t)\| \leqslant 1+\|x_0\|+\int_{T_0}^{t}\|\dot{x}(s)\|\,ds.$$

Il s'en suit que

$$\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\left(1+\|x(t)\|\right)+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right| \leqslant \left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\left(1+\|x_0\|+\int_{T_0}^{t}\|\dot{x}(s)\|\,ds\right)+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right|.$$

Cela donne

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\left(1+\|x(t)\|\right)+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right| \leqslant\\ &\leqslant \left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\left(1+\|x_0\|\right)+\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\int_{T_0}^{t}\|\dot{x}(s)\|\,ds+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right| \qquad (3.72)\end{aligned}$$

Les inégalités (3.70) et (3.72) impliquent que

$$\|\dot{x}(t)\| \leqslant \left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\int_{T_0}^{t}\|\dot{x}(s)\|\,ds+\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(t)\left(1+\|x_0\|\right)+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(t)\right| \text{ p.p } t\in[T_0,T]. \quad (3.73)$$

Par conséquent, le lemme de Gronwall garantit que, pour tout $t\in I$

$$\int_{T_0}^{t}\|\dot{x}(s)\|\,ds \leqslant \int_{T_0}^{t}\left(\left[\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(s)\left(1+\|x_0\|\right)+\frac{1}{\rho}.\left|\dot{v}(s)\right|\right]\exp\left(\int_{s}^{t}\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(r)dr\right)\right)ds. \quad (3.74)$$

Il découle de ceci et (3.71) que

$$\|x(t)\| \leqslant \|x_0\|+\int_{T_0}^{t}\left(\left[\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(s)\left(1+\|x_0\|\right)+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(s)\right|\right]\exp\left(\int_{s}^{t}\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(r)dr\right)\right)ds.$$

Par ailleurs

$$\int_{s}^{t}\beta(r)dr \leqslant \int_{T_0}^{T}\beta(r)dr \text{ et } \int_{T_0}^{t}\left|\dot{v}(s)\right|ds \leqslant \int_{T_0}^{T}\left|\dot{v}(s)\right|dr \quad (3.75)$$

Cela implique

$$\exp\left(\int_{s}^{t}\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(r)dr\right) \leqslant \exp\left(\int_{T_0}^{T}\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(r)dr\right).$$

On obtient pour tout $t\in[T_0,T]$

$$\|x(t)\| \leqslant l, \quad (3.76)$$

Où

$$l := \|x_0\|+\exp\left(\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\int_{T_0}^{T}\beta(r)dr\right)\int_{T_0}^{T}\left[\left(1+\frac{\|A\|}{\rho}\right)\beta(s)\left(1+\|x_0\|\right)+\frac{1}{\rho}\left|\dot{v}(s)\right|\right]ds.$$

De plus pour presque tout $t\in[T_0,T]$, on a

$$\|f(t,x(t))\| \leqslant \beta(t)(1+\|x(t)\|).$$

Cela implique

$$\|f(t,x(t))\| \leqslant \beta(t)(1+l) \text{ p.p } t\in[T_0,T]. \quad (3.77)$$

Par (3.69) et (3.77), on obtient

$$\|\dot{x}(t) + f(t, x(t))\| \leqslant \frac{\|A\|}{\rho}\beta(t)(1+l) + \frac{1}{\rho}|\dot{v}(t)| \text{ p.p } t \in [T_0, T]. \tag{3.78}$$

Étape ⑧ : Montrons l'unicité de la solution du problème (PDP).

Soient $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$ deux solutions de l'inclusion différentielle (PDP), alors

$$\begin{cases} -\dot{x}_1(t) - f(t, x_1(t)) \in N_{C(t)}(Ax_1(t)) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T], \\ x_1(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} -\dot{x}_2(t) - f(t, x_2(t)) \in N_{C(t)}(Ax_2(t)) \text{ p.p } \ t \in [T_0, T], \\ x_2(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Par la monotonie du cône normal de $C(t)$, on a

$$\langle -\dot{x}_1(t) - f(t, x_1(t)) + \dot{x}_2(t) + f(t, x_2(t)), Ax_1(t) - Ax_2(t)\rangle \geqslant 0.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), A(x_1(t) - x_2(t))\rangle &\leqslant \langle f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t)), A(x_2(t) - x_1(t))\rangle \\ &\leqslant \|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \, \|A(x_2(t) - x_1(t))\|. \end{aligned}$$

Puisque A est un opérateur linéaire borné et f est $k(\cdot)-$Lipschitzienne sur un ensemble borné, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t), A(x_1(t) - x_2(t))\rangle &\leqslant \|A\| \, \|x_1(t) - x_2(t)\| \, \|f(t, x_1(t)) - f(t, x_2(t))\| \\ &\leqslant \|A\| \, k(t) \, \|x_1(t) - x_2(t)\|^2. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle x_1(t) - x_2(t), A(x_1(t) - x_2(t))\rangle \leqslant \|A\| \, k(t) \, \|x_1(t) - x_2(t)\|^2. \tag{3.79}$$

En utilisant l'inégalité (3.79), le fait que l'opérateur A est $\rho-$coercif, il découle que

$$\frac{d}{dt}\langle x_1(t) - x_2(t), A(x_1(t) - x_2(t))\rangle \leqslant \frac{2}{\rho}\|A\| \, k(t) \langle x_1(t) - x_2(t), A(x_1(t) - x_2(t))\rangle. \tag{3.80}$$

On peut donc appliquer le lemme de Gronwall à travers (3.80), on obtient

$$\langle x_1(t) - x_2(t), A(x_1(t) - x_2(t))\rangle \leqslant 0.$$

Puisque A est $\rho-$coercif, cela implique clairement que

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|^2 = 0.$$

Par suite

$$x_1(t) = x_2(t).$$

Ce qui justifie l'unicité.

Partie 2 **:** Supposons maintenant que

$$\int_{T_0}^{T} \beta(s)ds \geqslant \frac{\rho}{\rho + \|A\|}. \tag{3.81}$$

Dans ce cas, on considère une subdivision (plus fine) de $[T_0, T]$ donnée par

$$T_0 < T_1 < ... < T_n = T,$$

tel que, pour tout $i \in \{0, 1, ..., n-1\}$,

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} \beta(s)ds < \frac{\rho}{\rho + \|A\|}, \tag{3.82}$$

et d'après **la partie** 1, il existe une fonction absolument continue sur $[T_0, T]$ solution de problème (PDP). L'unicité découle de la monotonie du cône normal et de la condition de la Lipschitzité de f.

Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Chapitre 4

Problèmes de complémentarité différentielle et Inégalités variationnelles d'évolution quasi-statiques

Le but de ce chapitre est de donner des applications illustratives de nos résultats principaux donnés précédemment. Précisément, on va donner une application aux problèmes de complémentarité différentielle (DCP) et aux inégalités variationnelles d'évolution quasi-statiques permettant d'établir les théorèmes d'existence $(3.0.1)$ et $(2.1.2)$.

4.1 Application aux problèmes de complémentarité différentielle (DCP)

Dans cette section, nous illustrons le lien entre le processus de Rafle dégénéré et les systèmes dynamiques non lisses à travers des problèmes de complémentarité différentielle (ou dynamique). Ces types de problèmes ont fait l'objet d'un fort intérêt en raison de leurs applications dans divers domaines tels que la mécanique, les circuits électriques, la science des transports, les systèmes de commande, etc (voir [26], [27], [73], [35]).

Nous allons appliquer le Théorème $(3.0.1)$ pour établir un résultat d'existence et d'unicité d'un problème de complémentarité différentielle.

Supposons que $K \subset H$ est un cône convexe fermé et

$$K^* = \{h \in H : \langle h, k \rangle \geqslant 0, \forall k \in K\},$$

son dual cône. Soient $I = [0, T]$ un intervalle, $A : H \longrightarrow H$ un opérateur satisfaisant $(\mathcal{H}_3)$ et $f : [0, T] \times H \longrightarrow H$ une application univoque vérifiant les conditions (3.3) et (3.4) du Théorème $(3.0.1)$. Soit $\lambda(\cdot) : I \longrightarrow H$ une fonction absolument continue telle que $\lambda(0) = 0$. Un problème de complémentarité différentielle se compose des équations différentielles ordinaires couplées à des conditions de complémentarité et se présente sous la forme suivante :

Trouver une fonction absolument continue $x(\cdot) : I \longrightarrow H$ *et une fonction intégrable* $u(\cdot) : I \longrightarrow H$ *satisfaisant pour presque tout* $t \in I$ *le problème de complémentarité différentielle suivant*

$$(DCP1) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) + u(t), \\ K^* \ni u(t) \perp v(t) \in K, \\ v(t) = Ax(t) + \lambda(t), \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in K. \end{cases}$$

La deuxième ligne est appelée relation de complémentarité entre $u(t)$ et $v(t)$. Nous pouvons utiliser la proposition $(1.3.3)$ pour prouver que la relation de complémentarité peut être écrite de manière équivalente comme suit

$$K^* \ni u(t) \perp v(t) \in K \Longleftrightarrow -u(t) \in N_K(v(t)). \tag{4.1}$$

Par conséquent, le problème $(DCP1)$ équivaut à trouver $x(\cdot) : I \longrightarrow H$ tel que

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_K(Ax(t) + \lambda(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } t \in I, \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in K. \end{cases} \tag{4.2}$$

En effet, pour presque tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} -u(t) \quad &\in \quad N_K(v(t)) \Longleftrightarrow f(t, x(t)) - \dot{x}(t) \in N_K\left(Ax(t) + \lambda(t)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in -N_K\left(Ax(t) + \lambda(t)\right) + f(t, x(t)). \end{aligned}$$

D'autre part, on a $x(0) = x_0, Ax_0 \in K$.

Maintenant, introduisons l'application multivoque $C(\cdot)$ définie par

$$C(t) := K - \lambda(t) \text{ pour tout } t \in I. \tag{4.3}$$

En utilisant la proposition $(1.3.1)$ et la formule (4.3), on peut encore réécrire le problème $(DCP1)$, sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } t \in I, \\ \\ x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0). \end{cases} \tag{4.4}$$

En effet, pour presque tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) \quad &\in \quad -N_K\left(Ax(t) + \lambda(t)\right) + f(t, x(t)) \Longleftrightarrow \dot{x}(t) \in -N_{C(t)+\lambda(t)}\left(Ax(t) + \lambda(t)\right) + f(t, x(t)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in -N_{C(t)+\lambda(t)-\lambda(t)}\left(Ax(t)\right) + f(t, x(t)) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}\left(Ax(t)\right) + f(t, x(t)). \end{aligned}$$

Telle que $x(0) = x_0, Ax_0 \in C(0)$.

Clairement, toutes les hypothèses du Théorème $(3.0.1)$ sont satisfaites. En effet, on a $A : H \longrightarrow H$ est un opérateur satisfaisant $(\mathcal{H}_3)$ et $f : [0, T] \times H \longrightarrow H$ une application univoque vérifiant les conditions (3.3) et (3.4) du Théorème $(3.0.1)$. Montrons maintenant les hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$.

$\mathcal{H}_1$ Il est facile de voir que pour tout $t \in [0,T]$, les sous ensembles $(C(t))_t$ de H sont convexes fermés où

$$C(t) := K - \lambda(t).$$

Ce qui traduit bien l'hypothèse$(\mathcal{H}_1)$.

$\mathcal{H}_2$ Montrons que l'application multivoque $t \longmapsto C(t)$ bouge de façon absolument continue.
Soient $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, alors en utilisant la proposition $(2.2.1)$ et le fait que la fonction disatence $d_B(\cdot, B)$ est Lipschitzienne de rapport 1 avec $B \subset H$, il s'en suit que

$$\begin{aligned} d_H(C(t), C(s)) &= d_H(K - \lambda(t), K - \lambda(s)) = \sup_{x\in H} |d(x, K - \lambda(t)) - d(x, K - \lambda(s))| \\ &= \sup_{x\in H} |d(x + \lambda(t), K) - d(x + \lambda(s), K)| \\ &\leqslant \sup_{x\in H} \|\lambda(t) - \lambda(s)\| \\ &\leqslant \|\lambda(t) - \lambda(s)\|. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\lambda(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ est une fonction absolument continue telle que $\lambda(0) = 0$, alors d'après le Théorème $(1.5.2)$, il existe une application $w(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ telle que pour tout $t_0, t \in [0,T]$,

$$\lambda(t) = \lambda(t_0) + \int_{t_0}^{t} w(r)dr. \tag{4.5}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} d_H(C(t), C(s)) &\leqslant \|\lambda(t) - \lambda(s)\| \\ &\leqslant \left\| \int_{t_0}^{t} w(r)dr - \int_{t_0}^{s} w(r)dr \right\| \\ &\leqslant \left\| \int_{s}^{t} w(r)dr \right\| \\ &\leqslant \int_{s}^{t} \|w(r)\| \, dr \\ &\leqslant \pi(t) - \pi(s). \end{aligned}$$

Telle que

$$\pi(t) = \int_{0}^{t} \|w(r)\| \, dr. \tag{4.6}$$

alors en utilisant encore le Théorème $(1.5.2)$, on en déduit que $\pi(\cdot)$ est absolument continue. Par conséquent $C(t)$ bouge de façon absolument continue. Ce qui traduit bien l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$.
Alors toutes les hypothèses du Théorème $(3.0.1)$ sont satisfaites. Cela assure l'existence et l'unicité de la solution pour $(DCP1)$.

4.2 Application aux inégalités variationnelles d'évolution quasi-statiques

Dans cette section nous allons appliquer les résultats présentés au chapitre 2, en particulier le Théorème $(2.1.2)$ pour prouver l'existence d'une solution unique pour l'inégalité variationnelle (IVE) suivante :

Trouver une application $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ *telle que* $\dot{x}(t) \in K \subset H$ *pour presque tout* $t \in [0,T]$ *et*

$$\begin{cases} a(x(t), y - \dot{x}(t)) + j(y) - j(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t), y - \dot{x}(t) \rangle, \forall y \in K \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{IVE}$$

Où $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, continue et symétrique et $j : K \longrightarrow \mathbb{R}, f : [0,T] \longrightarrow H$.

Le problème (IVE) s'appelle une inégalité variationnelle d'évolution parce qu'elle invoque la dérivée $\dot{x}(t)$ de la fonction inconnue $x(\cdot)$ par rapport au temps, alors il est naturel de considérer une condition initiale $x(0) = x_0 \in H$.

Pour résoudre ce problème, on va suivre la méthode utilisée par Adly et Haddad ([4]) où ces auteurs ont démontré le résultat d'existence et d'unicité sous certaines conditions de solutions pour le problème suivant :

Trouver une application $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ *telle que* $\dot{x}(t) \in K \subset H$ *pour presque tout* $t \in [0,T]$ *et*

$$\begin{cases} a(x(t), y - \dot{x}(t)) + b(\dot{x}(t), y - \dot{x}(t)) + j(y) - j(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t), y - \dot{x}(t) \rangle, \forall y \in K \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{IVEV}$$

Où $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux formes bilinéaires, continues et symétriques et $j : K \longrightarrow \mathbb{R}, f : [0,T] \longrightarrow H$.

Le problème $(IVEV)$ s'appelle une inégalité variationnelle d'évolution avec viscosité. Cette inégalité est d'un grand intérêt dans la modélisation des problèmes de contact de frottement quasi-statique. Dans un langage mécanique, la forme bilinéaire $b(\cdot,\cdot)$ représente le terme de viscosité.

Ce type des problèmes a été étudié par M. Sofonea et A. Matei dans le livre [71] sous le nom "Evolutionary Variational Inequalities with Viscosity". Les auteurs ont démontré l'existence et l'unicité de la solution en utilisant un résultat du point fixe. Le problème $(IVEV)$ a été étudié par Adly et Haddad ([4]), où les auteurs ont montré (sous certaines conditions), pour la première fois, l'équivalence entre l'inégalité variationnelle d'évolution $(IVEV)$ et un processus de Rafle implicite.

Soit H un espace de Hilbert réel. Soit $T > 0$ un nombre réel positif et $C(\cdot) : [0,T] \rightrightarrows H$ une application multivoque. On considère l'inclusion différentielle suivante

$$\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(A(x(t))) \text{ p.p } \ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{DS}$$

Supposons, que les hypothèses $(\mathcal{H}_A)$, $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ du Thèoréme $(2.1.2)$ soient vérifiées.

On donne, à présent, la liste des hypothèses que l'on va supposer pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'inégalité variationnelle (IVE).

$(\mathcal{VI}_1)$ $K \subset H$ est un cône non vide, fermé et convexe.

$(\mathcal{VI}_2)$ $a(\cdot,\cdot) : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, continue et symétrique telles que pour tout $u \in H$

$$a(u,u) \geqslant \lambda \|u\|^2,$$

pour une constante positive $\lambda > 0$.

$(\mathcal{VI}_3)$ $j : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, positivement homogène de degré 1 (i.e. $j(\omega x) = \omega j(x)$ pour tout $\omega > 0$) et Lipschitzienne avec $j(0) = 0$.

$(\mathcal{VI}_4)$ $f \in W^{1,1}([0,T], H)$ avec $a(x_0, v) + j(v) \geqslant \langle f(0), v\rangle$, pour tout $v \in K$.

Notre objectif consiste, à transformer l'inégalité variationnelle quasi-statique (IVE) à une inclusion différentielle de type (DS). De façon plus précise, nous allons montrer, sous certaines conditions, que le processus de Rafle (DS) est équivalent à l'inégalité variationnelle (IVE).

Dans un premier temps et vu la formule de (IVE), il est nécessaire de considérer une fonction $j(\cdot)$ définie sur l'espace H tout entier (afin que l'on puisse aussi définir le sousdifférentiel), à cette fin, on va prolonger la fonction donnée $j(\cdot)$ dont le domaine est K à tout l'espace H en introduisant la fonction $J(\cdot) : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$J(z) := \begin{cases} j(z), \text{ si } z \in K, \\ +\infty, \text{ si } z \notin K. \end{cases} \tag{4.7}$$

Puisque K est un cône non vide, fermé et convexe, et $j(\cdot)$ est convexe, positivement homogène de degré 1 et Lipschitzienne sur K, on en déduit que la fonction étendue $J(\cdot)$ est propre, positivement homogène de degré 1, convexe et semi-continue inférieure avec $J(0) = 0$. Autrement dit, la fonction $J(\cdot)$ hérite toutes les propriétés de $j(\cdot)$ données dans $(\mathcal{VI}_3)$. Avec ce prolongement, l'inégalité variationnelle (IVE) équivaut à :

Trouver une application $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ telle que pour presque tout $t \in [0,T]$

$$\begin{cases} a(x(t), y - \dot{x}(t)) + J(y) - J(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t), y - \dot{x}(t)\rangle, \forall y \in H \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{IVEJ}$$

Maintenant soit A un opérateur linéaire borné coercif et symétrique associé à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$, c'est-à-dire,

$$a(x,y) = \langle Ax, y\rangle \text{ pour tous } x, y \in H.$$

Par conséquent, on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.2.1 *Avec cette dernière notation, l'inégalité $(IVEJ)$ peut être mise sous la forme d'un problème d'évolution gouverné par le sous différentiel d'une fonction convexe comme suit*

$$\begin{cases} f(t) - Ax(t) \in \partial J(\dot{x}(t)) \text{ p.p } \ t \in [0,T] \\ \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases} \tag{4.8}$$

Preuve. Comme $\dot{x}(t) \in K$, alors $\partial J(\dot{x}(t)) \neq \phi$.

D'autre part, soit $y \in H$ alors pour presque tout $t \in [0,T]$

$$a(x(t), y - \dot{x}(t)) + J(y) - J(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t), y - \dot{x}(t)\rangle \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow \ \langle Ax(t), y - \dot{x}(t)\rangle + J(y) - J(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t), y - \dot{x}(t)\rangle \\ &\Longleftrightarrow \ J(y) - J(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t), y - \dot{x}(t)\rangle - \langle Ax(t), y - \dot{x}(t)\rangle \\ &\Longleftrightarrow \ J(y) - J(\dot{x}(t)) \geqslant \langle f(t) - Ax(t), y - \dot{x}(t)\rangle \\ &\Longleftrightarrow \ f(t) - Ax(t) \in \partial J(\dot{x}(t)). \end{aligned}$$

□

La proposition suivante montre l'équivalence entre le processus introduit dans (DS) et l'inégalité variationnelle quasi-statique (IVE).

Proposition 4.2.2 *Supposons que $(\mathcal{VI}_1) - (\mathcal{VI}_4)$ soient vérifiées, alors $x(\cdot) : [0,T] \longrightarrow H$ est une solution de (IVE) si et seulement si elle est une solution de (DS), où A est un opérateur linéaire borné coercif et symétrique associé à la forme bilinéaire $a(\cdot,\cdot)$ et $C(t) := f(t) - \partial J(0), t \in [0,T]$ et $J(\cdot)$ est définie dans (4.7).*

Preuve. D'après l'équivalence que l'on a démontrée entre (IVE) et (4.8), il suffit de prouver que (4.8) et (DS) sont équivalents.

Il est connu que le sous-différentiel d'une fonction convexe, **s.c.i** et propre est convexe fermé, on en déduit que le sous-ensemble

$$C := \partial J(0) = \{s \in H : \langle s, v\rangle \leqslant J(v), \forall v \in H\}, \tag{4.9}$$

est convexe et fermé de H.

Puisque $J(\cdot)$ est positivement homogène de degré 1 avec $J(0) = 0$, à partir du théorème $(1.3.8)$, nous avons

$$J(z) = \psi_C^*(z) = \sigma(C, z), \forall z \in H. \tag{4.10}$$

De plus, la fonction $J(\cdot)$ est propre, convexe et **s.c.i**, alors d'après le théorème $(1.3.7)$ on a

$$v \in \partial J(z) \Longleftrightarrow z \in \partial J^*(v). \tag{4.11}$$

Par ailleurs, puisque la fonction ψ_C est convexe et semi-continue inférieurement, alors on déduit d'après le théorème $(1.3.6)$ que

$$\partial J(\cdot) = \partial \psi_C^*(\cdot) \text{ et } J^*(\cdot) = \psi_C^{**}(\cdot) = \psi_C(\cdot). \tag{4.12}$$

Par suite

$$v \in \partial J(z) \Longleftrightarrow z \in \partial \psi_C(v) \Longleftrightarrow z \in N_C(v) \text{ avec } C = \partial J(0). \tag{4.13}$$

Maintenant, soit $x(\cdot)$ une solution de (4.8) alors, en utilisant les relations (4.11) et (4.12), on obtient pour presque tout $t \in [0, T]$ on a

$$\begin{aligned} f(t) - Ax(t) \quad &\in \quad \partial J(\dot{x}(t)) \Longleftrightarrow \dot{x}(t) \in \partial J^* \left(f(t) - Ax(t)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in \partial \psi_C \left(f(t) - Ax(t)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in N_C \left(f(t) - Ax(t)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in N_{C-f(t)} \left(-\left(Ax(t)\right)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in -N_{-(C-f(t))} \left(Ax(t)\right) \\ &\Longleftrightarrow \quad \dot{x}(t) \in -N_{C(t)} \left(Ax(t)\right). \end{aligned}$$

Telle que

$$C(t) := f(t) - C = f(t) - \partial J(0). \tag{4.14}$$

Par conséquent, le problème (4.8) est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(A(x(t))) \text{ p.p } t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in H. \end{cases}$$

qui est exactement de la forme de la variante du processus de Rafle introduit en (IVE) . □

Comme une conséquence directe du Théorème $(2.1.2)$, on a le résultat d'existence et d'unicité suivant, pour l'inégalité variationnelle d'évolution (IVE).

Corollaire 4.2.1 *Supposons que $(\mathcal{VI}_1) - (\mathcal{VI}_4)$ soient vérifiées alors, pour tout $x_0 \in H$, l'inégalité variationnelle d'évolution (IVE) admet une seule solution $x(\cdot) : [0, T] \longrightarrow H$.*

Preuve. Il suffit de montrer que toutes les hypothèse $(\mathcal{H}_A)$, $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ du Théorème $(2.1.2)$ sont satisfaites.

Prouvons d'abord la condition $Ax_0 \in C(0)$. On a

$$\begin{aligned}
\forall v \quad &\in \quad K : \langle f(0), v\rangle \leqslant j(v) + a(x_0, v) \Longleftrightarrow \langle f(0), v\rangle \leqslant j(v) + \langle Ax_0, v\rangle \\
&\Longleftrightarrow \langle f(0) - Ax_0, v\rangle \leqslant j(v) \\
&\Longleftrightarrow \langle f(0) - Ax_0, v\rangle \leqslant j(v) - j(0) \\
&\Longleftrightarrow f(0) - Ax_0 \in \partial J(0) \\
&\Longleftrightarrow f(0) - Ax_0 \in C \\
&\Longleftrightarrow Ax_0 \in C(0).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant les hypothèses $(\mathcal{H}_A)$, $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$.

$\mathcal{H}_A$ Il est clair que les hypothèses $(\mathcal{VI}_2)$ et $(\mathcal{H}_A)$ sont équivalentes. Autrement dit la linéarité, la bornitude et la coercivité de A se déduisent directement de $(\mathcal{VI}_2)$.

$\mathcal{H}_1$ Il est facile de voir que pour tout $t \in [0, T]$, les sous ensembles $(C(t))_t$ de H sont convexes fermés où

$$C(t) := f(t) - C = f(t) - \partial J(0).$$

Ce qui traduit bien l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$.

$\mathcal{H}_2$ Montrons que l'application multivoque $t \longmapsto C(t)$ bouge de façon absolument continue.
En effet, soient $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, alors en utilisant la proposition $(2.2.1)$ et le fait que la fonction distance est Lipschitzienne de rapport 1, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
d_H(C(t), C(s)) &= d_H(f(t) - C, f(s) - C) = \sup_{x\in H} |d(x, f(t) - C)) - d(x, f(s) - C))| \\
&= \sup_{x\in H} |d(x - f(t), -C)) - d(x - f(s), -C))| \\
&= \sup_{x\in H} |d(-(f(t) - x), -C)) - d(-(f(s) - x), -C))| \\
&= \sup_{x\in H} |d(f(t) - x, C)) - d(f(s) - x, C))| \\
&\leqslant \sup_{x\in H} \|f(t) - f(s)\| \\
&\leqslant \|f(t) - f(s)\| \\
&\leqslant \left\| \int_s^t \dot{f}(r) dr \right\| \\
&\leqslant \int_s^t \left\| \dot{f}(r) \right\| dr \\
&\leqslant v(t) - v(s).
\end{aligned}$$

Telle que

$$v(t) := \int_0^t \left\| \dot{f}(r) \right\| dr,$$

avec $v(0) = 0$, alors en utilisant le Théorème $(1.5.2)$, on en déduit que $v(\cdot)$ est absolument continue.
Par suite, il existe une fonction absolument continue non négative $v(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ avec $v(0) = 0$

telle que

$$\forall x \in H : |d(x, C(t)) - d(x, C(s))| \leqslant |v(t) - v(s)| \, .$$

Par conséquent $(C(t))_t$ varient de manière absolument continue. Ce qui traduit bien l'hypothèse $(\mathcal{H}_2)$. Alors toutes les hypothèses du Théorème $(2.1.2)$ sont satisfaites. Cela assure l'existence et l'unicité de la solution pour (DS), qui représente également la seule solution de (IVE) d'après l'équivalence établie dans la Proposition $(4.2.2)$.

$\square$

Conclusions et perspectives

Au terme de ce travail nous relevons l'apport de quelques éléments déterminants dans cette thèse. D'abord pour le deuxième et le troisième chapitre, nous devons la discrétisation utilisée à des inclusions différentielles similaires à celles gouvernées par le cône normal. C'est à ce niveau que la monotonie du cône normal est déterminante en ce sens qu'elle joue pour le processus de Rafle dégénéré un rôle analogue à celle du processus de Rafle classique. Cette monotonie a été aussi cruciale dans l'étude pour le processus de Rafle dégénéré avec perturbation Lipschitzienne. Pour le quatrième chapitre on souligne le rôle du processus de Rafle dégénéré avec perturbation Lipschitzienne. En effet, Nous avons montré l'équivalence entre ce processus de Rafle dégénéré et une évolution quasi-statique d'une inéquation variationnelle. Il est bien connu que la formulation variationnelle de nombreux problèmes mécaniques avec contact unilatéral et frottement conduit à une inéquation variationnelle d'évolution. Comme application, nous avons reformulé le problème de contact quasi-statique avec frottement pour les matériaux élastiques linéaires à mémoire courte en tant que processus de Rafle dégénéré. Le lien entre le processus de Rafle dégénéré et les inéquations variationnelles quasi-statiques est possible grâce à certains outils standards de l'analyse convexe.

Par conséquent l'importance de ces équivalences nous indique des pistes de recherche plus approfondies dans ces différents domaines notamment les inéquations quasi-variationnelles mais aussi l'étude du caractère bien posé pour le processus de Rafle dégénéré avec contrainte non convexe.

Bibliographie

[1] V. Acary, B. Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems : applications in mechanics and electronics*. Springer Science & Business Media. 2008.

[2] S. Adly, B. K. Le. *Unbounded second-order state-dependent Moreau's sweeping processes in Hilbert spaces*. J. Optim. Theory Appl. 169(2), 407–423, 2016.

[3] S. Adly, T. Haddad. *Well-posedness of nonconvex degenerate sweeping process via unconstrained evolution problems*. Nonlinear Analysis : Hybrid Systems. 2019.

[4] S. Adly, T. Haddad. *An implicit sweeping process approach to quasistatic evolution variational inequalities*. SIAM J. Math. Anal. 50(1) (2018), 761–778.

[5] Q.H. Ansari, C.S. Lalitha, M. Mehta. *Generalized convexity, nonsmooth variational inequalities, and nonsmooth optimization*. Chapman and Hall/CRC, 2013.

[6] K. J. Arrow, G. Debreu. *Existence of an equilibrium for a competitive economy*. Econometrica, 22 :265–290, 1954.

[7] J. P. Aubin. *Mutational and morphological analysis : tools for shape evolution and morphogenesis*. Springer Science & Business Media, 2012.

[8] J. P. Aubin, A. Cellina. *Differential inclusions : set-valued maps and viability theory*. Vol. 264. Springer Science & Business Media. 2012.

[9] J.P Aubin. *Viability theory*. Springer Science & Business Media, 2009.

[10] J. P. Aubin, H. Frankowska. *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media, 2009.

[11] Q.H. Ansari, C.S. Lalitha, M. Mehta. *Generalized convexity, nonsmooth variational inequalities, and nonsmooth optimization*. Chapman and Hall/CRC, 2013.

[12] H. H. Bauschke, P. L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Vol. 408. New York : Springer. 2011.

[13] H. H. Bauschke, P. L. Combettes. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert spaces*. Vol. 408. Springer, New York, 2011.

[14] F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva. *Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces : various regularities and other properties.* Trans. Amer. Math. Soc., 363(4), 2211–2247.

[15] H. Benabdellah. *Existence of solutions to the nonconvex sweeping process*. J. Diff. Equations, 164 :286–295, 2000.

[16] F. Bernard, L. Thibault, N. Zlateva. *Characterizations of Prox-regular sets in uniformly convex Banach spaces*. J. Convex Anal., 13 :525–560, 2006.

[17] F. Bernicot, J. Venel. *Differential inclusions with proximal normal cones in Banach spaces*. J. Convex Anal., 2010.

[18] J. M. Borwein, J. D. Vanderwerff. *Convex functions : constructions, characterizations and counterexamples* (Vol. 109). Cambridge : Cambridge University Press, 2010.

[19] M. Bounkhel, C. Castaing. *State dependent sweeping process in p-uniformly smooth and q-uniformly convex Banach spaces*. Set-Valued Var. Anal. 20(2), 187–201, 2012.

[20] M. Bounkhel, L. Thibault. *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space*. J. Nonlinear Convex Anal. 6, 359–374, 2005.

[21] M. Bounkhel, L. Thibault. *Nonconvex sweeping process and prox-regularity in Hilbert space*. J. Nonlinear Convex Anal., 6 :359–374, 2001.

[22] R. I. Bot, S. M. Grad, G. Wanka. *Duality in vector optimization*. Springer Science & Business Media, 2009.

[23] H, Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

[24] H. Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London ; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[25] B. Brogliato, A. A. Ten Dam, L. Paoli, F. Gnot, M. Abadie. *Numerical simulation of finite dimensional multibody nonsmooth mechanical systems.* ASME Applied Mechanics Reviews, 55(2) :107–150, 2002.

[26] B. Brogliato, A. Daniilidis, C. Lemaréchal, V. Acary. *On the equivalence between complementarity systems, projected systems and differential inclusions*. Syst. Control. Lett., (6) 45–51, 2005.

[27] B. Brogliato, L. Thibault. *Existence and uniqueness of solutions for nonautonomous complementary dynamical systems*. J. Convex Anal.,17(3-4) :961-990, 2010.

[28] R. S. Burachik, A.N. Iusem. *Set-valued mappings and enlargements of monotone operators*. Vol. 8. Springer Science & Business Media, 2007.

[29] C. Castaing, M. D. P. Monteiro-Marques. *BV periodic solutions of an evolution problem associated with continuous moving convex sets*. Set-Valued Anal., 3(4) :381–399, 1995.

[30] C. Castaing, T. X. Duc Ha, M. Valadier. *Evolution equations governed by the sweeping process*. Set-Valued Anal., 1(2) :109–139, 1993.

[31] F. H. Clarke, R. J. Stern, P. R. Wolenski. *Proximal smoothness and the lower-C^2 property*. J. Convex Anal., 2 :117–144, 1995.

[32] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. Second Edition, Classics in Applied Mathematics, 5, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1990.

[33] G. Colombo, M. D. P. Monteiro-Marques. *Sweeping by a continuous proxregular set*. J. Diff. Equations, 187(1) :46–62, 2003.

[34] G. Colombo, V. V. Goncharov. *The sweeping processes without convexity*. Set-Valued Anal., 7 :357–374, 1999.

[35] N. J. Daras, T. M. Rassias (eds). *Operations Research, Engineering, and Cyber Security : Trends in Applied Mathematics and Technology* (Vol. 113). Springer. 2017.

[36] G. Debreu. *Integration of correspondences*. Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2 : Contributions to Probability Theory, Part 1. The Regents of the University of California, 1967.

[37] K. Deimling. *Multivalued differential equations*, Series on Nonlinear Analysis and Applications 1, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1992.

[38] K. Deimling. *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Lecture Notes in Math., vol. 596, Springer-Verlag, 1977.

[39] J. Diestel, J.J. Uhl. *Vector measure*, Mathematical surveys and Monograph, Vol 15, American Mathematical Society, 1977.

[40] A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar. *Implicit functions and solution mappings*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, 208, 2009.

[41] J. F. Edmond, L. Thibault. *BV solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation*. J. Differ. Equ., 226(1) :135–179, 2006.

[42] J. F. Edmond, L. Thibault. *Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process.* Math. Program, Ser. B, 104(2-3) :347–373, 2005.

[43] H. Federer. *Curvature measures*. Trans. Amer. Math. Soc., 93 :418–491, 1959.

[44] A. F. Filippov. On certain questions in the theory of optimal control. J. SIAM Control Ser. A, 1 :76–84, 1962.

[45] A. Geletu. *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps (Lecture Notes)*. 2006.

[46] T. Haddad, J. Noel, L. Thibault. *Perturbed sweeping process with a subsmooth set depending on the state*. Linear Nonlinear Anal, 2 :155–174, 2016.

[47] T. Haddad, I. Kecis, L.Thibault. *Reduction of state dependent sweeping process to unconstrained differential inclusion*. J. Global Optim. 62(1), 167–182, 2015.

[48] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis.* Springer Science & Business Media, 2004.

[49] A. A. Khan, C. Tammer, C. Zalinescu. *Set-valued optimization*. Springer-Verlag Berlin An. 2016.

[50] M. C. Kaadoud. *Résolution de problèmes de rafle et application à un problème de frottement*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 18 (1), 89–102, 2001.

[51] M. Kecies, T. Haddad and M. Sene. *Degenerate sweeping process with a Lipschitz perturbation*. Applicable Analysis, 1–23, 2019.

[52] M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques. *An introduction to Moreau's sweeping process*. In Impacts in mechanical systems, Springer, Berlin, Heidelberg, 1–60, 2000.

[53] M. Kunze, M.D.P. Monteiro Marques. *On parabolic quasi variational inequalities and state dependent sweeping processes*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 12(1), 179–191, 1998.

[54] M. Kunze, M. D. P Monteiro Marques. *On the discretization of degenerate sweeping processes*. Portugaliae Mathematica, 55(2) 219–232, 1998.

[55] M. Mazade, L. Thibault. *Differential variational inequalities with locally prox-regular sets*. J. Convex Anal, 19(4), 1109-1139, 2012.

[56] M.D.P. Monteiro Marques. *Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems : Shocks and dry friction*. Vol. 9. Birkhäuser. 2013.

[57] B.S. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation I : Basic theory*. Vol. 330. Springer Science & Business Media, 2006.

[58] J. J. Moreau. *Numerical aspects of the sweeping process*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. (177) 329–349, 1999.

[59] J. J. Moreau. *Liaisons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques*. C. R. Acad. Sci., Paris, Sr. II, 296 :1473–1476, 1983.

[60] J. J. Moreau. *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space*. J. Differ. Equ., (26) 347–374, 1977.

[61] J. J. Moreau. *Rafle par un convexe variable II*. Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 3, 1972.

[62] J. J. Moreau. *Rafle par un convexe variable I*. Sém. Anal. Convexe Montpellier, Exposé 15, 1971.

[63] J. J. Moreau. *Sur l'évolution d'un système élastoplastique*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, 273, A118–A121, 1971.

[64] J. J. Moreau. *Fonctionnelles convexes*, Séminaire Jean Leray, (2), 1–108, 1966.

[65] C. Niculescu, L.E. Persson. *Convex Functions and their Applications : A Contemporary Approach*. New York : Springer, 2006.

[66] R. A. Poliquin, R. T. Rockafellar, L.Thibault. *Local differentiability of distance functions*. Trans. Amer. Math. Soc., 352 :5231–5249, 2000.

[67] R. T. Rockafellar, R. J. B Wets. *Variational analysis*. Vol. 317. Springer Science & Business Media, 2009.

[68] R. T. Rockafellar. *La théorie des sous-gradients et ses applications à l'optimisation : fonctions convexes et non convexes.* L'Université de Montréal, 1979.

[69] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Vol. 28. Princeton university press, 1970.

[70] D. Simovici. *Mathematical Analysis for Machine Learning and Data Mining*. World Scientific Publishing Co., Inc.2018.

[71] M. Sofonea, A. Matei. *Variational inequalities with applications : a study of antiplane frictional contact problems*. Vol. 18. Springer Science & Business Media, 2009.

[72] G.V. Smirnov. *Introduction to the theory of differential inclusions.* Vol. 41. American Mathematical Soc., 2002.

[73] D. E. Stewart. *Dynamics with Inequalities : impacts and hard constraints* (Vol. 59). SIAM, 2011.

[74] L. Thibault. *Master 1. Cours d'Analyse Fonctionnelle*. https ://thibault.xyz/workspace/cours-analfonct.pdf.

[75] L. Thibault. *Regularization of nonconvex sweeping process in Hilbert space*. Set-valued Anal, (16) 319–333, 2008.

[76] L. Thibault. *Sweeping process with regular and nonregular sets*. J. Differ. Equ., 193(1) :1–26, 2003.

[77] J. Van Tiel. *Convex analysis. An introductory text*. John wiley and sons, 1984.

Résumé

Le but de cette thèse est d'apporter quelques contributions à la théorie des inclusions différentielles impliquant des cônes normaux, du point de vue de l'analyse non lisse et variationnelle, sur les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie. En particulier, nous nous sommes intéressés à l'étude de la variante suivante du processus de Rafle, qui est connu sous le nom de processus de Rafle dégénéré perturbé

$$(PDP)\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t)) \text{ p.p } t \in [T_0, T]\,, \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

Où la perturbation $f : [T_0, T]\, H \longrightarrow H$ est une application univoque, mesurable par rapport à la première variable et Lipschitzienne par rapport à la seconde variable.
L'inclusion différentielle (PDF) et beaucoup de ses variantes apparaissent naturellement dans plusieurs applications telles que l'elastoplasticité, les circuits électriques, la modélisation des mouvements de foule, et les systèmes de complémentarité, etc. Des applications de nos résultats aux problèmes de complémentarité différentielle, et aux inégalités variationnelles d'évolution quasi-statiques ont été données.

Abstract

The aim of this thesis is to give some contributions to theory of differential inclusions involving normal cones from the point of view of nonsmooth and variational analysis, on infinite dimensional separable Hilbert spaces. In particular, we are interested in the study the following variant of the sweeping process, which is known the perturbed degenerate sweeping process

$$(PDP)\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t)) \text{ a.e } t \in [T_0, T]\,, \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

where the perturbation $f : [T_0, T]\, H \longrightarrow H$ is a single-valued map which is measurable with respect to the first variable, and Lipschitzian with respect to the second variable.
Differential inclusion (PDP) and many of its variants appear naturally in several applications such as elastoplasticity, electrical circuits, modeling crowd motions, and complementarity systems, etc. Applications of our results to the differential complementarity problems, and to the quasistatic evolution variational inequalities have been given.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو تقديم بعض المساهمات في نظرية الاحتواءات التفاضلية التي تتضمن المخاريط الناظمية ، من وجهة نظر التحليل غير السلس والتغايري ، في إطار فضاءات هلبرت ذات البعد اللانهائي و القابلة للفصل. على وجه الخصوص ، كنا مهتمين بدراسة مسألة متشعبة من عملية المسح لرافل، والتي تُعرف باسم عملية المسح لرافل المشوهة المضطربة المعطاة بـ

$$(PDP)\begin{cases} -\dot{x}(t) \in N_{C(t)}(Ax(t)) + f(t, x(t))\ p.p\ t \in [T_0, T]\,, \\ \\ x(T_0) = x_0, Ax_0 \in C(T_0). \end{cases}$$

حيث يكون الاضطراب عبارة عن تطبيق أحادي القيمة ، قابل للقياس بالنسبة للمتغير الأول و ليبشيزي بالنسبة للمتغير الثاني.

يملك الاحتواء التفاضلي (PDP) والعديد من تشعباته العديد من التطبيقات مثل المرونة والدوائر الكهربائية ونمذجة حركة الحشد ومسائل التتميم التفاضلي. لقد تم تقديم تطبيقات مختلفة لهده المسألة. على وجه الخصوص ، التطبيقات المتعلقة بمسائل التتميم التفاضلي و المتراجحات التغايرية للتطور شبه الساكن.