

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



## Mémoire de Master

Présenté à l'Université 08 Mai 1945 de Guelma  
Faculté des Sciences et de la Technologie Département  
de : Génie Civil & Hydraulique Spécialité :  
hydraulique urbaine Option : hydraulique urbaine

**BEN ALI AYOUB**

### Thème

---

**Résolution des équations du régime transitoire par la  
méthode des caractéristiques dans une conduite sous  
pression**

---

Sous la direction de : TOUMI Abdelouaheb

#### Jury de soutenance :

|  |           |  |
|--|-----------|--|
|  | Président |  |
|  | Examineur |  |
|  | Examineur |  |

Septembre 2020

---



# *Dédicaces*

*Je dédie mon travail à:*

- *Aux mains tendues et à l'offre constante ma très chère Mère et mon très cher Père.*
- *Mes frères et mes sœurs*
- *Mes amis qui m'ont aidé à me conseiller, à m'orienter et à m'accompagner.*
- *Tous ceux qui me sont chers*

*Je dédie cet humble travail en demandant à ALLAH Tout-Puissant de me bénir en lui.*

*AYOUB*

# **Remerciement :**

*Voici enfin que ce modeste travail arrive à terme. On tient à exprimer toutes notre reconnaissance à ceux qui au long de ce mémoire nous ont apporté leur soutien, la participation de certains a été décisive pour l'aboutissement de ce travail qu'il nous est agréable de présenter tout particulièrement :*

*On remercie Dieu le tout puissant, de m'avoir donné tout le courage et la patience pour mener ce travail à terme.*

*On tient tout d'abord à exprimer notre profonde gratitude et un grand respect à notre promoteur Mr TOUMI abd el Waheb pour la clarté de ses enseignements, son soutien indéfectible et sa patience à toute épreuve afin que cette thèse soit menée à bien.*

*Nos sincères remerciements s'adressent aussi aux membres de jury d'avoir accepté de juger notre travail.*

*Nous remercions très chaleureusement toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.*

## Résumé

Le présent travail traite le suivi, au cours du temps et dans l'espace, de l'écoulement transitoire dans un réseau ramifié sous pression. Les équations régissant cet écoulement ont été transformées en équations différentielles totales par la méthode des caractéristiques. Nous avons basé sur les conditions aux limites et initiales comme des compléments des équations aux caractéristiques afin de fournir toutes les expressions nécessaires à la réalisation d'un modèle mathématique fiable.

Lors du traitement du vif du sujet, nous avons pris trois modèles physiques, le premier est une station de pompage à simple effet, le second à double effets et le troisième à triple effets.

Pour le troisième modèle, nous avons pris trois types du matériau du réseau, à savoir : l'acier, le P.E.H.D et enfin la fonte pour voir le comportement de chacun vis-à-vis l'écoulement en question.

Le modèle mathématique obtenu à partir des modèles physiques proposés a été écrit sous forme d'un logiciel pour assurer la rapidité et la précision du calcul. Les calculs ont été effectués en tous les points de discrétisation. Toutefois, la particularité du premier point, du milieu de la première conduite et du point de jonction des conduites a rendu la représentation de la fluctuation des paramètres à suivre une

Les résultats obtenus montrent que plus le réseau est dense plus l'amortissement du phénomène transitoire est rapide, et les matériaux ayant un module d'élasticité faible, tel que le P.E.H.D, génèrent un phénomène transitoire de dégonflement et de gonflement moins important. Les valeurs faibles de surpression et de dépression conduisent à des moyens de protection anti bélier de faible taille. Toutefois, pour les stations de pompage à haute pression et des réseaux d'adduction de grands diamètres rendent le retour à l'utilisation des conduites en fonte, en béton et en acier est inévitable.

## Abstract :

This work deals with the monitoring, over time and in space, of the transient flow in a branched network under pressure. The equations governing this flow were transformed into total differential equations by the method of characteristics. We have based on the boundary and initial conditions as complements of the characteristic equations in order to provide all the expressions necessary for the realization of a reliable mathematical model. When dealing with the subject of this study, we took three physical models, the first is a single-acting pump station, the second is double-acting and the third is triple-acting.

For the third model, we took three types of the network material, namely: steel, P.E.H.D and finally cast iron to see the behavior of each vis-à-vis the flow in question.

The mathematical model obtained from the proposed physical models was written in software form to ensure the speed and precision of the calculation. The calculations were carried out at all the discretization points. However, the peculiarity of the first point, the middle of the first pipe and the junction point of the pipes made the representation of the fluctuation of the parameters to be followed a

The results obtained show that the denser the network, the faster the damping of the transient phenomenon, and materials with a low modulus of elasticity, such as P.E.H.D, generate a transient phenomenon of deflation and less swelling. The low values of overpressure and depression lead to small-scale anti-hammer protection means. However, for high pressure pumping stations and supply networks of large diameters the return to the use of cast iron, concrete and steel pipes is inevitable .

ملخص :

يتعامل هذا العمل مع المراقبة ، بمرور الوقت وفي الفضاء ، للتدفق العابر في شبكة متفرعة تحت الضغط. تم تحويل المعادلات التي تحكم هذا التدفق إلى معادلات تفاضلية كلية بطريقة الخصائص. لقد اعتمدنا على الحدود والشروط الأولية كمكملات للمعادلات المميزة من أجل توفير جميع التعبيرات اللازمة لتحقيق نموذج رياضي موثوق. عند معالجة جوهر الأمر ، أخذنا ثلاثة نماذج فيزيائية ، الأول هو محطة ضخ أحادية الفعل ، والثاني ذو مفعول مزدوج ، والثالث ثلاثي المفعول. بالنسبة للنموذج الثالث ، أخذنا ثلاثة أنواع من مواد الشبكة ، وهي: الفولاذ ، PEH.D وأخيراً الحديد الزهر لمعرفة سلوك كل منها مقابل التدفق المعني. تمت كتابة النموذج الرياضي الذي تم الحصول عليه من النماذج الفيزيائية المقترحة في شكل برنامج لضمان سرعة ودقة الحساب. تم إجراء الحسابات في جميع نقاط التقدير. ومع ذلك ، فإن خصوصية النقطة الأولى ، ووسط الأنابيب الأولى ونقطة الوصل للأنابيب جعلت تمثيل تذبذب المعلمات التي يجب اتباعها أظهرت النتائج التي تم الحصول عليها أنه كلما زادت كثافة الشبكة ، زادت سرعة التخميد للظاهرة العابرة ، والمواد ذات معامل المرونة المنخفض ، مثل PEH.D ، تولد ظاهرة عابرة من الانكماش وتورم أقل. تؤدي القيم المنخفضة للضغط الزائد والاكتئاب إلى وسائل حماية ضد الصدمات الصغيرة. ومع ذلك ، بالنسبة لمحطات الضخ ذات الضغط العالي وشبكات الإمداد ذات الأقطار الكبيرة ، فإن العودة إلى استخدام أنابيب الحديد الزهر والخرسانة والفولاذ أمر لا مفر منه.

## **Sommaire**

Dédicace

Remerciement

La liste de figure

La liste les tableaux

Résumé

## **Introduction générale**

### **Chapitre 1 : Présentation des phénomènes transitoire**

|  |    |
|--|----|
| 1.1. Introduction .....  | 3  |
| 1.2. Aperçu historique sur le phénomène transitoire des fluides.....   | 3  |
| 1.3. Définitions .....   | 6  |
| 1.3.1. Écoulement permanent.....   | 6  |
| ,1.3.2. Écoulement non permanent.....  | 6  |
| 1.3.3. L'écoulement uniforme .....   | 6  |
| 1.3.4. L'écoulement non uniforme.....  | 6  |
| 1.3.5. Écoulement transitoire.....   | 6  |
| 1.3.6. Phénomène du coup de bélier.....  | 7  |
| 1.3.6.1. Risques dus au phénomène du coup de bélier.....   | 7  |
| 1.3.6.2. Causes du coup de bélier.....   | 9  |
| 1.4. Phénomène du coup de bélier en cas d'une fermeture instantanée de la vanne.....   | 9  |
| 1.5. Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie après une fermeture instantanée de la vanne..... | 12 |
| 1.6. Coup de bélier en cas d'un brusque arrêt d'une pompe.....   | 16 |
| 1.7. Conclusion.....   | 21 |

### **Chapitre 2 : Equation de base d'un écoulement transitoire dans les réseaux d'adduction sous pression**

|   |    |
|---|----|
| 2.1. Introduction.....  | 24 |
| 2.2. Equations de Saint-Venant.....                                     | 24 |
| 2.2.1. Equation de continuité.....                                      | 24 |
| 2.2.1.1. Expressions des contraintes dans les tuyaux sous pression..... | 24 |
| 2.2.1.2. Expression de l'équation de continuité.....                    | 24 |
| 2.2.2. Equation dynamique.....  | 27 |

|   |    |
|---|----|
| 2.3. Equations aux caractéristiques ..... | 30 |
| 2.4. Equations d'ALLIEVI .....            | 32 |
| 2.5. Conclusion.....                      | 33 |

### **Chapitre 3 : Méthode des caractéristiques en écoulement transitoire et conditions aux limites.**

|   |     |
|---|-----|
| 3.1. Introduction.....  | 35  |
| 3.2. Présentation de la méthode des caractéristiques .....                                      | 35  |
| 3.2.1. Le Présentation matricielle.....   | 35  |
| 3.2.2. Application de la méthode des caractéristiques en régime transitoire <sup>37</sup> ..... |     |
| 3.3. Intégration du système différentiel .....  | 40  |
| 3.4 Conditions aux limites concordantes.....  | 45  |
| 3.4.1 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'alimentation à niveau constant..        | 42. |
| 3.4.2 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'arrivée à niveau constant.....          | 43  |
| 3.4.3 Conditions aux limites au niveau d'une extrémité fermée en aval.....                      | 43  |
| 3.4.4 Conditions aux limites au niveau d'une vanne à l'extrémité aval .....                     | 43  |
| 3.4.5 Conditions aux limites au point de jonction de deux conduites en série [11].....          | 44  |
| 3.4.6 Conditions aux limites au point de jonction de trois conduites.....                       | 45  |
| 3.4.7 Conditions aux limites au point de jonction de quatre conduites.....                      | 46. |
| 3.4.8 Conditions aux limites au point de jonction de plusieurs conduites .....                  | 46. |
| 3.5.conclusion .....  | 47  |

### **Chapitre 4 : Modélisations et Implémentations Numériques**

|   |    |
|---|----|
| 4.1 Introduction.....   | 49 |
| 4.2. Premier modèle physique : Cas d'une station de pompage à simple effet..... | 49 |
| 4.2.1 Les équations de compatibilité écrites pour la conduite.....              | 49 |
| 4.2.2. Les conditions aux limites.....  | 50 |
| 4.2.2.1 Au niveau de la station de pompage.....                                 | 50 |

|  |    |
|--|----|
| 4.2.2.2 Au niveau du réservoir.....  | 50 |
| 4.3. Second modèle physique : Cas d'une station de pompage à double effet.....     | 51 |
| 4.4. Troisième modèle physique : Cas d'une station de pompage à triple effets..... | 52 |
| 4.5. Résultats & Interprétations.....  | 53 |
| 4.5.1 Cas d'un réseau en acier.....  | 54 |
| 4.5.1.1. Premier modèle d'étude.....   | 54 |
| 4.5.1.2. Second modèle d'étude.....  | 57 |
| 4.5.1.3 Troisième modèle d'étude.....  | 61 |
| 4.5.2. Etude comparative entre trois matériaux utilisés en adduction .....         | 64 |
| 4.5.2.1. Cas d'un réseau en polyéthylène à haute densité P.E.H.D.....              | 64 |
| 4.5.2.1. Cas d'un réseau en fonte.....   | 67 |
| 4.6 Conclusion.....  | 68 |

## **Conclusion générale**

Références

## **LISTE DES FIGURES :**

|  |    |
|--|----|
| Figure (1.1) : Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979).....  | 8  |
| Figure (1.2) : Joints d'expansion détruits par le coup de bélier.....  | 8  |
| Figure (1.3) : Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979).....   | 9  |
| Figure. (1.4) : Schéma indicatif d'un système générant le phénomène du coup de bélier après une fermeture instantanée de la vanne.....   | 10 |
| Figure (1.5) : Comportement d'un tronçon d'une conduite situé à côté de la vanne soumis à des sollicitations du phénomène du coup de bélier.....   | 11 |
| Figures (1.6,7,8 et 9) : Représentation des épures de la pression et de la vitesse dans une conduite forcée exposée au phénomène du coup de bélier.....  | 14 |
| Figures (1.10,11,12 et 13) : Représentation des épures de la pression et de la vitesse dans une conduite forcée exposée au phénomène du coup de bélier après la fermeture instantanée d'une vanne.....       | 15 |
| Figure (1.14) : Schéma indicatif d'un système générant le phénomène du coup de bélier après un arrêt brusque d'une pompe.....  | 16 |
| Figures (1.14,15,16,17,18,19,20 et 21) : Représentation des épures de la pression et de la vitesse dans une conduite forcée exposée au phénomène du coup de bélier après l'arrêt instantané d'une pompe..... | 19 |
| Figure (1.22) : Evolution de la pression au cours du temps au niveau de la vanne et au milieu de la conduite « Coup de bélier positif ».....   | 20 |
| Figure (1.23) : Evolution de la pression au cours du temps au milieu de la conduite et au niveau de la pompe « Coup de bélier négatif ».....   | 20 |
| Figure (1.24) : Variation de la pression au cours du temps au milieu de la conduite et au niveau de la pompe « Coup de bélier négatif » dans une conduite en P.E.H.D   |    |
| Figure (2.1) : Forces et contraintes radiales dans un tuyau.....   | 24 |
| Figure (2.2) : Déplacement d'un élément liquide.....   | 26 |
| Figure (2.3) : Les forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite forcée.....   | 28 |
| Fig. (3.1) : Schéma de discrétisation du réseau dans le temps et dans l'espace en écoulement transitoire dans une conduite sous pression.....  | 40 |
| Fig. (3.2) : Sortie de l'eau à partir d'un réservoir à charge constante.....   | 42 |
| Fig. (3.3) : Arrivée de l'eau à un réservoir à charge constante à l'aval.....  | 43 |
| Fig. (3.4) : Extrémité complètement fermée à l'aval d'une conduite.....  | 43 |

|   |    |
|---|----|
| Fig. (3.5) : Vanne à l'extrémité aval.....  | 44 |
| Fig. (3.6) : Branchement en série de deux conduites.....  | 45 |
| Fig. (3.7) : Jonction de trois conduites.....   | 45 |
| Fig. (3.8) : Jonction de quatre conduites.....  | 46 |
| Fig. (3.9) : Jonction de plusieurs conduites.....   | 47 |
| Fig. (4.1): Station de pompage à simple effet refoulant un fluide.....  | 49 |
| Fig. (4.2) : Schéma d'une station de pompage à double effets.....   | 51 |
| Fig. (4.3) : Schéma d'une station de pompage à triple effet refoulant un fluide.....  | 52 |
| Fig. (4.5) : Organigramme de la méthode des caractéristiques pour suivre l'écoulement transitoire dans une conduite sous pression.....                | 54 |
| Fig. (4.6) : Fluctuation de la pression au milieu de la conduite et au clapet anti retour d'une station à simple effet.....                           | 55 |
| Fig. (4.7): Fluctuation du débit au milieu de la conduite d'une station à simple effet .....  | 57 |
| Fig. (4.8) : Fluctuation de la pression à la sortie d'une station de pompage à double effets....  | 58 |
| Fig. (4.9) : Fluctuation de la pression au point de jonction d'une station de pompage à double effets.....  | 60 |
| Fig. (4.10) : Fluctuation du débit au point de jonction d'une station à double effets .....   | 60 |
| Fig. (4.11) : Fluctuation de la pression à la sortie d'une station de pompage à triple effets .....   | 62 |
| Fig. (4.12) : Fluctuation de la pression au point de jonction d'une station de pompage à triple effets.....   | 63 |
| Fig. (4.13) : Fluctuation du débit au point de jonction d'une station de pompage à triple effets..  | 63 |
| Fig. (4.14) : Variation de la pression au cours du temps au premier point de discrétisation d'un réseau en P.E.H.D d'une station à triple effets..... | 66 |
| Fig. (4.15) : Variation de la pression au cours du temps au premier point de discrétisation du réseau en fonte d'une station à triple effets.....     | 68 |

## LISTE DES Tableaux

|   |    |
|---|----|
| Tableau (4.1) : Module d'élasticité des matières courantes.....   | 50 |
| Tableau (4.2): Valeurs des diamètres des conduites en acier existant dans le marché ...   | 51 |
| Tableau (4.3): Valeurs de la rugosité $\epsilon$ en mm pour différents matériaux[7].....  | 51 |
| Tableau (4.4) : Caractéristiques de la station de pompage, débits du réseau et cote du réservoir..  | 54 |
| Tableau (4.5) : Caractéristiques du réseau en acier.....  | 55 |
| Tableau n° (4.6) : Résultats obtenus par le modèle numérique, en régime permanent, cas d'une station de pompage à simple effet refoulant dans un réseau en acier..... | 55 |
| Tableau (4.7) : Caractéristiques de la station de pompage, débits du réseau et cotes des réservoirs.....  | 57 |
| Tableau (4.8) : Caractéristiques du réseau en acier.....  | 58 |
| Tableau n° (4.9) : Résultats obtenus par le modèle numérique dans le cas d'une station de pompage à double effets refoulant dans un réseau en acier.....              | 58 |
| Tableau (4.10) : Caractéristiques du liquide.....   | 61 |
| Tableau (4.11) Caractéristiques du réseau.....  | 61 |
| Tableau (4.12) : Caractéristiques de la station de pompage et des réservoirs.....   | 61 |
| Tableau n° (4.13) : Résultats obtenus par le programme dans le cas d'une station de pompage à triple effets refoulant dans un réseau en acier.....                    | 61 |
| Tableau n° (4.14) : Diamètres, Epaisseurs de paroi et pressions nominales des conduites en P.E.H.D.....   | 64 |
| Tableau (4.15) : Caractéristiques du réseau en P.E.H.D.....   | 65 |
| Tableau (4,16) : Caractéristiques de la station de pompage et cotes des réservoirs.....   | 65 |
| Tableau n° (4.17) : Résultats obtenus par le modèle numérique dans le cas d'une station de pompage à triple effets refoulant dans un réseau en P.E.H.D.....           | 66 |
| Tableau n° (4.18) : Résultats obtenus par le programme dans le cas d'une station de pompage à triple effets refoulant dans un réseau en fonte .....                   | 67 |

## **Introduction générale**

L'analyse du phénomène transitoire dans une conduite sous pression porte un grand intérêt, étant donné qu'en pratique le régime transitoire provoqué par une perturbation des conditions permanentes d'écoulement, occasionne des effets nocifs, caractérisés par les phénomènes de surpression et de dépression. Ces phénomènes de pulsation, quand ils dépassent certaines limites, entraînent la fatigue voire même la fissuration ou l'aplatissement de la canalisation.

Nous présenterons dans ce travail une contribution à l'étude de l'écoulement transitoire dans une conduite sous pression.

Nous entamerons cette contribution par un aperçu sur le phénomène transitoire dans une conduite sous pression, tout en, détaillant les causes et les conséquences du phénomène du coup de bélier ainsi que les processus de variation de la pression et de la vitesse lors des coups de bélier positif et négatif.

Nous aborderons, par la suite, les équations de base de ce phénomène dans une conduite sous pression afin d'extraire les relations que nous serons en besoin dans le reste du travail. Puis, nous illustrerons la méthode des caractéristiques ainsi que les conditions aux limites possibles dans les réseaux.

Dans la dernière partie, nous ciblerons la réalisation de quelques modèles physiques sur lesquels nous appliquerons les modèles mathématiques extraits du deuxième et troisième chapitres. Ces derniers modèles ont été traduits sous forme d'un logiciel permettant de faire des calculs rapides et précis du phénomène transitoire dans les réseaux sous pression. Puis, nous mètrons le logiciel élaboré à l'application sur des cas différents.

Le suivi, dans le temps et dans l'espace, du phénomène transitoire dans les réseaux d'adduction sous pression quelque soit le type et le matériau n'est pas aisé. A cet effet, nous essayerons d'utiliser le logiciel élaboré.

En somme notre objectif final consiste à réaliser un logiciel qui permettra de suivre dans le temps et dans l'espace et avec précision le débit et la pression lors de l'apparition du phénomène transitoire dans un réseau sous pression, sachant que la représentation graphique ne sortira point de nos esprits lors de l'étude de ce genre de phénomène.

Enfin, l'application de notre logiciel sur des cas réels mètrera en lumière ce qui se passera vraiment dans les réseaux d'adduction lors d'une perturbation des conditions de l'écoulement permanent.



# **Chapitre 1:**

**Présentation des  
phénomènes transitoire**

### 1.1. Introduction

Pour bien comprendre ce sujet, nous allons entamer ce chapitre par un aperçu historique sur le phénomène transitoire des fluides dans les conduites forcées en mettant en éclaircissement les études majeurs qui ont été faites dans ce domaine. Puis, nous allons mettre quelques définitions des écoulements permanents et transitoires, pour bien entamer ce sujet, puisqu'elles nous permettent de définir notre type d'écoulement de notre phénomène.

Nous aborderons, par la suite, le phénomène transitoire tout en détaillant ses risques et ses causes aux cas de surpression et de dépression. Puis nous mettrons en lumière le phénomène transitoire, les relations de la surpression et de la dépression et de la célérité d'onde d'une part et d'autre part les processus de variation de la vitesse et de la pression, dans les cas d'une fermeture instantanée d'une vanne de sectionnement et d'un arrêt brusque d'une pompe. En fin, nous décrirons les coups de bélier positif et négatif par des schémas d'éclaircissement voire même mettre sa variation au cours du temps dans un réseau d'adduction simple en P.E.H.D.

### 1.2. Aperçu historique sur le phénomène transitoire des fluides

Le problème de l'écoulement instationnaire (ou transitoire) de fluide dans les systèmes de conduite en hydraulique a été traité par de nombreux chercheurs. Toutefois, Ces derniers temps, les orientations pour la recherche dans le domaine des processus transitoires peuvent être divisées en plusieurs domaines : les systèmes de protection contre le coup de bélier, l'écoulement diphasique, et l'ancrage etc.

En 1788, **Lagrange** reprend l'étude des écoulements instationnaires compressibles et incompressibles dans les canaux et développe une formule correcte pour la détermination de la célérité des vagues :

$$a = \sqrt{g \cdot h}$$

En 1789 MANGE a développé une méthode graphique d'intégration des équations hyperboliques aux dérivées partielles, connue sous le nom de méthode de caractéristiques.

Le médecin THOMAS Young en 1808 a élaboré expérimentalement sa théorie de la propagation des ondes de pression due aux pulsations cardiaques. A l'occasion de ces études il a introduisait le célèbre module de Young « E ».

**Helmholtz, Herrmann von** (1821-1894) était été le premier à expliquer (en 1848) le fait que la vitesse de propagation de l'onde dans un tuyau contenant de l'eau était inférieure à la vitesse dans l'eau non confinée. Il a expliqué, correctement, que cela était dû à l'élasticité de parois de tuyaux. **Wertheim**, dans la même année, a offert la même explication mais n'a fait aucune étude théorique. [1]

HELMOTZ était également le premier a montré que la célérité d'onde dans les canaux est supérieure à celle dans les conduites. Il a correctement attribué cette différence à l'élasticité de la conduite.

En 1869 REIMANN a développé et appliqué une équation tridimensionnelle du mouvement et sa forme simplifiée unidimensionnelle dans différents domaines (ondes sonores, cordes vibrantes etc.).

KOTWEG fut le premier a déterminé la célérité d'onde en considérant l'élasticité de la conduite et la compressibilité du fluide en même temps.

Bien que WOOD considère MICHAUD comme étant le premier qui a traité le problème du coup de bélier, des équations récentes faites par ANDERSON montrent que le général MENABEA (1858) fut le premier a avoir étudié le phénomène du coup de bélier.

GROMEKA a introduit pour la première fois les frottements dans l'analyse du phénomène du coup de bélier. Cependant, Il a considéré que le liquide était incompressible et que les frottements étaient directement proportionnels à la vitesse d'écoulement.

**Dr. Marey**, a publié en 1875 un compte rendu de son travail expérimental sur la propagation des ondes d'eau (et de mercure) [2]. Il a conduit une recherche médicale sur l'écoulement du sang chez les petits animaux (tortues, grenouilles) et a essayé de développer une théorie, il a mis en

place des expériences dans son laboratoire hydraulique et comptes rendus publiés de ses recherches sur une période de plusieurs années.

**Joukowski** (1897) a réalisé des expériences classiques à Moscou en 1897/1898 et a proposé la loi pour les coups de bélier instantané dans un système de tuyauterie simple. Il a publié son rapport classique sur la théorie de base du problème coup de bélier. Son rapport est basé sur ses études expérimentales et théoriques. Il a développé une formule pour la célérité d'onde en tenant compte de l'élasticité de la conduite et celle de l'eau. Il a développé également la relation entre la variation de la vitesse d'écoulement et la variation de la pression.

**LORENZO Allievi** (1902) a développé la théorie fondamentale du coup de bélier qu'il a publié en 1902. L'équation dynamique qu'il a trouvée est plus précise par rapport à l'équation de Korteweg. Il a montré aussi que le terme  $\frac{\partial v}{\partial x}$  est négligeable [1].

**R.Chappey** en 1967 a élaboré un simple programme pour les calculateurs électroniques. Après étude, il a été constaté que la méthode de **Bergeron** semble la plus adaptée pour la réalisation de programme de calcul du phénomène pour les 2 types de réseau [3].

**Zielke** (1968) il a développé un modèle de frottement de l'écoulement laminaire en transitoire [4]. Selon lui, le membre non-stationnaire dans l'expression de terme de frottement dépend de la vitesse du courant du fluide et la fonction poids qui prend en compte le changement de vitesse dans les points précédents dans le temps. Le modèle de Zielke a ensuite été adopté et amélioré par Trikha (1975) Achard et Lespinard (1981), Arlt (1983.), Kagawa (1983), Brown (1984). Yigang et Jing-Chao (1989), Suzuki (1991), Vardy (1992). Schohl (1993). Shuya Vardy et Brown (1995) (1995). Zarzycki (1997).

**Yong W. SHIN** et **William L.CHEN** (1975) ont décrit la méthode des caractéristiques pour calculer des problèmes de coup de bélier dans les réseaux complexes. La formulation est basée sur l'équation **Navier-Stokes** unidimensionnelle qui comporte la limite visqueuse exprimée comme le frottement de la paroi des conduites. [3]

**Brunone** (1991) a développé son propre modèle de détermination de l'expression du coefficient de frottement en régime transitoire selon laquelle il est en fonction de la vitesse moyenne du fluide, la valeur actuelle de l'accélération et l'accélération convective locale de la valeur actuelle [3].

**Vardy, Hwang et Brown** (1993) ont fait la détermination des coefficients de terme de frottement instationnaire à partir de la fonctions poids du modèle de Zielke pour le cas d'un écoulement turbulent dans une conduite lisse, considérant que la viscosité du fluide reste constante dans la couche limite [5].

**Djemili.A** (1993) a étudié l'effet de l'ancrage de la conduite pour l'écoulement instationnaire et en particuliers au niveau des coudes. Il a montré que les vibrations engendrées par une mauvaise conception de l'ancrage peuvent augmenter la pression. Il a montré aussi l'influence de la rigidité du tronçon rattaché au coude sur l'évolution de la pression et des contraintes dans le matériau viscoélastique de la paroi de la conduite.

**Brunone, Golia et Greco** (1995) ont étudié l'influence des profils de vitesse en deux dimensions pour la modélisation en régime transitoire.

**Ghidaoui et Karney** (1995) ont présentés une autre méthode pour la transformation des équations aux dérivées partielles de type hyperbolique aux équations des caractéristiques.

**Silva-Araya et Chaudhry** (1997) Élaboration d'un modèle 2D pour calculer la perte de charge due à la non-stationnarité sur la base de calcul de la dissipation d'énergie dans le flux de transition [11].

**Nash et Karney** (1999) a appliqué la méthode d'analyse inverse du processus transitoires aux tuyaux reliés en série [12].

**Brunone et Morelli** (1999) ont Publiés un travail dans lequel ils ont discuté l'impact de la vanne à commande automatique dans le processus transitoire dans le système d'approvisionnement en eau.

**Pezzinga** (2000) Réalisation d'une comparaison des codes 1D et 2D pour déterminer le modèle instable de terme de frottement.

**Brunone, Karney, Mecarelli et Ferrante** (2000) ont étudié l'effet du frottement solide sur le profil de vitesse instantanée au cours du processus de transition.

**Covas et Ramos** (2001) étaient engagés dans la découverte de fissures dans les conduites d'eau en utilisant l'analyse inverse des processus transitoires [1].

**Ghidaoui et Kolyshkin** (2001) ont effectués des analyses de stabilité de processus transitoires en fonction du profil d'écoulement de la vitesse.

En 2001, B. SALAH, et al. ont calculé la Célérité de l'onde de coup de bélier dans les réseaux enterrés [5].

**Brunone et Ferrante** (2001) ont publiés les travaux des techniques actuels pour déterminer la position et la taille des fissures dans les canalisations sous pression.

**Wang, Lambert, Simpson, Liggett et Vitkovsky** (2002) ont publiés des travaux où les fissures et les fuites dans la canalisation sont déterminées par des équations supplémentaires et l'application de Fourier .

**Chebicheb Z, Otmani A., Djemili A.** (2006), Dans leur étude, il a été mis en évidence de la possibilité de traité numériquement le phénomène d'écoulement instationnaire en conduite avec la prise en compte de la déformation de la paroi en matériau élastique (cuivre) ou viscoélastique (polyéthylène). Le terme de frottement a été calculé on utilisant le modèle de Brunone. Ce terme dépend de la vitesse moyenne, de l'accélération locale et de l'accélération convective.

**A.S. Tijsseling** (2007) a donné un modèle mathématique pour décrire le comportement acoustique d'un pipe mince rempli de liquide, basé sur les équations de couplage fluide structure.

L'entreprise **Fraunhofer Gesellschaft** en Allemagne a inventé une méthode pour diminuer des coups de béliers et qui consiste à fermer la vanne lentement. Le centre de recherche a développé un système appelé ABS qui diminue l'amplitude des coups de bélier dans les canalisations et qui ne nécessite pas d'apport d'énergie. L'avantage de cette technique repose sur le fait que le temps de fermeture de la vanne est directement adapté à l'amplitude du coup de bélier et ne nécessite pas d'apport d'énergie supplémentaire [1].

**S. He, c.Ariyaratne, A.E. Vardy** (2007) ont développés un modèle numérique pour montre l'influence du turbulence et l'inertie sur la contrainte tangentielle à la paroi.

**M.H. Afshar, M. Rohani** (2008) ils ont donné une simulation numérique du phénomène de coup de bélier avec un schéma implicite et la MOC [25].

**A.R. Lohrasbi and R. Attarnejad** (2008) ils ont utilisé la méthode des caractéristiques pour étudier le phénomène du coup de bélier. Ils ont recommandé pour minimiser l'impact du coup de bélier sur le système hydraulique, la fermeture où l'ouverture lente de la vanne [26].

**Ahmadi, A. Keramat** (2010) [27] ; dans leur étude, le but principal était l'étude des effets des jonctions. Des différentes Junction ont été étudiés, tels que les pompes, valves et les tés. L'accent a été mis sur une pompe et de té dans le système. Les relations proposées ont été considérées comme des conditions aux limites, pour la modélisation numérique ils ont utilisés la méthode des éléments finis pour les équations de la structure et la méthode des caractéristiques pour les équations du fluide. Les résultats peuvent être utilisés pour trouver la jonction la plus influente sur la valeur de la surpression.

Boualem Salah et Fouaz Massouh (2010) ont appliqué le modèle de Lamé à une conduite sous pression à parois simples ou revêtues et placée en tranchée [6].

**El Hassan Achouyab, Bennasser Bahrar** (2011) ils ont présente un code numérique d'interactions fluide –structure pour résoudre le problème de coup de bélier en conduite à paroi mince. Ce code est le couplage de la méthode des éléments finis associée à l'algorithme de Newmark pour le mouvement de la paroi de la conduite et la méthode des caractéristiques pour le fluide. Contrairement à la théorie classique, ce code permet d'illustrer les effets secondaires d'interaction fluide–structure affectant les paramètres de coup de bélier dans les cas de conduite élastique et viscoélastique.

**P. G. PROVENZANO, F. BARONI et R. J. AGUERRE** (2011) ; ont utilisés des lois de fermeture différentes selon le type de la vanne utiliser. La réduction de la vitesse détermine la forme de l'onde de pression au cours de la fermeture. Une fonction générique a été élaborée permettant de modéliser une grande variété de lois. Un algorithme a été généré qui comprend la loi de fermeture comme condition aux limites pour décrire le phénomène transitoire. Ils ont montrés que la forme d'onde de pression et l'amplitude dépend essentiellement de ces lois de fermeture.

En 2017 Hocine Hammoum A, Akli Yahiaoui A et Bachir Achour ont analysé le coup de bélier dans une conduite forcée dans le cas d'une fermeture de vanne où les pertes de charges sont concentrées en aval [7].

### 1.3. Définitions

#### 1.3.1. Écoulement permanent

L'écoulement de liquide est dit permanent lorsque les propriétés du fluide et les caractéristiques hydrauliques de celui-ci restent invariables dans le temps, c'est à dire :

$$\frac{\partial \partial U}{\partial \partial t} = 0; \frac{\partial \partial P}{\partial \partial t} = 0; \frac{\partial \partial \rho}{\partial \partial t} = 0$$

Où U est vitesse moyenne d'écoulement, p la pression et  $\rho$  la masse volumique.

#### 1.3.2. Écoulement non permanent

L'écoulement du liquide est dit non permanent si la vitesse et la pression varient dans le temps (t) en un point donné de l'espace (x) rempli de liquide en mouvement, les vitesses et les pressions en écoulement non permanent sont en fonction de quatre variables indépendantes à savoir : coordonnées (x, y, z) du point examiné et le temps (t). On distingue un écoulement non permanent en charge et à surface libre.

#### 1.3.3. L'écoulement uniforme

Un écoulement est dit uniforme lorsque la vitesse du fluide est la même en direction et en sens en tout point de ce fluide.

$$\frac{\partial \partial U}{\partial \partial x} = 0$$

#### 1.3.4. L'écoulement non uniforme

Un écoulement est dit non uniforme si la vitesse du fluide varie d'une section à l'autre c'est-à-dire :

$$\frac{\partial \partial U}{\partial \partial x} \neq 0$$

#### 1.3.5. Écoulement transitoire

L'écoulement est dit transitoire lorsque les paramètres hydrauliques à savoir : la vitesse et la pression et les propriétés du fluide sont des fonctions du temps et de l'espace,  $U=f(x,y,z,t)$  et  $p=f(x,y,z,t)$ .

$$\frac{\partial \partial U}{\partial \partial x} \neq 0; \frac{\partial \partial U}{\partial \partial t} \neq 0; \frac{\partial \partial P}{\partial \partial t} \neq 0; \frac{\partial \partial P}{\partial \partial x} \neq 0$$

Avec : U la vitesse d'écoulement et P la pression.

Ce phénomène transitoire peut se manifester soit dans un canal à ciel ouvert ou bien dans une conduite en charge par accroissement ou décroissement du débit.

On pourra citer quelques exemples d'écoulements transitoires dans le cas d'une conduite en charge :

- Écoulement dans les machines hydrauliques à puissance variable.

-Phénomène du coup de bélier.

Donc l'écoulement transitoire est un écoulement non permanent, dans notre travail nous nous intéresserons uniquement au phénomène du coup de bélier.

### **1.3.6. Phénomène du coup de bélier**

Le phénomène coup de bélier est un écoulement du liquide dans une conduite en charge (gravitaire ou par refoulement) avec des variations pratiquement sensibles de la pression qui peuvent devenir dangereuses pour la tuyauterie. Ces variations résultant d'une perturbation des conditions permanentes d'écoulement.

Le phénomène du coup de bélier dans la tuyauterie apparaît au moment de variation brusque de la vitesse d'écoulement suite soit à une fermeture ou une ouverture d'une vanne soit d'un brusque arrêt de la pompe consécutif à une coupure de l'alimentation électrique.

Ce phénomène se produit dans les installations hydrauliques et génère des surpressions et des dépressions qui peuvent être périlleuses sur tous équipements de l'installation. En effet, la rapidité des manœuvres des vannes provoque une onde de surpression qui se propage dans la canalisation en menaçant tous équipement ne l'en résistant pas d'une part et d'autre part la coupure instantané du courant électrique génère une onde de dépression qui s'étend sur toute la canalisation en causant des dégâts surtout au point de dépression du profil en long de la canalisation.

#### **1.3.6.1. Risques dus au phénomène du coup de bélier**

Les conséquences du coup de bélier peuvent être néfastes elles deviennent de plus en plus dangereuses à mesure que les paramètres modificateurs deviennent importants (variation de pressions et de débits dans le temps).

Ces phénomènes se produisant dans une conduite en charge peuvent provoquer des risques à la suite d'une dépression ou surpression engendrée par des manœuvres brusques ou instantanées [8,9].

##### **1.3.6.1.1. Cas de suppression**

La surpression est une conséquence du coup de bélier engendrée par une pression importante se produisant à la suite d'une fermeture instantanée ou rapide d'une vanne de sectionnement ou bien à la suite d'une dépression causée par l'arrêt brusque d'une pompe. Si la pression totale c'est-à-dire la pression en régime permanent majorée de la valeur de surpression due au coup de bélier qui dépasse la pression maximale admissible des tuyaux, ce qui engendre des risques de rupture de ces derniers et des déboîtements des joints (les anneaux d'étanchéité seront délogés) [9]. La figure (1.1) illustre une photo représentant une conduite éclatée suite à une brusque surpression causée par un coup de bélier à la centrale électrique d'Oigawa au Japon.



**Figure (1.1) :** Vue d'une conduite forcée éclatée de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)

En plus de ces risques, l'onde de surpression peut porter des préjudices aux autres équipements.

- Rupture des réservoirs ou flexible
- Usure des joints, des soudures de raccordement et des appareils sanitaires.
- Détérioration des dispositifs de coupure, clapet anti retour et de régulation.
- Bruits importants et fortes vibrations dans les canalisations et les cloisons.

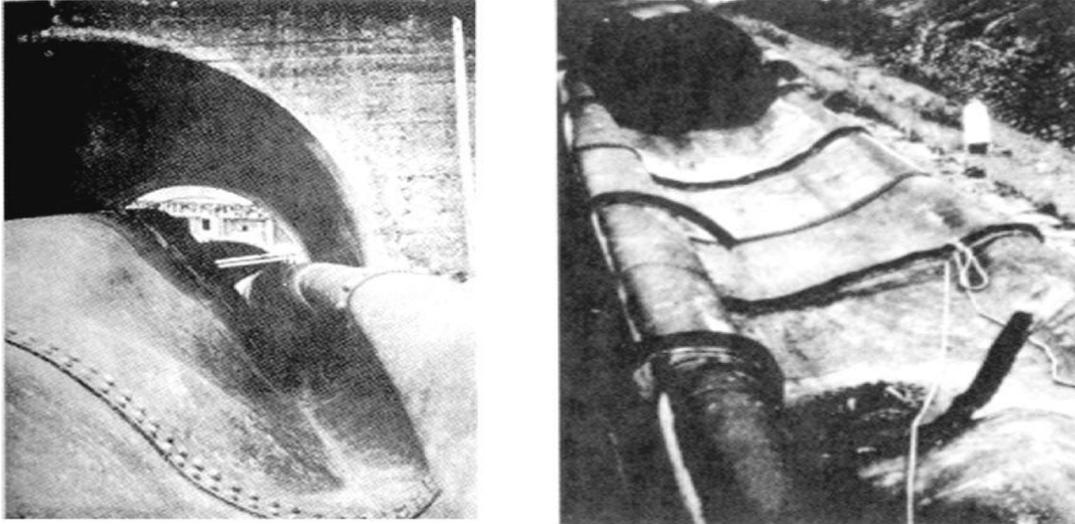
La photo représentée sur la figure (1.2) montre la détérioration des joints d'expansion suite à un aigu coup de bélier.



Figure (1.2) : Joints d'expansion détruits par le coup de bélier.

#### **1.3.6.1.2. Cas de dépression**

La dépression est également une conséquence du coup de bélier engendrée par l'apparition d'une pression relative négative, à la suite d'un arrêt brusque d'une pompe ou d'une ouverture instantanée d'une vanne de sectionnement. Si cette pression devient inférieure à 10 m.c.e il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est déformable la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints peuvent être aspirés. Le phénomène de cavitation une fois apparu peut aussi provoquer la détérioration de la couche d'enduit intérieur du tuyau [8,9]. La figure (1.3) élucide une photo d'une conduite aplatie suite à une forte dépression à la centrale électrique d'Oigawa au Japon.



**Figure (1.3) :** Vue d'une conduite aplatie due à un vacuum de la centrale électrique d'Oigawa, du Japon (d'après Chaudhry, 1979)

#### 1.3.6.1.3. Fatigue de la canalisation

En régime transitoire les alternances de surpression et de dépression qui sont une conséquence inévitable du phénomène provoquant la fatigue pour le matériau de la canalisation même si leur amplitude est faible.

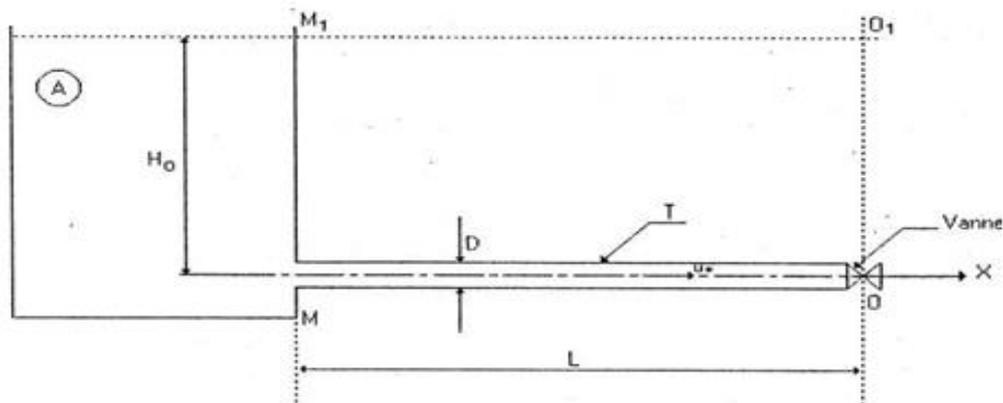
#### 1.3.6.2. Causes du coup de bélier

Le coup de bélier est un phénomène oscillatoire dont les causes les plus fréquentes sont les suivantes :

- L'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites en charge à écoulement gravitaire.
- La mise en Marche ou l'arrêt des pompes dans les conduites en charge par refoulement.
- Le remplissage ou la vidange d'un système d'AEP.
- Modification de la vitesse d'une pompe.
- Une variation du niveau d'un réservoir à une extrémité du réseau.
- La disparition de l'alimentation électrique dans une station de pompage qui est la cause la plus répandue du coup de bélier.
- La mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine.
- Une modification de position de vanne.
- Des opérations incontrôlées.

### 1.4. Phénomène du coup de bélier en cas d'une fermeture instantanée de la vanne

Examinons un coup de bélier provoqué par une brusque fermeture de la vanne V installé à l'extrémité d'une tuyauterie horizontale T de section circulaire alimentée à partir du réservoir A [7], comme il est indiqué à la figure (1.4).



**Fig. (1.4) : Schéma indicatif d'un système générant le phénomène du coup de bélier après une fermeture instantanée de la vanne.**

Prenons les désignations suivantes :

D : diamètre intérieur de la tuyauterie ;

E : le module d'élasticité du matériau des parois de la tuyauterie ;

e : l'épaisseur des parois de la tuyauterie ;

$U_0$  : vitesse moyenne en section de l'écoulement permanent ;

$P_0$  : la pression dans la tuyauterie en régime permanent ;

$H_0$  :  $P_0/\rho g$  charge piézométrique dans la tuyauterie en écoulement permanent ;

$S_0$  : l'air de la section en écoulement permanent ;

S : l'air de la section en régime transitoire ;

K : le module d'élasticité tridimensionnel du liquide ;

On admet que :

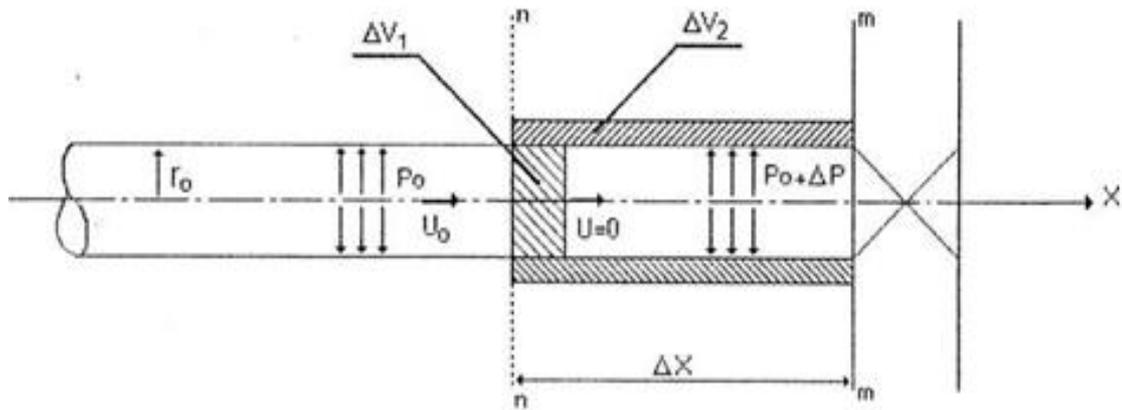
a) Les pertes de charge dans la tuyauterie et la pression cinétique  $U_0^2/2g$  sont telles qu'on peut les négliger, c'est-à-dire on peut prendre la ligne piézométrique avant le coup bélier coïncide avec la ligne de la hauteur hydrostatique.

b) Les dimensions du réservoir (A) sont telles que le niveau y sera pratiquement constant indépendamment de la variation du débit dans la tuyauterie.

c) A l'établissement des formules de calcul et à l'analyse du phénomène on ne tient pas compte de l'inertie de la paroi de la tuyauterie.

d) Le temps de fermeture de la vanne (V) est pris nul ( $T_f=0$ ) c'est-à-dire on considère que la vanne se ferme instantanément

En même temps on tient compte de la compressibilité du liquide et de la déformation des parois de tuyauterie à la variation de la pression comme il est éclairé à la figure (1.5).



**Fig. (1.5) : Comportement d'un tronçon d'une conduite situé à coté de la vanne soumis à des sollicitations du phénomène du coup de bélier**

L'origine de la lecture des distances est au point O en amont proche de la vanne et l'axe X est dirigé dans le sens de l'écoulement.

Soit la vitesse de l'écoulement du liquide  $U_0$  en régime permanent et la pression dans toutes les sections est égale à  $P_0$ .

En suite, soit au moment  $t_0$  la vanne se ferme complètement d'une façon instantanée, alors si le liquide serait incompressible et les parois de la tuyauterie seraient non élastiques, on aurait un arrêt instantané de toute la masse du liquide et la quantité de mouvement deviendrait nulle en entraînant une évolution énorme de la pression sur toute la longueur de la tuyauterie.

Au moment  $t = (t_0 + t)$ , les couches du liquide disposées à gauche de la section nn continuent à se déplacer avec la vitesse  $U_0$  dans le sens de la vanne. Sous l'influence de la pression de ces couches la masse du liquide arrêtée dans le compartiment mn se trouve comprimée, les parois de la tuyauterie se dilatent et la pression augmente d'une valeur  $\Delta P$ .

$$P = P_0 + \Delta P \quad (1.1)$$

Au moment  $t = t_0$  la pression au point O est égale à  $P_0$

Au moment  $t = t_0$  la section nn subit la pression  $P_0$  et la section mm la pression  $P = P_0 + \Delta P$ , alors la projection sur l'axe OX de l'impulsion des forces extérieures agissant sur le compartiment mn durant l'intervalle  $\Delta t$  est égale à :

$$[P \cdot S - (P_0 + \Delta P)S] \Delta t = -\Delta p \cdot \Delta t \cdot S \quad (1.2)$$

La variation de la quantité de mouvement de la couche du liquide arrêtée sera égale à

$$-\Delta m \cdot U_0 = -\rho \cdot \Delta V \cdot U_0$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

$$= -\rho \cdot S_0 \cdot \Delta x \cdot U_0 \quad (1.3)$$

Où  $\rho$  est la masse volumique du liquide et  $S_0$  est la section transversale de la conduite en régime permanent.

$$= -\Delta p \cdot \Delta t \cdot S = -\rho \cdot S_0 \cdot \Delta x \cdot U_0$$

D'où après la division par S (en prenant  $S = S_0$ ) on obtient :

$$\Delta p \cdot \Delta t = \rho \cdot \Delta x \cdot U_0$$

En désignant le rapport  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$  par  $a$ , on obtient la formule de N. JOUKOWSKY

$$\Delta p = \rho \cdot a \cdot U_0$$

$$\Delta p = \rho g \Delta H$$

$$\rho \cdot a \cdot U_0 = \rho g \Delta H \Rightarrow \Delta H = \frac{a \cdot U_0}{g} \quad (1.4)$$

$\Delta H$  est la valeur de la surpression créée par le phénomène du coup de bélier.

La grandeur  $a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$  est la vitesse de propagation de l'onde du coup de bélier dans la conduite.

Après la modification du régime dans le compartiment mn une propagation de l'augmentation de pression atteindra le réservoir, l'équilibre de pression entre la conduite et le réservoir ne sera plus respecté et il y aura alors détente et propagation d'une onde de dépression qui amène la conduite en son état initial mais avec un débit inverse  $Q = -U_0 S_0$ .

Lorsque l'onde arrivera à la vanne le débit appelé  $Q = -U_0 S_0$  provoquera une mise en dépression de la canalisation, le phénomène de transformation de l'énergie cinétique en énergie de pression se poursuivrait indéfiniment en maintenant constante l'énergie du système.

### 1.5. Processus de variation de la pression et de la vitesse dans une tuyauterie après une fermeture instantanée de la vanne

Le front mn d'une onde de coup de bélier qui se propage le long de la tuyauterie avec la vitesse d'onde ( $a$ ) entraîne les variations de la vitesse et de la pression dans les différentes sections de la tuyauterie.

Ainsi au moment  $t = t_0 + x/a$ , ce front d'onde parcourt la distance  $x$ .

Au moment  $t = t_0 + L/a$  ce front d'onde parcourt toute la longueur de la tuyauterie, en ce cas la pression augmente d'une valeur  $\Delta P$  sur tout le tronçon que l'onde de choc a parcouru et la vitesse du liquide diminue jusqu'à zéro.

La figure (1.6) représente un état instantané de la tuyauterie des épures de répartition de la hauteur et de la vitesse suivant la longueur de la tuyauterie au moment  $t = t_0 + x/a$ .

Sur ce tronçon de la tuyauterie la pression a augmenté de  $\Delta P$  et devenue égale à  $P = P_0 + \Delta P$ , alors que la vitesse du liquide est tombée à zéro et le liquide se trouve en état contacté.

Au moment  $t = t_0 + L/a$  le front mn de l'onde atteint le réservoir et occupe la position de la figure (1.7), à ce moment le liquide dans la tuyauterie se trouve en un état de repos instantané ( $U_0 = 0$ ), suivant toute la longueur de la conduite et la pression a augmenté de  $\Delta P$  et est devenue sur toute la longueur égale  $P = P_0 + \Delta P$ .

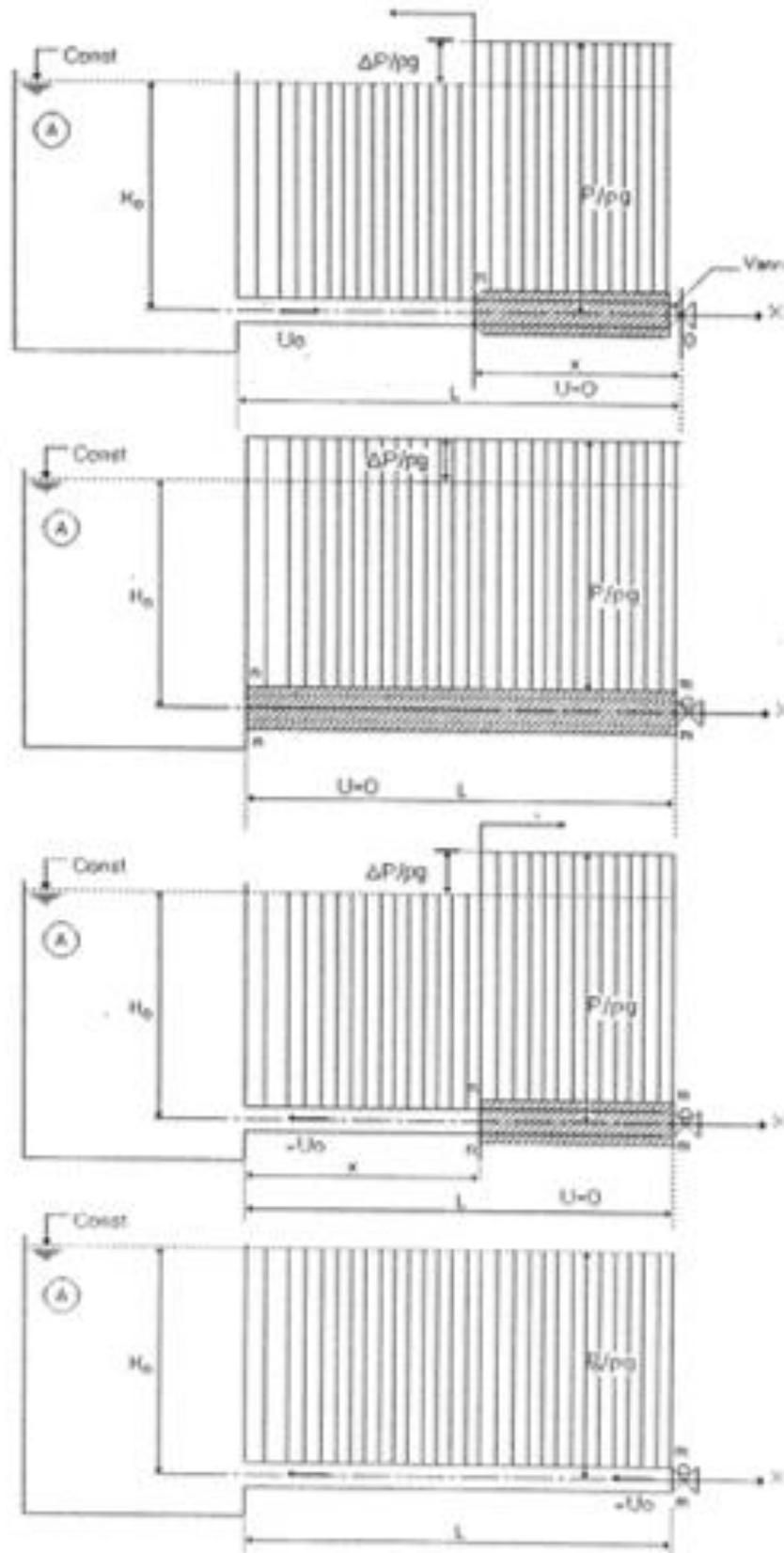
Un tel état du système n'est pas du tout stable parce que conformément à la supposition initiale, la pression dans le réservoir ne dépend pas des phénomènes se déroulant dans la tuyauterie. C'est pourquoi au moment  $t = t_0 + L/a$  l'élévation de pression  $\Delta P$  dans la section mn tombe d'une façon instantanée et devient égale à  $P_0$  comme dans le réservoir.

Au moment  $t = t_0 + L/a$  apparaît une vitesse de mouvement du liquide égale à celle initiale mais dirigée dans le sens opposé, au même temps il apparaît une onde réfléchie qui avec une vitesse d'onde  $a$  se propage du réservoir vers la vanne en rétablissant dans la tuyauterie la pression initial  $P_0$  et en créant la vitesse ( $-U_0$ ).

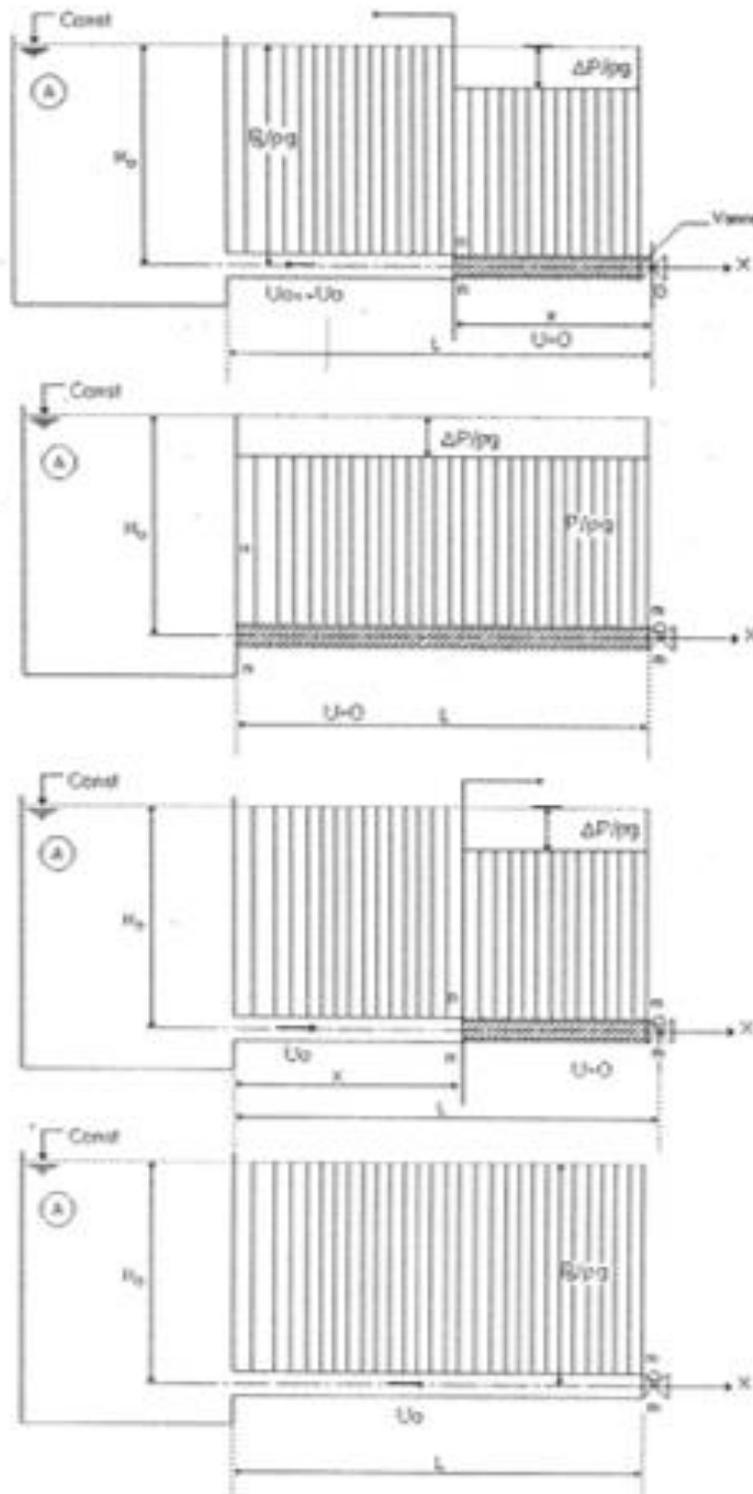
La figure (1.8) représente un état instantané de la tuyauterie des épures de répartition de la hauteur et de la vitesse suivant la longueur au moment  $t = t_0 + (L+x)/a$ .

Au moment  $t=t_0+2L/a$  l'onde réfléchie atteint la vanne et la masse du liquide contenue dans la tuyauterie reprend ses volumes et pressions initiaux. La pression au niveau de la vanne doit diminuer d'une valeur qui peut être égale à  $\Delta p = \rho \cdot a \cdot U_0$ .

Au moment  $t=t_0+2L/a$  près de la vanne, il apparaît une onde de dépression à une vitesse nulle. La figure (1.10) représente un état instantané de la tuyauterie des épures représentant la répartition de la hauteur et de la vitesse suivant la longueur au moment  $t=t_0+(2L+x)/a$ .



Figures (1.6,7,8 et 9) : Représentation des épures de la pression et de la vitesse dans une conduite forcée exposée au phénomène du coup de bélier.



**Figures (1.10,11,12 et 13) :** Représentation des épures de la pression et de la vitesse dans une conduite forcée exposée au phénomène du coup de bélier après la fermeture instantanée d’une vanne.

Au moment  $t=t_0+3L/a$  l’onde de pression atteint le réservoir et comme la pression dans le réservoir est constante il apparaît une onde réfléchi sur le réservoir qui se propage vers la vanne, avec la vitesse d’onde  $a$ , en créant dans la tuyauterie un nouvel état de pression  $P_0$  et de vitesse  $U_0$ .

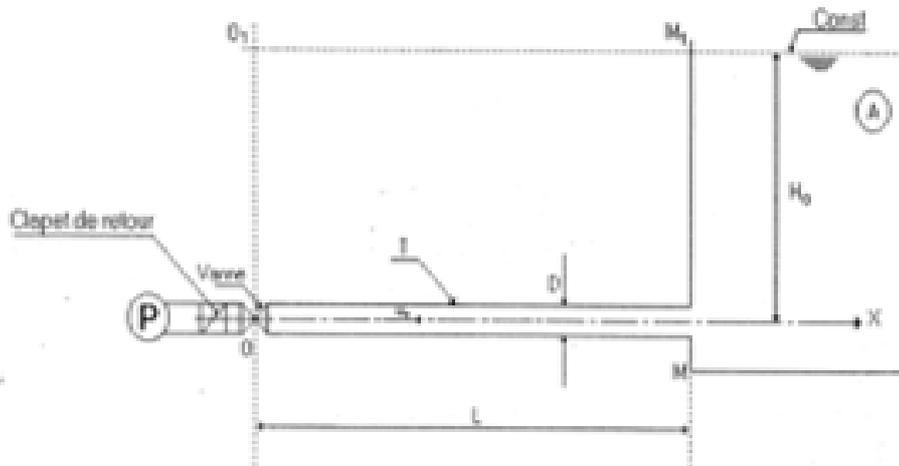
La figure (1.11) représente un état instantané de la tuyauterie des épures de la répartition de la hauteur et de la vitesse  $U$  suivant la longueur au moment  $t=t_0+(3L+x)/a$ .

Au moment  $t=t_0+4L/a$ , l'onde réfléchie atteint la vanne figure (1.12), a ce moment tout le liquide dans la tuyauterie se trouve en état initial à pression  $P_0$  et à la vitesse  $U_0$  dirigée vers la vanne fermée ceci provoquera un nouveau coup de bélier et le phénomène se déroule de nouveau conformément à la description ci-dessus [10].

### 1.6. Coup de bélier en cas d'un brusque arrêt d'une pompe

Examinons un coup de bélier provoqué par un arrêt brutal, par disjonction inopinée d'un ou de plusieurs groupes électropompes alimentant une conduite horizontale de refoulement débitant sur un réservoir.

En fonctionnement permanent le débit est établi à une valeur  $Q_0$ , supposons que ce débit ne soit brusquement plus fourni au temps  $t=t_0$  suite à une disjonction du moteur électrique de la pompe.



**Fig. (1.14) :** Schéma indicatif d'un système générant le phénomène du coup de bélier après un arrêt brusque d'une pompe

Analysant les processus de variation de la pression et de la vitesse de long de la conduite et au cours du temps.

Le front  $nn$  d'une onde de coup de bélier qui se propage le long de la conduite avec la vitesse d'onde ( $a$ ) entraîne les variations de la vitesse et de la pression dans les différentes sections de la tuyauterie.

Au moment  $t=t_0+L/a$ , ce front d'onde parcourt toute la longueur de la conduite dans ce cas l'eau poursuit son chemin, mais la conduite n'est plus alimentée.

Il va donc se produire à partir de la pompe une dépression  $\Delta P$  sur tout le tronçon que l'onde de choc a parcouru, et la vitesse du liquide diminue jusqu'à zéro, la figure(1-15) représente un état instantané de la tuyauterie des épures de répartition de la hauteur et de la vitesse suivant la distance  $x$  au moment  $t=t_0+x/a$  ; sur ce tronçon de la conduite la pression  $P$  diminue de  $\Delta P$  est devenue égale :  $P=P_0-\Delta P$ . Alors que la vitesse du liquide est tombé à zéro, le liquide se déprime et la conduite se contracte.

Au moment  $t=t_0+L/a$  le front  $nn$  de l'onde a atteint le réservoir et occupe la position  $nn$  comme il est indiqué à la figure (1.16), à ce moment le liquide dans la tuyauterie se trouve en état de repos instantané ( $U_0=0$ ) suivant toute la longueur de la conduite.

La conduite étant déformée dans les limites élastiques et elle reprend son diamètre initial à partir du réservoir, ou la pression ne dépend pas des phénomènes se déroulant dans la tuyauterie. C'est pourquoi au moment  $t=t_0+L/a$  la diminution de la pression d'une valeur  $\Delta P$  dans la section  $nn$  augmente d'une façon instantanée et devient égale à  $P_0$  comme dans le réservoir.

Au moment  $t=t_0+L/a$  apparaît une vitesse de mouvement du liquide égale à celle initiale, mais dirigée dans le sens opposé, au même temps une onde se propage du réservoir vers le clapet en rétablissant dans la tuyauterie la pression initiale  $P_0$ . La figure (1.17) représente un instantané de l'état de la conduite des épures de répartition de la hauteur et de la vitesse suivant la longueur au moment  $t=t_0+(L+x)/a$ .

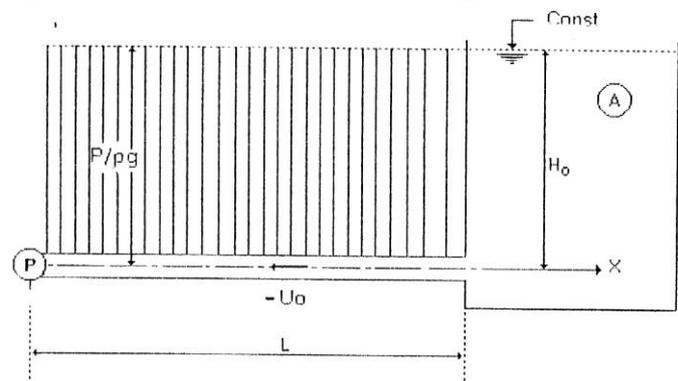
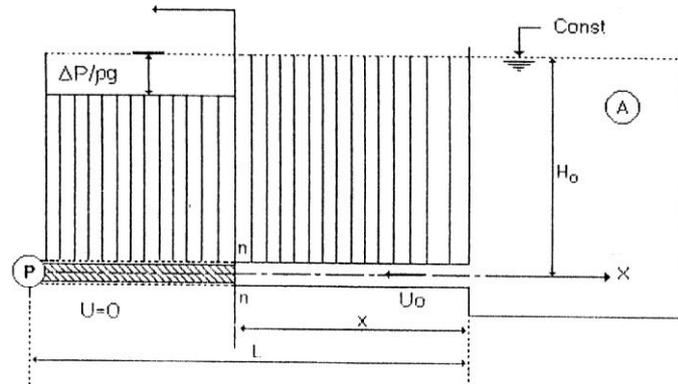
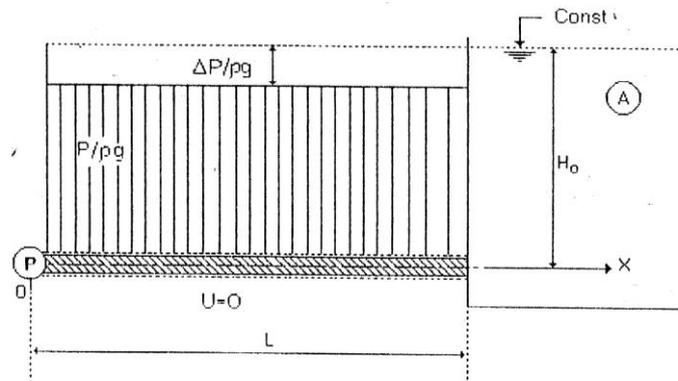
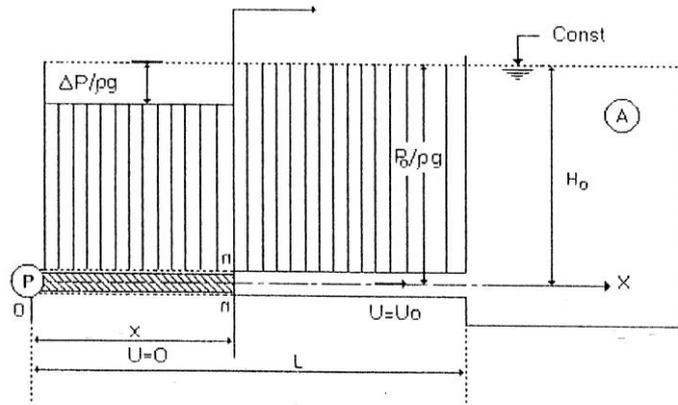
Au moment  $t=t_0+2L/a$  l'onde réfléchi atteint le clapet de retour et la masse du liquide continue dans la tuyauterie, reprend ses volume et pression initiaux figure (1.18).

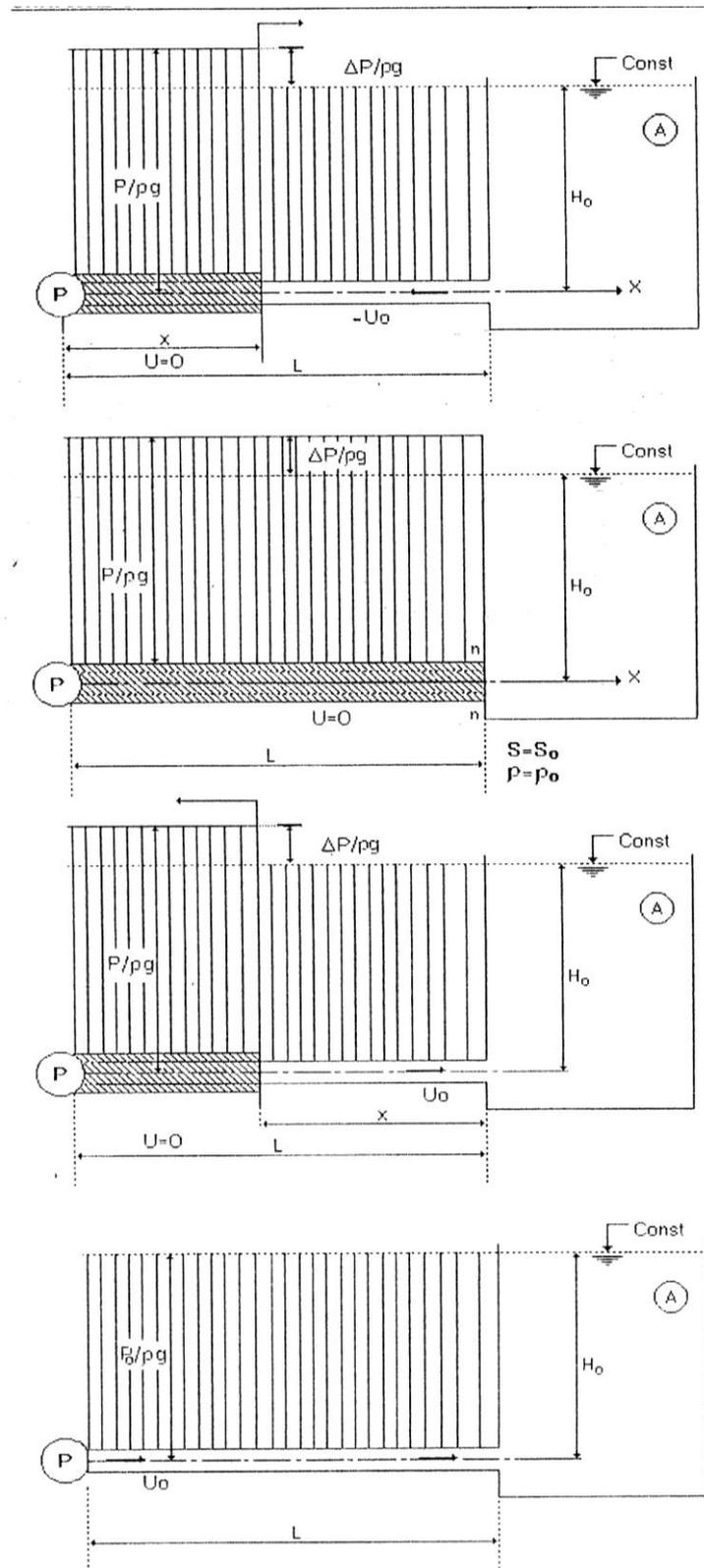
Au moment  $t=t_0+2L/a$  près du clapet, il apparaît une onde de surpression et a la vitesse nulle, la figure (1.19) représente un instantané de l'état de la conduite des épures de répartition de la hauteur et de la vitesse suivant la longueur au moment  $t=t_0+(2L+x)/a$ .

Au moment  $t=t_0+3L/a$ , l'onde de surpression atteint le réservoir, comme est indiqué à la figure (1.20), elle provoque une dilatation de toute la conduite. Comme la pression dans le réservoir est supposée constante, il apparaît une onde réfléchi sur le réservoir qui se propage vers le clapet de protection de la pompe en créant dans la conduite un nouvel état de pression initiale  $P_0$  et de vitesse  $U_0$ .

La figure (1.21) représente un instantané de l'état de la conduite des épures de la répartition de la hauteur et de la vitesse  $U$  suivant la longueur au moment  $t=t_0+(3L+x)/a$ .

L'élasticité permet à la conduite de reprendre de proche en proche du réservoir à la pompe son diamètre initial au bout du temps  $t= L/a$  c'est-à-dire à un temps  $t=4L/a$  depuis l'origine. A ce moment l'onde atteint le clapet et toute la masse liquide se trouve en son état initial à la pression  $P_0$  et à la vitesse  $U_0$  dans le sens de l'écoulement et le phénomène se reproduirait indéfiniment s'il n'était pas amorti par les pertes se charge.



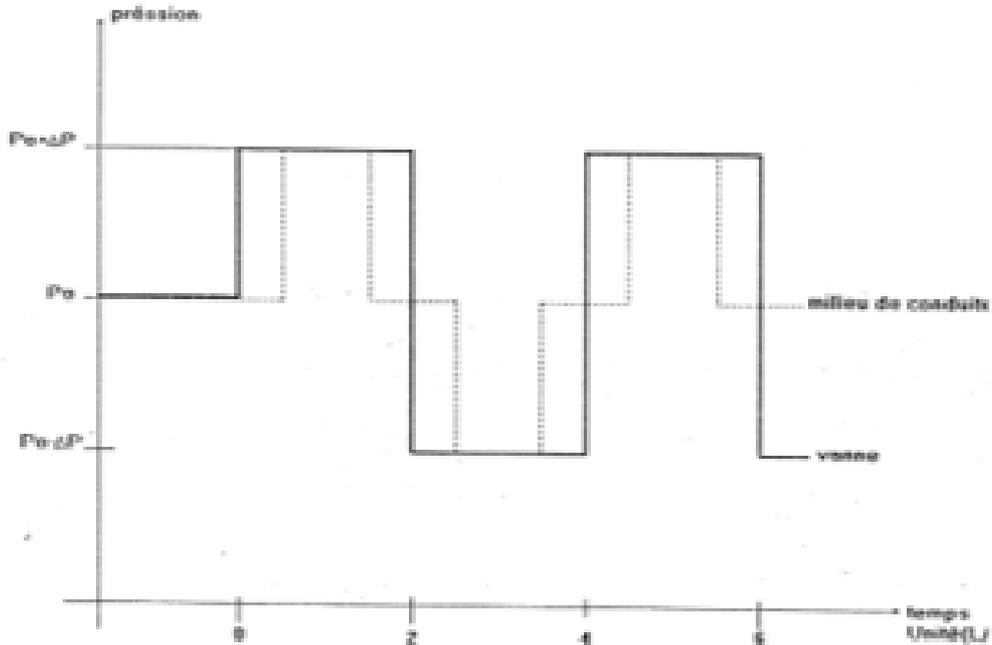


**Figures (1.14,15,16,17,18,19,20 et 21) :** Représentation des épures de la pression et de la vitesse dans une conduite forcée exposée au phénomène du coup de bélier après l'arrêt instantané d'une pompe.

Le phénomène du coup de bélier est un phénomène transitoire oscillatoire de période  $T=4L/a$  avec  $L$  la longueur de la conduite et  $a$  la célérité d'onde. Toutefois, lorsque ce phénomène

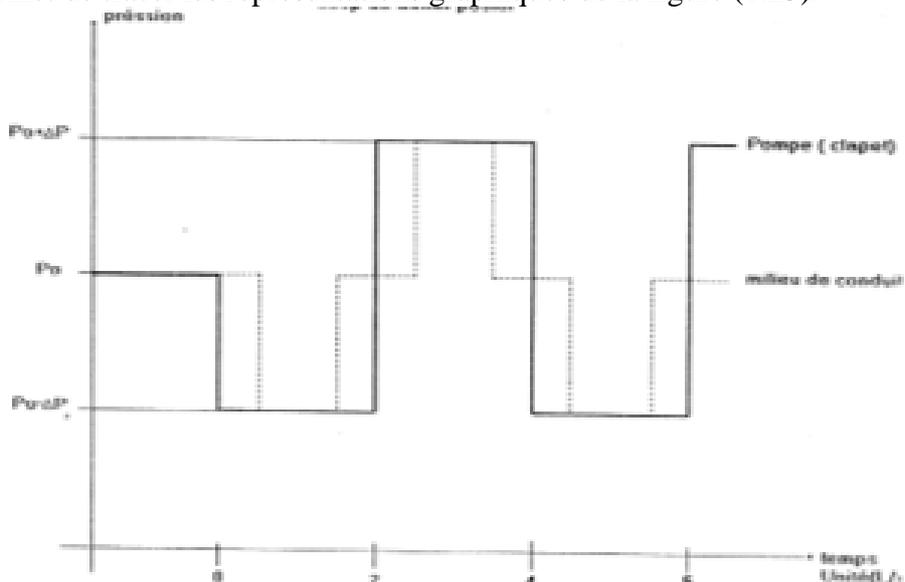
commence par une évolution de la pression on l'appelle le coup de bélier positif et lorsque il commence par une dépression on lui octroyé le nom d'un coup de bélier négatif.

Le suivi au cours du temps de ce phénomène en un point de la conduite, par exemple juste en amont de la vanne et sans tenir d'aucune perte le long du canal ni de moyen de protection anti bélier, permet de voir les représentations graphiques de la figure (1.22).



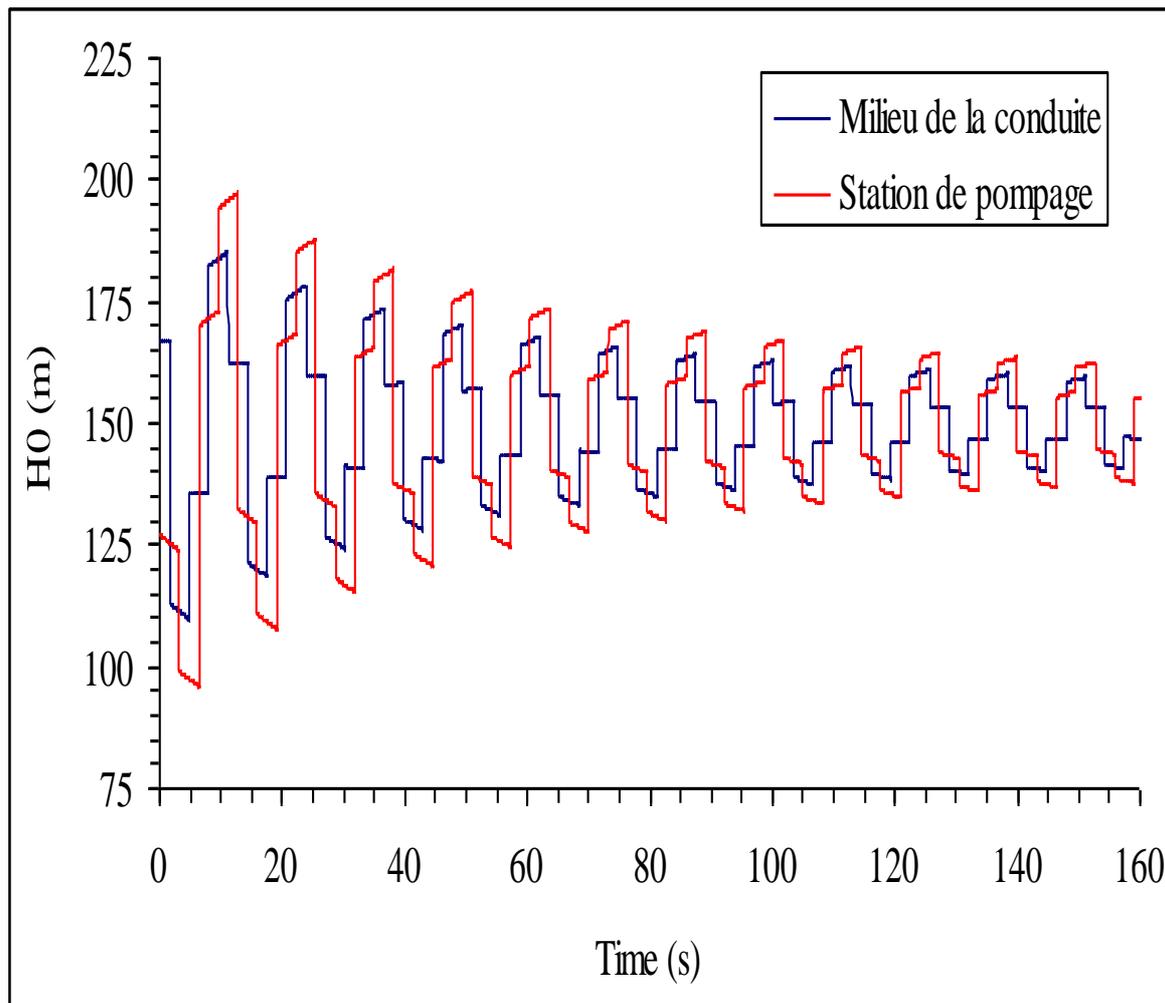
**Figure (1.22) :** Evolution de la pression au cours du temps au niveau de la vanne et au milieu de la conduite « Coup de bélier positif »

Après l'interruption du courant électrique alimentant une pompe en marche se génère un phénomène transitoire oscillatoire commençant par une dépression, ce qu'on appelle coup de bélier négatif. Le suivi au cours du temps de la pression au milieu de la conduite et au niveau de la pompe permet de tracer les représentations graphiques de la figure (1.23).



**Figure (1.23) :** Evolution de la pression au cours du temps au milieu de la conduite et au niveau de la pompe « Coup de bélier négatif »

Pour mettre en exergue l'influence de la perte de charge sur le phénomène transitoire dans un réseau en P.E.H.D, nous avons tracé la figure (1.24).



**Figure (1.24) :** Variation de la pression au cours du temps au milieu de la conduite et au niveau de la pompe « Coup de bélier négatif » dans une conduite en P.E.H.D  
Les pertes d'énergie amortissent l'ampleur des paramètres générés par le phénomène transitoire, mais ils ont l'inconvénient de minimiser davantage les valeurs de dépression.

### 1.7. Conclusion

Après avoir mis en exergue le phénomène du coup de bélier, On peut dire qu'un coup de bélier commençant par l'évolution de la pression est appelé coup de bélier positif et celui qui commence par une dépression est appelé coup de bélier négatif.

Les ondes de dépression et de surpression qui se propagent à la vitesse «  $a$  » comprimant et dilatant tour à tour la conduite. Ce phénomène alternatif de dégonflement et gonflement est appelé « respiration » de la conduite.

Le phénomène du coup de bélier est un phénomène alternatif « oscillatoire » de surpression et de dépression ou inversement et sa période est égale à  $4L/a$  pour les simples réseaux et pour les autres c'est une accumulation de périodes.

Le phénomène du coup de bélier est un phénomène qui se manifeste rapidement et pourra, dans un laps de temps, porter des préjudices sur tous les dispositifs où il atteint son ampleur.

Dans le cas d'absence d'une perte d'énergie le phénomène se poursuit et pourra durer un long temps, ce qui nécessite une attention particulière aux manœuvres, surtout des vannes de sanitaires et des pompes, qui pourront le créer.

La compréhension de ce phénomène, dans les réseaux complexes, s'avère d'une grande importance voire même obligatoire afin de bien choisir le moyen et lieu de protection des installations hydrauliques surtout en hydraulique sous pression.

# **Chapitre 2:**

**Equation de base d'un  
écoulement transitoire dans  
les réseaux d'adduction  
sous pression**

## 2.1. Introduction

Dans cette partie de notre travail, nous allons présenter les différentes équations permettant d'étudier les phénomènes transitoires que l'on rencontre dans les écoulements monophasiques sous pression.

Ces équations dérivent des conditions d'équilibres dynamiques et de continuité permettant de quantifier les phénomènes transitoires dans les conduites sous pression et par conséquent de calculer et de dimensionner une protection anti-bélier.

## 2.2. Equations de Saint-Venant

Nous allons établir les deux équations connues sous le nom d'équations de Saint-VENANT à partir des 2 équations générales qui sont :

- *L'équation de continuité ;*
- *L'équation dynamique.*

### 2.2.1. Equation de continuité

Avant de l'exprimer nous allons rappeler certains résultats de mécanique des matériaux et les utiliser pour déterminer les contraintes dans les tuyaux sous-pression, Nous le ferons, dans notre cas, pour les matériaux élastiques seulement [9,11].

#### 2.2.1.1. Expressions des contraintes dans les tuyaux sous pression

Appelons  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  les contraintes longitudinales et radiale,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  les déformations correspondantes et « E » le module d'élasticité du tuyau (Module de Young) et le module de Poisson «  $\nu$  ».

$$\nu = -\frac{\xi_2}{\xi_1} \quad (2.1)$$

La loi de HOOKE permet d'écrire

$$\xi_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \quad (2.2)$$

$$\xi_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \quad (2.3)$$

Essayons d'exprimer les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  en fonction des paramètres du tuyau à savoir le diamètre, l'épaisseur et la pression à l'intérieure de la conduite. La figure (2.1) représente la moitié d'une coupe transversale d'une conduite sous pression.

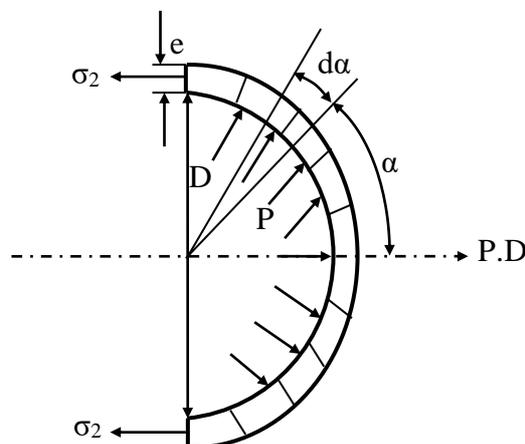


Figure (2.1) : Forces et contraintes radiales dans un tuyau

**a) Contrainte  $\sigma_2$**

Si « D » est le diamètre intérieur du tuyau, « e » son épaisseur, L la longueur de la conduite et P la pression interne considérons l'équilibre de la moitié de la conduite représentée dans la figure (2.1).

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cdot \cos(\alpha) ds - 2\sigma_2 L \cdot e = 0 \quad (2.4)$$

Puisque

$$ds = L \cdot r \cdot d\alpha$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P \cdot \cos(\alpha) \cdot L \cdot r \cdot d\alpha - 2\sigma_2 L \cdot e = 0 \Rightarrow L \cdot r \cdot P \cdot (\sin(\alpha))_{-\pi/2}^{\pi/2} - 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e = 0$$

$$2 P \cdot L \cdot r - 2 \cdot \sigma_2 \cdot L \cdot e = 0 \quad (2.5)$$

D'où il vient :

$$\sigma_2 = \frac{P \cdot D}{2 \cdot e} \quad (2.6)$$

L'expression (2.6) s'appelle la formule de MARIOTE.

**b) Contrainte  $\sigma_1$**

La détermination de  $\sigma_1$  dépend de la manière dont s'est effectuée la pose de la conduite.

**1<sup>er</sup>** Cas : Si la conduite a suffisamment de joints, on peut considérer qu'il n'ya ni contrainte, ni déformations longitudinales et que les éléments cylindriques successifs sont indépendants entre eux ( $v=0$ ). Dans ce cas on a :

$$\sigma_1 = v = 0 \quad (2.7)$$

**2<sup>ème</sup>** Cas : si la conduite est sans joints et ancrée aux deux extrémités ; la contrainte longitudinale doit être prise en compte. Elle dépend dans ce cas de la façon dont le tuyau est ancré aux extrémités.

$$\sigma_1 = v\sigma_2 \quad (2.8)$$

Cas C : Pour un tuyau libre à une extrémité : la force qui s'exerce à l'extrémité du tuyau est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\rho \cdot \pi \cdot D \cdot D}{4\pi \cdot D \cdot e} = \frac{PD}{4 \cdot e} \quad (2.9)$$

Elle est égale à la moitié de la contrainte radiale.

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_2}{2} \quad (2.10)$$

On a donc dans tous les cas  $\sigma_2 = \frac{P \cdot D}{2 \cdot e}$  comme expression de la contrainte radiale, pour la contrainte longitudinale on peut l'exprimer, dans les trois cas étudiés, sous la forme.

$$\sigma_1 = K' \cdot \sigma_2 \quad (2.11)$$

Cas A : la conduite a suffisamment de joints  $K'=0$

Cas B : la conduite sans joints, ancrée aux deux extrémités  $K'=v$

Cas C : la conduite sans joints libre à une extrémité  $K' = \frac{1}{2}$

**2.2.1.2. Expression de l'équation de continuité**

Nous allons chercher l'expression de l'équation de continuité en analysant les déformations à masse d'un volume de liquide entre les instants t et t+dt. Comme il est indiqué sur la figure (2.2), pour cela nous allons dire que cette masse exprimée par,  $\rho \cdot V = \rho \cdot S \Delta x$ , reste constante [8,11].

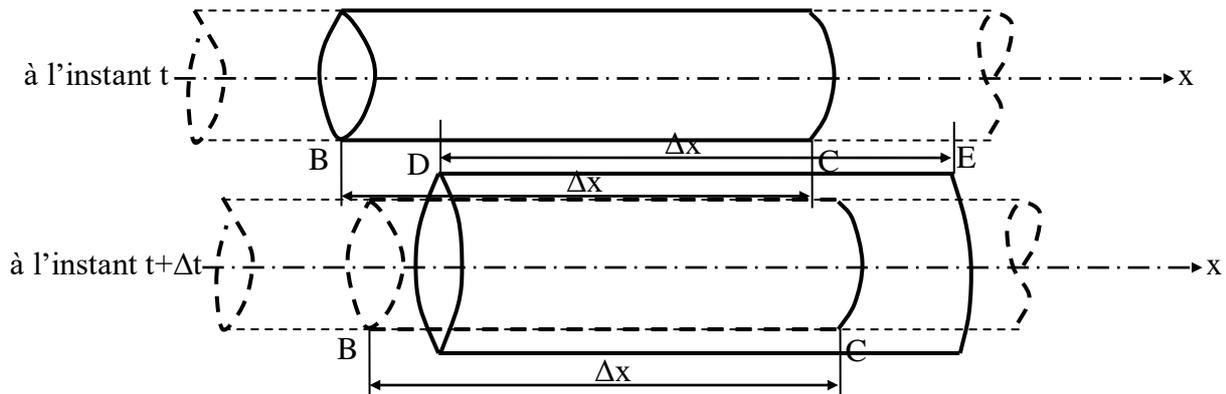


Fig. (2.2) : Déplacement d'un élément liquide

La variation de la masse au cours du temps est nulle, ce qui permet d'écrire.

$$dM = 0 \Rightarrow d(\rho \cdot S \cdot \Delta x) = 0$$

D'où

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{ds}{s} + \frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \quad (2.12)$$

### 2.2.1.2.1. Variation de longueur de l'élément liquide

Exprimons la variation de  $\Delta x$  dans un laps de temps c'est-à-dire entre les deux temps  $t$  et  $t + \Delta t$ .

$$\text{au temps } t, \Delta x(t) = (x_C - x_B)$$

$$\text{au temps } t + \Delta t, \Delta x(t) = (x_E - x_D)$$

La variation de  $\Delta x$  dans un laps de temps.

$$d(\Delta x) = (x_E - x_D) - (x_C - x_B) = (x_E - x_C) - (x_D - x_B)$$

$$d(\Delta x) = U_C dt - U_B dt = (U_C - U_B) dt$$

d'où

$$d(\Delta x) = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \cdot dt$$

$$\frac{d(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dt \quad (2.13)$$

### 2.2.1.2.2. Variation de la masse volumique de l'élément liquide

Par définition la compressibilité du fluide  $K$  est donnée par l'expression représentant le rapport de la variation de la pression à la variation de la masse volumique.

$$K = \frac{dp}{\frac{d\rho}{\rho}} \quad (2.14)$$

$$K = \frac{1}{\xi}$$

Où  $\xi$  est le module d'élasticité volumique du liquide.

La relation (2.14) permet de déduire l'égalité suivante :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{K} \quad (2.15)$$

### 2.2.1.2.3. Variation de section de l'élément liquide

La section de l'élément liquide reste en permanence égale à celle de l'élément du tuyau qui l'entoure, on a donc :

$$\frac{dS}{S} = \frac{d(\pi D^2)}{\pi D^2} = \frac{2dD}{D} = \frac{2dR}{R} = 2d\xi_2 = 2d\left(\frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu \sigma_1)\right) = 2\frac{1}{E}(d\sigma_2 - \nu d\sigma_1)$$

Avec  $\xi_2$  la déformation radiale du tuyau et  $\sigma_2$  et  $\sigma_1$  successivement les déformations radiale et longitudinale.

$$\frac{dS}{S} = 2\frac{d\sigma_2}{E}\left(1 - \nu \frac{d\sigma_1}{d\sigma_2}\right) = 2\frac{d\sigma_2}{E}(1 - \nu K') = \frac{2C}{E}d\sigma_2$$

Avec  $C=1-K'.\nu$

$$\frac{dS}{S} = \frac{2C}{E}.d\left(\frac{PD}{2.e}\right) = \frac{D.C}{E.e}.dP$$

$$\frac{dS}{S} = \frac{D.C}{E.e}.dP \quad (2.16)$$

avec :

D : diamètre intérieur de la conduite ;

e : Epaisseur de la conduite ;

E : Module de Young du matériau

Il suffit de remplacer chaque terme de l'équation (2.12) par les expressions données dans les équations (2.13), (2.15) et (2.16) pour obtenir l'expression de l'équation de continuité en régime transitoire.

$$\frac{dp}{K} + \frac{D.C}{E.e}.dP + \frac{\partial U}{\partial x}.dt = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{K} + \frac{D.C}{E.e}\right).dP + \frac{\partial U}{\partial x} dt = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D.C}{E.e}\right).\frac{dP}{dt} = 0 \quad (2.17)$$

On voit que le coefficient de déformabilité  $\left(\frac{1}{K} + \frac{D.C}{E.e}\right)$  dépend d'une part de la compressibilité du liquide, K, et d'autre part des caractéristiques du tuyau  $\frac{D}{E.e}$  (mince ou épaisse) et de la façon dont ce dernier est assemblé et ancré, C.

Ce terme est donc une caractéristique de l'installation sur laquelle on étudie le phénomène du coup de bélier on pose donc :

$$\frac{1}{a^2} = \rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{E.e}.C\right) \quad (1.18)$$

La constante « a » représente la vitesse de propagation de l'onde dans le liquide en régime transitoire « le coup de bélier »

- La vitesse de l'onde « a » augmente avec toute augmentation de la compressibilité du liquide K, du module d'élasticité E et de l'épaisseur du tuyau e.
- La vitesse de l'onde ou bien la célérité d'onde « a » diminue avec toute diminution du diamètre de la conduite « D » et de la masse volumique du liquide « ρ ».

Comme la dérivée totale de la pression dans une seule dimension, dans ce cas la direction x, s'écrit :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \quad (2.19)$$

L'équation (2.17) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{K} + \frac{D.C}{E.e}\right).\frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho.a^2}.\left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0$$

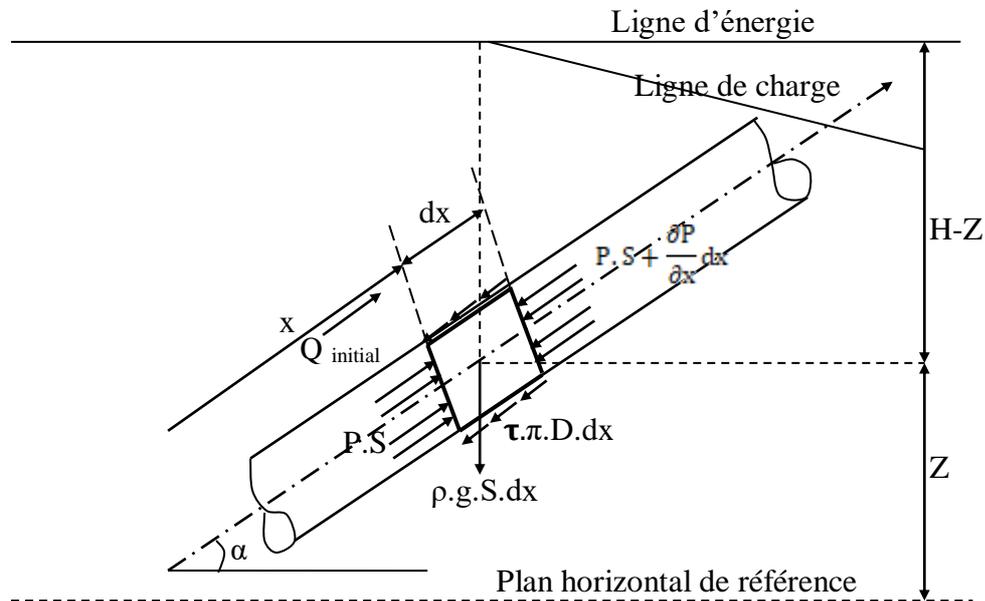
$$\rho.\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2}.\left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.20)$$

L'expression (2.20) est la première équation de ST-VENANT.

### 2.2.2. Equation dynamique

La deuxième équation de ST-VENAT peut être obtenue en appliquant le théorème des quantités de mouvement sur un élément de petit volume se déplaçant à l'intérieur du tube pendant

la propagation de l'onde [11]. La figure (2.3) montre les différentes forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite forcée.



**Fig. (2.3) :** Les forces exercées sur un élément liquide en déplacement dans une conduite forcée

$$\frac{d(M.u)}{dt} = \sum F_{\text{extérieures}} \quad (2.21)$$

Qui indique que la dérivée de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieure appliquées à l'élément fluide.

$$\frac{d(M.U)}{dt} = u \frac{dM}{dt} + M. \frac{du}{dt} \quad (2.22)$$

La masse de l'élément liquide ne varie pas dans son déplacement, on a donc  $\frac{dM}{dt} = 0$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{d(M.u)}{dt} = M \frac{du}{dt} = \rho. S. dx. \frac{du}{dt} \quad (2.23)$$

Notons tout d'abord :

$$\frac{dZ}{dx} = \sin(\alpha) \text{ et } P = \rho g(H - Z) \text{ en négligeant les termes en } \frac{U^2}{2g}$$

Les forces extérieures appliquées et projetées sur l'axe de la conduite en prenant la direction de l'écoulement comme sens positif sont :

Les forces de pression hydrostatique

$$F_p = P.S - \left( P.S + \frac{\partial P}{\partial x} S. dx \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} S. dx$$

La force de gravité qui est représentée par le poids de l'élément liquide.

$$F_{\text{Poids}} = -\rho. g. S. dx. \sin(\alpha)$$

La force de frottement :

$$F_{\text{frottement}} = -\tau. \pi. D. dx$$

Déterminons  $\sum F_{\text{extérieures}}$  tout en se basant sur la figure (2.3).

$$\sum F_{\text{extérieures}} = - \frac{\partial P}{\partial x} S. dx - \rho. g. S. dx. \sin(\alpha) - \tau. \pi. D. dx \quad (2.24)$$

Dans cette dernière expression on a négligé le terme contenant la variation de la section le long de l'élément.

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

Déterminons l'expression  $\tau.\pi.D$ , si les pertes de charge sont représentées par la formule de DARCY-WEISBACH.

$$\Delta H = \frac{\lambda L u^2}{D 2g}$$

La variation de la pression s'écrit :

$$\Delta P = \rho \cdot g \cdot \Delta H = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2}{D 2g}$$

On peut écrire alors les forces de frottement  $F_r$ , sur un tronçon de longueur  $L$ , par l'une des deux formules suivantes :

$$F_{\text{frottement}} = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L \text{ ou } F_{\text{frottement}} = \Delta P \frac{\pi D^2}{4}$$

D'où l'on déduit facilement

$$\tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \Delta P \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L u^2 \pi D^2}{D 2g 4}$$

Le gradient hydraulique qui est le rapport entre la perte de charge et la longueur s'écrit :

$$I_{\text{Hydraulique}} = \frac{\Delta H}{L} = \frac{\frac{\lambda L u^2}{D 2g}}{L} = \frac{\lambda u^2}{D 2g}$$

Posons  $j = I_{\text{Hydraulique}}$ , nous aurons :

$$j = \frac{\lambda u^2}{D 2g}$$

$$\tau \cdot \pi \cdot D \cdot L = \rho \cdot g \cdot \frac{\lambda L U^2 \pi D^2}{D 2g 4} \Rightarrow \tau \cdot \pi \cdot D = \rho \cdot g \cdot j \cdot S \quad (2.25)$$

Où :

$\tau$  : la tension unitaire de frottement à la paroi ;

$\lambda$  : coefficient de résistance ou de Darcy ;

$D$  : diamètre intérieur de la conduite ;

$U$  : Vitesse moyenne d'écoulement.

Portons l'expression de  $\tau.\pi.D$  dans l'équation (2.24) on obtient :

$$\Sigma F_{\text{extérieures}} = \frac{-\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \rho \cdot g \cdot j \cdot S \cdot dx \quad (2.25)$$

En portant l'équation (2.25) dans l'équation (2.23) on aura :

$$\frac{d(M \cdot u)}{dt} = \Sigma F_{\text{extérieures}}$$

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{du}{dt} = \frac{-\partial P}{\partial x} S \cdot dx - \rho \cdot g \cdot S \cdot dx \cdot \sin(\alpha) - \rho \cdot g \cdot j \cdot S \cdot dx$$

Simplifions par  $\rho \cdot S \cdot dx$ , nous obtenons :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g \cdot \sin(\alpha) - j \cdot g \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - g(\sin(\alpha) + j)$$

Ou autrement écrit :

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \quad (2.26)$$

L'expression (2.26) est la seconde équation de Saint Venant.

Comme la pression appliquée sur l'élément liquide s'écrit :

$$P = \rho g(H - Z) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right)$$

Puisque

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \sin(\alpha)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \left( \rho \cdot g \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \sin(\alpha) \right) \right) = -g(\sin(\alpha) + j)$$

$$\frac{du}{dt} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} - g \cdot \sin(\alpha) = -g \cdot (\sin(\alpha) + j) \Rightarrow \frac{du}{dt} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j$$

Ecrivons la dérivée totale par au temps de la vitesse en fonction des dérivées partielles sans oublier que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$

Portons cette dernière dans la précédente on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = -g \cdot j \quad (2.27)$$

Nous pouvons également remplacer, la dérivée totale de la vitesse, dans la seconde équation de Saint Venant, nous aurons :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \quad (2.28)$$

Les deux équations de ST-VENANT sont les suivantes :

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 & (2.20) \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) & (2.28) \end{cases}$$

### 2.3. Equations aux caractéristiques

Les deux équations de Saint- Venant établies ci-dessus permettent de traduire les mouvements transitoires, nous allons les transformer pour obtenir des équations plus maniables et ayant un sens physique plus évident partons des équations (2.20) et (2.28) [9].

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 & (2.29) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

Effectuons les opérations suivantes

1° Multiplier la première équation du système (2.29) par  $a/\rho$ .

2° Ajoutons et puis retranchons après cela membres à membres les deux équations, le système à résoudre prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \frac{\partial U}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial t} + (U - a) \frac{\partial P}{\partial x} \right) = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.30)$$

La première équation du système (2.30) montre que si on déplace sur un trajet tel que.

$$\frac{dU}{dt} = U \pm a$$

La quantité  $\frac{\partial U}{\partial t} + (U + a) \frac{\partial U}{\partial x}$  exprime sur ce trajet la dérivée totale par rapport au temps de la vitesse c'est-à-dire  $\frac{dU}{dt}$ , on doit faire de la même chose pour la pression c'est-à-dire :

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} (U + a)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} (U + a)$$

Le système d'équations (2.30) donne donc naissance au système suivant :

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{dP}{dt} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \frac{dU}{dt} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{dP}{dt} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (1.31)$$

En utilisant les expressions :

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} \sin(\alpha)$$

Puisque :

$$\sin(\alpha) = \frac{dZ}{dx}$$

Il vient :

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d(\rho \cdot g \cdot (H - Z))}{dt} = \rho \cdot g \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dZ}{dt} \right) = \rho \cdot g \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \sin(\alpha) \right)$$

Le système (2.31) donne naissance aux systèmes suivants :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U + a \\ \frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \cdot \frac{dH}{dt} = \frac{g}{a} (U + a) \sin(\alpha) - g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U - a \\ \frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \cdot \frac{dH}{dt} = -\frac{g}{a} (U - a) \sin(\alpha) - g(\sin(\alpha) + j) \end{cases} \quad (2.33)$$

Les deux premières équations des systèmes (2.32) et (2.33) c'est-à-dire celles donnant  $\frac{dx}{dt} = U \pm a$  sont dites équations aux caractéristiques.

Les deux dernières équations de ces deux systèmes sont dites équations de compatibilités.

De façon générale, on a toujours  $a \gg 0$  d'où les systèmes (2.32) et (2.33) s'écrivent tout simplement sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U + a = a \\ \frac{dU}{dt} + \frac{g}{a} \cdot \frac{dH}{dt} = -gj \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U - a = -a \\ \frac{dU}{dt} - \frac{g}{a} \cdot \frac{dH}{dt} = -gj \end{cases} \quad (2.35)$$

Ou autrement écrites :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U \pm a = \pm a \\ \frac{dU}{dt} \pm \frac{g}{a} \cdot \frac{dH}{dt} + gj = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

Faisons intervenir le débit  $Q=U.S$  dans cette expression tout en multipliant par  $a/g$ , on aura :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = U \pm a = \pm a \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{aQ}{gS} \pm \frac{dH}{dt} \right) + aj = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

Comme  $dx=\pm a \cdot dt$ , on aura l'expression suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{aQ}{gS} \pm \frac{dH}{dt} \right) + \frac{dx}{dt} j = 0 \Leftrightarrow d \left( \frac{aQ}{gS} \pm H \right) + j \cdot dx = 0 \quad (2.38)$$

Le signe plus doit être pris si  $dx=+ a dt$  alors que le signe moins n'est valable que dans le cas où  $dx=-a dt$ .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{a}{g.S} d(Q \pm dH) = -j dx \end{cases}$$

#### 2.4. Equations d'ALLIEVI

Les équations (2.20) et (2.28) sont générales et traduisent tous les mouvements transitoires. On peut donc les simplifier en rétrécissant le champ de leur validité, négligeant par exemple les pertes de charge et admettons qu'on ne s'intéresse qu'aux variations telles que  $U \frac{\partial U}{\partial x}$  soit négligeable devant  $\frac{\partial U}{\partial t}$  ceci est souvent vrai en hydraulique sous pression puisqu'en front d'onde  $\frac{\partial U}{\partial t} = a \frac{\partial U}{\partial x}$  et que U est faible devant a, on peut également cas négliger  $U \frac{\partial P}{\partial x}$  devant  $\frac{\partial P}{\partial t}$ . Le système d'équations (2.20) et (2.28) devient :

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g \sin(\alpha) \end{cases} \quad (2.39)$$

Posons  $P^* = P + \rho \cdot g \cdot Z$  Où Z représente la cote du point considéré, on peut écrire.

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left( \frac{\partial P^*}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} = -g \sin(\alpha) \end{cases} \quad (2.40)$$

$$P^* = P + \rho \cdot g \cdot Z \Rightarrow P = P^* - \rho \cdot g \cdot Z = \rho \cdot g(H - Z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho \cdot g \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = \rho \cdot g \left( \frac{\partial H}{\partial x} - \sin(\alpha) \right) \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} &\text{puisque } \frac{\partial Z}{\partial x} = \sin(\alpha) \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \rho \cdot g \left( \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial Z}{\partial t} \right) = \rho \cdot g \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\text{puisque } \frac{\partial Z}{\partial t} = 0$$

Portons les équations (2.41) et (2.42) dans le système composé des équations (2.20) et (2.28), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{g}{a^2} \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + g \cdot \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

On ramène ce système à deux équations indépendantes du deuxième ordre en dérivant et en éliminant les termes suivants :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial t} \text{ ou } \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} \\ \begin{cases} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.44)$$

H et U sont liés aux variables x et t par une même équation différentielle qui est l'équation classique des cordes vibrantes.

Le système d'équation (2.44) s'intègre pour donner le système de solutions suivant :

$$\begin{cases} H = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right) \\ U = U_0 - \frac{g}{a} \left(F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t - \frac{x}{a}\right)\right) \end{cases} \quad (2.45)$$

Où F et f représentent des fonctions quelconques des variables  $(t-x/a)$  et  $(t+x/a)$ , c'est à partir de ces équations que sont établies les solutions analytiques pour les cas simples en faisant intervenir les conditions aux limites.

## 2.5. Conclusion

Les deux équations de Saint- Venant sont obtenues en appliquant les équations de la continuité et de la quantité de mouvement, elles permettent de traduire tous les mouvements transitoires en hydraulique sous pression. Elles permettent également de fournir certaines grandeurs physiques, tels que les relations de célérité d'onde et des contraintes longitudinale et radiale ayant une forte relativité aux calculs de dimensionnement des anti-béliers et aux choix des conduites.

Les équations aux caractéristiques permettent de transformer les deux équations de Saint- Venant en équations flexibles représentées par deux équations aux caractéristiques et deux autres de compatibilité.

La transformation de ces équations à des équations aux caractéristiques donne un sens physique plus évident au problème. Toutefois, les équations d'ALLIEVI représentent un cas simple des équations de SAINT- VENANT. Cependant, les équations d'ALLIEVI restent d'une très grande importance pour entamer les problèmes en relativité avec le régime transitoire.

**Chapitre 3:**  
**Méthode des**  
**caractéristiques en**  
**écoulement transitoire et**  
**conditions aux limites**

**3.1 Introduction**

Nous allons présenter dans ce volet, de notre travail, la méthode des caractéristiques comme une technique permettant, tout d’abord, de déterminer le type des équations de Saint Venant et de nous aider à transformer ces dernières en équations ayant un sens physique plus évident. Par la suite, nous allons effectuer l’intégration des équations obtenues en discrétisant notre réseau en un nombre de nœuds suffisamment proches, puis nous serons devant l’obligation de mettre en détaille toutes les conditions aux limites possibles que nous pourrions rencontrés dans les réseaux d’adduction et nous terminerons par une petite conclusion.

**3.2. Présentation de la méthode des caractéristiques**

La représentation de cette méthode se rapporte aux équations aux dérivées partielles du premier ordre et à des systèmes de n équations [11]. Dans cette représentation on se limitera aux :

- a) Problèmes n’ayant que deux variables indépendantes ;
- b) Equations aux dérivées partielles linéaires mais peuvent dépendre des fonctions inconnues et des variables indépendantes.

**3.2.1 Présentation matricielle**

Considérons les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial u}{\partial t} + C_1 \frac{\partial P}{\partial x} + D_1 \frac{\partial P}{\partial t} = F \\ A_2 \frac{\partial u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial u}{\partial t} + C_2 \frac{\partial P}{\partial x} + D_2 \frac{\partial P}{\partial t} = G \end{cases} \quad (3.1)$$

Où A1, A2, B1, B2, C1, C2, D1 et D2 sont dans le cas général des fonctions des variables (x,t) ainsi que des fonctions u(x,t) et P(x,t). et F et G peuvent elles aussi être des fonctions de (x,t) de u(x,t) et de P(x,t).

Supposons que le système précédent possède une solution dans un domaine (S). Le problème qui consiste à trouver la solution du système aux voisinages d’une courbe (β) connue dans (S) est dit problème de Chauchy.

Au système (3.1), on peut ajouter les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + 0 + 0 = du \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt = dP \end{cases} \quad (3.2)$$

Les deux systèmes précédents (3.1) et (3.2) peuvent être regroupés sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \\ du \\ dP \end{pmatrix}$$

Où sous forme condensée

$$T.X=R$$

En utilisant la règle de Cramer pour calculer la dérivée de u par rapport à x.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\begin{bmatrix} F B_1 C_1 D_1 \\ G B_2 C_2 D_2 \\ du dt 0 0 \\ dP 0 dx dt \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_2 B_2 C_2 D_2 \\ dx dt 0 0 \\ 0 0 dx dt \end{bmatrix}} = \frac{D_x(u)}{D_T}$$

De la même manière, on pourra calculer

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{D_t(u)}{D_T}; \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{D_x(P)}{D_T} \text{ et } \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{D_t(P)}{D_T}$$

Où :  $D_t(u)$ ,  $D_x(P)$  et  $D_t(P)$  sont les déterminants propres aux dérivées partielles correspondantes.

On remarque ici, selon les valeurs  $D_T$  que l'un des trois cas suivants peut se présenter :

- $D_T \neq 0$ , dans ce cas la solution sera déterminée d'une manière unique en appliquant une méthode de résolution bien définie (Cramer, Gauss, Gauss Seidel, S.O.R etc....).
- $D_T = 0$  et  $D_x(u)$ ,  $D_t(u)$ ,  $D_x(P)$  et  $D_t(P)$  sont différentes de zéro dans ce cas la solution du problème devient infinie.
- $D_T = 0$  et  $D_x(u)$ ,  $D_t(u)$ ,  $D_x(P)$  et  $D_t(P)$  sont tous nuls dans ce cas la solution est théoriquement indéterminée mais elle existe dans le domaine (S), les lignes données par la différentielles  $dx$  et  $dt$  le long desquelles  $D_T=0$  sont appelées équations de direction « caractéristiques des systèmes ».

Les relations  $dx=dx(t)$  obtenues après résolution de  $D_T=0$  sont appelées équations des caractéristiques.

$$D_T = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} A_1 B_1 C_1 D_1 \\ A_2 B_2 C_2 D_2 \\ dx dt 0 0 \\ 0 0 dx dt \end{bmatrix} = 0$$

$$-dx(B_1 D_2 dx + D_1 A_2 dt - dx B_2 D_1 - dt D_2 A_1) + dt(B_1 C_2 dx + C_1 A_2 dt - dx B_2 C_1 - dt C_2 A_1) = 0$$

En organisant après avoir divisé les termes par  $dt$  on obtient :

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0 \quad (3.3)$$

Cette dernière équation c'est une équation de second degré avec pour inconnue  $dx/dt$  et dont la solution dépend du discriminant (delta) de cette équation.

$$\Delta = (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2)^2 - 4 * (B_2 D_1 - B_1 D_2) * (C_1 A_2 - C_2 A_1)$$

- si  $\Delta > 0$  le système (3.1) est dit de type hyperbolique ;
- si  $\Delta = 0$  le système (3.1) est dit de type parabolique ;
- si  $\Delta < 0$  le système (3.1) est dit de type elliptique.

Pour le premier cas, il est clair que la résolution de l'équation de second ordre (3.3) fournira deux racines distinctes en  $(dx/dt)$ .

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = f_1(x, t, u, p) \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = f_2(x, t, u, p) \end{cases}$$

A partir de ces deux équations on tire les équations de courbes caractéristiques.

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \end{cases} \quad (3.4)$$

On pose par exemple  $D_x(u)=0$

$$D_x(u) = \begin{bmatrix} F B_1 C_1 D_1 \\ G B_2 C_2 D_2 \\ du dt 0 0 \\ dP 0 dx dt \end{bmatrix} = 0$$

Cette dernière équation est dite « condition de compatibilité, en développant ce déterminant et en résolvant par rapport à du/dp, on aura :

$$\begin{cases} \left(\frac{du}{dP}\right)_1 = T_1 \\ \left(\frac{du}{dP}\right)_2 = T_2 \end{cases} \quad (3.5)$$

Les équations de ce dernier système sont dites équations de compatibilité.

### 3.2.2. Application de la méthode des caractéristiques en régime transitoire

L'écoulement transitoire est régi par les deux équations de la continuité et de la dynamique appelées équations de Saint Venant.

$$\begin{cases} \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{a^2} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

Nous allons les transformer pour obtenir des équations plus maniables et ayant un sens physique plus évident donc partons des 2 équations de Saint Venant et effectuons les opérations suivantes :

En multipliant la première équation par (a/ρ), puis ajoutons et retranchons membre à membre les deux équations précédentes on aura le système suivant :

$$\begin{cases} a \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \left(u + a\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{u}{\rho \cdot a} + \frac{1}{\rho}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \left(u - a\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{1}{\rho} - \frac{u}{\rho \cdot a}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \left(u + a\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \left(u - a\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \end{cases}$$

À ce système on peut rajouter le système (3.2), on aura le système suivant :

$$\begin{cases} \left(u + a\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{u + a}{\rho \cdot a}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \left(u - a\right) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} - \left(\frac{u - a}{\rho \cdot a}\right) \cdot \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{1}{\rho \cdot a} \cdot \frac{\partial P}{\partial t} = -g(\sin(\alpha) + j) \\ \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial t} dt + 0 + 0 = du \\ 0 + 0 + \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial t} dt = dP \end{cases} \quad (3.6)$$

Ce système s'écrit sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} (u+a) & 1 & \frac{(u+a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ (u-a) & 1 & \frac{-(u-a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) \\ -g(\sin(\alpha) + j) \\ du \\ dP \end{Bmatrix}$$

$$T.X=R$$

Par analogie avec le système développé précédemment on a :

$$A_1 = (u+a); B_1 = B_2 = 1; C_1 = \left(\frac{u+a}{\rho \cdot a}\right); D_1 = -D_2 = \frac{1}{\rho \cdot a}$$

$$A_2 = (u-a); C_2 = \left(\frac{u-a}{\rho \cdot a}\right); F = G = -g(\sin(\alpha) + j)$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (3.3) du second degré, on obtient l'équation sous la forme :

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + (D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) \frac{dx}{dt} + (C_1 A_2 - C_2 A_1) = 0$$

$$(B_2 D_1 - B_1 D_2) = \left(1 \cdot \frac{1}{\rho \cdot a} - 1 \cdot \frac{-1}{\rho \cdot a}\right) = \frac{2}{\rho \cdot a}$$

$$(D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) = \left(\frac{-1}{\rho \cdot a}(u+a) + 1 \left(\frac{u-a}{\rho \cdot a}\right) - 1 \left(\frac{u+a}{\rho \cdot a}\right) - \frac{1}{\rho \cdot a}(u-a)\right)$$

$$(D_2 A_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 - D_1 A_2) = -2 \left(\frac{u+a}{\rho \cdot a}\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2u \frac{dx}{dt} + (u^2 - a^2) = 0$$

Le discriminant de cette équation au second degré est égal à :

$$\text{delta} = (-2u)^2 - 4 * 1 * (u^2 - a^2) = 4a^2$$

Le delta étant positif, alors le système (3.6) est de type hyperbolique et l'équation admet deux racines distinctes.

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \frac{-b + \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{2u + 2a}{2} = u + a \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_2 = \frac{-b - \sqrt{\text{delta}}}{2a} = \frac{2u - 2a}{2} = u - a \end{cases}$$

La condition de compatibilité s'écrit à partir de l'équation  $D_x(u)=0$ , donc :

$$\det \begin{bmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{(u+a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{-(u-a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ du & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{bmatrix} = 0$$

$$D_x(u) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{(u+a)}{\rho \cdot a} & \frac{1}{\rho \cdot a} \\ -g(\sin(\alpha) + j) & 1 & \frac{-(u-a)}{\rho \cdot a} & \frac{-1}{\rho \cdot a} \\ du & dt & 0 & 0 \\ dP & 0 & dx & dt \end{vmatrix} = 0$$

Après développement de ce déterminant, on obtiendra l'équation suivante :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} + \left( \frac{dx}{dt} - u \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{dx}{dt} - u \right) + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

On a obtenu précédemment que :

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a$$

1° Pour signe positif de  $(dx/dt)=u+a$ , l'équation de compatibilité devient :

$$\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \quad (3.7)$$

1° Pour signe négatif de  $(dx/dt) u-a$ , l'équation de compatibilité s'écrit :

$$-\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \quad (3.8)$$

Ecrivons les équations (3.7) et (3.8) sous une autre forme, on pourra négliger la vitesse d'écoulement (u) par rapport à la vitesse d'onde (a) car  $u \ll a$  ce qui permet d'écrire  $u \pm a \approx a$

La pression (P) en point s'exprime par l'expression suivante :

$$P = \rho \cdot g \cdot (H - z) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} \right)$$

La référence étant horizontale d'où :

$$\sin(\alpha) = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \cdot \sin(\alpha) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\frac{dP}{dt} = \rho \cdot g \cdot \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right)$$

En remplaçant l'expression  $dP/dt$  dans les équations (16) et (17) on aboutira aux équations suivantes :

1° Pour  $(dx/dt)=u+a \approx a$

$$\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\rho \cdot a} \left( \rho \cdot g \cdot \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$\frac{g}{a} \left( \left( \frac{dH}{dt} - a \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} - g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot j = 0$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + g \cdot j = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} + \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot j$$

1° Pour  $(dx/dt)=u-a \approx -a$

$$-\frac{1}{\rho \cdot a} \frac{dP}{dt} + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{\rho \cdot a} \left( \rho \cdot g \cdot \left( \frac{dH}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0$$

$$-\frac{g}{a} \left( \left( \frac{dH}{dt} - (-a) \cdot \sin(\alpha) \right) \right) + \frac{du}{dt} + g(\sin(\alpha) + j) = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} - g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \sin(\alpha) + g \cdot j = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} + g \cdot j = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} - \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot j$$

Les deux équations rassemblées en une seule s'écrivent :

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{g}{a} \frac{dH}{dt} = -g \cdot j \quad (3.9)$$

Multiplions les deux membres par  $a/g$  nous aurons :

$$\frac{a}{g} \frac{du}{dt} \pm \frac{dH}{dt} = -a \cdot j$$

\* Le signe positif intervient lorsque  $dx/dt=u+a \approx a \Rightarrow dx=a \cdot dt$ .

\* Le signe négatif intervient lorsque  $dx/dt=u-a \approx -a \Rightarrow dx=-a \cdot dt$

En faisant intervenir le débit Q, on obtient

$$\frac{a}{g} \frac{d\left(\frac{Q}{S}\right)}{dt} \pm \frac{dH}{dt} = -a \cdot j \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{a \cdot Q}{g \cdot S} \pm H \right) = -a \cdot j$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a \cdot Q}{g \cdot S} \pm H \right) + a \cdot j = 0 \quad (3.10)$$

La méthode des caractéristiques transforme les deux équations de Saint Venant aux dérivées partielles en quatre équations différentielles totales, ces dernières sont exprimées en forme de différences finies.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \pm a \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{a \cdot Q}{g \cdot S} \pm H \right) + a \cdot j = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

Ces dernières équations différentielles totales peuvent être intégrées formant ainsi des équations de différences finies qui peuvent être facilement manipulées numériquement.

### 3.3. Intégration du système différentiel

Pour effectuer l'intégration du système différentiel en discrétisant la conduite en un certains nombre de points (nœuds). Ces points de discrétisation seront supposés suffisamment proches pour nous permettre d'écrire :

$$dF(x,t) = F(i+1) - F(i)$$

avec :

F est une fonction tel que H ou Q aux points de discrétisation successifs i et i+1 [11].

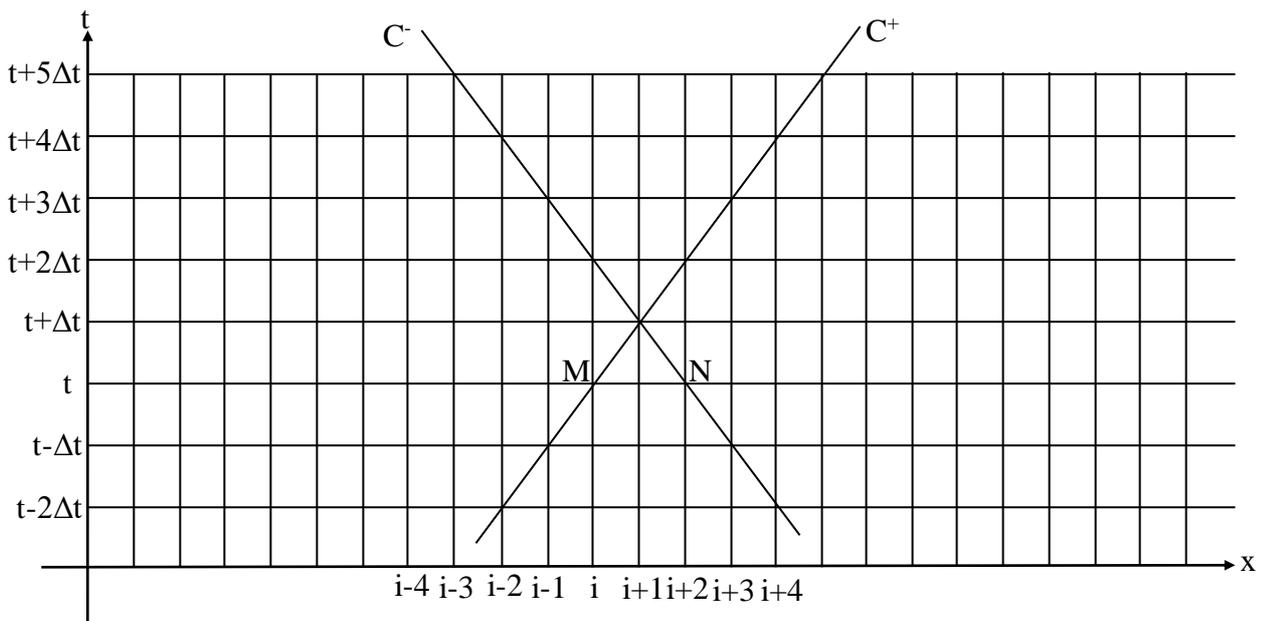


Fig. (3.1) : Schéma de discrétisation du réseau dans le temps et dans l'espace en écoulement transitoire dans une conduite sous pression

On suppose que la charge et le débit sont connus le long de la conduite au temps t. donc, intégrant l'équation caractéristique passant par M de coordonnées (i,t) entre deux instants t et (t+Δt), donc nous passons du point i au temps t au point (i+1) au temps (t+Δt).

$$\int_{H(i)}^{H(i+1)} dH = \frac{a}{g \cdot S} \int_{Q(i)}^{Q(i+1)} dQ + \int_{x(i)}^{x(i+1)} j dx$$

$$\int_{H(i)}^{H(i+1)} dH + \frac{a}{g \cdot S} \int_{Q(i)}^{Q(i+1)} dQ + \int_{x(i)}^{x(i+1)} j dx = 0$$

Comme dans le cas général, on n'a aucune idée sur le sens de l'écoulement du liquide dans la conduite, il est plus commode d'exprimer j par la relation suivante :

$$j = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} Q \cdot |Q|$$

Posons :

$$B = \frac{\lambda}{2 \cdot g \cdot d \cdot S^2} \text{ et } R = \frac{a}{g \cdot S}$$

et les introduisant dans l'expression précédente après intégration on aura :

$$(H(i+1) - H(i)) + R(Q(i+1) - Q(i)) + B \int_{x(i)}^{x(i+1)} Q \cdot |Q| \cdot dx = 0 \quad (3.12)$$

Donc nous pouvons facilement évaluer les deux premières intégrales de l'équation précédente. Cependant, nous ne pouvons faire de même pour la troisième intégrale représentant les pertes de charge car nous ne connaissons pas explicitement la variation de Q avec le temps, alors cette intégrale sera calculée en supposant que le débit Q est constant pendant un laps de temps  $\Delta t$  et est égal à Q(i).

$$B \int_{x(i)}^{x(i+1)} Q \cdot |Q| \cdot dx = BQ(i) \cdot |Q(i)| \int_{x(i)}^{x(i+1)} dx$$

Où

$$BQ(i) \cdot |Q(i)| \text{ et } \frac{B}{2} ((Q(i) \cdot |Q(i)|) + (Q(i+1) \cdot |Q(i+1)|))$$

Sont successivement des approximations du premier et de second ordre.

L'équation (3.12)(21) devient :

$$(H(i+1) - H(i)) + R(Q(i+1) - Q(i)) + B \cdot Q(i) \cdot |Q(i)| \cdot (x(i+1) - x(i)) = 0$$

Posons  $T=B(x(i+1)-x(i))=B \cdot \Delta x$  on aura :

$$(H(i+1) - H(i)) + R(Q(i+1) - Q(i)) + T \cdot Q(i) \cdot |Q(i)| = 0$$

En regroupant les termes correspondants au point (i+1) dans le premier membre et ceux correspondants au point i dans le second membre on aura :

$$H(i+1) + R \cdot Q(i+1) = H(i) + Q(i)(R - T \cdot |Q(i)|)$$

où  $H(i+1)+R \cdot Q(i+1)=CP$  est la caractéristique positive qui s'écrit :

$$CP = H(i) + Q(i)(R - T \cdot |Q(i)|)$$

De la même manière on réalise l'intégration de l'équation caractéristique (CM) passant par le point N de coordonnées (i+2) et t entre deux instants t et (t+ $\Delta t$ ).

$$\int_{H(i)}^{H(i+1)} dH - \frac{a}{g \cdot S} \int_{Q(i)}^{Q(i+1)} dQ + \int_{x(i)}^{x(i+1)} j dx = 0$$

$$H(i+1) - R \cdot Q(i+1) = H(i+2) - Q(i+2)(R - T \cdot |Q(i+2)|)$$

Où  $H(i+1)-R \cdot Q(i+1)=CM$  est la caractéristique négative (moins) qui s'écrit :

$$CM = H(i+2) - Q(i+2)(R - T \cdot |Q(i+2)|)$$

Finalement on a un système d'équation à résoudre.

$$\begin{cases} CP = H(i) + Q(i)(R - T \cdot |Q(i)|) \\ CM = H(i+2) - Q(i+2)(R - T \cdot |Q(i+2)|) \end{cases} \quad (3.13)$$

Les intégrations que nous venons d'effectuer ont pour base les conditions suivantes :

- Les caractéristiques de la conduite restent constantes : section, module d'élasticité, épaisseur ;
- Le point (i+1) est encadré de part et d'autre par les points (i) et (i+2).

les termes hauteur et débit entrant dans l'expression de CP et CM sont ceux des points i et (i+2) connus au temps t alors que H(i+1) et Q(i+1) sont des termes qui auront lieu au temps (t+ $\Delta t$ ), leurs valeurs au nouvel temps sont :

$$\begin{cases} H(i+1) = (CP + CM)/2 \\ Q(i+1) = (CP - H(i+1))/R \end{cases} \quad (3.14)$$

Le processus se répétera de la même manière que précédemment pour les temps suivant  $(t+2 \Delta t)$ ,  $(t+3 \Delta t)$ ,  $(t+4 \Delta t)$   $(t+5 \Delta t)$  etc. en fait c'est un régime permanent qui se répète plusieurs fois.

Dans le cas où le point  $(i+1)$  est un point limite, nous ne disposerons alors que d'une seule équation (le long de  $C^+$  ou le long  $C^-$ ) pour déterminer les inconnus  $H(i+1)$  et  $Q(i+1)$  dans ce cas on fera appel à une équation spéciale adaptée à la condition limite considérée.

### 3.4 Conditions aux limites concordantes

Les conditions aux limites sont des équations complémentaires nécessaires chaque fois que les caractéristiques de l'écoulement varient instantanément en un point donné du réseau. En pratique, plusieurs conditions aux limites peuvent être rencontrées en écoulement transitoire au niveau d'une valve, d'un clapet, d'un point de connexion, d'une station de pompage, d'un réservoir etc. Donc les conditions aux limites nous permettent de simplifier les équations du mouvement généralement difficiles à résoudre afin de les rendre plus maniables.

#### 3.4.1 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'alimentation à niveau constant

Pour mettre en évidence les conditions aux limites justes à la sortie d'un réservoir, on doit supposer, tout d'abord, que le réservoir est de grandes dimensions afin de négliger la variation du plan d'eau dans son intérieur lors de génération de l'écoulement transitoire.

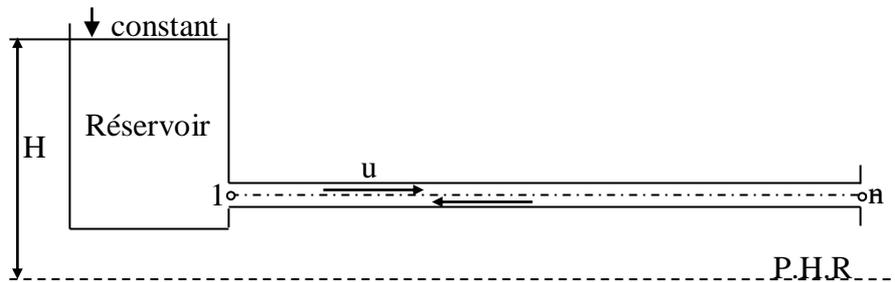


Fig. (3.2) : Sortie de l'eau à partir d'un réservoir à charge constante

$H(1)=H_R$  en négligeant les pertes de charge à l'entrée du réservoir ainsi que la hauteur due à l'énergie cinétique donnée par l'expression suivante :

$$\frac{u_0^2}{2g} \approx 0$$

Où  $H_R$  est le niveau du plan d'eau dans le réservoir et  $H(1)$  est la charge relative au niveau de l'orifice du réservoir.

Lorsque une vanne est placée à l'extrémité aval de la conduite et elle est subitement fermée, une onde de surpression est générée pour se propager vers le réservoir où elle sera réfléchiée en une onde de dépression dont l'équation dans le plan  $(Q,H)$  s'écrit :

$$\begin{cases} CN = H(1) - R \cdot Q(1) \Rightarrow CN = H_R - R \cdot Q(1) \\ \text{ou } CN = H(2) - Q(2)(R - T \cdot |Q(2)|) \end{cases}$$

$H(2)$  et  $Q(2)$  sont des quantités calculées au temps  $(t+\Delta t)$  donc :

$$Q(1) = (H_R - CN)/R \quad (3.15)$$

#### 3.4.2 Conditions aux limites au niveau d'un réservoir d'arrivée à niveau constant

Après avoir examiné les conditions aux limites d'une alimentation à partir d'un réservoir, nous allons entamer le cas le plus répandu en pratique qui est l'arrivée de l'eau à un réservoir à niveau constant. Le réservoir doit également être considéré comme de grandes dimensions afin négliger la variation du plan d'eau lors de la réapparition du phénomène transitoire. La figure (3.3) donne un schéma représentatif d'un réservoir alimenté à partir d'une seule conduite.

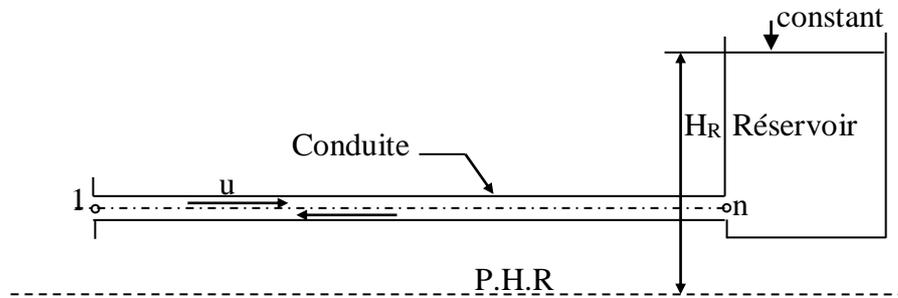


Fig. (3.3) : Arrivée de l'eau à un réservoir à charge constante à l'aval

La caractéristique  $C^+$  permet d'écrire :

$$\begin{cases} H(n) + R \cdot Q(n) = CP \\ Q(n) = (CP - H(n))/R \end{cases}$$

Comme  $H(n)=H_R$  on aura :

$$Q(n) = (CP - H_R)/R \quad (3.16)$$

### 3.4.3 Conditions aux limites au niveau d'une extrémité fermée en aval

Soit une conduite forcée par pompage ou par une alimentation gravitaire et elle est fermée à son extrémité d'aval comme il indique la figure (3.4).

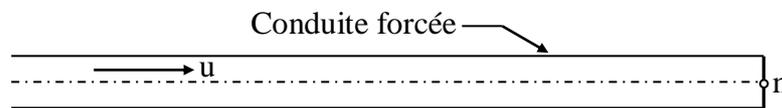


Fig. (3.4) : Extrémité complètement fermée à l'aval d'une conduite

Au niveau de l'extrémité aval  $Q(n)=0$  alors l'équation de la caractéristique positive ( $C^+$ ) au niveau de ce nœud s'écrit :

$$CP = H(n) + R \cdot Q(n) = H(n) + R \cdot 0 = H(n)$$

D'où

$$H(n) = CP \quad (3.17)$$

$$CP = H(n-1) + Q(n-1)(R - T \cdot |Q(n-1)|)$$

### 3.4.4 Conditions aux limites au niveau d'une vanne à l'extrémité aval

L'existence d'une vanne à l'extrémité aval d'une conduite, conduit à prendre en compte le temps de fermeture de cette vanne, est ce que c'est une fermeture instantanée (rapide) ou une fermeture progressive (lente).

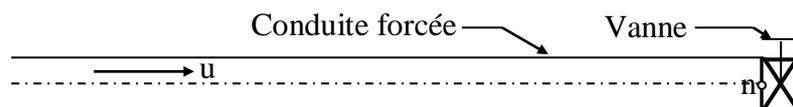


Fig. (3.5) : Vanne à l'extrémité aval

#### a) Fermeture instantanée

On dit que la fermeture de la vanne est instantanée lorsque le temps de fermeture est inférieur au temps d'aller et de retour de l'onde de choc.

$$t < 2L/a$$

Où  $L$  est la longueur de la conduite et  $a$  est la célérité d'onde due à la reproduction du phénomène transitoire.

Dans cette situation on se retrouve dans une extrémité fermée à l'aval qui est le cas précédent.

**b) Fermeture lente**

La fermeture est dite lente si le temps de fermeture est supérieur au temps d'aller et de retour de l'onde de choc.

$$t > 2L/a$$

En régime permanent, l'indice zéro, le débit qui passe à travers une vanne s'écrit comme suit :

$$Q_0(n) = (C_d A_v)_0 \sqrt{2 \cdot g H_0(n)} \quad (3.18)$$

Avec :

$C_d$  : coefficient de débit ;

$A_v$  : section de l'ouverture de la vanne.

Si l'écoulement à l'état transitoire, le débit qui passe à travers la vanne s'écrit :

$$Q(n) = (C_d A_v) \sqrt{2 \cdot g H(n)} \quad (3.19)$$

En divisant les carrés des deux équations précédentes, nous obtenons ce qui suit :

$$Q^2(n) = \frac{Q_0^2(n)}{H_0(n)} \frac{(C_d A_v)^2}{(C_d A_v)_0^2} H(n) \quad (3.20)$$

Posons

$$\tau = \frac{(C_d A_v)}{(C_d A_v)_0}$$

Où  $\tau$  est l'ouverture relative de la vanne.

En remplaçant  $H(n)$  par la relation donnée la caractéristique positive ( $C^+$ ), c'est-à-dire  $H(n) = CP - RQ(n)$  nous aurons :

$$Q^2(n) = \frac{Q_0^2(n)}{H_0(n)} \tau^2 \cdot (CP - R \cdot Q(n))$$

$$Q^2(n) + \frac{Q_0^2(n)}{H_0(n)} \cdot \tau^2 \cdot R \cdot Q(n) - \frac{Q_0^2(n)}{H_0(n)} \cdot \tau^2 \cdot CP = 0$$

Posons  $C_v = \frac{Q_0^2(n)}{H_0(n)} \cdot \tau^2$  nous aurons :

$$Q^2(n) + C_v \cdot R \cdot Q(n) - C_v \cdot CP = 0$$

C'est une équation de second ordre et sa résolution conduit au résultat suivant :

$$H(n) = 0,5 \left( -C_v + \sqrt{(R \cdot C_v)^2 + 4 \cdot CP \cdot R \cdot C_v} \right) \quad (3.21)$$

La valeur  $H(n)$  peut être déterminée maintenant de l'équation (3.21).

**3.4.5 Conditions aux limites au point de jonction de deux conduites en série [11]**

Soient deux conduites raccordées en série au point  $i$ , comme il est indiqué dans la figure (3.6). leurs caractéristiques sont  $(a_1, R_1, T_1)$  pour la première et  $(a_2, R_2, T_2)$  pour la seconde, le calcul des grandeurs  $H(i)$  et  $Q(i)$  au niveau du point  $i$  s'effectue à l'aide des équations des caractéristiques positive ( $C^+$ ) et négative ( $C^-$ ).

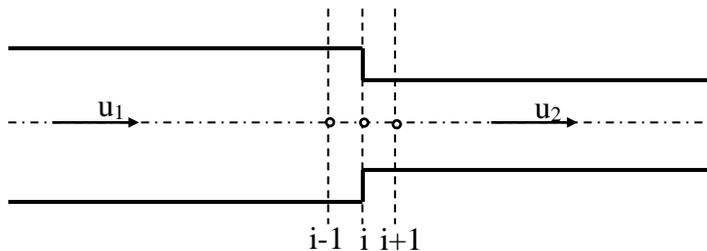


Fig. (3.6) : Branchement en série de deux conduites

Pour la première conduite la caractéristique positive  $C^+$  s'écrit :

$$CP = H(i) + R_1 \cdot Q(i) \text{ avec } CP = H(i-1) + Q(i-1)(R_1 - T_1 \cdot |Q(i-1)|)$$

Pour la deuxième conduite la caractéristique négative  $C^-$  s'écrit :

$$CN = H(i) - R_2 \cdot Q(i) \text{ avec } CN = H(i+1) - Q(i+1)(R_2 - T_2 \cdot |Q(1+1)|)$$

Au niveau du point  $i$ , on aura superposition des deux ondes de surpression (CP) venant de la vanne et de dépression (CN) venant du réservoir. À partir de ces quatre dernières équations nous pouvons écrire :

$$Q(i) = (CP - CN)/(R_1 + R_2) \quad (3.22)$$

$$H(i) = CP - R_1 \cdot Q(i) \text{ ou } H(i) = CP + R_2 \cdot Q(i) \quad (3.23)$$

### 3.4.6 Conditions aux limites au point de jonction de trois conduites

Pour déterminer les conditions aux limites au point de jonction de trois conduites en un point  $i$ , on doit baser sur le schéma représenté sur la figure (3.7).

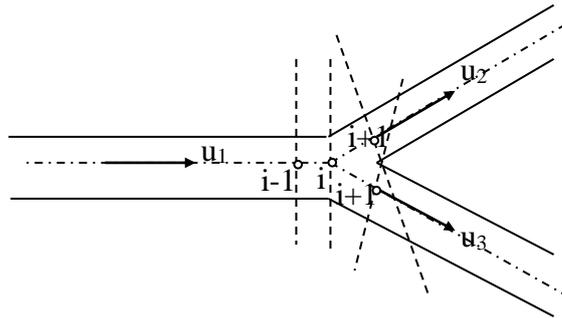


Fig. (3.7) : Jonction de trois conduites

La conduite (1) est alimentée par un réservoir dont l'équation de sa caractéristique positive  $C^+$  prend l'expression suivante :

$$CP = H(i) + R_1 \cdot Q_1(i)$$

Les conduites (2) et (3) sont obturées par des vannes placées à leurs extrémités aval dont leurs équations caractéristiques s'écrivent :

$$\begin{cases} CN_2 = H(i) - R_2 \cdot Q_2(i) \\ CN_3 = H(i) - R_3 \cdot Q_3(i) \end{cases}$$

Au nœud  $i$  on a une charge commune entre les trois conduites d'où on peut écrire :

$$H(i) = H_1 = H_2 = H_3$$

Pour le cas étudié, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1(i) = (CP - H(i))/R_1 & (3.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_2(i) = -(CN_2 + H(i))/R_2 & (3.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_3(i) = -(CN_3 + H(i))/R_3 & (3.26) \end{cases}$$

De l'équation de continuité on peut écrire :

$$\sum Q(i) = 0 \Rightarrow Q_1(i) + Q_2(i) + Q_3(i) = 0$$

$$(CP - H(i))/R_1 - (CN_2 + H(i))/R_2 - (CN_3 + H(i))/R_3 = 0$$

$$-H(i)(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) + (CP/R_1 + CN_2/R_2 + CN_3/R_3) = 0$$

On aura donc :

$$H(i) = (CP/R_1 + CN_2/R_2 + CN_3/R_3)/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3) \quad (3.27)$$

Les débits  $Q_1(i)$ ,  $Q_2(i)$  et  $Q_3(i)$  peuvent être déterminés à partir des équations (3.24), (3.25) et (3.26).

### 3.4.7 Conditions aux limites au point de jonction de quatre conduites

Pour déterminer les conditions aux limites au point de jonction de quatre conduites en un point  $i$ , on doit baser sur le schéma représenté sur la figure (3.8).

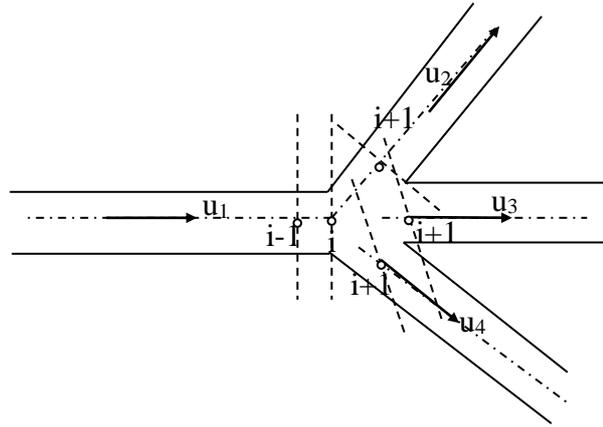


Fig. (3.8) : Jonction de quatre conduites

La conduite (1) est alimentée à partir du réservoir dont l'équation de sa caractéristique positive  $C^+$  prend l'expression suivante :

$$CP = H(i) + R_1 \cdot Q_1(i)$$

Les conduites (2), (3) et (4) sont obturées par des vannes placées à leurs extrémités aval dont leurs équations caractéristiques s'écrivent :

$$\begin{cases} CM_2 = H(i) - R_2 \cdot Q_2(i) \\ CM_3 = H(i) - R_3 \cdot Q_3(i) \\ CM_4 = H(i) - R_4 \cdot Q_4(i) \end{cases}$$

Au nœud  $i$  on a une charge commune entre les trois conduites d'où on peut écrire :

$$H(i) = H_1 = H_2 = H_3 = H_4$$

Pour le cas étudié, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1(i) = (CP - H(i))/R_1 & (3.28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_2(i) = (H(i) - CM_2)/R_2 & (3.29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_3(i) = (H(i) - CM_3)/R_3 & (3.30) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_4(i) = (H(i) - CM_4)/R_4 & (3.31) \end{cases}$$

De l'équation de continuité on peut écrire :

$$\sum Q(i) = 0 \Rightarrow Q_1(i) - Q_2(i) - Q_3(i) - Q_4(i) = 0$$

$$(CP - H(i))/R_1 - (H(i) - CM_2)/R_2 - (H(i) - CM_3)/R_3 - (H(i) - CM_4)/R_4 = 0$$

$$-H(i)(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4) + (CP/R_1 + CM_2/R_2 + CM_3/R_3 + CM_4/R_4) = 0$$

On aura donc :

$$H(i) = (CP/R_1 + CM_2/R_2 + CM_3/R_3 + CM_4/R_4) / (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4) \quad (3.32)$$

Les débits  $Q_1(i)$ ,  $Q_2(i)$ ,  $Q_3(i)$  et  $Q_4(i)$  peuvent être déterminés à partir des équations (3.28), (3.29), (3.30) et (3.31).

### 3.4.8 Conditions aux limites au point de jonction de plusieurs conduites

Soient quatre conduites raccordées en un point  $i$ , les conditions aux limites à ce point peuvent être obtenues en se basant sur la figure (3.9).

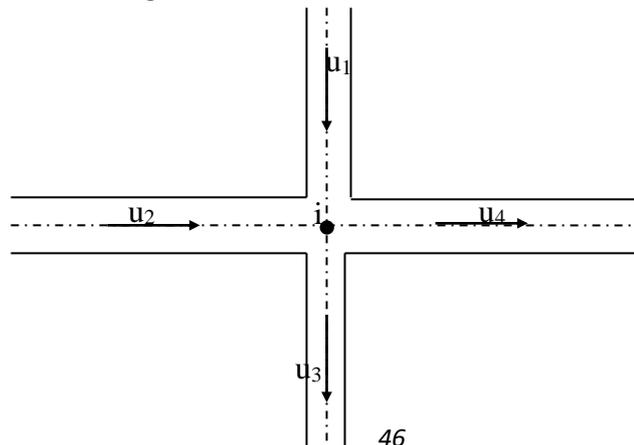


Fig. (3.9) : Jonction de plusieurs conduites

Les équations des caractéristiques positives C+ pour les deux conduites d'arrivée au point i s'écrivent :

$$\begin{cases} CP_1 = H(i) + R_1 \cdot Q_1(i) \\ CP_2 = H(i) + R_2 \cdot Q_2(i) \end{cases}$$

Alors que celles de C- peut également s'écrivent :

$$\begin{cases} CN_3 = H(i) - R_3 \cdot Q_3(i) \\ CN_4 = H(i) - R_4 \cdot Q_4(i) \end{cases}$$

En se basant sur l'équation (3.27) on peut écrire :

$$H(i) = (CP_1/R_1 + CP_2/R_2 + CN_3/R_3 + CN_4/R_4) / (1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4)$$

En généralisant pour n conduites on aura :

$$H(i) = \left( \left( \sum CP_i/R_i \right) + \left( \sum CN_i/R_i \right) \right) / \sum (1/R_i)$$

Les débits  $Q_1(i)$ ,  $Q_2(i)$ ,  $Q_3(i)$ ,  $Q_4(i)$  peuvent être déterminés à partir des équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1(i) = (CP_1 - H(i))/R_1 \\ Q_2(i) = (CP_2 - H(i))/R_2 \\ Q_3(i) = -(CN_3 + H(i))/R_3 \\ Q_4(i) = -(CN_4 + H(i))/R_4 \end{cases}$$

### Conclusion

L'application de la méthode des caractéristiques a pu donner le type elliptique aux deux équations en dérivées partielles de Saint Venant, elle a permis également de transformer ses équations en quatre équations différentielles totales, deux équations représentent les équations des courbes caractéristiques et les deux autres les équations de compatibilité. Ces dernières nous avons pu l'intégrer en formant les équations en différences finies et enfin les conditions aux limites, que nous serons en besoin, à savoir celles, surtout, des points de ramification, ont été également notre cible.



# **Chapitre 4:**

**Modélisations et  
Implémentations  
Numériques**

4.1 Introduction

Le but de cette partie est de mettre en application notre travail afin d’avoir une validité, vu les problèmes de dimensionnement rencontrés en pratique. Dans nos exemples, nous emploierons la méthode des caractéristiques pour suivre numériquement, au cours du temps et dans l’espace, le phénomène transitoire créé par une perturbation des conditions de l’écoulement permanent. En effet, le phénomène transitoire dans une conduite sous pression est dû à une perturbation des conditions initiales. Cette perturbation est due par exemple à une coupure du courant électrique volontaire ou non ou voire même elle rentre dans le principe de fonctionnement de la station de pompage. Nous essayerons dans ce qui suit d’étudier certains modèles physiques et suivre la variation du débit et de la pression aux points de discrétisation du réseau et mettre en relief leur variation au niveau de certains points particulier à l’instar du point de jonction de plusieurs conduites.

4.2. Premier modèle physique : Cas d’une station de pompage à simple effet

Soit une station de pompage qui refoule de l’eau dans une conduite de caractéristiques connues et comporte à l’extrémité aval un réservoir à niveau d’eau constant comme il est indiqué dans la figure (4.1).

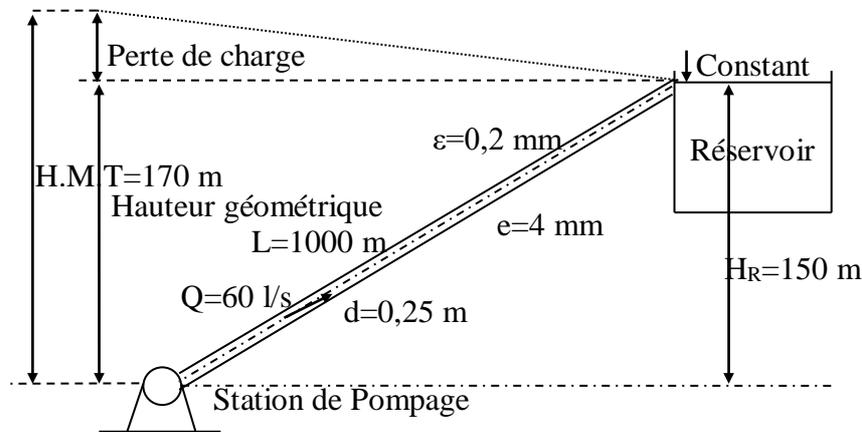


Fig. (4.1): Station de pompage à simple effet refoulant un fluide

Les désignations  $H_{SP}$ ,  $H_R$ ,  $Q_{SP}$  et  $Q_R$  sont respectivement les cotes de charges et les débits au niveau de la station de pompage et au réservoir en régime permanent c’est à dire au temps  $t_0$ .

Supposons qu’après discrétisation de la conduite le nombre de pas de l’espace est de l’ordre de  $n-1$ .

avec  $n$  est le nombre de point de discrétisation qui a comme expression  $n=1+L/(a.\Delta t)$

Où

$L$  est la longueur de la conduite en (m),  $a$  est la célérité d’onde en (m/s) et  $\Delta t$  le pas du temps.

Le problème à résoudre est la détermination des caractéristiques de l’écoulement et principalement le débit et charge au niveau de n’importe quel point de la discrétisation au temps  $(t_0+\Delta t)$ , c’est-à-dire en régime transitoire, et surtout à la sortie de la pompe. Pour pouvoir résoudre le problème, il nous faut des équations pour les nœuds intérieurs et des équations pour les nœuds d’extrémité.

4.2.1 Les équations de compatibilité écrites pour la conduite

$$C^+ = H(i + 1) + R. Q(i + 1) = H(i) + Q(i)(R - T. |Q(i)|) \quad (4.1)$$

$$C^- = H(i + 1) - R. Q(i + 1) = H(i + 2) - Q(i + 2)(R - T. |Q(i + 2)|) \quad (4.2)$$

Posons :

$$CP = H(i) + Q(i)(R - T. |Q(i)|) \quad (4.3)$$

et

$$CM = H(i + 2) - Q(i + 2)(R - T. |Q(i + 2)|) \quad (4.4)$$

Le système d’équation (4.1) et (4.2) devient :

$$H(i + 1) + R. Q(i + 1) = CP$$

$$H(i + 1) - R \cdot Q(i + 1) = CM$$

Après simplification, on aboutit à :

$$H(i + 1) = (CP + CM)/2 \quad (4.5)$$

$$Q(i + 1) = (CP - CM)/2 \cdot R \quad (4.6)$$

#### 4.2.2. Les conditions aux limites

##### 4.2.2.1 Au niveau de la station de pompage

$$\begin{cases} CM = H(2) - Q(2)(R - T \cdot |Q(2)|) \\ Q(1) = 0 \\ H(1) = CM \end{cases}$$

##### 4.2.2.2 Au niveau du réservoir

$$\begin{cases} H(N) = H_{\text{réservoir}} \\ Q(N) = Q_0 \end{cases}$$

Avec i indice qui varie en fonction du temps,  $i=1, 2, 3, \dots, I_{\max}=N$

$$R = \frac{a}{g \cdot S} \quad (4.7)$$

Où : a est la célérité d'onde dans la conduite.

$$a = \left( \sqrt{\frac{K}{\rho}} \right) / \left( \sqrt{1 + \frac{K \cdot D \cdot C}{E \cdot e_1}} \right) \quad (4.8)$$

K : module d'élasticité du liquide, pour l'eau  $K=2,07 \cdot 10^9$  Pascals ;

E : module d'élasticité du matériau constituant le réseau.

Tableau (4.1) : Module d'élasticité des matières courantes

| Matière   | Module d'élasticité « E »    |
|-----------|------------------------------|
| Acier     | $2 \cdot 10^{11}$ Pascals    |
| Fonte     | $1,03 \cdot 10^{11}$ Pascals |
| Cuivre    | $1,1 \cdot 10^{11}$ Pascals  |
| PVC       | $2,76 \cdot 10^9$ Pascals    |
| P.E.H.D   | $1,2 \cdot 10^9$ Pascals     |
| Verre     | $6 \cdot 10^{10}$            |
| Plexiglas | $3 \cdot 10^9$               |
| Béton     | $10^{10}$                    |
| Aluminium | $0,62 \cdot 10^{11}$         |

$e_1$  : épaisseur de la conduite en m ;

$C=1$  puisque on considère que la conduite étudiée est à paroi mince ;

g : accélération de la pesanteur ( $m/s^2$ ) ;

S : section de la conduite en ( $m^2$ ) ;

$R_c$  : résistance de la conduite en ( $S^2 \cdot m^{-5}$ ) ;

$$R_c = (1,18 \cdot \lambda \cdot L) / (g \cdot \pi^2 \cdot d^5) \quad (4.9)$$

Le coefficient de la perte de charge,  $\lambda$ , sera calculé par la formule de Colebrook-White donnée par la relation implicite suivante.

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{\varepsilon}{3,71d} + \frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right) \quad (4.10)$$

avec :

$R_e$  : le nombre de Reynolds

$$R_e = \frac{U \cdot d}{\nu} \quad (4.11)$$

Où :

U : la vitesse moyenne d'écoulement en (m/s) ;

d : diamètre intérieur de la conduite en (m) ;

Tableau (4.2): Valeurs des diamètres des conduites en acier existant dans le marché

|        |     |     |     |     |     |     |      |      |      |      |      |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|------|
| d (mm) | 60  | 80  | 100 | 125 | 150 | 175 | 200  | 250  | 300  | 350  | 400  |
| d (mm) | 450 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1100 | 1200 | 1300 | 1400 |

$\nu$  : est la viscosité cinématique en (m<sup>2</sup>/s), pour l'eau elle est donnée par l'expression de Poiseuille ainsi écrite.

$$\nu = \frac{0,0178}{1 + 0,0337t + 0,000221t^2} \cdot 10^{-4} \quad (4.11)$$

où t est la température du liquide ;

L : longueur de la conduite en (m) ;

$\epsilon$  : la rugosité absolue de la conduite en (mm).

Tableau (4.3): Valeurs de la rugosité  $\epsilon$  en mm pour différents matériaux[7]

| Matériaux                         | Conduites récentes | Conduites anciennes |
|-----------------------------------|--------------------|---------------------|
| Acier                             | 0,015 -0,1         | 0,06 -0,1           |
| Acier revêtement en plastique     | 0,03               | 0,15                |
| Acier revêtement lisse non poreux | 0,03               | 0,15                |
| Fonte                             | 0,1-1,0            | 0,3-0,6             |
| Fonte revêtement bitume           | 0,03-0,2           | 0,15-0,3            |
| Fonte revêtement bitume           | 0,03-0,2           | 0,15-0,3            |
| Plastiques                        | 0,03-0,1           | 0,01-1,5            |
| Laiton, Cuivre, Plomb             | 0,003              | 0,01                |
| Aluminium                         | 0,003-0,15         | 0,06                |

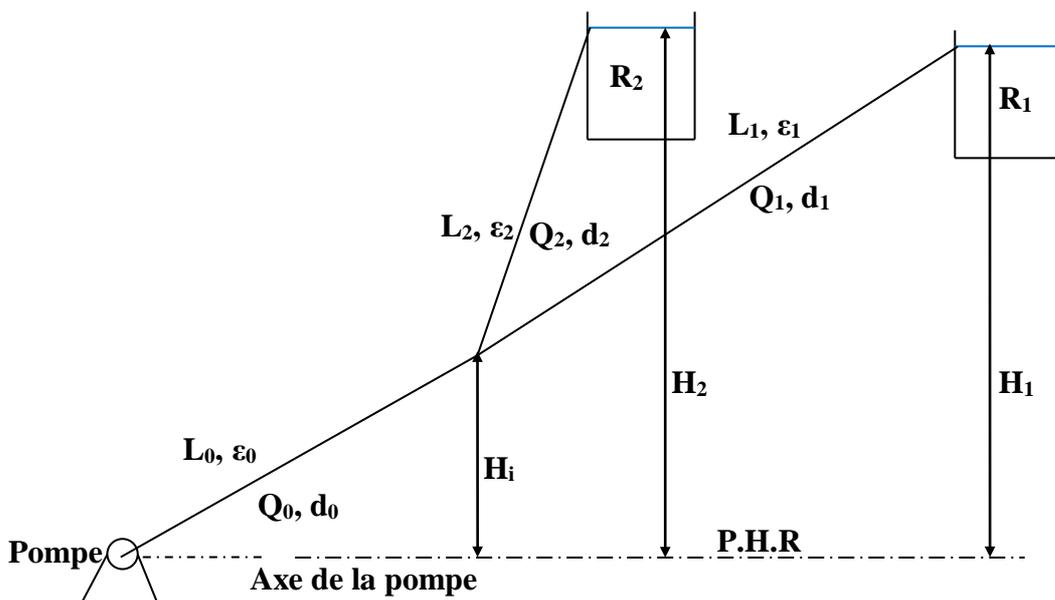
La résistance d'un pas d'espace (élément de discrétisation) ( $\Delta x$ ), en (S<sup>2</sup>.m<sup>-5</sup>), s'écrit :

$$T = (R_c \cdot \Delta x) / L \quad (4.12)$$

### 4.3. Second modèle physique : Cas d'une station de pompage à double effet

Soit une station de pompage qui refoule de l'eau vers deux réservoirs placés aux extrémités avales de deux conduites 2 et 3, ces dernières sont ramifiées à la première conduite au point i comme il montre la figure (4.2).

La station de pompage assure un débit de 60 l/s sur une hauteur manométrique totale de 170 m aux réservoirs R<sub>1</sub> et R<sub>2</sub> ayant respectivement les cotes 150m et 148m, le raccordement entre les différentes structures est réalisé à l'aide de trois conduites L<sub>0</sub>, L<sub>1</sub> et L<sub>2</sub> de longueurs 1000m, 1500m, et 2000m. Ces trois conduites de diamètres d<sub>0</sub>=0,250m, d<sub>1</sub>=0,20m et d<sub>2</sub>=0,175m et d'épaisseurs e<sub>0</sub>=4mm, e<sub>1</sub>=3,5mm et e<sub>2</sub>=3mm véhiculent les débits Q<sub>0</sub>=60l/s, Q<sub>1</sub>=40 l/s et Q<sub>2</sub>=20 l/s, alors que leurs rugosités prennent les valeurs  $\epsilon_0=0,2$ mm,  $\epsilon_1=0,15$ mm et  $\epsilon_2=0,1$ mm.



**Fig. (4.2) : Schéma d'une station de pompage à double effets**

La conduite ( $L_0$ ) est alimentée à partir d'une station de pompage dont l'équation de sa caractéristique positive  $C^+$  prend l'expression suivante :

$$CP = H(i) + R_0 \cdot Q_0(i) \quad (4.13)$$

Les conduites ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) sont raccordées à leurs extrémités aval à deux réservoirs dont leurs équations caractéristiques s'écrivent :

$$\begin{cases} CM_1 = H(i) - R_1 \cdot Q_1(i) & (4.14) \\ CM_2 = H(i) - R_2 \cdot Q_2(i) & (4.15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} CM_1 = H(i) - R_1 \cdot Q_1(i) & (4.14) \\ CM_2 = H(i) - R_2 \cdot Q_2(i) & (4.15) \end{cases}$$

Au nœud  $i$  on a une charge commune entre les deux conduites d'où on peut écrire :

$$H(i) = H_0 = H_1 = H_2 \quad (4.16)$$

Pour le cas étudié, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_0(i) = (CP - H(i))/R_0 & (4.17) \\ Q_1(i) = (H(i) - CM_1)/R_1 & (4.18) \\ Q_2(i) = (H(i) - CM_2)/R_2 & (4.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1(i) = (H(i) - CM_1)/R_1 & (4.18) \\ Q_2(i) = (H(i) - CM_2)/R_2 & (4.19) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1(i) = (H(i) - CM_1)/R_1 & (4.18) \\ Q_2(i) = (H(i) - CM_2)/R_2 & (4.19) \end{cases}$$

De l'équation de continuité on peut écrire :

$$\sum Q(i) = 0 \Rightarrow Q_0(i) - Q_1(i) - Q_2(i) = 0$$

$$(CP - H(i))/R_0 - (H(i) - CM_1)/R_1 - (H(i) - CM_2)/R_2 = 0$$

$$-H(i)(1/R_0 + 1/R_1 + 1/R_2) + (CP/R_0 + CM_1/R_1 + CM_2/R_2) = 0$$

On aura donc :

$$H(i) = (CP/R_0 + CM_1/R_1 + CM_2/R_2)/(1/R_0 + 1/R_1 + 1/R_2) \quad (4.20)$$

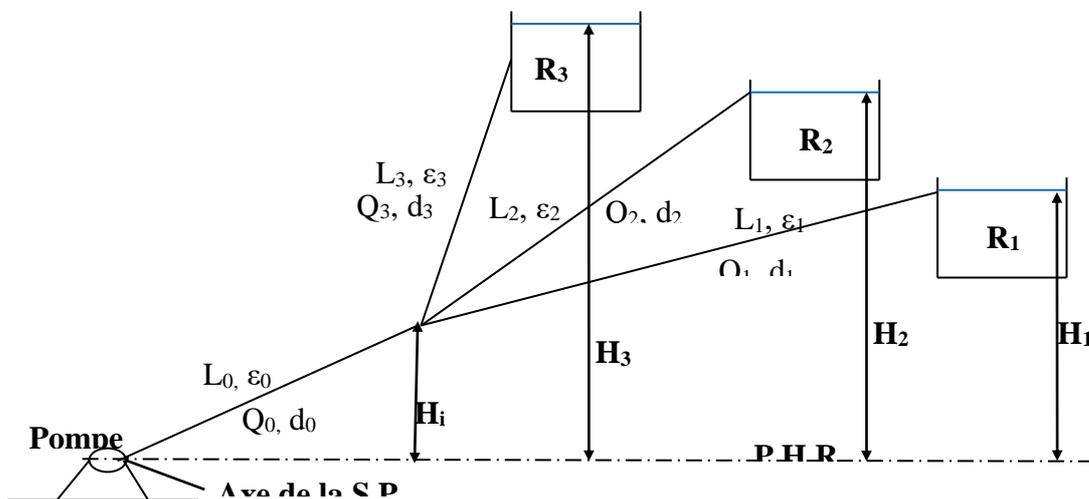
Les débits  $Q_0(i)$ ,  $Q_1(i)$  et  $Q_2(i)$  peuvent être déterminés à partir des équations (4.17), (4.18) et (4.19).

Pour les équations tirées des conditions aux limites, nous garderons les mêmes équations du premier cas, soit au niveau de la station de pompage soit au niveau des réservoirs.

#### 4.4. Troisième modèle physique : Cas d'une station de pompage à triple effets

Soit une station de pompage qui refoule un fluide vers trois réservoirs, ces réservoirs sont raccordés au point de jonction  $i$  qui relie les trois conduites secondaires à la conduite principale sortant de la station de pompage, comme il est indiqué sur la figure (4.3).

La station de pompage assure une hauteur manométrique totale de 170 m aux réservoirs  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  ayant respectivement les cotes 150m, 152m et 148m à l'aide des conduites  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  de longueurs 1000m, 1500m, 2000m et 2500m. Les quatre conduites de diamètres  $d_0=0,25m$ ,  $d_1=0,20m$ ,  $d_2=0,15m$  et  $d_3=0,15m$  et d'épaisseurs  $e_0=4mm$ ,  $e_1=3,5mm$ ,  $e_2=3mm$  et  $e_3=3mm$  véhiculent les débits  $Q_0=60l/s$ ,  $Q_1=30 l/s$ ,  $Q_2=15 l/s$  et  $Q_3=15l/s$ , alors que leurs rugosités prennent les valeurs  $\epsilon_0=0,2mm$ ,  $\epsilon_1=0,15mm$ ,  $\epsilon_2=0,1mm$  et  $\epsilon_3=0,1mm$ .



**Fig. (4.3) : Schéma d'une station de pompage à triple effet refoulant un fluide**

Notre objectif est de trouver la variation au cours du temps du débit et de la pression aux points de discrétisation des quatre conduites.

Le suivi au cours du temps, de ces paramètres en particulier au clapet anti retour placé à la sortie de la station de pompage et au point de ramification des quatre conduites, permettra de tracer la variation de ces paramètres au cours du temps, à cet effet, l'utilisation de la méthode des caractéristiques s'avère d'une importance primordiale du fait qu'elle permettra de transformer les équations aux dérivées partielles aux équations aux dérivées totales faciles à manipuler numériquement.

La conduite (L<sub>0</sub>) est alimentée à partir d'une station de pompe dont l'équation de sa caractéristique positive C<sup>+</sup> prend l'expression suivante :

$$CP = H(i) + R_1 \cdot Q_1(i) \quad (4.21)$$

Aux extrémités des conduites (L<sub>1</sub>), (L<sub>2</sub>) et (L<sub>3</sub>) sont placées des réservoirs, les équations aux caractéristiques de ces conduites s'écrivent :

$$\begin{cases} CM_2 = H(i) - R_2 \cdot Q_2(i) & (4.22) \end{cases}$$

$$\begin{cases} CM_3 = H(i) - R_3 \cdot Q_3(i) & (4.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} CM_4 = H(i) - R_4 \cdot Q_4(i) & (4.24) \end{cases}$$

Au nœud i, on a une charge commune entre les trois conduites d'où on peut écrire :

$$H(i) = H_1 = H_2 = H_3 = H_4 \quad (4.25)$$

Pour le cas étudié, nous pouvons tirer les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_1(i) = (CP - H(i))/R_1 & (4.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_2(i) = (H(i) - CM_2)/R_2 & (4.27) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_3(i) = (H(i) - CM_3)/R_3 & (4.28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_4(i) = (H(i) - CM_4)/R_4 & (4.29) \end{cases}$$

De l'équation de continuité on peut écrire :

$$\sum Q(i) = 0 \Rightarrow Q_1(i) - Q_2(i) - Q_3(i) - Q_4(i) = 0$$

$$(CP - H(i))/R_1 - (H(i) - CM_2)/R_2 - (H(i) - CM_3)/R_3 - (H(i) - CM_4)/R_4 = 0$$

$$-H(i)(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4) + (CP/R_1 + CM_2/R_2 + CM_3/R_3 + CM_4/R_4) = 0$$

On aura donc :

$$H(i) = (CP/R_1 + CM_2/R_2 + CM_3/R_3 + CM_4/R_4)/(1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + 1/R_4) \quad (4.30)$$

Les débits Q<sub>1</sub>(i), Q<sub>2</sub>(i), Q<sub>3</sub>(i) et Q<sub>4</sub>(i) peuvent être déterminés à partir des équations (4.26), (4.27), (4.28) et (4.29).

Pour les équations des conditions aux limites, nous devons garder les mêmes équations des deux cas précédents soit au niveau de la station de pompage soit au niveau des réservoirs.

**4.5. Résultats & Interprétations**

Le suivi au cours du temps et dans l'espace, de la pression et du débit, a été effectué par un modèle numérique. Ce modèle a été mis sous la forme d'un logiciel permettant de faire des calculs méticuleux et long en un laps de temps. L'organigramme représenté sur la figure (4.5) donne les démarches à suivre lors de la réalisation du logiciel de calculs en régime transitoire dans un réseau sous pression.

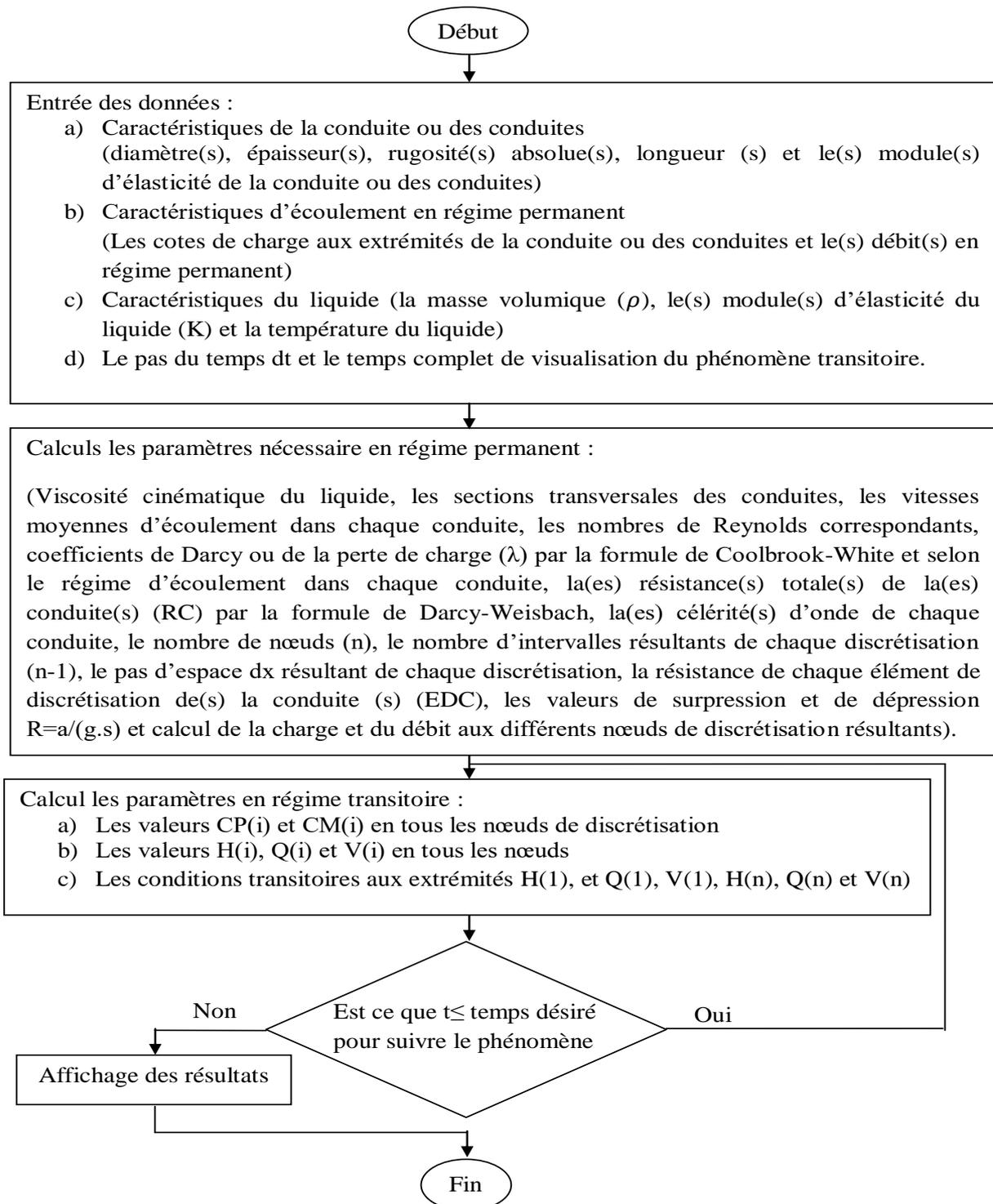


Fig. (4.5) : Organigramme de la méthode des caractéristiques pour suivre l'écoulement transitoire dans une conduite sous pression

**4.5.1. Premier modèle d'étude**

Avant de mettre la variation de la pression et du débit en écoulement transitoire, il est nécessaire de fournir les données utilisées et les résultats en régime permanent obtenus. Ces informations seront la base pour entamer le calcul de l'écoulement en question. Les tableaux (4.4) et (4.5) donnent les caractéristiques de la station de pompage, du réseau, des réservoirs et du matériau du réseau.

Tableau (4.4) : Caractéristiques de la station de pompage, débits du réseau et cote du réservoir

|                    |                           |
|--------------------|---------------------------|
| Station de pompage | Q= 60 l/s et H.M.T =170 m |
| Réservoir (R)      | Cote du trop plein=150 m  |

|                 |              |
|-----------------|--------------|
| Débit du réseau | $Q_0=60$ l/s |
|-----------------|--------------|

Tableau (4.5) : Caractéristiques du réseau en acier

|                          |                     |                           |                       |
|--------------------------|---------------------|---------------------------|-----------------------|
| Longueurs                | $L_0=1000$ m        | Diamètre                  | $d_0=250$ mm          |
| Épaisseur de la conduite | $e_0=4$ mm          | Débit                     | $Q_0=60$ l/s          |
| Rugosité de la conduite  | $\epsilon_0=0,2$ mm | module d'élasticité Acier | $E=2.10^{11}$ pascals |

Les résultats obtenus, par le logiciel, en régime permanent sont représentés dans le tableau (4.6).

Tableau n° (4.6) : Résultats obtenus par le modèle numérique, en régime permanent, cas d'une station de pompage à simple effet refoulant dans un réseau en acier

|  |                              |   |                      |
|--|------------------------------|---|----------------------|
| Viscosité cinématique ( $\nu$ ) $m^2/s$      | $1,00998639.10^{-6}$         | Célérité d'onde (m/s)   | $a_0=1111,11108$     |
| Sections ( $m^2$ )                           | $S_0=4,9087.10^{-2}$         | Période de retour de l'onde (s)                                   | $t_{40}=3,6$         |
| Vitesses (m/s)                               | $V_0=1,2223$                 | Paramètre $R=a/(g.S)$ en ( $s/m^2$ )                              | $R_0=2307,3770$      |
| Nombres de Reynolds                          | $Re_0=302556,036$            | Valeurs théoriques de dépression surpression $VdH = a.V/g$ en (m) | $VdH_0=\pm 138,4426$ |
| Coefficient de perte de charge ( $\lambda$ ) | $\lambda_0=1,971999.10^{-2}$ | Résistance de la conduite en ( $s^2/m^5$ )                        | $Rc_0=1835,3567$     |
| Pertes de charge (m)                         | $dh_0=6,607284$              | Résistance d'un élément de discrétisation (RED) en ( $s^2/m^5$ )  | $RED_0=2,03393$      |
| Nombre de nœuds de discrétisation            | $m_0=901$                    | Longueur de l'élément de discrétisation (m)                       | $dx_0=1,1111$        |

En effet, malgré l'importance de toutes ces informations, elles restent insuffisantes pour entamer le calcul en régime transitoire et pour être à l'état complet, nous sommes en besoin, de l'ensemble des valeurs des débits et des pressions, en écoulement permanent, en tous les points de discrétisation du réseau.

La figure (4.6) représente la variation, au cours du temps, de la charge au niveau du clapet anti retour placé à coté de(s) pompe (s) et au centre de la conduite pour une station de pompage à simple effet.

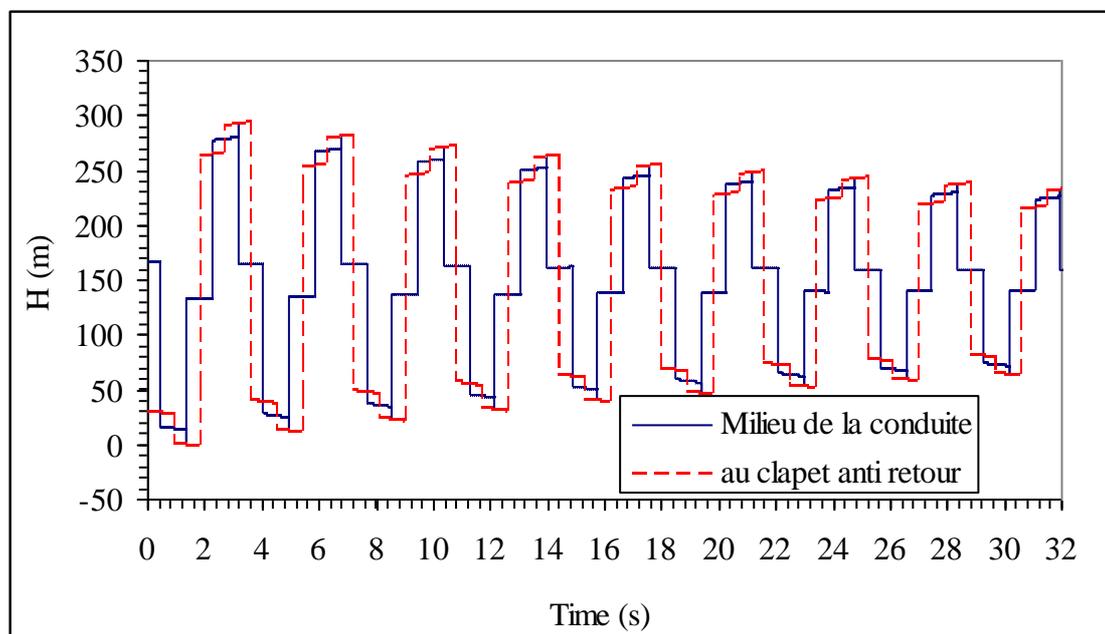


Fig. (4.6) : Fluctuation de la pression au milieu de la conduite et au clapet anti retour d'une station à simple effet

Après l'arrêt brusque de la station de pompage, le débit alimentant le réseau est brusquement interrompu, les clapets anti retour situés en aval se ferment pour que le réseau ne se vide pas. Juste à l'aval des clapets, la colonne liquide a tendance, à poursuivre son mouvement toutefois aucun débit ne provient de l'amont, ce qui entraîne une diminution locale de pression, cette diminution locale de pression entraînant une décompression du fluide et, en conséquence, la contraction de la conduite. Ce mouvement crée une disponibilité temporaire de masse de liquide qui permet de maintenir en mouvement, durant quelques instants encore, la couche de fluide immédiatement en aval; puis le mouvement cesse, la couche se décomprime et fournit un volume qui permet le mouvement de la couche suivante et ainsi de suite. Ainsi est engendrée une dépression qui se propage dans la conduite à la vitesse des ondes élastiques « a » jusqu'à ce que toute la conduite soit soumise à la dépression ainsi engendrée, soit après un temps  $T=L/a$ , où L est la longueur de la conduite entre le clapet et le réservoir.

À la sortie de la station de pompage, une série de pulsations commence par une dépression puis une surpression. La première dépression continue à diminuer à des grandeurs égales à la perte de charge d'un élément de discrétisation jusqu'à ce que toutes les pertes de charge des éléments de discrétisation soient prises en considération, et quand l'onde de dépression abouti, en un temps  $t=L/a$ , le réservoir une chute brusque est représentée par le segment faisant un parallèle à l'axe des y diminuant le reste de la charge fournie par la pompe à cause de l'agrandissement brusque de la section régie par le théorème de Borda Carnot, et du fait que la pression dans la conduite est inférieure à celle du réservoir l'écoulement s'inverse et on assiste encore à une diminution de la pression causée par le remplissage du réseau du clapet anti retour au réservoir, et quand l'onde atteint de nouveau le réservoir, en temps  $t=2L/a$ , La couche de fluide près du clapet est obligée de s'arrêter. Ce freinage entraîne une transformation locale de l'énergie cinétique en énergie de pression, ce qui provoque l'apparition d'onde de surpression. Cet onde se transmet jusqu'au réservoir, où elle arrive au bout du temps  $t=3L/a$ , par la suite, une montée raide de la pression d'une grandeur égale à la différence entre (HMT-NR) retranchée des pertes de charge déjà dissipée.

Quand cet onde de surpression atteint le réservoir, la pression du réservoir est inférieure à la pression de la conduite ce qui entraîne un écoulement s'inverse de nouveau pour revenir aux conditions initiales de pression et de vitesse, cette onde se propageant vers les clapets anti retour et durant ce temps, la pression, au niveau du clapet, augmente et au durant un temps  $t=4L/a$  on se retrouve dans les conditions initiales et le phénomène se répète et s'amortie sous l'effet des pertes de charge et fluctue autour de la charge statique du réservoir.

Pour la variation de la pression au milieu de la conduite, la dépression commence avec un temps de retard égal  $t=L/(2.a)$  et continue à descendre jusqu'au où l'onde abouti le réservoir où elle se chute et monte brusquement au même temps et quand l'onde de surpression atteint de nouveau le milieu de la conduite mais l'eau arrive du réservoir elle se stabilise à un niveau égale à a cote du réservoir moins la perte de charge entre ce dernier et le milieu de la conduite, par la suite elle monte instantanément puis elle suit à monter progressivement à cause de l'accumulation de la perte de charge puis elle monte précipitamment, avec une valeur égale à la hauteur manométrique totale en ce point moins la somme des pertes de charge plus la cote du réservoir, pour atteindre son pic maximum, enfin elle rejoint la valeur de cette surpression moins la cote du réservoir et le phénomène se poursuit avec un ralentissement du phénomène pour se stabilise autour du niveau statique du réservoir.

La figure (4.7) montre le dandinement du débit au cours du temps au milieu de la conduite d'adduction pour une station de pompage à simple effet.

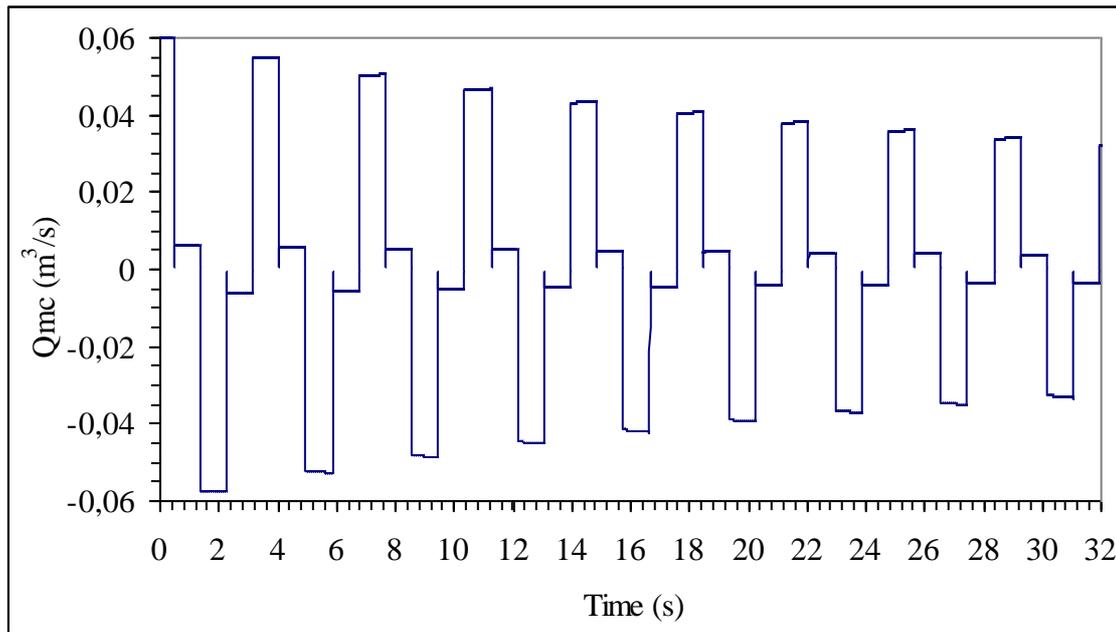


Fig. (4.7): Fluctuation du débit au milieu de la conduite d’une station à simple effet

Nous constatons des fluctuations amortissantes du débit, au cours du temps, autour de la valeur zéro ce qui donne l’impression que l’écoulement transitoire s’affaiblit du fait que les valeurs des débits en absolues diminues. L’écoulement commence par le débit en écoulement permanent et quand l’onde de dépression atteint le centre de la conduite après un temps  $t=L/(2a)$ , des périodes d’alternance de débits faible positif, négatif, faible négatif et enfin positif est envisagées puis la même apparence de la courbe, avec diminution de son ampleur, se répète en oscillant autour du débit nul. Cet alternance des fluctuations du débit entre des valeurs positives et des valeurs négatives s’explique par le mouvement du liquide dans les deux sens d’écoulement en produisant l’écoulement transitoire.

#### 4.5.2. Second modèle d’étude

Pour voir comment se fluctuent les deux paramètres précédents dans le cas d’une station de pompage qui refoule vers deux réservoirs distincts, c’est à dire une station de pompage à double effets, les tableaux (4.7) et (4.8) sont dressés pour font l’objet.

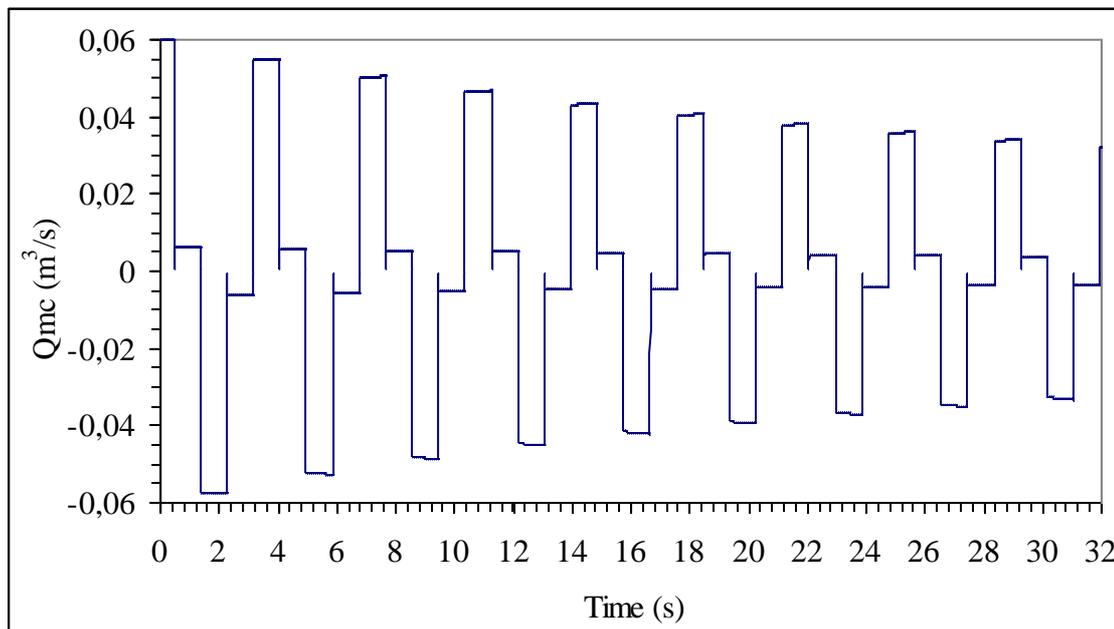
Tableau (4.7) : Caractéristiques de la station de pompage, débits du réseau et cotes des réservoirs

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| Station de pompage          | $Q= 60 \text{ l/s}$ et H.M.T =170 m                                  |
| Réservoir (R <sub>1</sub> ) | Cote du trop plein=150 m   |
| Réservoir (R <sub>2</sub> ) | Cote du trop plein=148 m   |
| Débits du réseau            | $Q_0=60 \text{ l/s}$<br>$Q_1=40 \text{ l/s}$<br>$Q_2=20 \text{ l/s}$ |

Tableau (4.8) : Caractéristiques du réseau en acier

| Caractéristiques du réseau |  |                     |  |
|----------------------------|--|---------------------|--|
| Longueurs                  | $L_0=1000\text{m}$<br>$L_1=1500\text{m}$<br>$L_1=2000\text{m}$ | Diamètres           | $d_0=250\text{mm}$<br>$d_0=250\text{mm}$<br>$d_0=175\text{mm}$       |
| Epaisseur de la conduite   | $e_0=4\text{mm}$<br>$e_0=3,5\text{mm}$<br>$e_0=3\text{mm}$     | Débit               | $Q_0=60 \text{ l/s}$<br>$Q_0=40 \text{ l/s}$<br>$Q_0=20 \text{ l/s}$ |
| Rugosité de la             | $\varepsilon_0=0,2\text{mm}$                                   | module d’élasticité | $E=2.10^{11} \text{ pascals}$  |

|          |  |       |  |
|----------|--|-------|--|
| conduite | $\varepsilon_0=0,15\text{mm}$<br>$\varepsilon_0=0,10\text{mm}$ | Acier |  |
|----------|--|-------|--|



Le logiciel réalisé a permis d’estimer, avec précision et en un laps de temps, de certains nombre de paramètres. Ces derniers rentrent sans aucun doute aux calculs des deux paramètres en écoulement transitoire à savoir la pression et le débit aux points de discrétisation du réseau en l’occurrence. Le tableau (4.9) précise les résultats obtenus à  $t=t_0$ .

Tableau n° (4.9) : Résultats obtenus par le modèle numérique dans le cas d’une station de pompage à double effets refoulant dans un réseau en acier

|  |   |   |   |
|--|---|---|---|
| Viscosité cinématique ( $\nu$ ) $\text{m}^2/\text{s}$ à 20°C | $1,00998639 \cdot 10^{-6}$  | Célérités d’onde (m/s)  | $a_0=1111,11108$<br>$a_1=1128,66809$<br>$a_2=1124,22705$              |
| Sections ( $\text{m}^2$ )                                    | $S_0=4,908739 \cdot 10^{-2}$<br>$S_1=3,141592 \cdot 10^{-2}$<br>$S_2=2,405282 \cdot 10^{-2}$                  | Période de retour de l’onde (s)   | $t_{40}=3,6$<br>$t_{41}=5,316$<br>$t_{42}=7,7116$                     |
| Vitesses (m/s)   | $V_0=1,2223$<br>$V_1=1,273239$<br>$V_2=0,831503$  | Paramètres $R=a/(g.S)$ en ( $\text{s}/\text{m}^2$ )                     | $R_0=2307,37695$<br>$R_1=3662,244338$<br>$R_2=4764,51855$             |
| Nombres de Reynolds  | $Re_0=302556,063$<br>$Re_1=252130,047$<br>$Re_2=144074,297$   | Valeurs théoriques de dépression et de surpression $VdH = a.V/g$ en (m) | $VdH_0=\pm 138,4426$<br>$VdH_1=\pm 146,4899$<br>$VdH_2=\pm 95,290367$ |
| Coefficient de perte de charge ( $\lambda$ )                 | $\lambda_0=1,971998 \cdot 10^{-2}$<br>$\lambda_1=1,969137 \cdot 10^{-2}$<br>$\lambda_2=1,97740 \cdot 10^{-2}$ | Résistances des conduites en ( $\text{s}^2/\text{m}^5$ )                | $Rc_0=1668,50610$<br>$Rc_1=7626,73023$<br>$Rc_2=19909,2910$           |
| Pertes de charge (m)   | $dh_0=6,0066$<br>$dh_1=12,20277$  | Résistance d’un élément de  | $RED_0=1,85389578$<br>$RED_1=5,738699$                                |

|                                   |                                       |  |   |
|-----------------------------------|---------------------------------------|--|---|
|                                   | $dh_2=7,9637$                         | discrétisation (RED) en ( $s^2/m^5$ )        | $RED_2 =11,91281$                                   |
| Nombre de nœuds de discrétisation | $m_0=901$<br>$m_1=1330$<br>$m_2=1782$ | Longueurs des éléments de discrétisation (m) | $dx_0=1,1111$<br>$dx_1=1,128668$<br>$dx_2=1,124227$ |

Afin de mettre à notre porté les résultats de la pression en écoulement transitoire, nous avons tracé la figure (4.8).

La figure (4.8) donne la variation, au cours du temps, de la pression à la sortie d’une station de pompage à double effets. Nous remarquerons que l’allure se repète en diminuant l’ampleur des pressions.

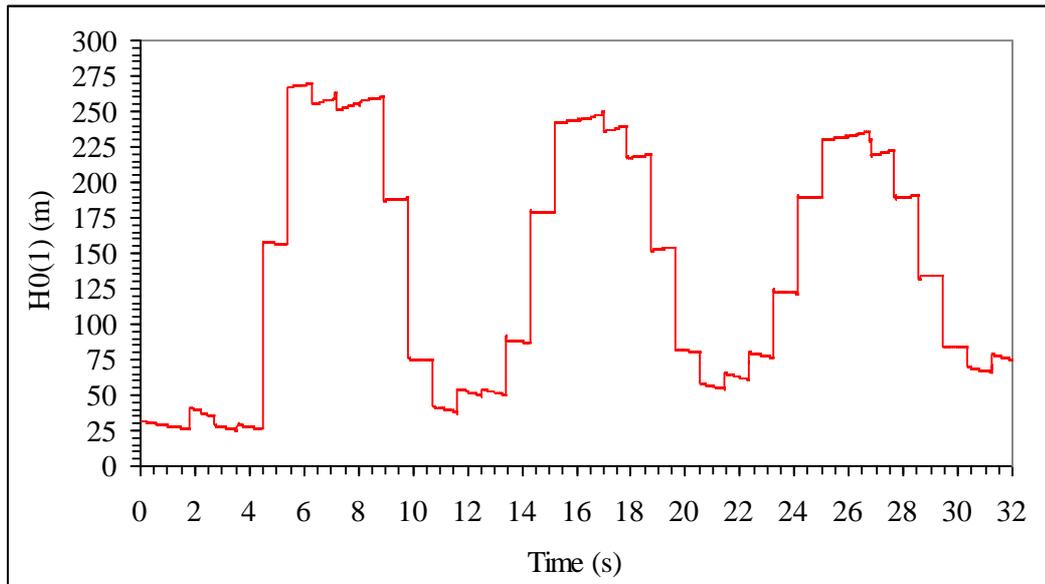


Fig. (4.8) : Fluctuation de la pression à la sortie d’une station de pompage à double effets  
La période de retour dans cet écoulement est égale à  $t=(4L/a)=10$  secondes, ce qui engendre une reproduction du phénomène chaque 10 secondes, sachant que  $L$  est égal à  $L_0+L_3$ .

Mais la question qui se pose, est ce que le point de jonction des trois conduites a la même allure de fluctuation de la pression. La réponse sur cette question fait l’objet de la figure (4.9) qui illustre le balancement, au cours du temps, de la pression en ce point.

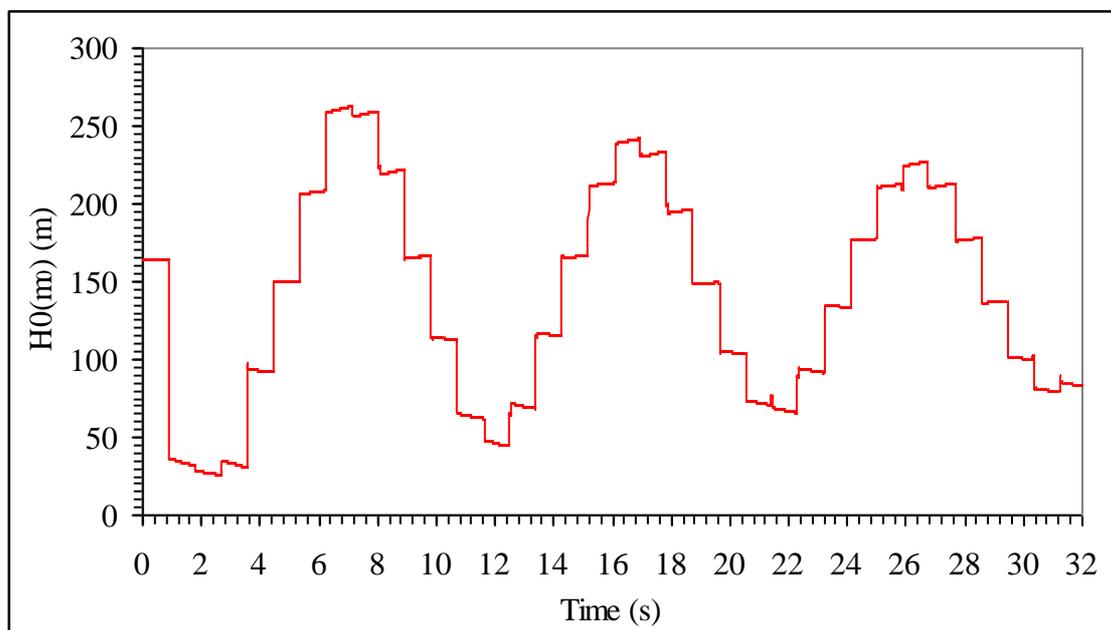


Fig. (4.9) : Fluctuation de la pression au point de jonction d’une station de pompage à double effets

La forme semi-sinusoïdale amortie commence après un temps de retard égal au temps que met l’onde de dépression pour atteindre le point de jonction des trois conduites. Seulement, imaginons que la cote de l’endroit de jonction, des trois conduites, se trouve à une cote géométrique inférieure à 100 m, c’est-à-dire que les valeurs de la dépression enregistrées sont inférieures à cette cote, ce qui met les dispositifs du réseau se trouvant à cet endroit voire même le réseau en péril.

Sans parler, du débit au premier nœud du réseau, qui est toujours nul puisque le clapet anti retour empêche la circulation de l’eau dans l’autre direction. Toutefois, aux autres nœuds du réseau le suivi du débit, au cours du temps, a donné une alternance de valeurs négatives et positives à l’instar du point de jonction des trois conduites. Afin de visualiser la fluctuation du débit en ce point, nous avons tracé la figure (4.10) donnant le flottement du débit au cours du temps.

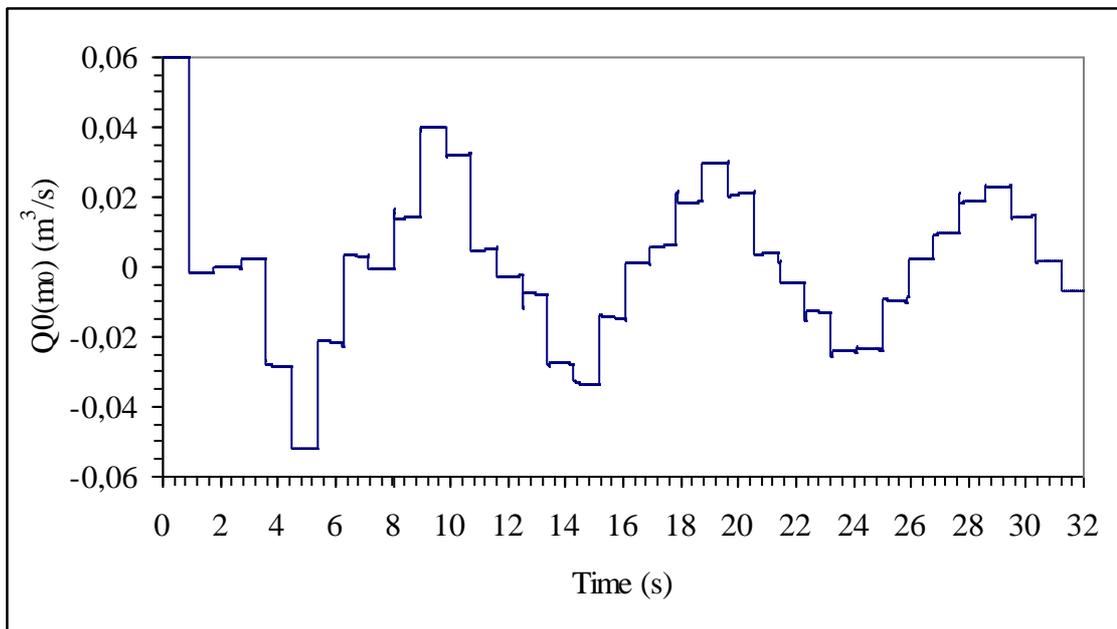


Fig. (4.10) : Fluctuation du débit au point de jonction d’une station à double effets

Le débit en régime transitoire, traversant le point de raccordement, entreprend sa valeur en écoulement permanent, par la suite il fluctue, puis il cherche durant son mouvement à se stabiliser autour de la valeur zéro où la vitesse d’écoulement est nulle.

**4.5.3. Troisième modèle d’étude**

Une station de pompage peut être également à triple ou à multiple effets, ce qui régénère d’autres facteurs qui entrent en jeu lors de l’apparition de l’écoulement transitoire, dans le réseau d’adduction, suite à un arrêt brusque de la station de pompage. Dans ce qui suit, nous allons essayer de trouver comment ils varient, au cours du temps, le débit et la pression dans les nœuds d’un réseau alimentant les trois réservoirs. Les tableaux (4.10) et (4.11) présentent les données à utiliser lors de l’exécution du programme.

Tableau (4.10) Caractéristiques du réseau

| Caractéristiques du réseau |  |           |  |
|----------------------------|--|-----------|--|
| Longueurs                  | L <sub>0</sub> =1000m<br>L <sub>1</sub> =1000m<br>L <sub>2</sub> =1000m<br>L <sub>3</sub> =1000m | Diamètres | d <sub>0</sub> =250mm<br>d <sub>1</sub> =200mm<br>d <sub>2</sub> =150mm<br>d <sub>3</sub> =150mm |
| Epaisseurs des             | e <sub>0</sub> =4mm  | Débits    | Q <sub>0</sub> =60 l/s   |

|                         |  |                    |   |
|-------------------------|--|--------------------|---|
| conduites               | $e_1=3,5\text{mm}$<br>$e_2=3\text{mm}$<br>$e_3=3\text{mm}$   |                    | $Q_1=30\text{ l/s}$<br>$Q_2=15\text{ l/s}$<br>$Q_3=15\text{ l/s}$ |
| Rugosités des conduites | $\varepsilon_0=4\text{mm}$<br>$\varepsilon_1=3,5\text{mm}$<br>$\varepsilon_2=3\text{mm}$<br>$\varepsilon_3=3\text{mm}$ | Nature du matériau | Acier : module d'élasticité<br>$E=2.10^{11}\text{ pascals}$       |

Tableau (4.11) : Caractéristiques du liquide

| Caractéristiques du liquide à refouler |                         |
|--|-------------------------|
| La masse volumique                     | 1000 kg/m <sup>3</sup>  |
| Module d'élasticité du liquide         | $2.10^9\text{ pascals}$ |
| Température                            | 20° Celsius             |

Tableau (4.12) : Caractéristiques de la station de pompage et des réservoirs

|                             |                                    |
|-----------------------------|------------------------------------|
| Station de pompage          | $Q= 60\text{ l/s}$ et H.M.T =170 m |
| Réservoir (R <sub>1</sub> ) | Cote du trop plein=150 m           |
| Réservoir (R <sub>2</sub> ) | Cote du trop plein=152 m           |
| Réservoir (R <sub>3</sub> ) | Cote du trop plein=148 m           |

Dans le tableau (4.13) nous avons présenté les résultats intermédiaires permettant d'effectuer les calculs des paramètres en écoulement transitoire.

Tableau n° (4.13) : Résultats obtenus par le programme dans le cas d'une station de pompage à triple effets refoulant dans un réseau en acier

|   |  |   |   |
|---|--|---|---|
| Viscosité cinématique ( $\nu$ ) m <sup>2</sup> /s | $1,00998639.10^{-6}$   | Célérités d'onde (m/s)  | $a_0=1111,11168$<br>$a_1=1128,66809$<br>$a_2=1155,40149$<br>$a_3=1155,26794$                  |
| Sections (m <sup>2</sup> )                        | $S_0=4,0908.10^{-2}$<br>$S_1=3,141592.10^{-2}$<br>$S_2=1,767176.10^{-2}$<br>$S_3=1,767176.10^{-2}$                       | Période de retour de l'onde (s)   | $t_{40}=3,6$<br>$t_{41}=5,316$<br>$t_{42}=6,924$<br>$t_{43}=8,656$                            |
| Vitesses (m/s)                                    | $V_0=1,22$<br>$V_1=0,9549$<br>$V_2=0,8488$<br>$V_3=0,8488$   | Paramètres $R=a/(g.S)$ en (s/m <sup>2</sup> )   | $R_0=2307,37695$<br>$R_1=3662,244338$<br>$R_2=6664,8667$<br>$R_3=6664,09619$                  |
| Nombres de Reynolds                               | $Re_0=302556,063$<br>$Re_1=189097,531$<br>$Re_2=126065,016$<br>$Re_3=126065,016$   | Valeurs théoriques de dépression surpression<br>$VdH = a.V/g$ en (m)                  | $VdH_0=\pm 138,4416$<br>$VdH_1=\pm 109,8673$<br>$VdH_2 =\pm 99,97299$<br>$VdH_3=\pm 99,96144$ |
| Coefficient de perte de charge ( $\lambda$ )      | $\lambda_0=1,9719986.10^{-2}$<br>$\lambda_1=2,008.10^{-2}$<br>$\lambda_2=2,04557.10^{-2}$<br>$\lambda_3=2,04557.10^{-2}$ | Résistances des conduites en (s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup> )                        | $Rc_0=1835,3567$<br>$Rc_1=8555,10254$<br>$Rc_2=48967,0234$<br>$Rc_3=61208,7813$               |
| Pertes de charge (m)                              | $dh_0=6,60728$<br>$dh_1=7,6859$<br>$dh_2=11,01758$<br>$dh_3=13,77198$  | Résistances d'un élément de discrétisation (RED) en (s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup> ) | $RED_0=2,03928542$<br>$RED_1=6,43724823$<br>$RED_2=28,2882862$<br>$RED_3=28,2850208$          |
| Nombre de nœuds de                                | $m_0=901$  | Longueurs des   | $dx_0=1,1111$   |

|                |  |                                |   |
|----------------|--|--------------------------------|---|
| discrétisation | $m_1=1330$<br>$m_2=1732$<br>$m_3=2165$ | éléments de discrétisation (m) | $dx_1=1,1287$<br>$dx_2=1,1554$<br>$dx_3=1,1553$ |
|----------------|--|--------------------------------|---|

Devant le nombre important des résultats obtenus en écoulement transitoire et pour les bien apercevoir, le recours à la représentation graphique s'avère d'une importance prépondérante. Mais, nous ne sommes pas à l'obligation de dresser la variation en tous les nœuds. Toutefois, le premier et le dernier nœuds de la première conduite, par leur particularité, peuvent synthétiser le déroulement du phénomène.

La figure (4.11) montre l'évolution, au cours du temps, de la pression à la sortie d'une station de pompage à triple effets.

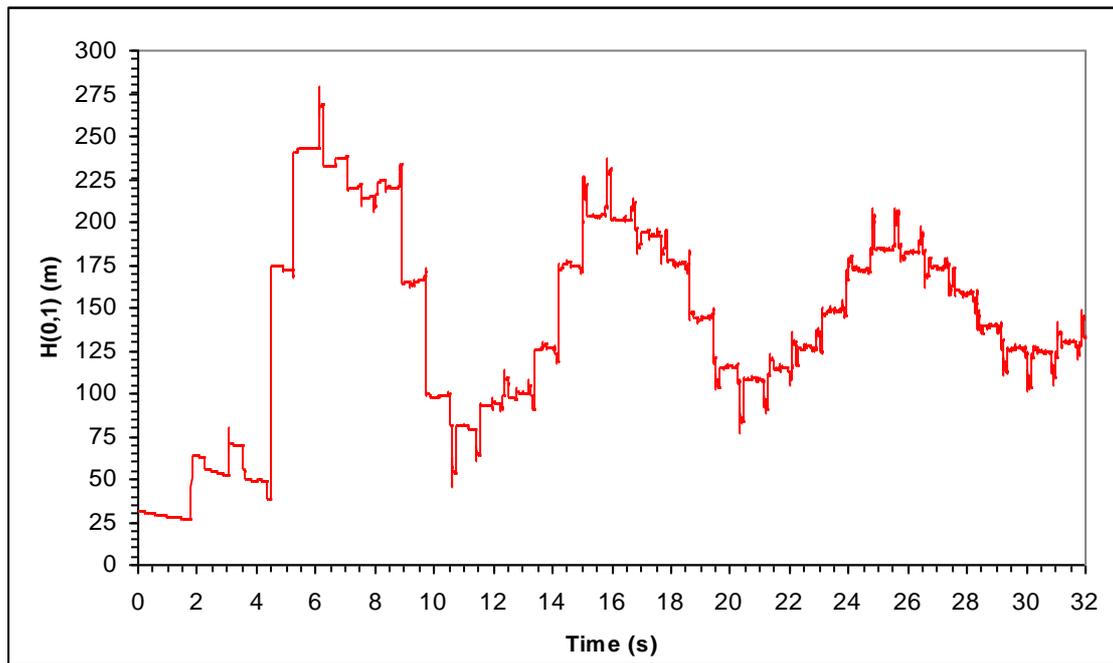


Fig. (4.11) : Fluctuation de la pression à la sortie d'une station de pompage à triple effets

Nous remarquons que l'allure déclenche directement avec une dépression sans aucun retard et se répète à chaque période de retour en diminuant son ampleur de pressions pour aller se stabiliser autour de la charge statique du réservoir à faible cote. Toutefois, la respiration du réseau enregistre des valeurs importantes de dépression et de surpression pouvant causer des imperfections voire même des préjudices à tout le système d'adduction.

La figure (4.12) élucide le tangage, au cours du temps, de la pression au point de jonction de trois conduites d'une station de pompage à triple effets.

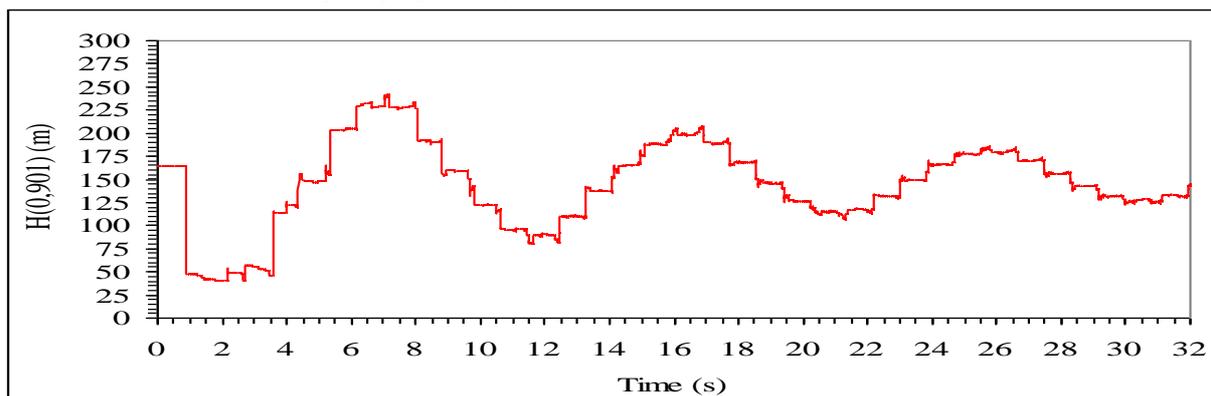


Fig. (4.12) : Fluctuation de la pression au point de jonction d'une station de pompage à triple effets

Avec un temps de retards égal au temps que met l'onde générant la dépression pour atteindre le point de jonction des quatre conduites, le phénomène transitoire débute et enregistre surtout à sa première période de retour successivement des valeurs gigantesques de dépression et de surpression et par la suite, le phénomène recommence en inscrivant des valeurs moins importantes et le phénomène s'amortira aux allons tour de la charge statique du réservoir inférieur.

Pour voir une idée sur la variation du débit, au cours du temps, au point de raccordement des quatre conduites, nous avons tracé la figure (4.13) pour éclairer sa fluctuation.

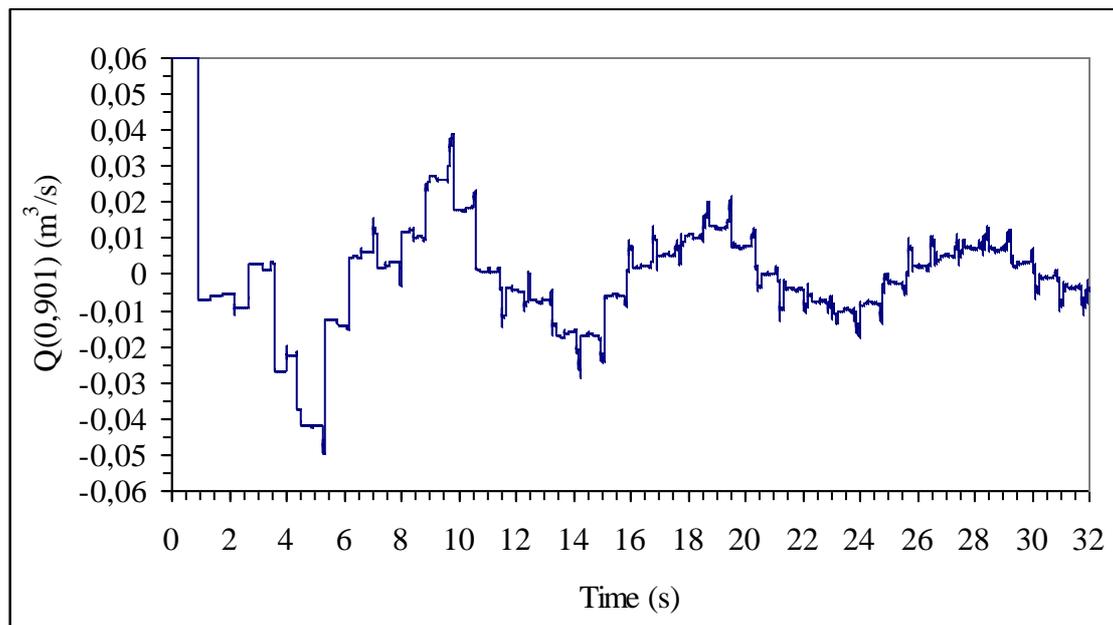


Fig. (4.13) : Fluctuation du débit au point de jonction d'une station de pompage à triple effets  
Après avoir passé de la station de pompage au point de jonction des quatre conduites, l'onde arrive à ce point en enregistrant une chute de la valeur du débit en régime permanent à une valeur moins de zéro, puis il commence un phénomène amortissant de débits négatifs et positifs en cherchant à se stabiliser autour du débit nul.

#### 4.5.4. Etude du phénomène transitoire pour trois matériaux utilisés en adduction

Nous nous limiterons dans ce volet à une étude comparative des pressions et des débits juste au clapet anti retour de la station de pompage à triple effets refoulant dans trois réseaux, le premier réseau en acier déjà étudié à la troisième modèle, le second en fonte et le troisième en polyéthylène à haute densité. Nous allons essayer de grader la même structure du troisième modèle physique.

##### 4.5.4.1. Cas d'un réseau en polyéthylène à haute densité P.E.H.D

Le polyéthylène est un matériau souple et il présente des caractéristiques différentes que celles de l'acier et de la fonte, son module d'élasticité est de l'ordre de  $1,2 \cdot 10^9$  pascals, de plus les fabricants des tuyaux en PEHD donnent les diamètres extérieurs de leurs produits ainsi que les épaisseurs correspondant aux pressions nominales, ce qui engendre la non entières des valeurs des diamètres intérieurs dans lesquels l'écoulement s'effectue et pour mettre à la lumière toutes les informations concernant les conduites en P.E.H.D, nous allons se servir du tableau (4.14) pour être sur rail.

Tableau n° (4.14) : Diamètres, Epaisseurs de paroi et pressions nominales des conduites en P.E.H.D

| Diamètre extérieur nominal dn (mm) | Epaisseurs nominales de paroi |      |             |         |       |             |       |
|------------------------------------|-------------------------------|------|-------------|---------|-------|-------------|-------|
|                                    | PN 6<br>PN 8                  | PN 8 | PN 10<br>PN | PN 12,5 | PN 16 | PN 20       | PN 25 |
| 12                                 |                               | -    | -           | -       | -     | 1,5         |       |
| 16                                 |                               | -    | -           | -       | -     | 1,5         |       |
| 20                                 |                               | -    | -           | -       | 1,5   | 1,9         |       |
| 25                                 |                               | -    | -           | 1,5     | 1,9   | 2,3         |       |
| 32                                 |                               | 1,5  | 1,6         | 1,9     | 2,4   | 2,9         |       |
| 40                                 | 1,5                           | 1,6  | 1,9         | 2,4     | 3,0   | 3,7         |       |
| 50                                 | 1,6                           | 2,0  | 2,4         | 3,0     | 3,7   | 4,6         |       |
| 63                                 | 2,0                           | 2,5  | 3,0         | 3,8     | 4,7   | 5,8         |       |
| 75                                 | 2,3                           | 2,9  | 3,6         | 4,5     | 5,6   | 6,8         |       |
| 90                                 | 2,8                           | 3,5  | 4,3         | 5,4     | 6,7   | 8,2         |       |
|                                    | PN 6                          | PN 8 | PN 10       | PN 12,5 | PN 16 | PN 20       | PN 25 |
| 110                                | 2,7                           | 3,4  | 4,2         | 5,3     | 6,6   | 8,1         | 10,0  |
| 125                                | 3,1                           | 3,9  | 4,8         | 6,0     | 7,4   | 9,2         | 11,4  |
| 140                                | 3,5                           | 4,3  | 5,4         | 6,7     | 8,3   | 10,3        | 12,7  |
| <b>160</b>                         | 4,0                           | 4,9  | 6,2         | 7,7     | 9,5   | <b>11,8</b> | 14,6  |
| <b>180</b>                         | 4,4                           | 5,5  | 6,9         | 8,6     | 10,7  | <b>13,3</b> | 16,4  |
| <b>200</b>                         | 4,9                           | 6,2  | 7,7         | 9,6     | 11,9  | <b>14,7</b> | 18,2  |
| <b>225</b>                         | 5,5                           | 6,9  | 8,6         | 10,8    | 13,4  | <b>16,6</b> | -     |
| <b>250</b>                         | 6,2                           | 7,7  | 9,6         | 11,9    | 14,8  | <b>18,4</b> | -     |
| <b>280</b>                         | 6,9                           | 8,6  | 10,7        | 13,4    | 16,6  | <b>20,6</b> | -     |
| <b>315</b>                         | 7,7                           | 9,7  | 12,1        | 15,0    | 18,7  | <b>23,2</b> | -     |
| 355                                | 8,7                           | 10,9 | 13,6        | 16,9    | 21,1  | 26,1        | -     |
| 400                                | 9,8                           | 12,3 | 15,3        | 19,1    | 23,7  | 29,4        | -     |
| 450                                | 11,0                          | 13,8 | 17,2        | 21,5    | 26,7  | 33,1        | -     |
| 500                                | 12,3                          | 15,3 | 19,1        | 23,9    | 29,7  | 36,8        | -     |
| 560                                | 13,7                          | 17,2 | 21,4        | 26,7    | -     | -           | -     |
| 630                                | 15,4                          | 19,3 | 24,1        | 30,0    | -     | -           | -     |
| 710                                | 17,4                          | 21,8 | 27,2        | -       | -     | -           | -     |
| 800                                | 19,6                          | 24,5 | 30,6        | -       | -     | -           | -     |
| 900                                | 22,0                          | 27,6 | -           | -       | -     | -           | -     |
| 1000                               | 24,5                          | 30,6 | -           | -       | -     | -           | -     |

Le choix des diamètres du réseau d'adduction dépend tout d'abord de la pression assurée par la station de pompage en régime permanent et du débit transité par chaque conduite c'est-à-dire le principe de la vitesse acceptable. Devant cette situation, le choix du tuyau assurant une pression nominale de 20 bas fait l'objet. Les tableaux (4.15) et (4.16) exposent les données nécessaires pour être à la mesure de débuter nos calculs.

Tableau (4.15) : Caractéristiques du réseau en P.E.H.D

| Caractéristiques du réseau |  |           |  |
|----------------------------|--|-----------|--|
| Longueurs                  | L <sub>0</sub> =1000m<br>L <sub>1</sub> =1500m<br>L <sub>2</sub> =2000m<br>L <sub>3</sub> =2500m | Diamètres | d <sub>0</sub> =268,6mm<br>d <sub>1</sub> =191,8mm<br>d <sub>2</sub> =136,4mm<br>d <sub>3</sub> =136,4mm |

|                          |  |                    |  |
|--------------------------|--|--------------------|--|
| Epaisseurs des conduites | $e_0=23,2\text{mm}$<br>$e_1=16,6\text{mm}$<br>$e_2=11,8\text{mm}$<br>$e_3=11,8\text{mm}$   | Débits             | $Q_0=60\text{ l/s}$<br>$Q_1=30\text{ l/s}$<br>$Q_2=15\text{ l/s}$<br>$Q_3=15\text{ l/s}$ |
| Rugosités des conduites  | $\varepsilon_0=0,02\text{mm}$<br>$\varepsilon_1=0,02\text{mm}$<br>$\varepsilon_2=0,02\text{mm}$<br>$\varepsilon_3=0,02\text{mm}$ | Nature du matériau | P.E.H.D :<br>module<br>d'élasticité<br>$E=1,2.10^9$<br>pascals                           |

Tableau (4,16) : Caractéristiques de la station de pompage et cotes des réservoirs

|                             |                                   |
|-----------------------------|-----------------------------------|
| Station de pompage          | $Q=60\text{ l/s}$ et H.M.T =170 m |
| Réservoir (R <sub>1</sub> ) | Cote du trop plein=150 m          |
| Réservoir (R <sub>2</sub> ) | Cote du trop plein=152 m          |
| Réservoir (R <sub>3</sub> ) | Cote du trop plein=148 m          |

Du fait que la station de pompage fournit une hauteur manométrique totale de 170 m, la conduite résiste à une pression nominale de 20 bars. Cette dernière peut convenir à notre système en écoulement permanent, mais est ce que c'est le cas, quand il est devenu transitoire. La réponse à cette question sera plus claire après la représentation de la fluctuation de la pression au cours du temps aux nœuds particuliers choisis.

L'introduction de toutes ces données dans notre programme nous a permis d'avoir les informations mentionnées dans le tableau (4.17). Ces dernières sont utilisées comme une console pour se pencher et affronter l'écoulement transitoire.

L'écoulement transitoire a la particularité de la variation immédiate de ses paramètres et de plus il génère un nombre de chiffres important voire même de signes opposés, ce qui le rend incontrôlable du point de vue chiffres. Cependant, et devant ce dilemme nous sommes obligés de faire recours à la représentation graphique afin d'octroyer plus de lisibilité et de compréhensibilité sur nos résultats. La figure (4.14) a fait l'objet au niveau du premier nœud pris comme point particulier.

Tableau n° (4.17) : Résultats obtenus par le modèle numérique dans le cas d'une station de pompage à triple effets refoulant dans un réseau en P.E.H.D

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
| Viscosité cinématique (v) m <sup>2</sup> /s  | $1,00998639.10^{-6}$   | Célérités d'onde (m/s)   | $a_0=314,1492$<br>$a_1=315,1261$<br>$a_2=314,4654$<br>$a_3=314,4654$                 |
| Sections (m <sup>2</sup> )                   | $S_0=5,6663.10^{-2}$<br>$S_1=2,889263.10^{-2}$<br>$S_2=1,46123.10^{-2}$<br>$S_3=1,46123.10^{-2}$                       | Période(s) de retour de l'onde (s)   | $t_{40}=12,72$<br>$t_{41}=19,092$<br>$t_{42}=25,44$<br>$t_{43}=31,80$                |
| Vitesses (m/s)                               | $V_0=1,059$<br>$V_1=1,038$<br>$V_2=1,0265$<br>$V_3=1,0265$   | Paramètres $R=a/(g.S)$ en (s/m <sup>2</sup> )                              | $R_0=565,7206$<br>$R_1=1111,804$<br>$R_2=2193,740$<br>$R_3=2193,740$                 |
| Nombres de Reynolds                          | $Re_0=281604,656$<br>$Re_1=1197181,984$<br>$Re_2=138634,547$<br>$Re_3=138634,547$                                      | Valeurs théoriques de dépression et de surpression<br>$VdH = a.V/g$ en (m) | $VdH_0=\pm 33,94$<br>$VdH_1=\pm 33,354$<br>$VdH_2 =\pm 32,906$<br>$VdH_3=\pm 32,906$ |
| Coefficient de perte de charge ( $\lambda$ ) | $\lambda_0=1,53477.10^{-2}$<br>$\lambda_1=1,64778.10^{-2}$<br>$\lambda_2=1,7725.10^{-2}$<br>$\lambda_3=1,7725.10^{-2}$ | Résistances des conduites en (s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup> )             | $R_{c0}=907,098$<br>$R_{c1}=7868,112$<br>$R_{c2}=62040,756$<br>$R_{c3}=77550,0945$   |

|                                   |  |  |  |
|-----------------------------------|--|--|--|
| Pertes de charge (m)              | dh <sub>0</sub> =3,2654<br>dh <sub>1</sub> =7,081<br>dh <sub>2</sub> =13,959<br>dh <sub>3</sub> =17,4489 | Résistance d'un élément de discrétisation (RED) en (s <sup>2</sup> /m <sup>5</sup> ) | RED <sub>0</sub> =2,85384<br>RED <sub>1</sub> =16,5296<br>RED <sub>2</sub> =97,5484<br>RED <sub>3</sub> =97,9484 |
| Nombre de nœuds de discrétisation | m <sub>0</sub> =319<br>m <sub>1</sub> =477<br>m <sub>2</sub> =637<br>m <sub>3</sub> =796                 | Longueurs des éléments de discrétisation (m)   | dx <sub>0</sub> =3,1446<br>dx <sub>1</sub> =3,1513<br>dx <sub>2</sub> =3,1446<br>dx <sub>3</sub> =3,1446         |

La figure (4.14) montre l'évolution, au cours du temps, de la pression à la sortie d'une station de pompage à triple effets refoulant dans réseau en P.E.H.D.

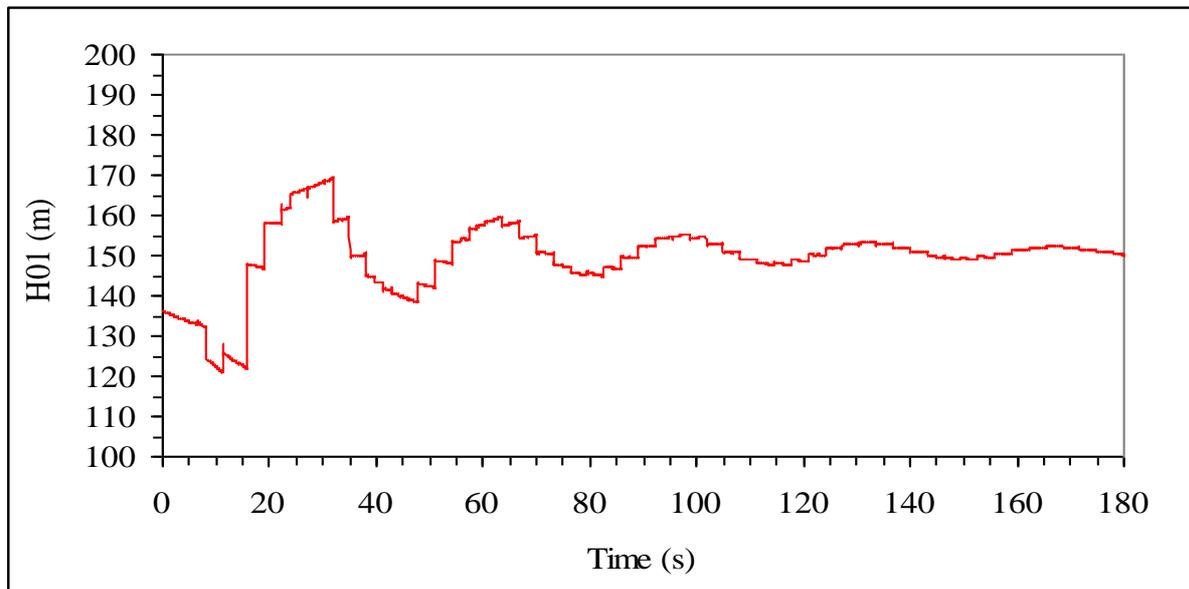


Fig. (4.14) : Variation de la pression au cours du temps au premier point de discrétisation d'un réseau en P.E.H.D d'une station à triple effets

Malgré que les surpressions générées ne dépassent pas la pression nominale de la conduite en écoulement permanent, mais les dépressions engendrées par le phénomène transitoire sont à vérifier le long des profils en long du réseau. Cependant, l'utilisation du polyéthylène à haute densité s'avère d'une très grande utilité du point de vue ce phénomène si et seulement si d'autres considérations techniques ne le mettent pas à l'écart.

Le phénomène respiratoire du réseau en P.E.H.D, traduit par l'alternative de dégonflement et du gonflement, malgré qu'il est moins important, il présente des risques sur les dispositifs du réseau et nécessite un moyen de protection.

**4.5.4.2. Cas d'un réseau en fonte**

Précédemment, La fonte est parmi les matériaux les plus utilisés en adduction surtout quand la taille des pressions générées par la station de pompage est importante. Elle a un module d'élasticité de  $1,03 \cdot 10^{11}$  Pascals. Dans ce qui suit, nous allons mettre en évidence comment varie-elle la pression au cours du temps, à la sortie d'une station de pompage à triple effets, en gardant les mêmes données géométriques et hydrauliques du troisième modèle d'étude.

La figure (4.15) illustre en toute clarté la variation au cours du temps, de la pression au clapet anti retour placé à sortie de la station de pompage.

Tableau n° (4.18) : Résultats obtenus par le programme dans le cas d'une station de pompage à triple effets refoulant dans un réseau en fonte

|  |  |   |  |
|--|--|---|--|
| Viscosité cinématique ( $\nu$ ) $m^2/s$      | $1,00998639 \cdot 10^{-6}$   | Célérités d'onde (m/s)  | $a_0=951,4747$<br>$a_1=974,0259$<br>$a_2=1088,064$<br>$a_3=1007,658$                     |
| Sections ( $m^2$ )                           | $S_0=4,0908 \cdot 10^{-2}$<br>$S_1=3,141592 \cdot 10^{-2}$<br>$S_2=1,767176 \cdot 10^{-2}$<br>$S_3=1,767176 \cdot 10^{-2}$                       | Période de retour de l'onde (s)                                   | $t_{40}=4,204$<br>$t_{41}=6,160$<br>$t_{42}=7,936$<br>$t_{43}=9,924$                     |
| Vitesses (m/s)                               | $V_0=1,22$<br>$V_1=0,9549$<br>$V_2=0,8488$<br>$V_3=0,8488$   | Paramètres $R=a/(g.S)$ en ( $s/m^2$ )                             | $R_0=1775,86975$<br>$R_1=3160,46948$<br>$R_2=5814,96143$<br>$R_3=5812,61768$             |
| Nombres de Reynolds                          | $Re_0=302556,063$<br>$Re_1=189097,531$<br>$Re_2=126065,016$<br>$Re_3=126065,016$   | Valeurs théoriques de dépression surpression $VdH = a.V/g$ en (m) | $VdH_0=\pm 118,552$<br>$VdH_1=\pm 94,8141$<br>$VdH_2 =\pm 87,2244$<br>$VdH_3=\pm 87,189$ |
| Coefficient de perte de charge ( $\lambda$ ) | $\lambda_0=1,9719986 \cdot 10^{-2}$<br>$\lambda_1=2,008 \cdot 10^{-2}$<br>$\lambda_2=2,04557 \cdot 10^{-2}$<br>$\lambda_3=2,04557 \cdot 10^{-2}$ | Résistances des conduites en ( $s^2/m^5$ )                        | $Rc_0=1835,3567$<br>$Rc_1=8555,10254$<br>$Rc_2=48967,0234$<br>$Rc_3=61208,7813$          |
| Pertes de charge (m)                         | $dh_0=6,60728$<br>$dh_1=7,6859$<br>$dh_2=11,01758$<br>$dh_3=13,77198$  | Résistances d'un élément de discrétisation (RED) en ( $s^2/m^5$ ) | $RED_0=1,746295$<br>$RED_1=5,55526$<br>$RED_2=24,681$<br>$RED_3=24,671$                  |
| Nombre de nœuds de discrétisation            | $m_0=1052$<br>$m_1=1541$<br>$m_2=1985$<br>$m_3=2482$   | Longueurs des éléments de discrétisation (m)                      | $dx_0=0,9515$<br>$dx_1=0,9740$<br>$dx_2=1,008$<br>$dx_3=1,0077$                          |

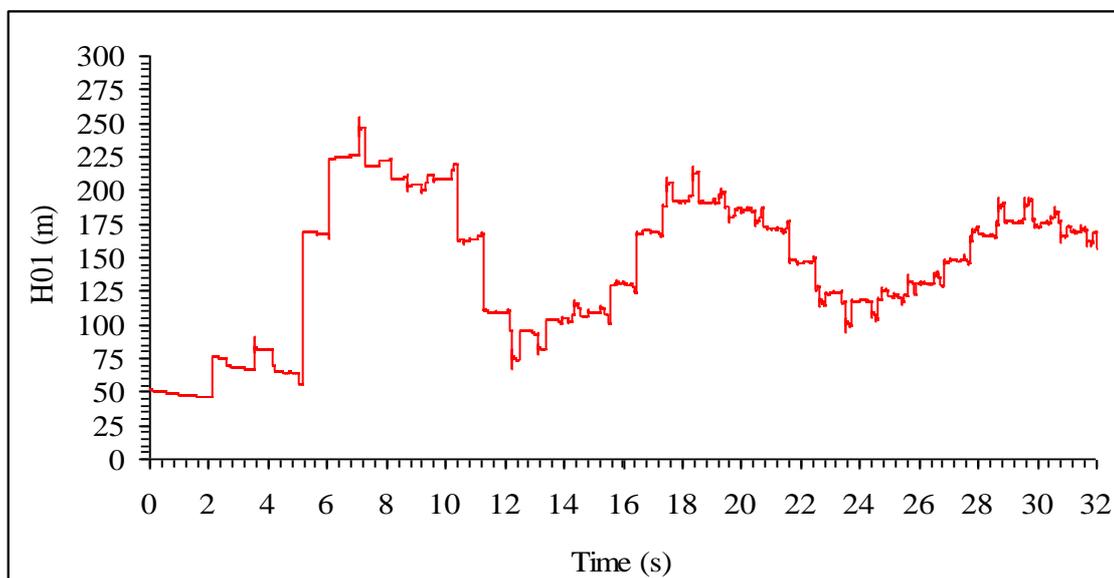


Fig. (4.15) : Variation de la pression au cours du temps au premier point de discrétisation du réseau en fonte d'une station à triple effets

Les pressions enregistrées, au cours du temps, pour la fonte sont nettement grandes par rapport à celles du P.E.H.D et elles sont moins importantes que celles enregistrées par un réseau en acier. A cet effet, nous pouvons dire que le moyen de protection anti bélien sera plus petit en P.E.H.D que la fonte et l'acier.

Imaginons maintenant, que la station de pompage est remplacée par un grand réservoir et assure les mêmes caractéristiques. Supposons qu'il est équipé à sa sortie d'une vanne à fermeture rapide. Lors de la fermeture rapide, sûrement nous auront le même phénomène, mais quel moyen de protection anti bélien sera placé et dans quel endroit du réseau?

#### 4.6 Conclusion

Après avoir suivi le phénomène transitoire, au cours du temps et dans l'espace dans des réseaux sous pression, sans tenir compte d'aucuns moyens de protection pour l'atténuer, nous pouvons constater que quelque soit les pertes de charge générées lors de cet écoulement, ils apparaissent des ondes de dépression et de surpression, malgré qu'elles ne dépassent pas, dans certains cas, la pression nominale du réseau, elles peuvent nuire le système d'adduction, donc mettre un moyen préventif s'avère plus qu'obligatoire. Toutefois, l'emplacement de ce dernier n'est pas toujours réalisable.

En fait, l'amortissement de l'écoulement transitoire dans un réseau d'adduction composé d'un nombre important de conduites, sera plus rapide, par rapport à celui s'est déroulé dans un réseau composé d'une seule conduite, à cause de l'importance des pertes de charge générées par le premier réseau, seulement il faut mettre à l'esprit qu'uniquement les trois premières périodes du phénomène peuvent conduire à des dégâts prodigieux dans le réseau et ses dispositifs.

Le choix du matériau du réseau joue un rôle primordial à la taille de l'anti bélien et par conséquent à son prix.

Enfin on peut dire que le P.E.H.D est un matériau amortissant les perturbations des paramètres générées par l'écoulement transitoire mieux que la fonte et l'acier, mais les contraintes techniques empêchent, dans certains cas, son utilisation et le concepteur doit faire recours à des conduites en fonte, en acier et voire même en béton.

## Conclusion générale

L'étude du phénomène du transitoire dans les conduites sous pression s'avère d'une grande importance, vu les risques engendrés sur les installations hydrotechniques des systèmes adduction d'eau potable.

Les études réalisées à nos jours sur ce domaine ont pu mettre une description de ce phénomène, déceler ses causes et exposer ses conséquences dramatiques sans tenir compte de la résistance du réseau d'une part et d'autre part elles proposent des moyens de protection contre ce phénomène sans également d'étudier le matériau le plus adapté au système d'adduction. Toutefois, l'emplacement de ces moyens de protection nécessite une connaissance parfaite, lors de l'apparition du phénomène, de la variation en particulier de la pression en tout point du réseau afin de placer l'atténuateur là où il faut. A cet effet, la recherche des équations qui le régissent et de la méthode numérique la plus adaptée à ce labyrinthe était en premier temps notre objectif.

Les équations de bases du phénomène transitoire dans les conduites sous pression ont permis de le comprendre fortement ainsi de savoir tous les paramètres entrant en jeu surtout dans sa reproduction d'un côté et d'autre côté, elles ont mis ses paramètres sous forme d'équations et de relations qui sont d'une grande utilité lors du suivi du phénomène au cours du temps et dans l'espace. Afin de réaliser ce suivi, la méthode des caractéristiques a été choisie pour transformer les équations aux dérivées partielles de Saint Venant aux équations aux dérivées totales sans oublier de tenir en compte les conditions initiales et aux limites du modèle physique à étudier.

Dans le souci de mettre à notre portée le suivi du régime transitoire dans le temps et en tous les nœuds du réseau d'adduction, nous avons réalisé un programme de calcul nous permettra de donner les valeurs du débit et de la pression à n'importe quel point du réseau et au temps désiré en un laps de temps.

Dans le but de tester notre programme, nous avons pris 3 modèles d'études, il s'agit d'une station de pompage à simple, double et triple effet et pour trois différents matériaux du réseau. Les résultats obtenus sont encourageants et permettant de donner une description visuelle du phénomène. Toutefois, notre programme doit être développé, amélioré vis-à-vis les interfaces et périphériques modernes d'un ordinateur et jette ses tentacules vers l'aspect graphique.

Le réseau en matériau ayant un faible module d'élasticité présente des moyens de protection de faibles tailles à l'instar du P.E.H.D. Toutefois, son utilisation n'est pas toujours une opportunité du fait que d'autres considérations techniques peuvent entrer lors du choix du matériau du réseau. Ce genre de travail, précède les tracés des profils en long de l'adduction, le choix du matériau de réseau, l'endroit d'emplacement du moyen de protection et le type de ce dernier.

## Références

- [1] WOOD, F. M. (1970). History of water-hammer, Research report N°65, Canada.
- [2] MAREY, M. (1875). Mouvement des Ondes Liquides pour servir à la Théorie du Pouls, Travaux du Laboratoire de M. Marey,
- [3] SALAH, B. (1994). Polycopie d'alimentation en eau potable, ENSH.
- [4] CARLIER, M. (1972). Hydraulique générale et appliquée, Eyrolles, Paris.
- [5] B. SALAH, A. KETTAB, F. MASSOUH, B. MBANGANGOYE, Célérité de l'onde de coup de bélier dans les réseaux enterrés, revue la Houille Blanche, n° 3/4, 2001.
- [6] B.SALAH et F.MASSOUH " Application du modèle de Lamé à une conduite sous pression à parois simples ou revêtues et placée en tranchée ", revue la Houille Blanche, n°4/Décembre 2010, PP.90-95.
- [7] Hocine Hammoum a, Akli Yahiaoui et Bachir Achour, " Analyse du coup de bélier dans une conduite forcée dans le cas d'une fermeture de vanne. Partie 2: Pertes de charges concentrées en aval ", Journal of matériels ans engineering structures, n°4/2017, PP.99-109.
- [8] Mescand. L, Hydraulique générale, Tome II, édition Paris 1971.
- [9] M.MEUNIER "Les coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression", ENGREF, Paris 1980.
- [10] KREMENSKI. N, Hydraulique, édition Mir 1984.
- [11] OURAGH Youcef "Ecoulement forcé en hydraulique" Tome II, Edition Paris 1971.
- [12] André dupont, Hydraulique urbaine, Tome II, Edition Eyrolles paris 1974
- [13] Carlier. M, Hydraulique générale et appliquée, Edition Eyrilles, Paris 1986.
- [14] Charles Camichel, Denis Eydoux et Maurice Gariel " Etude théorique et expérimentale des coups de bélier ", Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 8 (1916).
- [15] CL. Thirriot" Méthodes approchées de calcul des coups de bélier dans des conduites relativement longues", revue la Houille Blanche, n°2/1967.
- [16] Comolet Raymon, mécanique expérimentale des fluides, Tome II, 5<sup>ème</sup> édition, Masson & Cie Paris Mars 1997.
- [17] E. Roche, Principe généraux de calcul du coup de bélier et protection anti bélier, i,c, gref, Paris 1986.
- [18] G. Pupion et J Genet, Analyse moderne, Tome II, Paris.
- [19] PISKONOV.N, Calcul différentiel et intégral, Tome II, Première partie, OPU, édition corrigé.
- [20] Victor Streeter et Benjamin Wylie, Fluide transient, Ann Arbor Michigan 48106 U.S.A 1983.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَجَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ

كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ أَفَلَا يُؤْمِنُونَ

صدق الله العظيم

