

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : KHETTEL Yousra

Intitulé

**Modèle de l'écoulement ascendant de l'air
avec la condensation de la vapeur d'eau**

Dirigé par : MERAD Meriem

Devant le jury

PRESIDENT	Dr. SEGNI Sami	M.C.B Univ-Guelma
RAPPORTEUR	Dr. MERAD Meriem	M.C.B Univ-Guelma
EXAMINATEUR	Dr. BELHIRECHE Hanane	M.C.B Univ-Guelma

Session septembre 2020

Remerciement

Au nom de Allah , je remercie mon dieu pour tout le succès ,Ma réussite n'est due qu'à Allah .

J'ai atteint la fin de mes études et j'ai préparée mon mémoire avec l'encadreur **Mme. MERAD Meriem** est l'enseignante qui travaille très sérieuse et avec précision , Elle m'a donnée beaucoup de l'aide et des conseils tout au long de ce mémoire j'aimerais également lui dire à quel point j'ai appréciée sa disponibilité et son respect , C'est mon honneur de travailler avec elle , je veux dire merci merci ...

Je remercie également le docteur **SEGNI Sami** le Président du Jury , et aussi **Mme. BELHIRECHE Hanane** .j'accepte leurs critiques et leurs remarques me seront dans l'avenir un jalon dans ma carrière professionnelle.

J'adresse toute mon affection à ma famille et en particulier mes parents parce qu'ils donnent tous les efforts pour atteindre mes objectifs dans tous les côtés ,de la stimulation et du soutien psychologique qu'ils me donner un réconfort et un encouragement sur tout dans les moments opportuns , pour cela ,leur amour me s'embrasse ni s'acquitte de remerciements...Merci pour avoir de moi ce que je suis aujourd'hui ,je vous aime .

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude d'un modèle mathématique qui décrit l'écoulement ascendant de l'air contenant la vapeur d'eau qui détermine la force qui pousse l'air vers le haut à cause de la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau. On considère d'abord le système d'équations d'évolution de l'écoulement vertical ascendant de l'air provoqué par la condensation de la vapeur d'eau, et on calcule numériquement sa solution ; le calcul a été réalisé en utilisant la méthode de différences finies après une adaptation de la séparation de la variable du temps t et de la variable spatiale z . Par cette séparation, l'évolution temporelle est donnée par une équation différentielle ordinaire (en t), tandis que le mouvement de l'air dans le domaine $0 < z < \bar{z}$ est donné par un système d'équations "quasi stationnaire" en z .

Mots-clés : Différences finies, oscillation, mouvement de l'air, condensation de la vapeur d'eau.

Abstract

In this work, we are interested in the study of a mathematical model that describes the upward flow of air containing water vapor which determines the force that pushes the air upward due to heat Latent. We first consider the system of equations of evolution of the ascending vertical flow of air caused by the condensation of water vapor, and we calculate its solution numerically; the calculation was carried out using the finite difference method after adopting the separation of the time variable t and the spatial variable z . By this separation, temporal evolution is given by an ordinary differential equation in t , while the movement of air in the domaine $0 < z < \bar{z}$ is given by a system of "quasi stationary" equations in z .

Keywords : finite differences, oscillation, motion of the air, condensation of water vapor.

المخلص

في هذه المذكرة ، نحن مهتمون بدراسة نموذج رياضي يصف التدفق التصاعدي للهواء المصحوب ببخار الماء والذي بدوره يشكل القوة التي تدفع الهواء لأعلى بسبب الحرارة الكامنة الناتجة من تكثف لبخار الماء. ندرس أولاً نظام معادلات تطور التدفق التصاعدي للهواء الناجم عن تكثيف بخار الماء ، ونحسب حله عدديًا ؛ حيث تم الحساب باستخدام طريقة الفروق المحدودة بعدما اعتمدنا على فصل المتغير الزمني والمتغير المكاني . من خلال هذا الفصل ، يتم إعطاء التطور الزمني بواسطة معادلة تفاضلية عادية ، بينما يتم إعطاء حركة الهواء داخل المدخنة بواسطة نظام معادلات "شبه ثابتة".

الكلمات الاستدلالية: الفروق المنتهية، اهتزاز ، حركة الهواء ، تكثيف بخار الماء.

Table des matières

Introduction	3
1 Préliminaire : Rappel du modèle général de l'atmosphère et état hydrostatique	6
1.1 Présentation des équations du mouvement de l'atmosphère . . .	6
1.2 Etat hydrostatique	8
2 Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau	12
2.1 Calcul numérique de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau	15
2.2 Etat hydrostatique intermédiaire	17
2.3 Calcul numérique dans l'état hydrostatique intermédiaire	21
3 Equations du mouvement ascendant de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau	23
3.1 Position du problème	24
3.2 Approximation par la séparation de l'évolution temporelle et la structure vertical	27

3.3 Simulation numérique du mouvement vertical de l'air dans une	
cheminée	28
3.4 Resultat du calcul numérique	32
Conclusion	36

Introduction

Dans l'atmosphère, il existe de nombreux phénomènes physiques qui interagissent entre eux avec des éléments physiques très précis qui ne peuvent pas être vus à l'oeil nu, et le monde s'intéresse beaucoup aux problèmes du climat et désire en connaître le mécanisme et les conséquences pour répondre à des nombreuses questions qui se présente. L'analyse et la prévision de ces phénomènes, passent souvent par des modèles mathématiques et le calcul numériques de ces modèles.

Comme la modélisation mathématique des phénomènes atmosphériques et météorologiques est plus nécessaire à cause de leur complexité, nous désirons donner notre modeste contribution à la recherche des modèles mathématiques des phénomènes atmosphériques et météorologiques, par l'étude des équations du mouvement de l'air avec éventuelle condensation de la vapeur d'eau. Ces modèles sont basés sur la théorie de la mécanique des fluides, ils utilisent très souvent des systèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires, dont on ne connaît pas des solutions analytiques en général.

L'objectif principal de notre travail est de construire un modèle mathématique qui décrit le phénomène Orage, pour parvenir à cet objectif on étudie tout d'abord le mouvement vertical de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau dans un domaine comme une cheminée de section variante,

la hauteur de la cheminée doit correspondre à celle d'un cumulonimbus(12km), de sorte que le modèle est intéressant pour les phénomènes météorologiques, comme les orages et les cyclones tropicaux.

Le contenu du mémoire est composé par une introduction et trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on rappelle brièvement le système d'équations qui est formulé dans [3]-[4]-[5] et qui modélise le mouvement de l'atmosphère, en tenant compte les transitions de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide et vice-versa, le modèle est développé dans une série des travaux (voir [7]-[12]-[16]). On va rappeler aussi l'état hydrostatiques de l'air sec et on donne l'expression explicite de la densité, la température et la pression (voir [2]-[7]).

Dans le deuxième chapitre, on donne la distribution de la densité et la température dans l'état hydrostatique de l'air avec condensation, en utilisant la méthode de différences finies pour une hauteur de 12km. La distribution de la température et de la densité observées dans l'atmosphère réelle montre que l'effet du réchauffement par la transition de phase de la vapeur d'eau dans l'atmosphère est partielle (même si considérable). Pour cela on va examiner la distribution de la densité et la température dans l'état hydrostatique intermédiaire, et on donne quelques propriétés qui prouve l'effet de la chaleur latente sur la distribution de la densité et la température dans l'atmosphère.

Dans le troisième chapitre, suivons les idées fondamentales du travail [6], on a obtenu le résultat du calcul numérique de l'écoulement vertical ascendant de l'air dans une "cheminée" provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau dans l'air. Or, dans ce travail-là, on a utilisé

l'interprétation de la différence entre la pression à l'intérieur de la "cheminée" et celle de l'extérieur comme une force qui pousse l'air vers le haut dans la cheminée. Les auteurs dans [6] ont supposé que la pression à l'extérieur de la cheminée est celle de l'état hydrostatique de l'air sec, dans notre travail, nous adoptons la séparation de l'évolution temporelle et la structure spatiale comme dans [6], mais nous considérons que la pression à l'extérieur de la cheminée est celle de l'état hydrostatique intermédiaire entre l'état humide et sec. D'autre part, une des hypothèses peu naturelles utilisées dans [6] était celle selon laquelle la section à chaque hauteur du cylindre est supposée constante. Cette hypothèse de la section constante du cylindre a créé en effet la croissance de la vitesse par rapport à la hauteur, qu'on ne trouve pas dans la nature. Dans le présent travail nous considérons un modèle corrigé, c'est-à-dire l'écoulement de l'air dans une "cheminée" ayant une section plus grande pour la hauteur plus grande, "cheminée" plus ouverte vers le haut. Dans ce modèle corrigé la vitesse verticale de l'écoulement varie dans le temps mais ne varie pas sensiblement par rapport à la hauteur.

Chapitre 1

Préliminaire : Rappel du modèle général de l'atmosphère et état hydrostatique

Comme l'atmosphère est un gaz, son mouvement doit être décrit par les équations aux dérivées partielles de la dynamique des gaz. Or, en réalité, la composante H_2O a des comportements particuliers : la vapeur d'eau peut se transformer en liquide ou en solide et sa transition de phase contribué au changement de la concentration de H_2O en état gazeux, et au bilan de la température par la chaleur latente.

1.1 Présentation des équations du mouvement de l'atmosphère

Dans ce chapitre nous rappelons les équations qui décrivent le mouvement de l'air contenant la vapeur d'eau et en tenant compte la transition de phase de l'eau **gaz-liquide** et ses conséquences, le modèle est développé dans [4], [5] (voir aussi [12] et [16]).

Il est utile de rappeler les quantités physiques qu'on va considérer : la densité de l'air sec ϱ , la densité de la vapeur d'eau π , la densité de l'eau liquide $\sigma(m)$ contenue dans les gouttelettes de masse m , la vitesse $v = (v_1, v_2, v_3)$ de l'air, la vitesse $u(m) = (u_1(m), u_2(m), u_3(m))$ des gouttelettes de masse m , la température T et la pression p . On rappelle que dans les conditions usuelles de l'atmosphère, l'équation de la pression donnée par :

$$p = R_0 \left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T; \quad (1.1)$$

où R_0 , μ_a et μ_h sont respectivement la constante universelle des gaz, la masse molaire moyenne de l'air sec et la masse molaire moyenne de H_2O . Pour la vitesse $u(m, x, t)$ des gouttelettes de masse m , on adopte l'approximation

$$u(m, x, t) = v(x, t) - \frac{1}{\alpha(m)} \nabla \Phi, \quad (1.2)$$

où $\alpha(m)$ est le coefficient de friction d'une gouttelette de masse m avec l'air, tandis que Φ est le potentiel. (pour plus de détail, voir [4], [16]).

Dans la suite nous citons les équations du modèle développé dans [4] et [16]. L'équation de **la quantité de mouvement** de l'air aura la forme

$$\begin{aligned} (\varrho + \pi) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right) &= \eta \Delta v + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \nabla (\nabla \cdot v) - R_0 \nabla \left(\left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T \right) + \\ &\quad - \left[\int_0^\infty \sigma(m) dm + \varrho + \pi \right] \nabla \Phi, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où η et ζ sont les coefficients de viscosité. Le terme $\int_0^\infty \sigma(m) dm \nabla \Phi$ découle du principe de l'action-réaction correspondant aux effets de friction décrits dans [1.2].

L'équation de **bilan de l'énergie** aura la forme

$$(\varrho + \pi) c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \kappa \Delta T - R_0 \left(\frac{\varrho}{\mu_a} + \frac{\pi}{\mu_h} \right) T \nabla \cdot v + \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
& +\eta \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla \cdot v \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \zeta (\nabla \cdot v)^2 + E_{rad} + \\
& \quad + L_{gl} H_{gl}(T, \pi, \sigma),
\end{aligned}$$

où c_v et κ sont respectivement la chaleur spécifique et le coefficient de la thermoconductibilité de l'air, E_{rad} est la source de la chaleur (principalement due à la radiation), et le terme $L_{gl} H_{gl}(T, \pi, \sigma)$ représente la chaleur fournie à l'air par le processus de transition de phase gaz-liquide, tandis que $H_{gl}(T, \pi, \sigma)$ désigne la quantité totale de H_2O qui se transforme de gaz-liquide.

La loi de **conservation de la masse de l'air sec** est exprimée par **l'équation de continuité**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0. \quad (1.5)$$

Pour **l'équation de continuité de la vapeur d'eau**, compte tenu la variation due à la transition de phase, le principe de la conservation de la masse est exprimé par l'équation

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi(t, x)v(t, x)) = -H_{gl}(T, \pi, \sigma_l). \quad (1.6)$$

1.2 Etat hydrostatique

La distribution de la densité et de la température dans l'état hydrostatique de l'air joue un rôle important dans la modélisation du phénomène orage. Or, à cause de la présence de la vapeur d'eau susceptible de subir la transition de phase, et donc de fournir une chaleur dans la forme de chaleur latente, l'état hydrostatique peut être différent du cas de l'air sec au cas de l'air humide (dans lequel la condensation ou la sublimation inverse de la vapeur d'eau se produit constamment).

Dans la suite on note par ϱ^* , T^* , et p^* la densité, la température, et la pression dans l'état hydrostatique de l'air sec. En effet, si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne, l'équation (1.4) se réduit à

$$\varrho^* c_v (\partial_t T^* + v \cdot \nabla T^*) + R \varrho^* T^* \nabla \cdot v = 0, \quad (1.7)$$

où $R = \frac{R_0}{\mu_a}$. Si le mouvement de l'air vérifie cette équation, le long de sa trajectoire, le rapport

$$\vartheta(t, x) = \frac{T^*(t, x)^{\frac{1}{\gamma}}}{\varrho^*(t, x)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \quad (1.8)$$

avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_v + R}{c_v}$ reste invariant, où γ est l'exposant adiabatique, qui a la valeur approximativement 1.4, tandis que la trajectoire est définie par la relation

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = x(t, x_0), t_0 \leq t \leq t_1\}, \quad x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t v(t', x(t', x_0)) dt'$$

(pour plus de détail voir [3]).

Ainsi, sur la trajectoire de chaque partie du gaz on a

$$T^*(t, x) = C_1 \varrho^*(t, x)^{\gamma-1} \quad (1.9)$$

où C_1 est une constante .

Supposons maintenant que la valeur de la constante C_1 figurant dans l'équation (1.9) est identique dans une région Ω , alors dans cette région la pression p^* , est donnée par

$$p^*(t, x) = h \varrho^*(t, x)^\gamma \quad (1.10)$$

où $h = C_1 R$ est une constante.

Soit Φ le géopotential, si on substitue $v \equiv 0$ et la relation (1.10) dans l'équation (1.3), on obtient

$$h \nabla \varrho^{*\gamma} = -\varrho^{* \nabla} \Phi. \quad (1.11)$$

on trouve

$$\varrho^* = \left(\varrho_0^{*\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (1.12)$$

où $\Phi_0 = \Phi(x_0)$ et $\varrho_0 = \varrho(x_0)$ pour $x_0 \in \Omega$.

En outre, compte tenu de la relation $\frac{C_1}{h} = \frac{1}{R}$, on déduit de (1.9) et (1.12)

$$T^* = C_1 \left(\varrho_0^{*\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right) = T_0^* + \frac{(\gamma-1)}{R\gamma} (\Phi_0 - \Phi), \quad (1.13)$$

où $T_0^* = C_1 \varrho_0^{*\gamma-1}$ est la température au niveau de la surface de la mer.

D'autre part, de (1.10) et (1.12) on déduit que

$$p^* = h \left(\varrho_0^{*\gamma-1} + \frac{\gamma-1}{h\gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(p_0^{*\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \frac{\gamma-1}{h^{\frac{1}{\gamma}} \gamma} (\Phi_0 - \Phi) \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (1.14)$$

où $p_0^* = h \varrho_0^{*\gamma}$ est la pression au niveau de la mer.

En rappelant (1.13), cette relation signifie que quand on monte de Hcm la température devrait descendre de $9,8.H.10^{-5}$ degrés, c'est-à-dire que quand on monte de $1km$ la température devrait descendre de $9,8$ degrés. Mais les mesures effectuées dans l'atmosphère réelle nous montrent que quand on monte de $1km$ la température descend en moyenne environ $6,5$ degrés. Cette différence est due principalement à la présence de la vapeur d'eau et à sa transition de phase.

Les figures ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi que la densité de l'air dans l'état hydrostatique de l'air sec, dans

une hauteur de $12km$, et avec les valeurs initiale de la température, et la densité

$$T^*(0) = 300(K), \quad \varrho^*(0) = 1204(g/m^3).$$

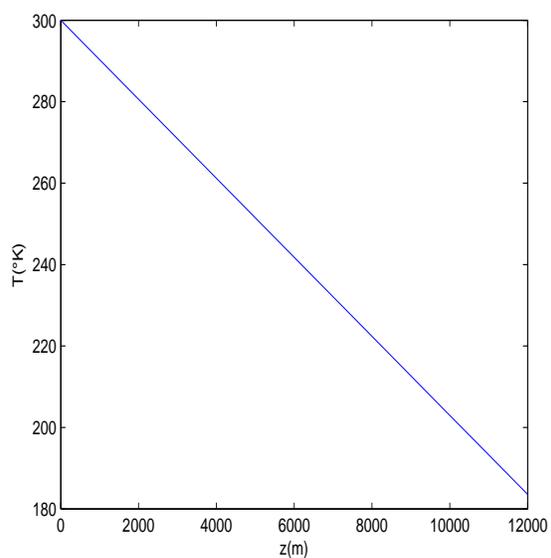


FIGURE 1.1 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique de l'air sec

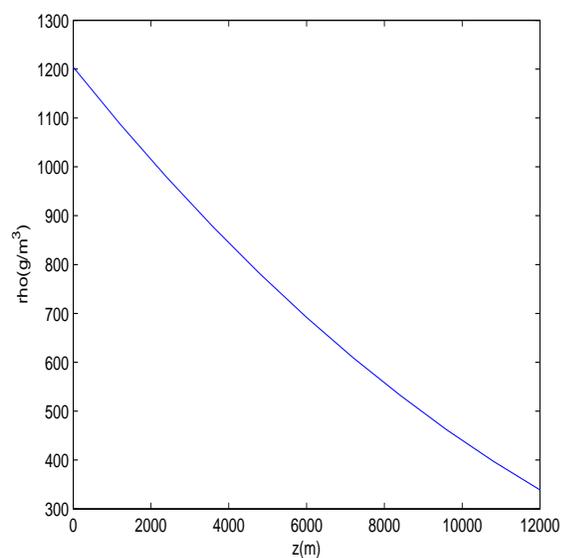


FIGURE 1.2 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique de l'air sec

Chapitre 2

Etat hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Dans le cas où la vapeur d'eau contenue dans l'air est partout saturée et la température est distribuée comme s'il y a constamment la condensation, cas communément dit de l'air humide, la distribution de la densité et de la température est différente et doit être déterminée compte tenu du processus de possible condensation.

Avant de construire un modèle qui décrit l'état hydrostatique de l'air accompagné par la condensation de la vapeur d'eau, rappelons les quantités qui interviennent dans ce processus : on note par L_{tr} la chaleur latente de la transition de phase de l'eau de l'état gazeux en l'état liquide. D'autre part, la densité de la vapeur saturée de H_2O par rapport à la surface de l'eau liquide sera notée $\bar{\pi}_{vs}(T)$, sa dépendance de la température jouera un rôle essentiel dans le modèle. Nous adoptons suivant [11] son expression :

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{E_0}{RT} \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6.107 \text{ (mbar)}.$$

Pour les détails des aspects physiques, la condensation de la vapeur d'eau se réalise, lorsque à une température supérieure à celle de la fusion de H_2O , la

densité de la vapeur dépasse la densité de la vapeur saturée relative à l'état liquide $\bar{\pi}_{vs}(T)$, valeur critique au de laquelle les molécules de H_2O dans l'état gazeux tendent à s'établir à l'état liquide, il est utile de voir, outre [11], aussi [3], [8].

On rappelle que dans l'air qui contient la vapeur d'eau à la saturation et monte avec la vitesse verticale $v_3 > 0$, la quantité de la condensation, notée H_{tr} , peut être donnée par

$$H_{tr} = (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) v_3 \quad (2.1)$$

(pour plus de détail sur l'approximation (2.1) voir [7].

Utilisant la relation (2.1), nous allons définir une distribution supposée de la température T_{hs} et la densité ϱ_{hs} dans l'état hydrostatique avec condensation. Pour ce faire, on désigne par ϱ_{hs} la somme de la densité de l'air sec et celle de la vapeur d'eau

$$\varrho_{hs} = \varrho + \pi$$

en faisant la somme des équations (1.5) et (1.6), on a

$$\frac{\partial \varrho_{hs}}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho_{hs} v) = -H_{tr}. \quad (2.2)$$

Quand il y a la condensation de la vapeur d'eau dans l'air, ce dernier reçoit la chaleur latente de la transition de phase de H_2O , de sorte que, si on néglige la diffusion de la chaleur et le terme due à la friction interne, la variation de la température est donnée par

$$\varrho_{hs} c_v (\partial_t T_{hs} + v \cdot \nabla T_{hs}) + R \varrho_{hs} T_{hs} \nabla \cdot v = L_{tr} H_{tr}. \quad (2.3)$$

Si on y substitue (2.1) et à $\varrho_{hs} \nabla \cdot v$ l'expression obtenue de (2.2), et si en tenant compte du mouvement stationnaire (de sorte que $v = (0, 0, v_3)$ et

avec $v_3 > 0$, de (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} \varrho_{hs} c_v \frac{dT_{hs}}{dz} - RT_{hs} \frac{d\varrho_{hs}}{dz} &= \\ &= (RT_{hs} + L_{tr})(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}) \frac{d}{dz} \log(\varrho_{hs}) - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs})). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Retournons à l'équation (1.3), si $v = (0, 0, v_3)$ et $\partial_t v_3 = 0$, et si en négligeant les termes de viscosité et on écrit $\frac{d}{dz}$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial z}$, on aura

$$\varrho_{hs} v_3 \frac{dv_3}{dz} = -R \frac{d}{dz} (\varrho_{hs} T_{hs}) - [\Sigma + \varrho_{hs}] g$$

où Σ est la densité totale de l'eau liquide et g la force gravitationnelle.

Pour $v_3 \rightarrow 0$, on a $v_3 \frac{dv_3}{dz} \rightarrow 0$.

Alors de (2.1), il résulte que

$$H_{tr} \rightarrow 0, \quad \text{ainsi que} \quad \Sigma \rightarrow 0$$

Donc nous avons

$$R \frac{d}{dz} (\varrho_{hs} T_{hs}) = -g \varrho_{hs}. \quad (2.5)$$

A différence du cas de l'état hydrostatique de l'air sec, le système d'équations (2.4)–(2.5) n'admet pas une solution explicite. Pour cette raison, nous examinons la possibilité de la résolution numérique du système d'équations (2.4)–(2.5).

2.1 Calcul numérique de la densité et de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau

Pour calculer la solution du système d'équations (2.4)–(2.5), nous utilisons la méthode de différences finies avec l'approximation suivante

$$\frac{d\rho_{hs}}{dz} = \frac{\rho_{hs}(i+1) - \rho_{hs}(i)}{\delta z} \quad (2.6)$$

et

$$\frac{dT_{hs}}{dz} = \frac{T_{hs}(i+1) - T_{hs}(i)}{\delta z} \quad (2.7)$$

En discrétisant le système d'équations (2.4)–(2.5), on a

$$R \left(T_{hs}(i) \frac{\rho_{hs}(i+1) - \rho_{hs}(i)}{\delta z} + \rho_{hs}(i) \frac{T_{hs}(i+1) - T_{hs}(i)}{\delta z} \right) = -g\rho_{hs}(i). \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \rho_{hs}(i)c_v \frac{T_{hs}(i+1) - T_{hs}(i)}{\delta z} - RT_{hs}(i) \frac{\rho_{hs}(i+1) - \rho_{hs}(i)}{\delta z} = \quad (2.9) \\ & = \left(RT_{hs}(i) + L_{tr} \right) \left[\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}(i)) \frac{1}{\rho_{hs}(i)} \left(\frac{\rho_{hs}(i+1) - \rho_{hs}(i)}{\delta z} \right) + \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{d}{dT_{hs}} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}(i)) \frac{T_{hs}(i+1) - T_{hs}(i)}{\delta z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Pour la commodité du calcul nous réécrivons les équations (2.8)–(2.9) dans la forme

$$T_{hs}(i)\rho_{hs}(i+1) + \rho_{hs}(i)T_{hs}(i+1) = 2T_{hs}(i)\rho_{hs}(i) - \delta z \frac{g}{R} \rho_{hs}(i), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & c_v \rho_{hs}(i)T_{hs}(i+1) - RT_{hs}(i)\rho_{hs}(i+1) + \quad (2.11) \\ & - \left(RT_{hs}(i) + L_{tr} \right) \left[\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}(i)) \frac{1}{\rho_{hs}(i)} \rho_{hs}(i+1) - T_{hs}(i+1) \frac{d}{dT} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}(i)) \right] = \end{aligned}$$

$$= c_v \varrho_{hs}(i) T_{hs}(i) - RT(i) \varrho^*(i) + \left(RT_{hs}(i) + L_{tr} \right) \times \\ \times \left(\frac{d\bar{\pi}_{vs}}{dT} \times T_{hs}(i) - \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}(i)) \right), \quad i = 1, \dots, N.$$

avec

$$T_{hs}(0) = 300(K), \quad \varrho_{hs}(0) = 1204(g/m^3).$$

Les figures ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi que la densité de l'air dans l'état hydrostatique de l'air avec condensation. Nous avons fait les calculs utilisant la méthode de différences finies pour une hauteur de $12km$.

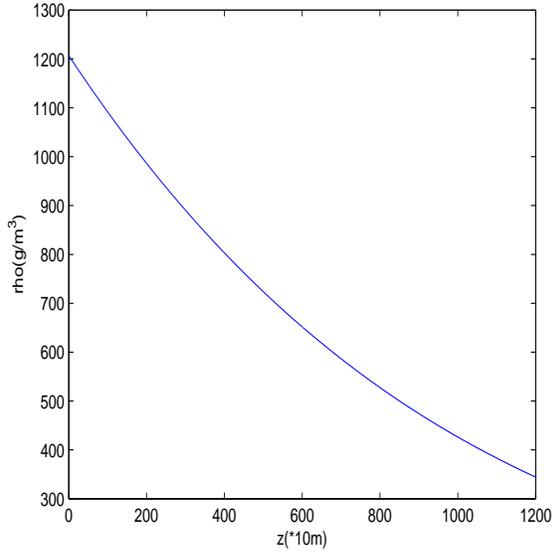


FIGURE 2.1 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau.

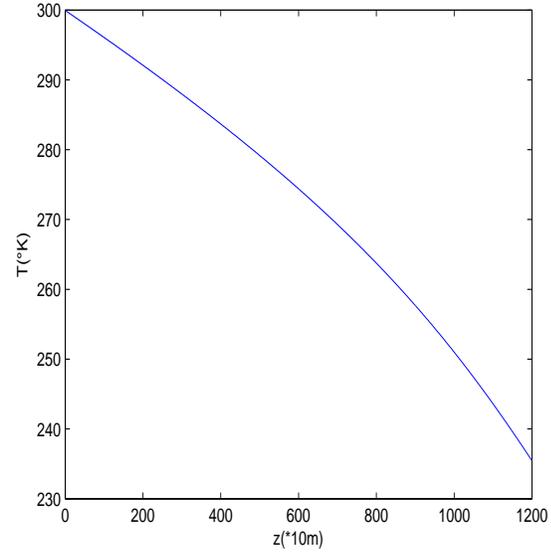


FIGURE 2.2 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau.

2.2 Etat hydrostatique intermédiaire

Nous allons définir une distribution supposée de la température T_{hs}^* et la densité ϱ_{hs}^* dans l'état hydrostatique intermédiaire (entre humide et sec), pour ce faire, rappelons que l'équation de continuité de l'air qui subit la transition de phase de l'eau est

$$\frac{d\varrho_{hs}^*}{dt} + \nabla \cdot (\varrho_{hs}^* v) = -H_{tr} \quad (2.12)$$

l'équation du bilan de l'énergie exprimée en fonction de la température T_{hs}^* , si on néglige la diffusion de la chaleur et l'augmentation de la température due à la friction interne de l'air, on aura

$$\varrho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} - RT_{hs}^* \frac{d\varrho_{hs}^*}{dz} = (RT_{hs}^* + L_{tr})(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*)) \quad (2.13)$$

l'équation (2.13) représente le bilan de l'énergie dans le cas où l'air est avec la vapeur à la saturation, et la transition de phase de la vapeur d'eau se réalise partout. La distribution de la température et de la densité observées dans l'atmosphère réelle montre que l'effet du réchauffement par la transition de phase de la vapeur d'eau dans l'atmosphère est partielle (même si considérable). Pour cela nous supposons que la température T_{hs}^* et la densité ϱ_{hs}^* de l'air vérifient la relation

$$\varrho_{hs}^* c_v \frac{dT_{hs}^*}{dz} - RT_{hs}^* \frac{d\varrho_{hs}^*}{dz} = \nu (RT_{hs}^* + L_{tr})(\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*)) \quad (2.14)$$

où ν est un coefficient ayant la valeur entre 0 et 1. Le cas $\nu = 0$ correspond à l'état hydrostatique de l'air sec, tandis que le cas $\nu = 1$, comme nous l'avons remarqué ci-dessus, correspondrait à l'état de l'air humide dans lequel potentiellement la transition de phase de la vapeur d'eau en liquide est partout

présente.

Si on accouple l'équation (2.14) avec l'équation de l'état hydrostatique

$$R \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g \varrho_{hs}^* \quad (2.15)$$

et la donnée initiale

$$T_{hs}^*(0) = 300K, \quad \varrho_{hs}^*(0) = 1204g/m^3 \quad (2.16)$$

on peut déterminer la distribution de la température $T_{hs}^*(z)$ et de la densité $\varrho_{hs}^*(z)$. Dans la suite nous montrons la solution numérique du système d'équations (2.14)–(2.15) avec $0 < \nu < 1$.

Avant de trouver la solution numérique, on a les propriétés suivantes :

Proposition 2.1. *On note par :*

$$\Omega = \{z > 0 \mid (\bar{\pi}_{vs}(T^*(z)) \frac{d}{dz} \log \varrho^*(z) - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T^*(z))) > 0 \quad \forall z \in]0, \bar{z}[\}. \}$$

Supposons que $(\varrho_{hs}^*, T_{hs}^*)$ est solution du système d'équations (2.14)–(2.15) avec la condition initiale (2.16) dans Ω , alors les fonctions ϱ_{hs}^*, T_{hs}^* sont strictement décroissantes.

Démonstration. Il nous est commode de transformer l'équation (2.14) dans la forme

$$\frac{d}{dz} \log \left(\frac{T_{hs}^{*c_v}}{\varrho_{hs}^{*R}} \right) = -\nu (RT + L_{tr}) \frac{d}{dz} \left(\frac{\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*)}{\varrho_{hs}^*} \right). \quad (2.17)$$

D'autre part, de l'équation (2.15) il résulte immédiatement que

$$\frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^*(z) T_{hs}^*(z)) < 0$$

Donc il est impossible que $\frac{d}{dz} \varrho(z) \geq 0$ et $\frac{d}{dz} T(z) \geq 0$. Si $\frac{d}{dz} T(z) \geq 0$, alors il faut que $\frac{d}{dz} \varrho(z) < 0$. Mais dans ce cas le premier membre de (2.17) serait

strictement positif, tandis que le deuxième membre serait strictement négatif, ce qui est impossible. De manière symétrique, si $\frac{d}{dz}\varrho(z) \geq 0$, alors il faut que $\frac{d}{dz}T(z) < 0$. Mais dans ce cas le premier membre de (2.17) serait strictement négatif, tandis que le deuxième membre serait strictement positif, ce qui est impossible. Donc il faut que $\frac{d}{dz}\varrho(z) < 0$ et $\frac{d}{dz}T(z) < 0$. \square

Remarque 2.1. Dans la Proposition 2.1, si on prend $\nu = 0$ ou 1 dans l'équation (2.17) alors les fonctions ϱ^*, T^* et ϱ_{hs}, T_{hs} sont strictement décroissantes.

Proposition 2.2. Si $(T_{hs}^*, \varrho_{hs}^*)$ solution du système d'équations (2.14)–(2.15) avec la condition initiale (2.23) dans Ω , alors on a

$$p^*(z) \leq p_{hs}^*(z) \leq p_0 \quad \forall z \in \Omega \quad (2.18)$$

où $p^*(z)$ et $p_{hs}^*(z)$ sont la pression dans l'état hydrostatique de l'air sec et intermédiaire respectivement.

Maintenant nous suivons l'idée de la démonstration du proposition 2.1.1 de [7].

Démonstration. De l'équation (2.15) et (1.1) on remarque que

$$\frac{d}{dz}p_{hs}^* = -g\varrho_{hs}^*,$$

comme $g > 0$ et ϱ_{hs}^* une densité positif, alors

$$\frac{d}{dz}p_{hs}^* \leq 0$$

ce qui veut dire que

$$p_{hs}^* \leq p_0 \quad (2.19)$$

Dévisant l'équation (2.4) par $\varrho_{hs}^* T_{hs}^*$ on trouve

$$\frac{d}{dz} \log \frac{T_{hs}^* c_v}{\varrho_{hs}^* R} = \frac{\nu}{T_{hs}^* \varrho_{hs}^*} (RT_{hs}^* + L_{tr}) (\bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*)) \frac{d}{dz} \log \varrho_{hs}^* - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T_{hs}^*).$$

Comme ν prend des valeurs entre 0 et 1, on observe que le second membre de cette égalité est positive pour chaque $z \in \Omega$, donc

$$\frac{T_{hs}^*(z)^{c\nu}}{\varrho_{hs}^*(z)^R} > \frac{T_0^{c\nu}}{\varrho_0^\mu} \quad \forall z \in \Omega,$$

étant donnée $\gamma = \frac{R+c\nu}{c\nu}$, on a

$$\varrho_{hs}^*(z)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} < \frac{\varrho_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma}}} T_{hs}^*(z)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \forall z \in \Omega.$$

En utilisant l'inégalité précédente, de (2.5) on déduit

$$R \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*) = -g \varrho_{hs}^* > -gC (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*)^{\frac{1}{\gamma}},$$

où $C = \frac{\varrho_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma}}}$, ce qui implique que

$$R \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{dz} (\varrho_{hs}^* T_{hs}^*)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > -Cg.$$

Par conséquent

$$(\varrho_{hs}^*(z) T_{hs}^*(z))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} > (\varrho_0 T_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{R\gamma} Cgz. \quad (2.20)$$

En outre, de (1.7) on obtient

$$(\varrho^*(z) T^*(z))^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = (\varrho_0 T_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{\gamma-1}{R\gamma} Cgz. \quad (2.21)$$

Ainsi de (2.20), (2.21) et (1.1) on a

$$p^*(z) \leq p_{hs}^*(z) \quad (2.22)$$

d'après (2.22) et (2.19) on obtient (2.18) ce qui achève la démonstration. \square

2.3 Calcul numérique dans l'état hydrostatique intermédiaire

Nous calculons d'abord la solution $(T_{hs}^*(z), \varrho_{hs}^*(z))$ du système d'équations (2.14)–(2.15) avec $\nu = \frac{1}{2}$. Nous utilisons la méthode de différences finies avec l'approximation (2.6)–(2.7)

Les figures illustrées ci-dessous représentent la distribution verticale de la température ainsi la densité de l'air dans l'état hydrostatique intermédiaire entre l'état humide et sec avec $\nu = \frac{1}{2}$, les calculs numériques ont été effectués pour une hauteur de $z = 12km$ avec un pas $\delta_z = 10m$, en utilisant la méthode de différences finies, avec les conditions initiales

$$T_{hs}^*(0) = 300K, \quad \varrho_{hs}^*(0) = 1204g/m^3, \quad (2.23)$$

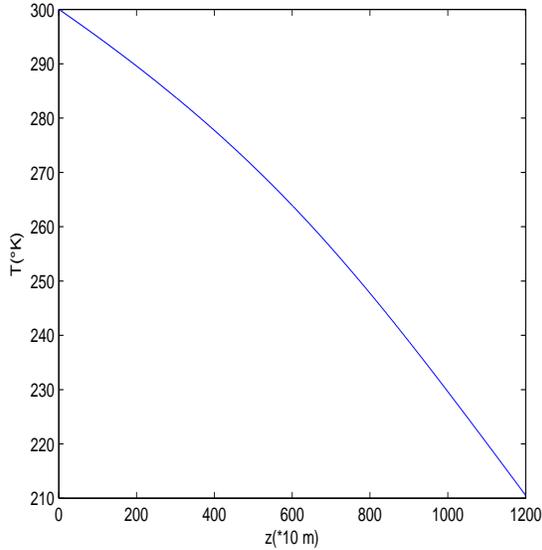


FIGURE 2.3 – La distribution de la température dans l'état hydrostatique intermédiaire avec $\nu = \frac{1}{2}$.

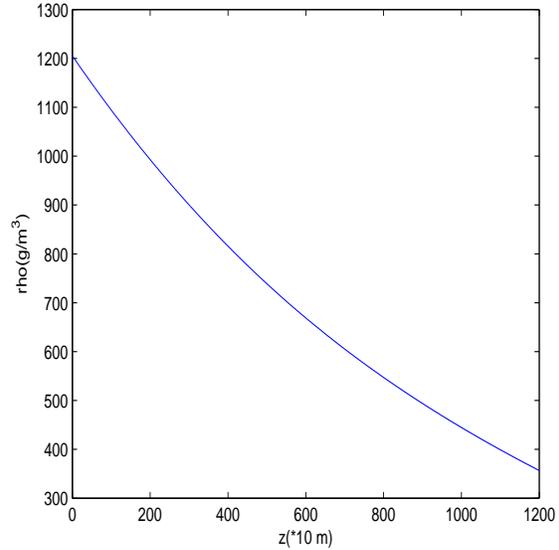


FIGURE 2.4 – La distribution de la densité dans l'état hydrostatique intermédiaire avec $\nu = \frac{1}{2}$.

Les résultats du calculs numériques montrent bien que la pression $p_{hs}^* = R \rho_{hs}^* T_{hs}^*$ calculée avec la température et la densité de " l'état intermédiaire avec $\nu = \frac{1}{2}$ est inférieure à celle calculée à partir de l'état hydrostatique avec la condensation de la vapeur d'eau ", et que la pression dans l'état hydrostatique de l'air sec est inférieure à celle de l'état hydrostatique avec condensation (resp.intermédiaire) ce qui prouve la démonstration de la proposition 2.2.

Chapitre 3

Equations du mouvement ascendant de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau

Rappelons que, le mouvement vertical de l'air est causé par la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau, cette dernière joue un rôle fondamental dans l'apparition de certains phénomènes de l'atmosphère tel que les orages, la précipitation intense ainsi que les cyclones tropicaux.

Dans ce chapitre, nous calculons la solution d'un modèle mathématique de l'écoulement vertical ascendant de l'air dans une "cheminée" provoqué par la chaleur latente de la condensation de la vapeur d'eau dans l'air. Les idées fondamentales de ce modèle sont celles de [6]. Or, dans ce travail-là, outre l'approximation par la séparation de l'évolution temporelle et la structure spatiale, les auteurs utilisent l'interprétation de la différence entre la pression à l'intérieur de la cheminée et celle de l'extérieur comme une force qui pousse l'air vers le haut. En outre ils ont supposé que la pression de l'extérieur est celle de la distribution de l'état hydrostatique de l'air sec, en utilisant le modèle d'une "cheminée" à section constante, il a résulté que la

vitesse de l'écoulement avait une croissance non naturelle quand la hauteur z augmentait.

Dans le présent travail, nous adoptons la séparation de l'évolution temporelle et la structure spatiale comme dans [6], mais nous supposons que la pression à l'extérieur de la cheminée déterminée en fonction de la température et la densité dans l'état hydrostatique intermédiaire entre l'état humide et sec et nous considérons une "cheminée" dont la section varie d'une manière que la définition de la section n'influence pas l'allure de l'écoulement de l'air.

3.1 Position du problème

Suivant la modélisation introduite dans [14] (qui a pris l'idée essentielle de [6]), nous considérons l'écoulement de l'air dans un domaine cylindrique avec la section variable autour d'un axe vertical. Plus précisément, on considère le domaine

$$\Omega_3 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq \bar{z}, (x^2 + y^2)\pi \leq S(z) \}, \quad (3.1)$$

où $S(z)$ est la section du cylindre à la hauteur z ; on considère une fonction $S(z)$ avec laquelle la vitesse verticale varie assez peu par rapport à z . Le modèle que nous proposons se base sur les équations de la mécanique des fluides (sur leurs principes fondamentaux, voir [10]). Les grandeurs physiques fondamentales sont la vitesse v , la température T et la densité ρ ; rappelons que la pression p , est donnée par

$$p = R\rho T, \quad R = \frac{R_0}{\mu}, \quad (3.2)$$

où R_0 et μ sont respectivement la constante universelle des gaz et la masse molaire de l'air.

Si on néglige la viscosité et la conductivité thermique et considère seulement la composante verticale $v = v_3$ de la vitesse et la dépendance de t et de z des fonctions qui interviennent, le mouvement de l'air humide dans Ω_3 pourra être décrit par le système d'équations

$$S(z) \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(S(z)\varrho v) = -S(z)H_{tr}, \quad (3.3)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -R \frac{\partial}{\partial z}(\varrho T) - g[\Sigma + \varrho], \quad (3.4)$$

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - RT \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) = (RT + L_{tr})H_{tr}, \quad (3.5)$$

où g et c_v sont respectivement l'accélération de pesanteur et la chaleur spécifique (on admet que $c_v = \frac{5}{2}R$), tandis $\Sigma = \Sigma(t)$ la quantité de l'eau liquide ou solide contenue dans l'air.

Selon les résultats du calcul numérique obtenu dans le deuxième chapitre, on observe que la pression $p_{ex} = R\varrho_{hs}^* T_{hs}^*$, calculée dans l'état hydrostatique de l'air partiellement humide est inférieure à celle calculée à partir de " l'état hydrostatique où la condensation de la vapeur d'eau est parteau réalisé" (voir fig 2.1, fig 2.2, fig 2.3, fig 2.4). Cette différence de pression de l'extérieur et l'intérieur au sommet de la cheminée crée une force qui pousse l'air vert le haut. Selon ces conditions nous définissons une force f due à la différence entre la pression $p(t, \bar{z})$ au sommet à l'intérieur de la cheminée et la pression $p_{ex}(t, \bar{z})$ à l'extérieur de la cheminée, ainsi on a

$$\int_0^{\bar{z}} f(t, z) dz = R\varrho(t, \bar{z})T(t, \bar{z}) - p_{ex}(\bar{z}). \quad (3.6)$$

Pour que la croissance de la vitesse sera ralentie d'une manière analogue à ce qui se passe dans la nature, nous introduisons comme hypothèse, l'effet de "la friction" entre les gouttelettes et l'air. En effet, d'après l'observation des

météorologiques et ce qui se passe dans la nature, la vitesse des gouttelettes par rapport à l'air environnant se stabilise rapidement après leurs créations ; ceci veut dire que, suivant le principe d'action-réaction, l'effet de la force gravitationnelle sur les gouttelettes devient celui de la gravitation sur l'air.

Pour la fonction Σ , nous allons utiliser l'approximation suivante

$$\Sigma(t) = \frac{1}{\bar{z}} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}} H_{tr}(z,s) dz ds \quad (3.7)$$

où $\int_0^{\bar{z}} H_{tr}(z,s) dz$ représente la densité totale de l'eau liquide réalisée dans la cheminée, et φ est la probabilité de permanence des gouttelettes dans l'air, si $\varphi(t-s)$ est la probabilité de permanence de l'eau liquide produit au moment s dans le domaine $0 < z < \bar{z}$.

Considérons le système d'équations (3.3)–(3.5) en tenant compte de la condition (3.6), on aura alors

$$S(z) \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (S(z) \varrho v) = -S(z) H_{tr}, \quad (3.8)$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -R \frac{\partial}{\partial z} (\varrho T) - g[\Sigma + \varrho] + f, \quad (3.9)$$

$$\varrho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right) - RT \left(\frac{\partial \varrho}{\partial t} + v \frac{\partial \varrho}{\partial z} \right) = (RT + L_{tr}) H_{tr}, \quad (3.10)$$

En outre, on trouve qu'il est commode d'adopter l'approximation suivante pour la fonction $f(t, z)$

$$f(t, z) = \varrho(t, z) w(t, z) \frac{p(t, \bar{z}) - p_{ex}(t, \bar{z})}{\int_0^{\bar{z}} \varrho(t, z') w(t, z') dz'}. \quad (3.11)$$

où la fonction $w(t, z)$ sera définie dans la section suivante.

Pour réaliser effectivement le calcul numérique du système d'équations (3.3)–(3.5) (de manière similaire de [6] et [14]), on utilise une approximation par

la séparation de l'évolution temporelle et de la structure spatiale, cette séparation va nous faciliter l'utilisation de la méthode de différence finie pour obtenir la solution numérique.

3.2 Approximation par la séparation de l'évolution temporelle et la structure vertical

Nous suivons l'idée du travail [6], et nous proposons un schéma du système d'équations (3.8)–(3.10) séparant l'évolution temporelle et la structure spatiale. Pour ce faire nous proposons les approximations suivantes

$$v(t, z) = \alpha(t)w(t, z), \quad (3.12)$$

et en supposant

$$\partial_t \varrho(t, z) \approx 0, \quad \partial_t T(t, z) \approx 0, \quad \partial_t w(t, z) \approx 0. \quad (3.13)$$

En substituant (3.11) dans (3.9), on obtient

$$\varrho w \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \varrho \alpha^2 w \frac{\partial w}{\partial z} = -R \frac{\partial(\varrho T)}{\partial z} - g[\Sigma + \varrho] + \varrho w \frac{p(t, \bar{z}) - p_{ex}(t, \bar{z})}{\int_0^{\bar{z}} \varrho(t, z') w(t, z') dz'}. \quad (3.14)$$

Ainsi, l'équation (3.14) devient

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{p(t, \bar{z}) - p_{ex}(t, \bar{z})}{\int_0^{\bar{z}} \varrho(t, z') w(t, z') dz'} \quad (3.15)$$

$$\varrho \alpha^2 w \frac{dw}{dz} = -R \frac{d(\varrho T)}{dz} - g[\Sigma + \varrho] \quad (3.16)$$

D'après les approximations (3.12)–(3.13), ainsi (3.11), le système d'équations (3.8)–(3.10) devient

$$\frac{d}{dz}(S(z)\varrho w) = -S(z)(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \varrho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T))w \quad (3.17)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dz} - RT \frac{d\rho}{dz} = (RT + L_{tr})(\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) \quad (3.18)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{p(t, \bar{z}) - p_{ex}(t, \bar{z})}{\int_0^{\bar{z}} \rho(t, z') w(t, z') dz'} \quad (3.19)$$

$$\alpha^2 \rho w \frac{dw}{dz} + RT \frac{d\rho}{dz} + R \rho \frac{dT}{dz} = -g\rho + \quad (3.20)$$

$$-g \frac{1}{\bar{z}} \int_0^t \varphi(t-s) \int_0^{\bar{z}} (\bar{\pi}_{vs}(T) \frac{d}{dz} \log \rho - \frac{d}{dz} \bar{\pi}_{vs}(T)) \alpha w dz ds.$$

3.3 Simulation numérique du mouvement vertical de l'air dans une cheminée

Dans cette partie, nous présentons les résultats du calculs numérique pour le système d'équations (3.17)–(3.20) en utilisant la méthode de différences finies.

Pour exécuter le calcul numérique, il faut avant tout choisir les valeurs des paramètres. Pour les coefficients physiques g, R_0, μ et L_{tr} nous utilisons les valeurs suivantes :

$$g = 9.8 m^2/s^2, \quad R = \frac{R_0}{\mu}, \quad R_0 = 8,314 J/mole,$$

$$\mu = 28.96 g/mole, \quad R \approx 0.29 \cdot 10^3, \quad c_v = \frac{5}{2} R.$$

la densité de la vapeur saturée $\bar{\pi}_{vs}(T)$ relative à la surface du liquide est

$$\bar{\pi}_{vs}(T) = \frac{E_0}{RT} \cdot 10^{\frac{7.63(T-273.15)}{T-31.25}}, \quad E_0 = 6.107 \text{ (mbar)},$$

La considération de la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état solide, rend le calcul assez compliqué et ne modifie pas beaucoup le résultat,

donc pour la chaleur latente L_{tr} on utilise la valeur relative à la transition de phase de l'eau de l'état gazeux à l'état liquide

$$L_{gl}(T) \approx (3244 - 2.72T) \cdot 10^3 \quad (J/kg).$$

Nous choisissons la fonction $S(z)$ comme suit

$$S(z) = \frac{\varrho_{hs}^*(0)}{\varrho_{hs}^*(z)}$$

où $\varrho_{hs}^*(z)$ est la solution (avec T_{hs}^*) du système d'équations (2.14)–(2.15) avec la condition (2.23) dans le cas $\nu = \frac{1}{2}$.

En ce qui concerne la fonction $\varphi(\cdot)$ (la probabilité de permanence des gouttelettes après le temps τ depuis leurs création), il n'est pas difficile de comprendre que la moyenne du temps de permanence est donnée par

$$\int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau.$$

Pour la fonction $\varphi(\tau)$, on propose une forme particulière de la fonction c'est-à-dire

$$\varphi(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi\tau^2}{4(Q)^2}\right), \quad \tau \geq 0. \quad (3.21)$$

où Q est une constante que nous allons définir plus tard.

On a

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4Q^2}} d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4Q^2}} d\tau$$

on pose $a = \frac{\pi}{4Q^2}$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\tau^2} d\tau = \frac{1}{2} I.$$

On va calculer son intégrale de 0 à $+\infty$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi(\tau^2+\lambda^2)}{4Q^2}} d\tau d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\tau^2}{4Q^2}} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi\lambda^2}{4Q^2}} d\lambda = I^2.$$

En utilisant le changement de variables

$$\begin{cases} r^2 = (\tau^2 + \lambda^2) \\ \tau = r \cos(\theta) \\ \lambda = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Comme $d\tau d\lambda = r d\theta dr$, alors

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} r e^{-ar^2} d\theta dr = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-ar^2} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{-e^{-ar^2}}{2a} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{a} \end{aligned}$$

donc $I = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\pi}{4Q^2}}} = 2Q$, d'où

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\tau) d\tau = Q,$$

ça signifie que, si on prend $\varphi(\tau)$ de la forme (3.21), alors la moyenne du temps de la permanence des gouttelettes dans l'air est Q . Si on utilise la discrétisation avec le pas du temps est 5 secondes, alors pour que la moyenne de permanence soit 20 minutes (1200 secondes), il faut prendre la fonction

$$\varphi_1(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi\tau^2}{4(240)^2}\right), \quad \tau \geq 0.$$

Si on utilise la discrétisation avec le pas du temps 5 secondes et si nous voulons que la moyenne de permanence soit 30 minutes (1800 secondes), il faut prendre la fonction

$$\varphi_2(\tau) = \exp\left(-\frac{\pi\tau^2}{4(360)^2}\right), \quad \tau \geq 0.$$

Pour réaliser la simulation nous choisissons

$$0 \leq z \leq 12000 \text{ (m)}, \quad 0 \leq t \leq 3600 \text{ (s)}$$

$$\alpha(0) = 0.01 \text{ (m/s)}, \quad T(t, 0) = 300(K),$$

$$\varrho(t, 0) = 1204 \text{ (g/m}^3\text{)}, \quad w(t, 0) = 1,$$

Pour construire le schéma numérique, on discrétise les intervalles

$0 \leq t \leq \bar{t} = 3600(s)$, et $0 \leq z \leq \bar{z} = 12000(m)$ en $\{t_i\}_{i=0}^{N_1}$ et $\{z_j\}_{j=0}^{N_2}$ avec les pas δ_t et δ_z , c'est-à-dire

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N_1-1} < t_{N_1} = \bar{t}, \quad t_i - t_{i-1} = \delta_t, \quad \forall i \in \{1, \dots, N_1\} \quad (3.22)$$

$$0 = z_0 < z_1 < \cdots < z_{N_2-1} < z_{N_2} = \bar{z}, \quad z_j - z_{j-1} = \delta_z, \quad \forall j \in \{1, \dots, N_2\} \quad (3.23)$$

Avec la discrétisation du domaine (3.22) et (3.23), nous proposons un schéma de différences finies pour le système d'équations (3.17), (3.18), (3.19) et (3.20). En effet, lorsque les valeurs de $w(t_{i'}, z_j)$, $\varrho(t_{i'}, z_j)$, $T(t_{i'}, z_j)$ et $\alpha(t_{i-1})$ ($i' = 1, \dots, i-1$, et $j = 1, \dots, N_2$) sont données, nous pouvons déterminer les valeurs de $\alpha(t_i)$ et $\Sigma(t_i)$ par les équations

$$\alpha(t_i) = \alpha(t_{i-1}) + \delta_t \frac{R\varrho(t_{i-1}, \bar{z})T(t_{i-1}, \bar{z}) - p_{ex}(\bar{z})}{\delta_z \sum_{j'=1}^{N_2} \varrho(t_{i-1}, z_{j'})w(t_{i-1}, z_{j'})} \quad (3.24)$$

$$\Sigma(t_i) = \frac{1}{\bar{z}} \delta_t \sum_{i'=1}^{i-1} \varphi(t_i - t_{i'}) \alpha(t_{i'}) \times \sum_{j=1}^{N_2} (D_1(i', j) - D_2(i', j)) w(i', j), \quad (3.25)$$

$$D_1(i', j) = \bar{\pi}_{vs}(T(t_{i'}, z_j)) \frac{1}{\varrho(t_{i'}, z_{j-1})} (\varrho(t_{i'}, z_j) - \varrho(t_{i'}, z_{j-1}))$$

$$D_2(i', j) = \frac{d\bar{\pi}_{vs}}{dT}(t_{i'}, z_j) (T(t_{i'}, z_j) - T(t_{i'}, z_{j-1}))$$

Puis, quand nous avons les valeurs de $\alpha(t_i)$, $\Sigma(t_i)$, $w(t_i, z_{j-1})$, $\varrho(t_i, z_{j-1})$, $T(t_i, z_{j-1})$, on peut déterminer les valeur de $w(t_i, z_j)$, $\varrho(t_i, z_j)$, $T(t_i, z_j)$ à partir des équations

$$w(t_i, z_{j-1})\varrho(t_i, z_j) + \varrho(t_i, z_{j-1})w(t_i, z_j) = 2w(t_i, z_{j-1})\varrho(t_i, z_{j-1}) \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{w(t_i, z_{j-1})\varrho(t_i, z_{j-1})}{S(z_{j-1})}(S(z_j) - S(z_{j-1})) + \\ & - (D_1(i, j) - D_2(i, j))w(t_i, z_{j-1}) \\ & c_v\varrho(t_i, z_{j-1})T(t_i, z_j) - RT(t_i, z_{j-1})\varrho(t_i, z_j) = \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} & c_v\varrho(t_i, z_{j-1})T(t_i, z_{j-1}) - RT(t_i, z_{j-1})\varrho(t_i, z_{j-1}) + \\ & + (RT(t_i, z_{j-1}) + L_{tr})(D_1(i, j) - D_2(i, j)). \end{aligned}$$

$$\alpha(t_i)^2\varrho(t_i, z_{j-1})w(t_i, z_{j-1})w(t_i, z_j) + R\varrho(t_i, z_{j-1})T(t_i, z_j) + \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} & RT(t_i, z_{j-1})\varrho(t_i, z_j) = \alpha(t_i)^2\varrho(t_i, z_{j-1})w(t_i, z_{j-1})^2 + \\ & + 2R\varrho(t_i, z_{j-1})T(t_i, z_{j-1}) - \delta_z g\varrho(t_i, z_{j-1}) - \delta_z g\Sigma(t_i). \end{aligned}$$

3.4 Resultat du calcul numérique

Nous illustrons ci-dessous les valeurs de la solution $(w(i), T(i), \varrho(i), \alpha(i))$, du système d'équations (3.24)-(3.28), avec $\nu = \frac{1}{2}$

Les résultats de la simulation numérique montrent bien les aspects fondamentaux de l'évolution du mouvement vertical de l'air avec la condensation de la vapeur d'eau. En effet les figures Fig 3.1, 3.2 et 3.3 illustrent la distribution verticale de la densité, la température et la vitesse w au temps $t = 3600s$, pour $\varphi_1(\tau) = \exp(-\frac{\pi\tau^2}{4(240)^2})$, nous présentons dans le tableau suivant les valeurs de la densité et la température dans certains niveaux, on voit clairement que la température descend lorsque on monte en haut jusqu'

à $234.77k$ au niveau $\bar{z} = 12km$, et la densité descend jusqu'à $338.91g/m^3$ au niveau $\bar{z} = 12km$.

z	la densité	la température
i=0	1204	300
i=200	983.74	292.15
i=400	799.71	283.70
i=600	647.64	274.35
i=800	522.84	263.60
i=1000	421.27	250.65
i=1200	338.915	234.77

Dans le travail [6], on voit clairement ; quand le processus devient quasi-stationnaire, la croissance de la vitesse verticale selon la hauteur est due à la section constante de la cheminée ; en réalité la vitesse croit d'une manière inversement proportionnelle avec la densité, qu'on ne trouve pas dans la nature. Dans notre travail on remarque que la vitesse verticale selon la hauteur atteint la valeur maximale 1.035 puis elle diminue ce qui montre que la vitesse verticale ne croit pas sensiblement par rapport à la hauteur à cause de la section variante.

La figure 3.4 illustre le développement de la vitesse verticale de l'air $\alpha(t)$ calculée avec $\varphi_1(\tau) = \exp(-\frac{\pi\tau^2}{4(240)^2})$ et $\nu = \frac{1}{2}$; la vitesse est représentée dans l'axe vertical en m/s et l'axe horizontal représente le temps (le pas du temps est 5 secondes).

Dans le graphe 3.4, on voit une oscillation, cette dernière est due au mécanisme suivant : l'écoulement ascendant de l'air humide produit l'eau liquide ou solide, qui s'accumule dans l'air, et, quand leur masse devient grande, ceci freine l'ascension de l'air ; la diminution de la vitesse ascendante de l'air implique la diminution de la production des gouttelettes d'eau et des morceaux de glace ; à cause de la chute de l'eau liquide ou solide et donc la diminu-

tion de leur masse dans l'air consente à l'air de reprendre son ascension plus rapide et l'air peut recommencer le même cycle de phénomènes.

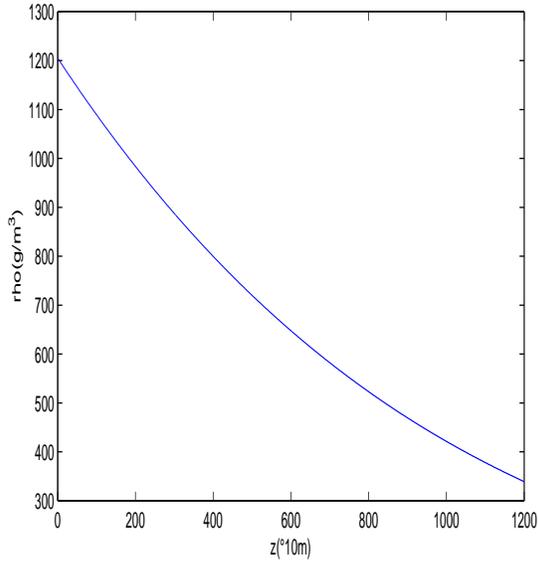


FIGURE 3.1 – La distribution de la densité ρ sans la viscosité et la thermoconductibilité au temps $t = 3600$ s, et $\nu = \frac{1}{2}$

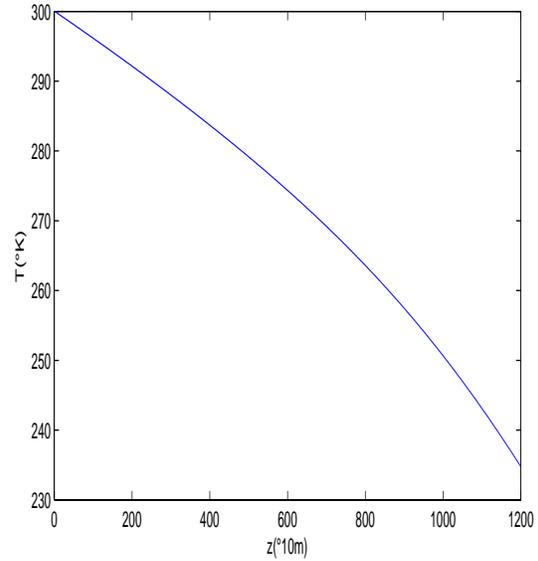


FIGURE 3.2 – La distribution de la température T sans la viscosité et la thermoconductibilité au temps $t = 3600$ s, et $\nu = \frac{1}{2}$

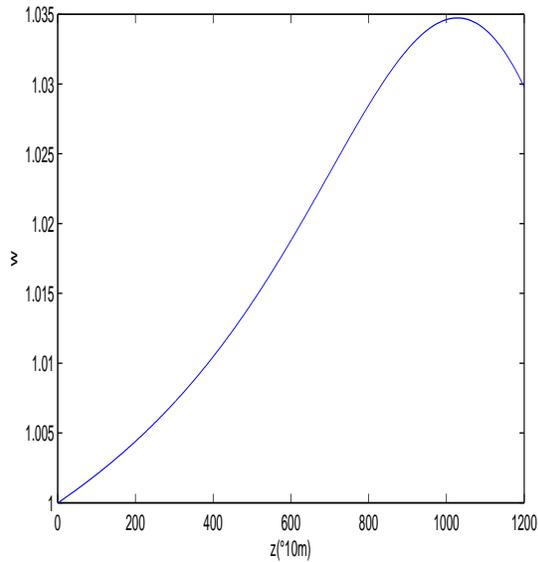


FIGURE 3.3 – La distribution de la vitesse w sans la viscosité et la thermoconductibilité au temps $t = 3600$ s, et $\nu = \frac{1}{2}$

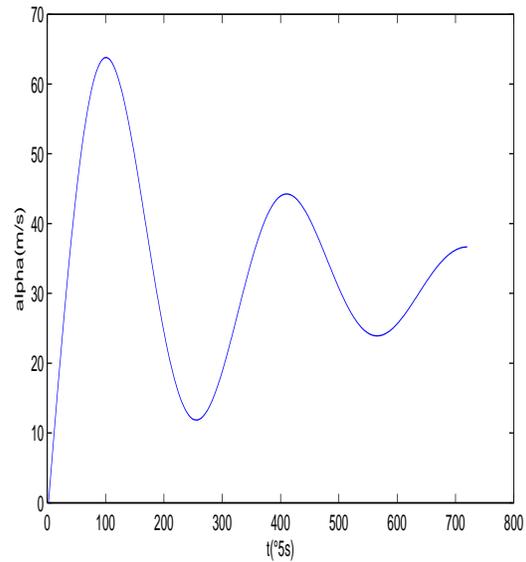


FIGURE 3.4 – La distribution de la vitesse $\alpha(t)$ sans la viscosité et la thermoconductibilité et avec la fonction φ_1 et $\nu = \frac{1}{2}$

Conclusion

Dans ce travail nous avons construit un modèle qui décrit le mouvement vertical de l'air dans une cheminée de sorte que le modèle peut être appliqué aux phénomènes naturels comme orage ou cyclone tropical.

Les résultats du calcul numériques montrent bien les aspects fondamentaux de l'évolution du mouvement vertical de l'air, de sorte que la vitesse verticale croît rapidement à cause de la chaleur latente dû à la condensation de la vapeur d'eau, puis elle sera ralentie par l'effet de la friction avec les gouttelettes, ce qui correspond à ce qu'on observe dans la nature.

Bibliographie

- [1] Bouafia, A. Athamnia, H. :Equations de mouvement de l'air dans un Orage Mémoire de master juin 2017.
- [2] Dahrana, Imane : Modélisation mathématique de phénomène Orage. Mémoire de master juin 2016.
- [3] Fujita Yashima, H. : Modélisation de la physique des fluides, cours de l'université de Guelma, 2010.
- [4] Fujita Yashima, H. Campana, V. Aissaoui, M. Z. : Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère. *Ann. Math. Afr.*, vol. 2 (2011), pp. 66–92.
- [5] Fujita Yashima, H. : Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua. *Rev. Invest. Operac.*, vol. 34 (2013), pp. 93-104.
- [6] Ghomrani, S., Marín Antuña., J., Fujita Yashima, H. : Un modelo de la su-bida del aire ocasionada por la condensación del vapor y su cálculo nu-merico. *Rev. Cuba Fís.*, vol. 32 (2015), pp 3-8.
- [7] Ghomrani, S. :Modélisation mathématique du phénomène d'un cyclone tropical. Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques université 8 Mai 1945 Guelma. 2017.

- [8] Kikoïne, A. K., Kikoïne, I. K. : *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.
- [9] Khain, A. P. : Modelación matemática de los ciclones tropicales (en ruso). Gidrometeoizdat, Leningrad, 1984.
- [10] Landau, L. L., Lifchitz, E. M. : *Mécanique des fluides (physique théorique, tome 6)* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1989.
- [11] Matveev, L. T. : *Physique de l'atmosphère*. Gidrometeoizdat, Leningrad-S. Peterburg, 1965, 1984, 2000.
- [12] Merad, M., Aissaoui, M., Fujita Yashima, H. : Etude de l'équation de coagulation des gouttelettes en mouvement avec le vent. Thèse de doctorat 3ème cycle en Mathématiques, université 8 Mai 1945 Guelma. 2014.
- [13] Merad, M., Aissaoui, M.Z., Fujita Yashima, H. : Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes avec un vent vertical. Rev.Roumaine Math.Pures APPL.62(2017),2, pp 309-338.
- [14] Remaoun Bourega, D., Aouaouda, M., Fujita Yashima, H. : Oscillation de la pluie dans un modèle mathématique de l'orage. Annales Math. Africaines. vol. 7 (2018), pp. 19-35.
- [15] Sheng, P.-X., Mao, J.-T., Li, J.-G., Zhang, A.-C., Sang, J.-G., Pan, N.-X. : *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, Pékin, 2003.
- [16] Selvaduray, S., Fujita Yashima, H. : Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido. Accad. Sci. Torino, Memorie Cl. Sci. Fis., Serie V, vol. 35 (2011), pp.37-69.

- [17] Vlasov, V. I., Skorokhod, S. L., Fujita Yashima, H. : Simulation of air flow in a typhoon lower layer. *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, vol. 26 (2011), pp. 85-111.