

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma  
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière  
Département de Mathématiques



## Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de  
**Master Académique en Mathématiques**  
Option : Equations aux Dérivées Partielles

Par :

**M<sup>lle</sup> BAKKAR SOUHA**

**Intitulé**

**Transformée de Fourier à Temps Discrets et  
Applications au Traitement du Signal**

**Dirigé par : Mr HITTA Amara**

Devant le jury

<b>PRESIDENT</b>	<b>BADRAOUI S.</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ.-Guelma</b>
<b>RAPPORTEUR</b>	<b>HITTA A.</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ.-Guelma</b>
<b>EXAMINATEUR</b>	<b>GUEBAI H.</b>	<b>Professeur</b>	<b>Univ.-Guelma</b>

**Session Septembre 2020**



## *Au nom d'Allah*



### Remerciements

- Je tiens, plus spécialement, à exprimer toutes mes reconnaissances à mon Encadreur, **Dr HITTA Amara**, pour avoir dirigé ce travail avec abnégation et disponibilité. Ses conseils et son soutien m'ont été d'un grand apport pour l'accomplissement de ce mémoire. Sans cela, ce mémoire n'aura pas eu lieu.
- Je remercie, également, les **Membres du Jury** à savoir Mr Badraoui S. et Mr GUEBAI H., Professeurs à l'Université de Guelma, pour avoir accepté d'en faire partie. Leurs critiques et leurs remarques me seront, dans l'avenir, un jalon dans ma carrière professionnelle.
- Je ne peut oublier de remercier ma **Mère** et mon **Dufunt Père** pour leurs soutiens. Leurs aides et leurs patiences m'ont été, tout au long de ma vie et de mes études, un réconfort et un encouragement surtout dans les moments opportuns.
- Sans oublier aussi tous **les Membres de ma Famille** en particulier : mes sœurs, mes frères et tous mes proches.
- Enfin, j'adresse mes remerciements à tous **mes collègues** et tous les étudiants de ma promotion qui m'ont encouragé pour la réalisation de ce travail.

# Table des Matières

<b>1</b>	<b>Présentation du mémoire</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Fonctions tests et Distributions</b>	<b>6</b>
2.1	Fonctions tests, Exemples et Propriétés . . . . .	6
2.2	Distributions sur $\mathbb{R}^n$ . . . . .	8
2.2.1	Définitions et Exemples . . . . .	8
2.3	Convolutions de fonctions et de distributions . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Espace de Shwartz, Distributions Tempérées et Transforma- tion de Fourier sur <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>17</b>
3.1	Espaces de Schwartz . . . . .	17
3.2	Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	19
3.3	Espace des distributions Tempérées . . . . .	20
3.4	Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	25
3.5	Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	27

<b>4</b>	<b>Transformation de Fourier Discrète (TFD)</b>	<b>28</b>
4.1	Rappel sur les séries de Fourier . . . . .	28
4.2	Relation entre Série et Transformation de Fourier . . . . .	29
4.3	Transformation de Fourier Discrète (TFD) . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Applications à la théorie du signal</b>	<b>34</b>
5.1	Définition et exemples . . . . .	34
5.2	Signaux élémentaires . . . . .	35
5.3	Système de Transmission . . . . .	36
5.4	Applications de la TFD . . . . .	36

# Chapitre 1

## Présentation du mémoire

La transformée de Fourier est un outil indispensable pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Une introduction succincte sur ses propriétés et ses applications s'imposent d'une manière naturelle.

Son rôle consiste, plus précisément, à transformer un problème différentiel en un problème algébrique facilement résoluble. De ce fait, la théorie des distributions tempérées lui sert de cadre plus général et bien adapté aux applications physiques.

Nous allons définir l'espace de Schwartz, qui est l'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à décroissance rapide, *i.e.* toutes les fonctions de cet espace et toutes leurs dérivées convergent plus vite que tout polynôme quand  $x$  tend vers l'infini.

Ainsi, ce mémoire est composé de la présentation actuelle (chapitre 1 ...) et de 4 chapitres, à savoir :

- ① Chapitre 2: On introduit la notion de fonctions tests et les distributions régulières et singulière et leurs dérivations. Le produit tensoriel de deux fonctions tests sera abordé dans le but de définir la notion de convolution de deux distributions qui aura des applications manifestes en physique et surtout en théorie du signal.

- ② Chapitre 3: Nous définissons les espaces de Schwartz et les distributions tempérées ainsi que la transformation de Fourier et sont utilité indéniable dans la résolution des équations aux dérivées partielles.
- ③ Chapitre 4: La Transformation de Fourier Discrète (TFD), qui est un outil indéniable dans les divers domaines de la vie courante, sera Définie d'une manière succincte et concise.
- ④ Chapitre 5: Nous aborderons les applications de la TFD à quelques exemples de la Théorie de Signal. Reste à signaler que la théorie du signal est très vaste et nécessite un effort particulier que nous ne pouvons pas abordé dans ce mémoire.

# Chapitre 2

## Fonctions tests et Distributions

La théorie des distributions est devenue un outil mathématique essentiel, notamment dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Les distributions sont utilisés pour représenter des phénomènes physiques que les fonctions classiques s'avèrent incapable de transcrire. La théorie du produit de convolution a une grande importance en physique, on le rencontre surtout lorsqu'on étudie la transmission des signaux et dans domaines plus pointus.

### 2.1 Fonctions tests, Exemples et Propriétés

Pour  $k$  un entier strictement positif, on note l'opérateur de dérivation par rapport à la  $k$ -ième variable par  $\partial_k = \partial/\partial x_k$ . Étant donné un entier  $n \geq 1$ , l'élément  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est dit **multi-indices** de longueur nombre  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$  et on note

$$\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.1.1** On dit que la fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est de **classe  $C^k$**  si toutes les dérivées partielles de  $f$  existent et sont continues jusqu'à l'ordre  $k$ . Elle est dite de **classe  $C^\infty$**  si elle est de classe  $C^k$  sur  $\Omega$  pour chaque entier  $k \geq 1$ .

En notant  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de classe  $C^k$  sur  $\Omega$ , on obtient les inclusions suivantes :

$$\dots \subset \mathcal{C}^{k+1}(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega).$$

L'ensemble des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$ , selon les notations de Laurent Schwartz, est par définition :

$$\mathcal{E}(\Omega) := \mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\Omega).$$

**Définition 2.1.2** Soit  $f$  une fonction réelle définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . On appelle **support de  $f$**  l'ensemble

$$\text{supp} (f) = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}.$$

Le support de  $f$  est alors le **plus petit fermé de  $\mathbb{R}^n$**  à l'extérieure duquel la fonction  $f$  est nulle.

On note par  $\mathcal{C}_c^k(\Omega)$  l'ensemble des fonctions de  $\mathcal{C}^k(\Omega)$  qui sont à support compact dans  $\Omega$ .

Une **fonction test** (ou **fonction d'essai**) sur  $\Omega$  est, par définition, une fonction de classe  $C^\infty$  définie sur  $\Omega$  à support compact dans  $\Omega$ .

L'espace vectoriel de ces fonctions tests sur  $\Omega$ , dans la notation de L. Schwartz, est notée par :

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Cet espace, équipé d'une topologie appropriée jouera un rôle important dans la définition des distributions sur  $\Omega$ . En fait, il est non vide puisque la fonction suivante

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1. \end{cases}$$

est  $C^\infty$  et à support la boule fermée  $\overline{B_1(0)}$  de  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Distributions sur $\mathbb{R}^n$

### 2.2.1 Définitions et Exemples

**Définition 2.2.1** *Les formes linéaires continues sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  sont appelées **distributions** sur l'ouvert  $\Omega$ . L'espace vectoriel de toutes les distributions sur  $\Omega$  sera noté  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

L'espace  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est le dual topologique de l'espace fonctionnel

$$\mathcal{D}(\Omega) := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Ainsi, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.2.2** Une forme linéaire  $T$  est une distribution sur  $\Omega$  si, et seulement si, pour chaque compact  $K \subset \Omega$ , il existe une constante  $C > 0$  et un entier  $m \geq 0$  tels que :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \cdot \sup_{x \in \Omega, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega). \quad (*)$$

**Preuve :** Soit  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Pour chaque compact  $K \subset \Omega$ ,  $T$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . Il existe, alors,  $V \in \mathcal{V}_0$  de la forme

$$V = V_K^{m,\varepsilon} = \{\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) : p_{m,K}(\varphi) \leq \varepsilon\}$$

où  $p_{m,K}(\varphi) = \sup_{x \in K, |\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$  tel que  $|\langle T, \varphi \rangle| \leq 1$  pour tout  $\varphi \in V$ .

D'autre part, si  $\varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega)$  est tel que  $\varphi \neq 0$ , on a

$$\frac{\varepsilon \cdot \varphi}{p_{m,K}(\varphi)} \in V.$$

Il s'ensuit que

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq (1/\varepsilon) \cdot p_{m,K}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_K(\Omega) \setminus \{0\}.$$

En posant  $C = \varepsilon^{-1}$  on obtient (\*) lorsque  $\varphi \neq 0$ . Notons, enfin, qu'on a l'égalité dans (\*) lorsque  $\varphi = 0$ . Inversement, si (\*) est satisfaite, alors pour

chaque compact  $K \subset \Omega$ ,  $T$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}_K(\Omega)$ . D'après la proposition 2.5.1, on en déduit que  $T$  est une distribution sur  $\Omega$ .  $\blacklozenge$

L'inégalité (\*) n'est pas le seul critère à démontrer pour vérifier qu'une forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  est une distribution. Une autre caractérisation s'impose en terme de suites convergentes dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , à savoir :

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  si, et seulement si, pour toute suite  $(\varphi_i)$  convergente vers 0 dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , la suite numérique  $|\langle T, \varphi_i \rangle|$  converge vers 0 dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

$\Rightarrow$  **Exemple 2.2.1 Distributions régulières.** Soit  $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ . Définissons une forme linéaire  $T_f : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Comme  $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$  alors  $C = \int_{\Omega} |f(x)|dx < +\infty$ . Posons  $\text{supp}(\varphi) = K$ ; on vérifie facilement que

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_{\Omega} |f(x)||\varphi(x)|dx \leq \sup_{x \in K} |\varphi(x)| \cdot \int_{\Omega} |f(x)|dx \leq C(K) \cdot \sup_{x \in K} |\varphi(x)|.$$

Ainsi,  $T_f : \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  est une distribution, dite **régulière**, d'ordre  $\alpha = 0$ . L'application  $j : \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  définie par  $j(f) = T_f$  est injective :

$$\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega). \quad \blacklozenge$$

$\Rightarrow$  **Exemple 2.2.2 Distributions singulières.** Dans l'exemple suivant nous montrerons que l'injection  $j$  précédente n'est pas surjective. Soit  $a \in \Omega$ . On

considère la forme linéaire sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On vérifie, alors que

$$|\langle \delta_a, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donc  $\delta_a$  est une distribution d'ordre 0 dans  $\Omega$ . Cette distribution est dite **masse de Dirac au point  $a$** . Mais,  $\delta_a$  ne s'écrit pas en fonction d'une fonction de  $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ . En effet, supposons qu'il existe  $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$  telle que

$$\delta_a = T_f \quad \text{c-à-d.} \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Posons  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \{a\}$ . Alors  $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \int_{\tilde{\Omega}} f(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$ . Donc  $f = 0$  presque partout dans  $\tilde{\Omega}$  et donc presque partout dans  $\Omega$ . Ainsi,  $\varphi(a) = 0$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  ce qui contredit la fait que  $\langle \delta_a, \varphi \rangle \neq 0$ .  $\blacklozenge$

**La masse de Dirac au point  $a$  est un exemple de distributions, dites singulières, qui ne proviennent pas d'une fonction appartenant à  $\mathcal{L}^1_{loc}(\Omega)$ .**

$\Rightarrow$  **Exemple 2.2.3** Posons  $\Omega = \mathbb{R}$  et définissons

$$\langle \delta', \varphi \rangle = \left\langle \delta, -\frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\frac{d\varphi}{dx}(0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Il est clair que  $\delta'$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Lorsque  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on peut généraliser cet exemple en posant

$$\langle \partial^k \delta, \varphi \rangle = (-1)^k \langle \delta, \partial^k \varphi \rangle = (-1)^k \partial^k \varphi(0)$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq k \leq n$ .  $\blacklozenge$

## 2.3 Convolutions de fonctions et de distributions

Le produit de convolution est un outil d'une grande importance en physique. On le rencontre, par exemple, dans :

1. La transmission d'un signal par un appareil,
2. Une impulsion électrique fonction du temps,
3. Une image représentée par une fonction d'une ou deux variable,

Comme introduction, considérons l'exemple d'une machine photocopieuse imparfaitement réglée.

☞ **Exemple 2.3.1** Ainsi :

- Un trait fin en position  $x_1$  produit sur la photocopie un trait étalé centré en  $x_1$ ,
- Un trait de moindre intensité en position  $x_2$  produira sur la photocopie un trait étalé centré en  $x_2$ ,

On admet que l'étalement de l'encre sur la photocopie est identique pour les deux traits. Cet étalement est fonction caractéristique de l'appareil que nous noterons par  $h(x)$ . Pour un trait placé en  $x_1$  et d'une intensité  $f_1$ , la photocopie donne donc  $f_1(x - x_1)h(x)$ . Si  $n$  traits placés en  $x_1, \dots, x_n$  et d'intensités respectives  $f_1, \dots, f_n$  présents sur l'originale, la photocopie sera constituée de la superpositions de  $n$  traits étalés. Le signal de sortie  $S(x)$  sera donc :

$$S(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x - x_i)h(x)$$

Si le signal d'entrée est une fonction continue de  $x$ , on remplace la somme par une intégrale et on obtient  $S(x) = \int f(u)h(x-u)du = (f * h)(x)$  d'où

$$S = f * h.$$

Ce qui sera défini comme le **produit de convolution** de  $f$  et  $h$ . ♦

Définissons le produit de convolution de deux fonctions tests dans le cas général. Pour cela, nous introduisons tout d'abord la notion de **produit de tensoriel**.

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers naturels. Considérons  $\Omega_1$  (resp.  $\Omega_2$ ) un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{R}^m$ ). Il est clair que  $\Omega_1 \times \Omega_2$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+m}$ . L'espace vectoriel  $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$  est formé par les fonctions indéfiniment différentiables à support compact en  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \in \Omega_1 \times \Omega_2$ .

**Définition 2.3.1** *Le produit tensoriel, noté  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ , de  $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ , est définie par*

$$\varphi_1 \otimes \varphi_2(x, y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y).$$

*Le produit tensoriel (algébrique) est l'espace vectoriel, noté  $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$ , formé par les fonctions de la forme*

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n \varphi_1^i(x) \cdot \varphi_2^i(y).$$

où  $\varphi_1^i \in \mathcal{D}(\Omega_1)$  et  $\varphi_2^i \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ .

Le théorème suivant nous aidera à définir le produit tensoriel de deux distributions.

**Théorème 2.3.2** *L'espace  $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$  est dense dans  $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .*

**Preuve :** Toute fonction  $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$  peut être approchée d'aussi près qu'on le souhaite par suite de polynômes  $(x, y) \mapsto P_k(x, y)$ . Ces polynômes étant des sommes de monômes de la forme  $\sum_{p,q} x^p y^q$ . Comme ces monômes ne sont pas à support compact, considérons  $\rho$  et  $\sigma$  deux fonctions à supports compacts telles que  $\rho(x)\sigma(y) \equiv 1$  sur le support de  $u \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Il s'ensuit que la suite de fonctions  $(x, y) \mapsto \rho(x)\sigma(y)P_k(x, y)$  est dans  $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$  ; puisque chaque fonction est une somme de termes de la forme  $\varphi_1^i(x)\varphi_2^j(y)$ . Cette suite converge vers  $u \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .  $\blacklozenge$

Comme conséquence à ce résultat, toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2)$  est définie par ses valeurs sur l'espace des fonctions  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$  où  $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ .

**Théorème 2.3.3** *Soit  $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$  et  $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$  deux distributions définies respectivement sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .*

① Pour tout  $\varphi_1 \in \mathcal{D}(\Omega_1)$  et  $\varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_2)$ , la distribution  $S \otimes T$ , est définie par .

$$\langle S \otimes T, \varphi_1(x)\varphi_2(y) \rangle = \langle S, \varphi_1(x) \rangle \langle T, \varphi_2(y) \rangle$$

La distribution  $S \otimes T$ , est dite **produit tensoriel** de  $S$  et  $T$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

② Si  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , la distribution  $S \otimes T$ , est définie par

$$\langle S \otimes T, \varphi(x, y) \rangle = \langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \langle T_x, \langle S_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle.$$

☞ **Exemple 2.3.2** La distribution de Dirac sur  $\mathbb{R}^2$  s'écrit

$$\delta(x, y) = \delta(x)\delta(y).$$

**Remarque.** Dans ce théorème ② peut être interprété comme étant une extension du théorème de Fubini. Ainsi, si l'on considère deux fonctions  $S = f(x)$  et  $T = g(y)$  intégrables, respectivement, sur deux ouverts  $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ , alors

$$\langle S_x, \langle T_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \int_{\Omega_1} f(x) \left\{ \int_{\Omega_2} g(y) \varphi(x, y) dy \right\} dx$$

et

$$\langle T_y, \langle S_x, \varphi(x, y) \rangle \rangle = \int_{\Omega_2} g(y) \left\{ \int_{\Omega_1} f(x) \varphi(x, y) dx \right\} dy$$

sont égales d'après le théorème de Fubini.  $\blacklozenge$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions localement intégrables dont l'une au moins est à support compact. Leur convolution est définie par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

On peut interpréter  $f * g$  comme étant une forme linéaire sur l'espace test  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , en posant

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

En remplaçant  $f * g$  par son expression sous le signe intégral et après changement de variable, on obtient

$$\langle f * g, \varphi \rangle = \langle f(x) \otimes g(y), \varphi(x + y) \rangle.$$

On peut ainsi redéfinir la notion de convolution des fonctions  $f$  et  $g$  par cette identité. Mais, il nous reste à donner un sens au crochet de dualité  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  puisque  $\varphi(x + y)$  comme fonction à deux variables  $x$  et  $y$  n'est pas à support compact dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Ceci sera abordé d'une manière plus générale dans ce qui suit.

**Définition 2.3.4** Considérons  $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  et supposons que l'une au moins est à support compact. La convolution  $S * T$  est une distribution sur  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S_x \otimes T_y, \varphi(x + y) \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Ce produit de convolution existe dans au moins un des cas suivants :

- ① L'une au moins des distributions est à support compact.
- ② Les deux distributions ont leurs supports limite à gauche.

Il s'agit, en effet, dans chacun des cas de contrôler que l'ensemble

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{supp}(S), y \in \text{supp}(T) \text{ et } x + y \in \text{supp}(\varphi)\}$$

est borné, ce qui donnera un sens à la définition de la convolution.

La convolution est une opération associative, lorsque celle-ci est définie.

# Chapitre 3

## Espace de Schwartz, Distributions Tempérées et Transformation de Fourier sur $\mathbb{R}^n$

L'utilité principale de faire appel à l'espace de Schwartz est qu'il est invariant par la transformée de Fourier contrairement à l'espace des fonctions tests dont l'image n'est pas toujours à support compact.

### 3.1 Espaces de Schwartz

**Définition 3.1.1** *L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est formé par toutes les fonctions régulières  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  où  $f$  et toutes ses dérivées convergent vers 0 plus vite que tout polynôme :*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| = 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

Donc  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si :

- ① La fonction  $f$  est indéfiniment différentiable
- ② La fonction  $f$  et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide c'est-à-dire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \exists C_{\alpha, \beta} \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < C_{\alpha, \beta}.$$

Donc, l'espace de Schwartz est définie par

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \text{ on a } x^\alpha \partial^\beta f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}.$$

☞ **Exemple 3.1.1** Evidemment

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Toutes les fonctions de la forme

$$\phi(x) = P(x)e^{-a|x|^2}$$

avec  $a > 0$  et  $P$  fonction polynôme appartiennent à la classe de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . En revanche, aucune fraction rationnelle (autre que la fonction nulle) n'appartient à la classe de Schwartz.

La topologie de l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  n'est pas définie par une norme, mais par une famille dénombrable de semi-normes définies comme suit :

Pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on pose

$$\mathcal{N}_p(\phi) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq p} \sup |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)|, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Grâce à la famille  $(\mathcal{N}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , on peut définir ce qu'est une suite convergente dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 3.1.2** Une suite  $(\phi_n)_{n \geq 1}$  de fonctions de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge vers une fonction  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  dans l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si

$$\mathcal{N}_p(\phi_n - \phi) \rightarrow 0, \quad \text{pour tout, } p \geq 0, \text{ lorsque, } n \rightarrow \infty$$

## 3.2 Transformation de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$ et sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Rappelons que  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

**Définition 3.2.1** Soit  $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . On appelle transformation de Fourier de  $u$  la fonction

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \exp^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Ici  $i$  est le nombre complexe bien connu.  $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$  est le produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$ . Remarquons que la transformée de Fourier d'une fonction est à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . On peut aussi choisir  $u$  fonction à valeurs complexes.

Dire que  $u$  est dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$  veut dire que  $Reu$  et  $Imu$  sont dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . On notera aussi parfois  $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$

**Définition 3.2.2** A toute fonctions  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , on associe sa transformation de Fourier

$$\mathcal{F}\phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \phi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

L'application linéaire  $\mathcal{F}$  est définie pour tout  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , puisque pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$|e^{-i\xi \cdot x} \phi(x)| = |\phi(x)|$$

et que  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$

**Proposition 3.2.3** Soit  $\phi$  une fonction de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  Alors

1. la fonction  $\mathcal{F}(\phi)$  est de classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$  et on a pour tout  $j = 1, \dots, n$

$$\partial_{\xi_j} \mathcal{F}\phi(\xi) = \mathcal{F}(-ix_j \phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

2. pour tout  $j=1, \dots, n$ , on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_j} \phi)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(\phi)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

la proposition ci-dessus qui est montré que la transformation de Fourier sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  échange dérivation et multiplication par  $x$

### 3.3 Espace des distributions Tempérées

Pour pouvoir définir l'intégrale de Fourier

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$$

d'une fonction continue  $f$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , il faut avoir des conditions limitant la croissance de  $f$  à l'infini.

Par exemple, il suffira de savoir que  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Mais on ne peut pas définir en général la transformée de Fourier d'une fonction qui serait seulement localement intégrable.

Le même problème se pose évidemment lorsqu'on veut définir une notion de transformation de Fourier des distributions sous une forme quelque peu différente, toutefois, le concept de "croissance à l'infini" n'est pas clair pour une distribution. Comme on va le voir, on ne sait pas définir la transformation de Fourier que sur un sous-espace de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , à savoir la classe des distributions tempérées que nous allons étudier brièvement.

**Définition 3.3.1** Soit  $T$  une distribution. On dit que  $T$  est une distribution tempérée si  $\exists C > 0; m \in \mathbb{N}$  tel que pour toute fonction test  $\phi$

$$| \langle T, \phi \rangle | \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} \| x^\alpha \partial^\beta \phi \|_{L^\infty}$$

En d'autres termes, une distribution tempérée est une distribution telle que si  $\phi_j$  suite de fonctions test converge vers 0 dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\langle T, \phi_j \rangle \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ).

Comme nous avons l'inclusion  $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , qui est une inclusion continue et dense, alors l'ensemble des distributions tempérées, noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , qui est l'ensemble des formes linéaires continues sur  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

On a

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

En effet même si la définition ci-dessus n'est vraie que pour une fonction test, on peut l'étendre sans mal par densité à une fonction dans l'espace de Schwartz.

**Proposition 3.3.2** Une distribution à support compact est une distribution tempérée

**Preuve 3.3.1** Soit  $S$  une distribution à support compact. Elle est donc d'ordre fini. Il existe  $C$  et  $m$  ne dépendant que du support de  $S$  tels que pour toute fonction test  $\phi$ ,

$$|\langle S, \phi \rangle| \leq C \sum_{|\beta| \leq m} \|\partial^\beta \phi\|_{L^\infty}.$$

Donc  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Ensuite, toute fonction à croissance lente est une distribution tempérée.

**Définition 3.3.3** Soit  $f$  une fonction dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . On dit que  $f$  est à croissance lente si  $\exists m$  tel que  $(1 + |x|)^{-m} f(x)$  appartient à  $L^\infty$ .

**Proposition 3.3.4** Une fonction  $f$  à croissance lente est une distribution tempérée.

**Preuve 3.3.2** Rappelons qu'une fonction localement intégrable est une distribution. Soit alors  $\phi$  une fonction test. il vient

$$|\langle f, \phi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx \right| \leq \|\phi(1 + |x|)^m\|_{L^\infty} \|(1 + |x|)^{m+n+1} \phi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}}$$

Cette dernière intégrale est finie en vertu de

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1 + |x|)^{n+1}} = \omega_n \int_0^{+\infty} \frac{r^{n-1}}{(1 + r)^{n+1}} dr < +\infty$$

**Proposition 3.3.5** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors

$$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

**Preuve 3.3.3** Si  $f$  est dans  $L^p$  alors pour  $\phi$  une fonction test

$$| \langle f, \phi \rangle | \leq \|f\|_{L^p} \|(1 + |x|)^{-n-1}\|_{L^{p'}} \|(1 + |x|)^{n+1}\phi\|_{L^\infty}$$

L'intégrale du milieu est finie car  $p'(n + 1) - n + 1 > 1$ .

**Proposition 3.3.6**

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

**Preuve 3.3.4** Soit  $\theta$  une fonction plateau pour un voisinage de 0.

Alors

$$vp\left(\frac{1}{x}\right) = \theta(x)vp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1 - \theta(x)}{x}$$

On en déduit que la valeur principale est la somme d'une distribution à support compact et d'une fonction de carré intégrable, donc la somme de deux distributions tempérées.

**Proposition 3.3.7** Soit une distribution tempérée  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Alors

1. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}$ , la dérivée  $\partial^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
2. Pour toute fonction  $f$  à croissance polynômiale ainsi que toutes ses dérivées, la distribution  $fT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ;
3. Pour toute distribution à support compact  $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , le produit de convolution  $T * S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

☞ **Exemple 3.3.1 Croissance à l'infini et caractère tempéré**

Pour voir si une distribution définie par une fonction, par exemple, est tempérée ou non, il ne suffit pas d'étudier la croissance à l'infini du module de cette fonction.

Considérons par exemple la fonction

$$x \mapsto ie^x e^{ie^x}$$

Evidemment

$$|ie^x e^{ie^x}| = e^x$$

qui à la même croissance à l'infini que les contre-exemples ci-dessus.

Mais

$$ie^x e^{ie^x} = \frac{d}{dx}(e^{ie^x})$$

et comme la fonction

$$x \mapsto e^{ie^x}$$

est une fonction de classe  $C^1$  bornée sur  $\mathbb{R}$ , elle définit une distribution tempérée sur  $\mathbb{R}$

D'autre part, sa dérivée au sens des distributions coïncide avec la distribution

définie par sa fonction dérivée au sens usuel, de sorte que, d'après la (a) , cette fonction dérivée

$$x \mapsto ie^x e^{ie^x}$$

définit bien un élément de  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Intuitivement, ce sont les oscillations rapide de la fonction  $x \mapsto e^{ie^x}$  dans la limite  $x \rightarrow +\infty$  qui annihilent la croissance de  $x \mapsto e^x$  pour  $x \rightarrow +\infty$

En pratique, pour décider si une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

En pratique, pour décider si une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est tempérée, on cherchera évidemment si elle appartient aux classes d'exemple ci-dessus– distributions à support compact, fonctions de  $L^p$ , fonctions à croissance polynômiale... Si ce n'est pas le cas, il faut ensuite chercher si la distribution considérée est une dérivée(d'ordre quelconque) d'une distribution dont on sait déjà qu'elle est tempérée.

Si aucune de ces approches ne permet de conclure, il faut alors à la définition des distribution tempérées, et en vérifier la propriété de continuité

### Caractérisation des distributions de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ :

**Théorème 3.3.8** Tout distribution  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est de la forme

$$T = \partial_x^\alpha ((1 + |x|^2)^n f) \text{ au sens des distributions}$$

où  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $n$  un entier naturel, et  $f$  une fonction continue bornée sur  $\mathbb{R}^n$ .

## 3.4 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Comme pour beaucoup d'opérations sur les distributions, nous allons définir la transformation de Fourier en utilisant la dualité entre l'espace de Schwartz et l'ensemble des distribution tempérées.

**Définition 3.4.1** Soit  $S$  dans  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\hat{S}$  est la distribution définie par : pour tout fonction  $\phi$  test

$$\langle \hat{S}, \phi \rangle = \langle S, \hat{\phi} \rangle. \quad (2)$$

De plus  $\hat{S}$  est une distribution tempérée.

Cette formule a bien a sens car

$$\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Donc  $\hat{\phi}$  est aussi une fonction dans l'espace de Schwartz. De plus, l'application

$$\mathcal{F} : \phi \longmapsto \hat{\phi}$$

étant continue pour la topologie de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , automatiquement  $\hat{S}$  est une distribution tempérée. La formule (2) s'étend par densité à  $\phi$  dans l'espace de Schwartz. On constate par contre que la formule (2) n'a pas de sens si  $S$  est une simple distribution, puisque le membre de droite n'a pas de sens car  $\hat{\phi}$  n'est pas une fonction test.

**Proposition 3.4.2** Soit une distribution tempérée  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Alors

1. Pour tout  $k = 1, \dots, n$  on a

$$\mathcal{F}(\partial_{x_k} T) = i\xi_k \mathcal{F}T$$

2. Pour tout  $b = 1, \dots, N$  on a

$$\mathcal{F}(x_k T) = i\partial_{\xi_k} \mathcal{F}T$$

3. Pour tout  $a \in \mathbb{R}^N$  et en notant  $\tau_a : x \mapsto x + a$ , on a

$$\mathcal{F}(T \circ \tau_a) = e^{ia \cdot \xi} \mathcal{F}T$$

4. Pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(e^{-ia \cdot x} T) = (\mathcal{F}T) \circ \tau_a$$

### 3.5 Inversion de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 3.5.1** La transformation de Fourier  $\mathcal{F}$  est un isomorphisme du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  dans lui-même, dont l'inverse est donné par la formule

$$\mathcal{F}^{-1}T = \frac{1}{(2\pi)^n} \tilde{\mathcal{F}}T$$

où, pour toute distribution  $S$  sur  $\mathbb{R}^n$ , on a noté

$$\tilde{S} = S \circ (-Id_{\mathbb{R}^n})$$

c'est-à-dire que, pour toute fonction test  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  on a :

$$\langle \tilde{S}, \phi \rangle = \langle S, \phi \circ (-Id_{\mathbb{R}^n}) \rangle = \langle S, \phi(-\cdot) \rangle$$

# Chapitre 4

## Transformation de Fourier Discrète (TFD)

### 4.1 Rappel sur les séries de Fourier

Les séries et les transformations de Fourier sont d'importants outils mathématiques pour analyser pas mal de problèmes physiques. Cependant, elles ne conviennent pas à l'implémentation informatique en raison de la présence d'intégrales dans les formules. C'est pour cela que nous étudions également les transformées de Fourier discrètes pour pallier à ce manquement.

D'autre part, dans la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode de séparation des variables, une question se pose d'elle même à savoir si une fonction peut être représentée par une série trigonométrique. En effet, en 1822 J. Fourier a utilisé largement ces séries dans l'étude de l'équation de la chaleur dans son célèbre travail "Théorie Analytique de la chaleur".

Soit  $f \in \mathcal{L}^1([-\pi, \pi])$ , alors sa série de Fourier est définie par

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} [a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)]$$

les coefficients de Fourier sont définis par :

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(jx) dx \quad i \geq 0,$$

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(jx) dx \quad i \geq 1.$$

On peut supposer aussi que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $2\pi$ . En utilisant l'identité d'Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , on obtient la forme complexe de la série de Fourier de  $f$ , à savoir

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijx},$$

Les coefficients de Fourier  $c_j$  sont donnés par

$$c_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} dx, \quad -\infty < j < \infty.$$

Lorsque  $f$  est une fonction continue et périodique sur  $\mathbb{R}$ , on obtient d'après la théorie de la convergence que  $f(x) = F(x)$ .

## 4.2 Relation entre Série et Transformation de Fourier

Plus précisément, Considérons la série de Fourier d'une fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $2L$ . La version complexe de la série de Fourier de  $f$  s'écrit :

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ij\pi x/L}.$$

Les coefficients  $c_j$  sont donnés par

$$c_j = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-ij\pi xt/L} dt \quad -\infty < j < \infty.$$

Ainsi,

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-ij\pi xt/L} dt \right] e^{ij\pi x/L}$$

Faisons alors les changements :

$$\xi_j = j\pi/L \quad \text{et} \quad \Delta\xi = \pi/L$$

et définissons

$$\mathcal{F}_t(\xi) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

Alors

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_t(\xi) e^{i\xi_j x} \Delta\xi.$$

Pour  $L$  assez large, cette somme peut être considérer comme une somme de Riemann. Plus précisément lorsque  $L \rightarrow \infty$  alors

$$\mathcal{F}_L(\xi) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt.$$

D'où l'identité :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right] e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \right] e^{i\xi x} d\xi \end{aligned}$$

Il devient ainsi naturel de définir la Transformation de Fourier de  $f$  par

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

La formule d'inversion de Fourier s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

### 4.3 Transformation de Fourier Discrète (TFD)

Les séries et les transformations de Fourier sont des outils importants dans l'analyse de plusieurs problèmes réels. Comme leurs implémentations informatiques nécessitent une discrétisation de l'intervalle d'étude, qui est due principalement à la présence de l'intégrale dans leurs formules, l'introduction de la Transformation de Fourier Discrète (TFD) devient ainsi indispensable.

Soit  $f$  une fonction réelle périodique de période  $[0, 2\pi]$ , ces coefficients de Fourier s'expriment sous la forme

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{ikx} dx, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nous allons approcher l'intégration par la formule du trapèze. Pour cela, soit  $n \in \mathbb{N}$  et décomposons l'intervalle  $[0, 2\pi]$  en  $n$  sous-intervalles telles que

$$x_i = jh, \quad 0 \leq j \leq n \quad h = \frac{2\pi}{n}.$$

Supposons que

$$f(0) = f(2\pi).$$

On obtient alors la formule d'approximations des coefficients suivante

$$c_k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) e^{-ikx_j}.$$

Comme  $n$  valeurs  $f\{(x_j)\}_{j=0}^{j=n-1}$  de la fonction  $f$  sont utilisées pour obtenir approximativement les coefficients de Fourier, il devient naturel d'essayer d'utiliser  $n$  coefficients pour récupérer les  $n$  valeurs de  $f$ .

**Définition 4.3.1** Soit  $n$  un nombre entier positif et soit  $\{y_j\}_{j=0}^{j=n-1}$  une suite de nombres complexes. Alors sa Transformation de Fourier discrète (TFD) est la suite de nombres complexes  $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{k=n-1}$  définie par la formule

$$\hat{y}_k = \sum_{j=0}^{n-1} \omega_n^{-kj} y_j, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

avec

$$\omega_n = e^{2\pi i/n}.$$

Le nombre  $n$  est dit l'ordre de la Transformation de Fourier Discrète.

Pour exprimer la Transformation de Fourier Discrète sous une forme matricielle, on introduit les vecteurs colonnes suivants :

$$\mathbf{Y} = (y_0, \dots, y_{n-1})^T, \quad \hat{\mathbf{Y}} = (\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_{n-1})^T$$

On obtient la matrice carrée d'ordre  $n^2$  suivante :

$$F_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Alors, la transformation de Fourier Discrète s'écrit comme :

$$\hat{\mathbf{Y}} = \overline{F_n} \mathbf{Y},$$

où  $\overline{F}_n$  exprime la matrice conjuguée de  $F_n$ .

On obtient la matrice carrée d'ordre  $n^2$ , dite de **Vondermonde**, suivante :

$$W_n = \overline{F}_n.$$

Ceci nous permettra de déterminer la suite originelle  $\{y_j\}_{j=0}^{j=n-1}$  de la suite  $\{\hat{y}_k\}_{k=0}^{k=n-1}$  comme indiqué ci-dessous

**Théorème 4.3.2** *La matrice de la Transformation Discrète de Fourier inverse (ITFD) s'écrit*

$$(\overline{F}_n)^{-1} = \frac{1}{n} F_n.$$

Par conséquent, la Transformation de Fourier Discrète Inverse

$$\mathbf{Y} = (\overline{F}_n)^{-1} \hat{\mathbf{Y}}$$

s'écrit

$$y_j = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{jk} \hat{y}_k, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

# Chapitre 5

## Applications à la théorie du signal

### 5.1 Définition et exemples

La théorie du signal consiste en l'étude des signaux et les systèmes qui les transmettent. Certaines observations de la vie de tous les jours dépendent du temps, à savoir,

- Intensité d'un courant électrique.
- Différence de potentiel entre deux points d'un circuit
- Un son
- Niveau de gris des points d'une image.

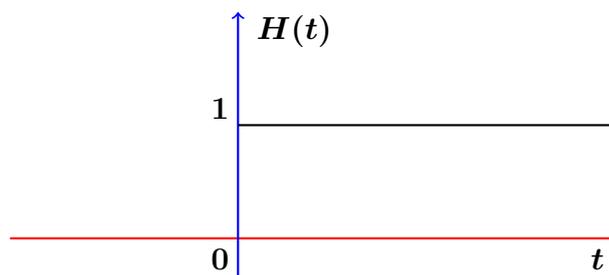
La variable peut-être continue, on dit alors qu'on a un **signal analogique**  $x = x(t)$ .

Si la variable est discrète, on dit alors qu'on a un **signal discret**  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ . le signal discret, est le plus souvent, le résultat d'une **discrétisation** où **échantillonnage** d'un signal analogique.

## 5.2 Signaux élémentaires

- **Signal Echelon unité de Heaviside :** Ce signal modélise l'établissement instantané d'un régime constant. Noté  $H(t)$ , ce signal est définie par

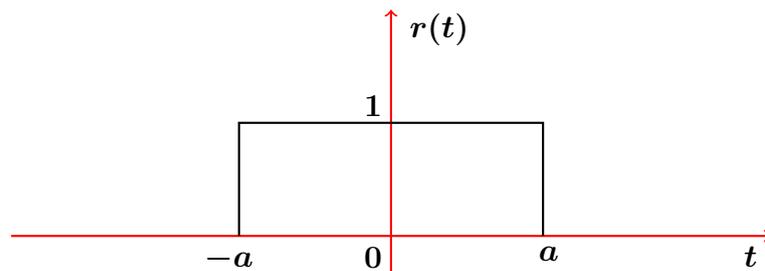
$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$



Signal Echelon unité de Heaviside

- **Signal créneau centré :** Ce signal noté  $r(t)$  est défini, pour  $a > 0$  donné, par

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq a \\ 0 & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$



Signal créneau centré

### 5.3 Système de Transmission

**Définition 5.3.1** On appelle **système** ou plus précisément **système de transmission** toute entité ou appareil, où l'on peut distinguer des signaux d'entrée et des signaux de sortie qui ne sont pas nécessairement de même nature

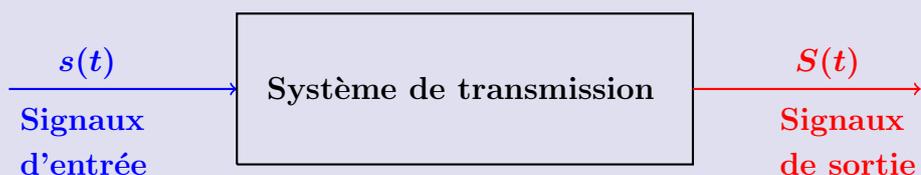


Schéma d'un système

Les exemples de système sont en abondance dans la vie courante, on cite, entre autres, les circuits électriques, les amplificateurs et les téléphones. On ne s'intéresse pas nécessairement aux composantes du système, mais seulement à la façon dont il transforme un signal d'entrée en signal de sortie. L'intérieur du système sera modélisé par un opérateur, noté  $A$ , de la façon suivante :

$$S(t) = As(t)$$

### 5.4 Applications de la TFD

L'utilisation des techniques numériques pour effectuer un calcul de la transformée de Fourier suppose que le nombre de données à traiter soit fini et que le nombre de fréquences pour lesquelles on calcule la transformée soit aussi fini

:

Pour conserver la même quantité d'informations, on calculera autant de données dans le domaine des fréquences qu'il y a d'échantillons du signal dans le domaine temporel. C'est l'objectif de la transformée de Fourier discrète.

L'analyse de Fourier est un moyen de décomposer un signal en une somme de signaux élémentaires qui ont la propriété d'être faciles à mettre en évidence et à observer. Ces signaux élémentaires sont périodiques et complexes, on les représentent sous la forme

$$s_e(t) = e^{j2\pi \frac{t}{T}} = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + j \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

la quantité  $f = \frac{1}{T}$  est dite **fréquence** du signal élémentaire.

Soit  $s(t)$  un signal périodique de **période  $T$**  c'est-à-dire satisfaisant la relation :

$$s(t + T) = s(t).$$

Sous certaines conditions, ce signal est développable en série de Fourier sous la forme :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n t / T}$$

L'indice  $n$  est entier et les  $C_n$  sont appelés les **coefficients de Fourier**, ils sont définis par

$$C_n = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-j2\pi n t / T} dt.$$

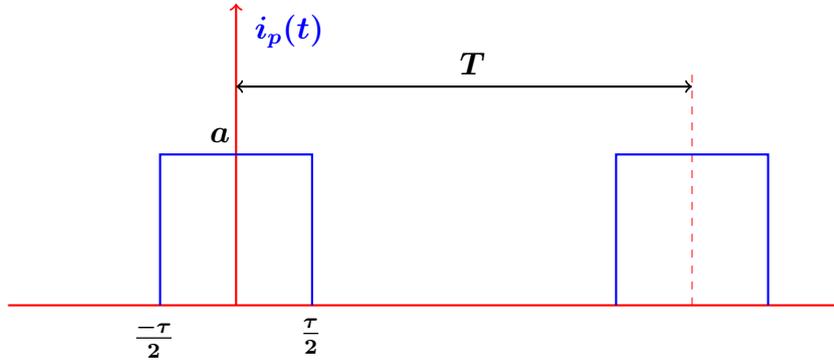
**Remarque :** Les coefficients de Fourier minimisent l'écart quadratique entre le signal  $s(t)$  et le développement en série de Fourier de  $s(t)$ . ■

☞ **Exemple 5.4.1** Développons, en séries de Fourier, le signal  $i_p(t)$  qui est constitué par une suite d'impulsions, séparées par la durée  $T$ , de largeur  $\tau$  et d'amplitude  $a$  centrée sur l'origine des temps :

$$i_p(t) = \begin{cases} a & -\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les coefficients  $C_n$  s'écrivent :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} a e^{-j2\pi n t/T} dt = \frac{a\tau}{T} \frac{\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\pi n \frac{\tau}{T}}.$$



Le développement du signal  $i_p(t)$  est donné par

$$i_p(t) = \frac{a\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(\pi n \frac{\tau}{T}\right)}{\pi n \frac{\tau}{T}} e^{j2\pi n t/T}.$$

☞ **Exemple 5.4.2** Calculons la transformation de Fourier  $I(f)$  du signal  $i(t)$ , représenté dans la figure précédente, où  $f = \frac{1}{T}$  est la fréquence :

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} i(t) e^{-j2\pi f t} dt = a \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j2\pi f t} dt.$$

D'où

$$I(f) = a\tau \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$$

Une propriété importante est exprimée par l'égalité de **Bessel-Parseval** qui traduit le fait que dans la décomposition du signal il y a conservation de la puissance :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |s(t)|^2 dt.$$

☞ **Exemple 5.4.3** Soit  $s$  un signal de période  $n$  et  $\hat{s}$  sa transformé de Fourier. Comme on vient de le voir, on peut les relier par une matrice notée  $\overline{F}_n$ . Matrices de Vandermonde-Fourier pour les dimension 2 et 4

- Pour  $n = 2$ , on trouve

$$W_2 = \overline{F}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \bar{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Pour  $n = 4$ , on trouve

$$W_4 = \overline{F}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix}.$$

☞ **Exemple 5.4.4** Soit  $s$  un signal de période 4.

$$s(0) = 2, \quad s(1) = 4, \quad s(2) = -1, \quad s(3) = 3, \quad s(4) = 2 = s(0), \quad s(5) = 4s(1).$$

Ce signal peut s'écrire sous forme matricielle

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

La transformation de Fourier de ce signal va donc être la suivante :

$$\hat{s} = W_4 s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 - i \\ -6 \\ 3 + i \end{pmatrix}.$$

**Définition 5.4.1** Soit  $s(n)$  un signal discret. La transformée de Fourier discrète  $S(f)$  de ce signal est donnée par l'expression :

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-j2\pi n f}$$

où  $f$  est une variable continue.

La Transformée de Fourier d'un signal discret est une fonction continue de  $f$ . L'existence de la Transformée de Fourier discrète de  $s(n)$  est liée à la convergence absolue de la série  $s(n)$ .

On vérifie facilement que

$$S(f + 1) = S(f)$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} S(f+1) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-j2\pi n(f+1)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)e^{-j2\pi n f} e^{-j2\pi n} \\ &= S(f). \end{aligned}$$

Ainsi

**La Transformée des signaux discrets est périodique de période 1.**

et toute l'information fréquentielle du signal est localisée dans l'intervalle de fréquence :

$$f \in \left[ \frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

☞ **Exemple 5.4.5** Soit

$$s(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } |n| \leq N/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a alors :

$$S(f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} e^{-j2\pi n f}.$$

Ainsi,  $S(f)$  est la somme de  $N+1$  termes géométriques de raison  $e^{-j2\pi f}$  et de premier terme  $e^{j2\pi N f}$  et alors, après transformation :

$$S(f) = \frac{\sin \pi f (N+1)}{\sin \pi f}.$$

# Bibliography

- [1] W. APPEL. *Mathématiques pour la physique et le physiciens*. H & Editions, 2002.
- [2] G. BAUDOIN ET J.-F. BERCHER. *Transformation de Fourier Discrète*. Ecole Supérieure d'Ingénieurs et Electrotechnique et Electronique, Nov. 2001.
- [3] M. BELLANGER. *Traitement numérique du signal, Cours et exercices corrigés, 9ème Edition*. Dunod 2012 DUNOD, 1994.
- [4] T. CLUZEAU. *Mathématiques pour l'Ingénieur*. Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Limoges (ENSIL), 2019. .
- [5] L.C. EVANS. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence 1988.
- [6] C. GASQUET ET P. WITOMSKI. *Analyse de Fourier et Applications, Filtrage, calcul numérique, ondelettes*. DUNOD, 1994.
- [7] A. HITTA. *Distributions et Applications aux Equations aux Dérivée Partielles*. Polycopié de Cours, 2017-2020. Laboratoire LMAM, Université 8 Mai 1945, Guelma.

- [8] C. ROLLAND. *ÉTEX par la pratique*. Editions O'REILLY, Paris 1999.
- [9] F. RODDIER. *Distributions et Transformation de Fourier à l'usage des physiciens et des ingénieurs*. Ediscience, 1971.

