

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique
Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
et des Sciences de la Matière
Département de Mathématiques



Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

Master en Mathématiques

Option : EDP Et Analyse numérique

Par : MERIKHI Med Lamine

Intitulé

**Une nouvelle méthode pour le traitement
numérique de l'équation intégrale de Volterra**

Dirigé par : SEGNI Sami

Devant le jury

PRESIDENT Dr. AZZOUZA N. Eddine
RAPPORTEUR Dr. SEGNI Sami
EXAMINATEUR Dr. GHIAT Mourad

M.C.B Univ-Guelma
M.C.B Univ-Guelma
M.C.B Univ-Guelma

Session septembre 2020

Remerciement

Je remercie d'abord et avant tout ALLAH qui m'a donné le courage, la volonté et la patience pour continuer mes études et pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier, particulièrement, Dr. Segni Sami qui a accepté de diriger ce travail. Sa grande disponibilité et ses encouragements ont joué un rôle important dans la réalisation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent également au président et aux membres du jury qui ont accepté de juger ce travail.

Qu'ils trouvent ici, le gage de mon infinie gratitude.

Enfin, je remercie tous ceux, qui de près ou de loin, ont contribué à l'accomplissement de ce mémoire.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons construit une nouvelle méthode pour l'étude numérique de l'équation intégral-différentielle de Volterra de la deuxième espèce avec un noyau régulier où on l'a comparée avec une ancienne méthode et on a réussi à démontrer que notre nouvelle méthode est la plus précise et efficace.

Mots clé: équation intégral-différentielle de Volterra, équation non linéaire, méthode de Nyström.

Abstract

In this thesis, we build a new numerical method to approximate the solution of Volterra's nonlinear intégro-differential equation. Its comparaison with the ancien methode show its efficiency.

Keywords: équation intégro-différentielle de Volterra, équation non linéaire, méthode de Nyström

TABLE OF CONTENTS

LIST OF FIGURES	4
LIST OF TABLES	5
ABSTRACT	6
I Introduction	7
CHAPTER 1. Définitions et rappels	9
1.1. Position du problème	9
1.2. Existence et unicité de la solution	11
1.3. Outils techniques	11
1.3.1. Théorème du point fixe de Banach	12
1.3.2. Méthode des Trapèzes	12
1.3.3. Inégalité de Grönwall (forme discret):	13
CHAPTER 2. Etude numérique d'une équation Intégré-différentielle (ancienne méthode)	14
2.1. Existence et unicité de la solution	14
2.2. Etude numérique	15
2.3. Construction du système	16
2.4. Etude de système	17
2.5. Analyse de l'erreur	19
2.6. Test numérique	23
CHAPTER 3. Etude numérique d'une équations Intégré-différentielles (nouvelle méthode)	25
3.1. Existence et unicité de la solution	25
3.2. Etude numérique	26
3.3. Construction du système	27
3.4. Etude de système	28
3.5. Etude de la convergence	30
3.6. Test numérique	35

TABLE OF CONTENTS—*Continued*

II Conclusion	36
REFERENCES	38

LIST OF FIGURES

LIST OF TABLES

ABSTRACT

This example dissertation contains the original text of the “Manual for Theses and Dissertations”, written by the Graduate College at the University of Arizona. It has been obtained via the internet at

<http://grad.admin.arizona.edu/degrecert/ThesisManual/manual.htm>
on May 10, 1996. The page was last updated November 9, 1995. No guarantee is made that this information is current, and students should check with the Graduate College before submitting a dissertation or thesis.

Part I
Introduction

LIST OF TABLES—*Continued*

Les équations intégrales, occupent a nos jours une place prépondérante dans plusieurs domaines scientifiques, comme en premier les mathématiques, la physique et d'autre comme la médecine etc...

Récemment , de nouveaux modeles physiques ont été développés sous forme d'une **équations intégral-différentielle de Volterra**. Où, la dérivée apparaît sous le signe integrale d'une manière non linéaire. (voir [1])

Ce mémoire vise à étudier numériquement un type spécifique de ces équations, qui sont : **Les équations intégral-différentielle de Volterra**. Et de faire une comparaison entre deux méthodes de résolution de ce type d'équation, "**selon la vision de Nystrom**". Où ces deux méthodes restent complètement équivalentes dans leurs construction puisqu'elles utilisent la même vision de Nystrom. Néomoin, on démontre l'efficacité d'une d'elle par rapport à l'autre.

Ces deux méthodes ont été étudiées et développées au sein de notre laboratoire de l'université 8 mai 1945 GUELMA, l'un des objectifs de ce travail est de mettre en valeur les avancées menées par ce dernier dans ce domaine de recherche.

L'ancienne méthode a été instiguée par le Pr H.Guebbai & Pr Z.Aissaoui en 2014, et la nouvelle méthode a été développée par le Dr S.Segni en 2019.

Notre mémoire est divisé en trois chapitres:

Dans le premier chapitre donant quelque outils et notions de base indispensables à l'étude de ce genre d'équation. Les résultats seront présentés sans démonstration, puisqu'ils font une partie integrante de notre formation.

Dans le deuxième chapitre, on a étudié numériquement notre équation intégral-différentielle avec l'ancienne méthode.

Dans le troisième chapitre, on a étudié numériquement notre équation intégral-différentielle avec la nouvelle méthode on a effectué une comparaison entre la nouvelle et l'ancienne méthode.

Il est à rappeler enfin que ce travail est destinée essentiellement aux étudiants en cycle de master, dans lequel ils trouveront, nous l'espérons, plus de développements et d'accessibilité à ce genre de problèmes.

Chapter 1

Définitions et rappels

Ce chapitre, est consacré à la présentation de quelques outils nécessaires qui seront très efficaces pour **le traitement numérique des équations intégro-différentielle de Volterra du deuxième espèce avec un noyau régulier.**

1.1 Position du problème

Notre objectif dans ce travail est le traitement numérique efficace de l'équation intégro différentielle de Volterra du deuxième espèce de Volterra avec un noyau régulier suivant :

Trouver $u \in C^1([a, b])$, pour tout $f \in C^1([a, b])$, telle que notre équation qui est de la forme suivante :

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds; \quad (1.1)$$

Où, $K : [a, b]^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, est une fonction noyau qui vérifie les hypothèses suivantes,

$$(H_1) \left\| \begin{array}{l} (1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C^0([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ (2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \\ \max(|K(t, s, x, y)|, |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y)|) \leq M \end{array} \right.$$

Pour mieux cerner l'équation, il nous est imposé de connaître la dérivée de u : On ne peut pas calculer K ni son integrale et en plus on aura besoin dans l'ancien concepte de cette étude numérique. On montre que les hypothèses (H_1) sont largement suffisante pour assurer son existense.

Pour cela on à besoins d'une **formule de dérivation** qui nous permet de calculer u' .

Proposition 1. (*formule de dérivation*)

Soit ψ une fonction telle que :

$$\left\| \begin{array}{l} \psi : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \forall t \in [a, b], \quad \frac{\partial \psi}{\partial x}(\cdot, t) \in C^0([a, b]) \end{array} \right.$$

On définit la fonction φ par :

$$\forall x \in [a, b] \quad \varphi(x) = \int_a^x \psi(x, t) dt;$$

Alors, $\varphi \in C^1([a, b])$,

$$\forall x \in [a, b], \quad \varphi'(x) = \psi(x, x) + \int_a^x \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) dt$$

Proof. $\forall x \in [a, b]$ □

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} \psi(x+h, t) dt - \int_a^x \psi(x, t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^x \psi(x+h, t) dt + \int_x^{x+h} \psi(x+h, t) dt - \int_a^x \psi(x, t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi(x+h, t) dt + \int_a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h, t) dt - \psi(x, t) dt}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi(x+h, t) dt + \int_a^x \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) dt \end{aligned}$$

On applique le théorème des accroissements finis pour obtenir,

$$\begin{aligned} \exists \ell &\in]0, h[; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \psi(x+h, t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \psi(x+h, t+\ell) \\ &= \psi(x, x) \end{aligned}$$

En appliquant cette propriété sur notre équation (1.1), nous obtenons

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b];$$

1.2 Existence et unicité de la solution

Supposons maintenant que K vérifie les nouvelles conditions suivantes,

$$(H_2) \left\| \begin{array}{l} 1) \quad \exists A, B, C, D \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x, y, x^*, y^* \in \mathbb{R}, \quad \forall t, s \in [a, b], \\ \quad |K(t, s, x, y) - K(t, s, x^*, y^*)| \leq A|x - x^*| + B|y - y^*|, \\ \quad \left| \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x^*, y^*) \right| \leq C|x - x^*| + D|y - y^*| \\ 2) \quad B < 1 \end{array} \right.$$

Ces conditions sont données par les auteurs [Guebbai-Aissaoui], pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de notre équation integro-différentielle. Ces conditions sont très naturelles puisqu'elles représentent la généralisation de celles exigées dans le cas intégrale classique.

Donc, toutes les équations qui ne satisfont pas les conditions (H_1) et (H_2) sont exclues.

Theorem 2.

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2) l'équation (1.1) admet une solution unique $u \in C^1([a, b])$.

Proof.

□

Voir [3]

1.3 Outils techniques

Dans cette partie, nous avons besoin de quelques outils techniques, pour assurer la convergence de la méthode numérique avec une bonne approximation de la solution exacte u de l'équation initiale (1.1)

1.3.1 Théorème du point fixe de Banach

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, et f une application de E dans lui-même. Ce théorème nous assure l'existence et l'unicité d'un point fixe x^* de f , c'est-à-dire x^* dans E tel que

$$x^* = f(x^*)$$

Theorem 3.

Si l'application f est contractante c'est-à-dire

$$\forall x, y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad \text{avec } L < 1$$

Alors f admet un point fixe $x^* \in E$, de plus, toute suite d'éléments $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset E$ vérifiant la récurrence suivante :

$$\left\| \begin{array}{l} x_0 \in E, \\ x_{n+1} = f(x_n); \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

Cette suite $\{x_n\}_{n \geq 0}$ vérifie la majoration suivante :

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{L^n}{1 - L} \|x_1 - x_0\|.$$

Donc $\{x_n\}_{n \geq 0}$ converge vers x^* .

Proof.

□

Voir[8]

1.3.2 Méthode des Trapèzes

C'est une méthode d'intégration approchée, consistant à remplacer l'intégrale par une approximation dont le principe est d'assimiler la région sous la courbe représentative d'une fonction f définie sur un segment $[a, b]$ à un trapèze et d'en calculer l'aire.

Soit

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R};$$

tel que φ est continue.

Nous cherchons à construire une approximation de la quantité :

$$\int_a^b \varphi(t) dt;$$

Par la formule suivante

$$h \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j);$$

Où,

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad t_j = a + jh, \quad 0 \leq j \leq n;$$

et

$$\begin{cases} w_0 = w_n = \frac{1}{2}; \\ w_j = 1; \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n-1$$

Theorem 4.

$$\forall \varphi \in C^o([a, b]), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \left| \int_a^b \varphi(t) dt - h \sum_{j=0}^n w_j \varphi(t_j) \right| = 0$$

Voir[7]

1.3.3 Inégalité de Grönwall (forme discret):

Nous avons besoin de rappeler un lemme très important, c'est le **lemme de Grönwall** traitant la version discrète, elle est couramment utilisée pour étudier la stabilité numérique des schémas d'intégration.

Soit $\{\zeta_n\}_{n \geq 0}$ qui verifie :

$$|\zeta_n| \leq A \sum_{i=0}^{n-1} |\zeta_i| + B_n; \quad n \in \mathbb{N}$$

Tel que;

$$A > 0; \quad |B_n| \leq B$$

Alors;

$$|\zeta_n| \leq (1 + A)^{n-1} (B + A |\zeta_0|); \quad n \geq 1$$

Proof. Avec le raisonnement par récurrence, Voir[2]

□

Chapter 2

Etude numérique d'une équation Intégré-différentielle (ancienne méthode)

Dans ce chapitre on traite une équation intégrée-différentielle de Volterra du deuxième espèce avec un noyau régulier dans laquelle la dérivée de la solution apparaît sous le signe intégral de la façon non linéaire suivante :

$$\forall t \in [a, b], \quad u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds; \quad (1.1)$$

Et sa dérivée est donnée par :

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b]; \quad (1.2)$$

Où, $f \in C^1([a, b])$ et u la fonction recherchée dans le même espace, tandis que K est une fonction qui vérifie les hypothèses (H_1) et (H_2) citée dans le chapitre précédent c.-à-d. le noyau K est régulier et lipschisien.

On présente dans ce chapitre une étude pratiquement complète de cette équation sur le plan numérique, en se basant sur la méthode d'approximation numérique selon la vision Nyström.

Sans oublier les hypothèses (H_1) et (H_2) mises par les auteurs[3] de cette méthode dite ancienne et qui sont insuffisantes sauf si on ajouta une nouvelle hypothèse ($A < 1$)

2.1 Existence et unicité de la solution

Dans cette section nous rassemblerons toutes les hypothèses (H_1) et (H_2) dans (H_3) , Voir[3]■

$$(H_3) \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ 2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \\ \quad \max(|K(t, s, x, y)|, |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y)|) \leq M \\ 3) \quad \exists A, B, C, D \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x, y, x^*, y^* \in \mathbb{R}, \quad \forall t, s \in [a, b], \\ \quad |K(t, r, x, y) - K(t, r, x^*, y^*)| \leq A|x - x^*| + B|y - y^*|, \\ \quad |\frac{\partial K}{\partial t}(t, r, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, r, x^*, y^*)| \leq C|x - x^*| + D|y - y^*|, \\ 4) \quad B < 1 \end{array} \right.$$

2.2 Etude numérique

Ici on va appliquer une méthode d'approximation numérique basée sur la vision Nyström sur l'équation suivante :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b]; \quad (1.1)$$

Où, $f \in C^1[a, b]$ et u la fonction a chercher dans le même espace.

Dautre part, on applique la propriété de dérivation sur u , donnée précédemment pour obtenir :

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds, \quad \forall t \in [a, b]; \quad (1.2)$$

En appliquant la méthode de Nyström suivante :

$\forall t \in [a, b]$

$$\int_a^b \varphi(t) dt \approx h \sum_{i=0}^n p_i \varphi(t_i); \quad 0 \leq i \leq n$$

Où les $\{p_i\}_{i=0}^n$, sont les poids tel que $\max_{0 \leq i \leq n} |p_i| \leq P$, sur (1.1) et (1.2)

Avant tout, il faut qu'on passe d'un espace continu à un espace discret, cette étape nous permet de calculer la solution approchée de la solution exacte car la subdivision de l'intervale nous permet de calculer les trapèzes, en utilisant la machine et le programmer sous MATLAB.

Cette étape est impossible sans discretisation de l'intervalle $[a; b]$, sans elle la machine entre dans un calcul infini.

Pour éviter cette lacune, on doit après la discretisation fixée la borne supérieure de l'intervalle c'est-à-dire $t = t_i$, pour $0 \leq i \leq n$ selon la subdivision de $[a; b]$, définie par

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad t_i = a + ih, \quad a = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_n = b$$

On utilise l'approche suivante

$$0 \leq i \leq n, \begin{cases} U_i \simeq u(t_i) \\ W_i \simeq w(t_i) \end{cases}$$

pour construire le système discret correspondant.

2.3 Construction du système

Le système devient $\forall t_i \in]a, b]$ et $1 \leq i \leq n$

$$\begin{cases} u(t_i) = f(t_i) + \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s), u'(s))ds, \\ u'(t_i) = f'(t_i) + K(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i)) + \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s))ds, \end{cases}$$

Maintenant on fait l'approximation de l'integrale

$$\begin{cases} u(t_i) \simeq f(t_i) + h \sum_{j=0}^{j=i} p_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\ u'(t_i) \simeq f'(t_i) + K(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i)) + h \sum_{j=0}^{j=i} p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)), \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} U_i = f(t_i) + h \sum_{j=0}^{j=i} p_j K(t_i, t_j, U_j, W_j) \\ W_i = f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, W_i) + h \sum_{j=0}^{j=i} p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j), \end{cases} \quad (1)$$

Dans le but de programmer le problème qui est une éssensialité primordiale dans l'analyse numérique, il faut distinguer entre les valeurs exactes $u(t_i)$, $u'(t_i)$ et leurs valeurs approcher U_i, W_i respectivement.

Car la machine ne peut pas traiter une relation binaire de la forme \simeq .

Par contre lorsque $i = 0$, ce qui veut dire $t_0 = a$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} u(t_0) = f(t_0) + \int_a^{t_0} K(t_0, s, u(s), u'(s))ds, \\ u'(t_0) = f'(t_0) + K(t_0, t_0, u(t_0), u'(t_0)) + \int_a^{t_0} \frac{\partial K}{\partial t}(t_0, s, u(s), u'(s))ds, \end{cases} \\ & = \begin{cases} u(t_0) = f(a) \\ u'(t_0) = f'(a) + K(a, a, u(a), u'(a)), \end{cases} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{cases} U_0 = f(a) \\ W_0 = f'(a) + K(a, a, f(a), W_0), \end{cases} \quad (2)$$

De (1) et (2) on obtient le système suivant,

$$(S) \begin{cases} U_0 = f(a) & (2.4) \\ W_0 = f'(a) + K(a, a, f(a), W_0) & (2.5) \\ U_i = f(t_i) + h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, U_j, W_j), \quad 1 \leq i \leq n & (2.6) \\ W_i = f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, W_i) + h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j), \quad 1 \leq i \leq n & (2.7) \end{cases}$$

2.4 Etude de système

Dans ce chapitre il faut rajouter une nouvelle hypothèse pour assurer la convergence du système

$$H(4) \|A < 1$$

Theorem 5.

Pour h suffisamment petit, le système (S) de (2.4) au (2.7), admet une solution unique.

Proof.

□

On va munir l'espace \mathbb{R}^2 , de la norme $\|\cdot\|_1$, suivante :

$$\forall \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \right\|_1 = |X| + |Y|;$$

On définit la suite $\{\Psi_i\}_{i \geq 0}$ telle que,
pour $i = 0$

$$\Psi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(a) \\ f'(a) + K(a, a, f(a), W_0) \end{pmatrix}$$

$$\left\| \Psi_0 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_0 \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \Psi_0 \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \right\|_1 = |\alpha_0| + |\beta_0|;$$

Où,

$$\begin{aligned} |\alpha_0| &= 0 \\ |\beta_0| &\leq A |f(a) - f(a)| + B |Y - Y'| \\ &\leq B |Y - Y'| \quad B < 1; \end{aligned}$$

Donc, on conclut que Ψ_0 est contractante, alors U_0, W_0 existe.

On doit reconnaître que la preuve de l'existence de ces deux termes U_0, W_0 peut paraître inessensée. Mais, il faut comprendre que W_0 sera approché par une méthode de point fixe.

Pour $i \geq 1$,

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_i) + h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, U_j, W_j), \\ f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, W_i) + h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j) \end{pmatrix}$$

$$\Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t_i) + h p_i K(t_i, t_i, X, Y) + h \sum_{j=0}^{i-1} p_j K(t_i, t_j, U_j, W_j) \\ f'(t_i) + K(t_i, t_i, X, Y) + h p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, X, Y) + h \sum_{j=0}^{i-1} p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j), \end{pmatrix} \blacksquare$$

Alors,

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 = \left\| \Psi_i \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{pmatrix} \right\|_1 = |\alpha_i| + |\beta_i|$$

Tel que

$$\begin{aligned} \alpha_i &= h p_i (K(t_i, t_i, X, Y) - K(t_i, t_i, X', Y')), \\ \beta_i &= (K(t_i, t_i, X, Y) - K(t_i, t_i, X', Y')) + h p_i \left(\frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, X, Y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_i, X', Y') \right) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &\leq hP(A|X - X'| + B|Y - Y'|); \\ |\beta_i| &\leq (A + hPC)|X - X'| + (B + hPD)|Y - Y'|; \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \Psi_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \Psi_i \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1 \leq \max(hPA, hPB, (A + hPC), (B + hPD)) \left\| \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} \right\|_1; \blacksquare$$

Et tant que $A < 1$, par hypothèse et h suffisamment petit alors pratiquement le théorème de Banach est applicable, et on obtient le résultat souhaitée.

2.5 Analyse de l'erreur

Nous allons démontrer que la méthode numérique construite précédemment, converge vers la solution exacte de l'équation. Pour cela, on va définir une erreur adéquate par :

$$0 \leq i \leq n, \quad |\varepsilon_i| = |U_i - u(t_i)| + |W_i - u'(t_i)|;$$

La méthode sera convergente si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0$$

L'erreur de consistance de notre équation est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta_i(h, t_i) = & \left| \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right| \\ & + \left| \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds - h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right|; \end{aligned}$$

Theorem 6.

Si l'approximation est bien construite alors l'erreur de consistance sera logique pour l'équation (1.1) et (1.2) et :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| \right) = 0$$

Proof.

□

Pour $i = 0$

$$|\varepsilon_0| = |U_0 - u(t_0)| + |W_0 - u'(t_0)|;$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_0| &= \left| f(a) - f(t_0) + \int_a^a K(t_0, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| f'(a) + K(a, a, f(a), W_0) - f'(t_0) + K(t_0, t_0, u(t_0), u'(t_0)) + \int_a^a \frac{\partial K}{\partial t}(t_0, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
|\varepsilon_0| &= |f(a) - f(a)| + |K(a, a, f(a), W_0) - K(a, a, f(a), u'(a))|; \\
|\varepsilon_0| &\leq B |W_0 - u'(t_0)|; \\
|\varepsilon_0| &= 0
\end{aligned}$$

Pour $i \geq 1$

$$|\varepsilon_i| = |U_i - u(t_i)| + |W_i - u'(t_i)|;$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i| &= \left| f(t_i) + h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, U_j, W_j) - f(t_i) - \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| f'(t_i) + K(t_i, t_i, U_i, W_i) + h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j) \right. \\
&\quad \left. - f'(t_i) - K(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i)) - \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i| &= \left| h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, U_j, W_j) - h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right. \\
&\quad \left. + h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) - \int_a^{t_i} K(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
&\quad + \left| K(t_i, t_i, U_i, W_i) + h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j) \right. \\
&\quad \quad - h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\
&\quad \quad + h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \\
&\quad \quad \left. - K(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i)) - \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i| \leq & \left| h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_i, U_i, W_i) - h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right| \\
& + \left| h \sum_{j=0}^i p_j K(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) - \int_a^{t_i} K(t_n, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
& + \left| h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) - \int_a^{t_i} \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, s, u(s), u'(s)) ds \right| \\
& + |K(t_i, t_i, U_i, W_i) - K(t_i, t_i, u(t_i), u'(t_i))| \\
& + \left| h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, U_j, W_j) - h \sum_{j=0}^i p_j \frac{\partial K}{\partial t}(t_i, t_j, u(t_j), u'(t_j)) \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i| \leq & hPA \sum_{j=0}^i |U_j - u(t_j)| + hPB \sum_{j=0}^i |W_j - u'(t_j)| + \delta_i(h, t_i) \\
& + A |U_i - u(t_i)| + B |W_i - u'(t_i)| \\
& + hPC \sum_{j=0}^i |U_j - u(t_j)| + hPD \sum_{j=0}^i |W_j - u'(t_j)|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varepsilon_i| \leq & hPA |U_i - u(t_i)| + hPA \sum_{j=0}^{i-1} |U_j - u(t_j)| \\
& + hPB |W_i - u'(t_i)| + hPB \sum_{j=0}^{i-1} |W_j - u'(t_j)| \\
& + A |U_i - u(t_i)| + B |W_i - u'(t_i)| \\
& + hPC |U_i - u(t_i)| + hPC \sum_{j=0}^{i-1} |U_j - u(t_j)| \\
& + hPD |W_i - u'(t_i)| + hPD \sum_{j=0}^{i-1} |W_j - u'(t_j)| \\
& + \delta_i(h, t_i);
\end{aligned}$$

$$|\varepsilon_i| \leq (A + AhP + ChP) |U_i - u(t_i)| + (B + BhP + DhP) |W_i - u'(t_i)| \\ + (A + C) hP \sum_{j=0}^{i-1} |U_j - u(t_j)| + (B + D) hP \sum_{j=0}^{i-1} |W_j - u'(t_j)| + \delta_i(h, t_i);$$

$$|\varepsilon_i| \leq \max((A + AhP + ChP); (B + BhP + DhP)) (|U_i - u(t_i)| + |W_i - u'(t_i)|) \\ + \max hP ((A + C); (B + D)) \sum_{j=0}^{i-1} (|U_j - u(t_j)| + |W_j - u'(t_j)|) + \delta_i(h, t_i);$$

$$|\varepsilon_i| \leq \max((A + AhP + ChP); (B + BhP + DhP)) |\varepsilon_i| \\ + \max hP ((A + C); (B + D)) \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \delta_i(h, t_i);$$

$$|\varepsilon_i| - \max((A + AhP + ChP); (B + BhP + DhP)) |\varepsilon_i| \\ \leq \max hP ((A + C); (B + D)) \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \delta_i(h, t_i);$$

$$(1 - \max((A + AhP + ChP); (B + BhP + DhP))) |\varepsilon_i| \\ \leq \max hP ((A + C); (B + D)) \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \delta_i(h, t_i);$$

On pose

$$\sigma = (1 - \max((A + AhP + ChP); (B + BhP + DhP))) \succ 0$$

Alors

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{hP \max((A + C); (B + D))}{\sigma} \sum_{j=0}^{i-1} |\varepsilon_j| + \frac{\delta_i(h, t_i)}{\sigma};$$

D'après le lemme de Gronwell pour h suffisamment petit, en appliquant ce lemme de majoration, on obtient :

$$|\varepsilon_i| \leq \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{hP \max(A+C; B+D)}{\sigma} \right)^{i-1} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i(h, t_i)| + Ph \max(A+C; B+D) |\varepsilon_0| \right)$$

Et on sait que

$$\left(1 + \frac{h\rho \max(A+C; B+D)}{\sigma} \right)^{i-1} \leq \left(1 + \frac{(b-a)\rho \max(A+C; B+D)}{N\sigma} \right)^i$$

Et tant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{h\rho \max(A+C; B+D)}{N\sigma} \right)^n < \infty;$$

Alors, il existe une constante positive λ ,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \frac{h\rho \max(A+C; B+D)}{N\sigma} \right)^{n-1} \leq \lambda;$$

Où le résultat souhaitable est obtenue.

On a bien montrer que l'hypothèse $H_4(A < 1)$, assure parfaitement la convergence de cette méthode, mais elle est plus exigeante, pour cela on va affronter dans le chapitre suivant $A > 1$, bien sur après les tests numériques de cette méthode.

2.6 Test numérique

Soit l'équation intégro-différentielle de voltérra, définit comme suit :

$$u(t) = \int_0^t \cos \left(\alpha u(s) + \frac{1}{2} u'(s) \right) ds + f(t)$$

Si on prend,

$$f(t) = t - \frac{1}{\alpha} \sin \left(\alpha t + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{\alpha} \sin \left(\frac{1}{2} \right)$$

On obtient,

$$u(t) = t$$

On a,

$$A = C = \alpha \text{ et } B = D = \frac{1}{2}$$

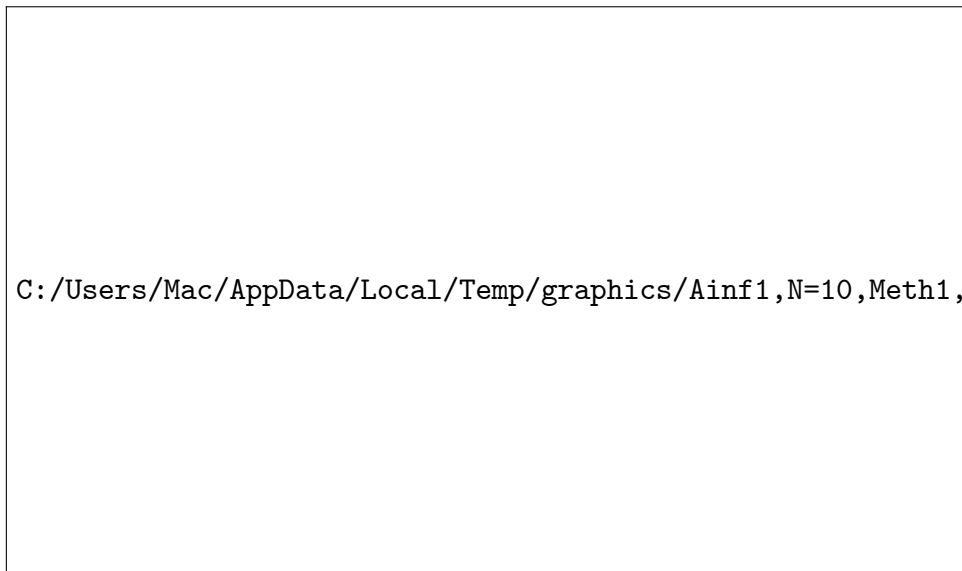
En premier lieu on prend

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Ce qui donne

$$(H_4) : A < 1.$$

$n = 10$



$n = 20$

Maintenant si on prend $\alpha = 5$; (H_4) ne sera pas vérifié

Situation A<1

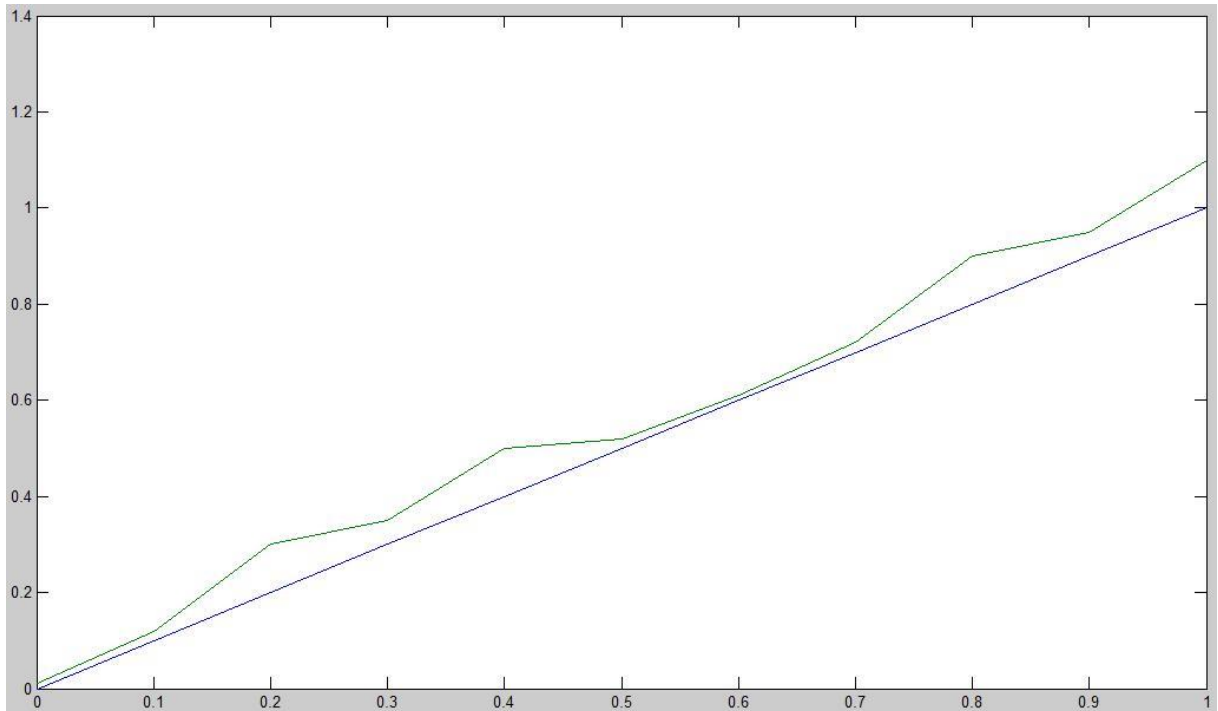


Figure 1 : Méthode 1-N=10-Exacte Vs Approchée

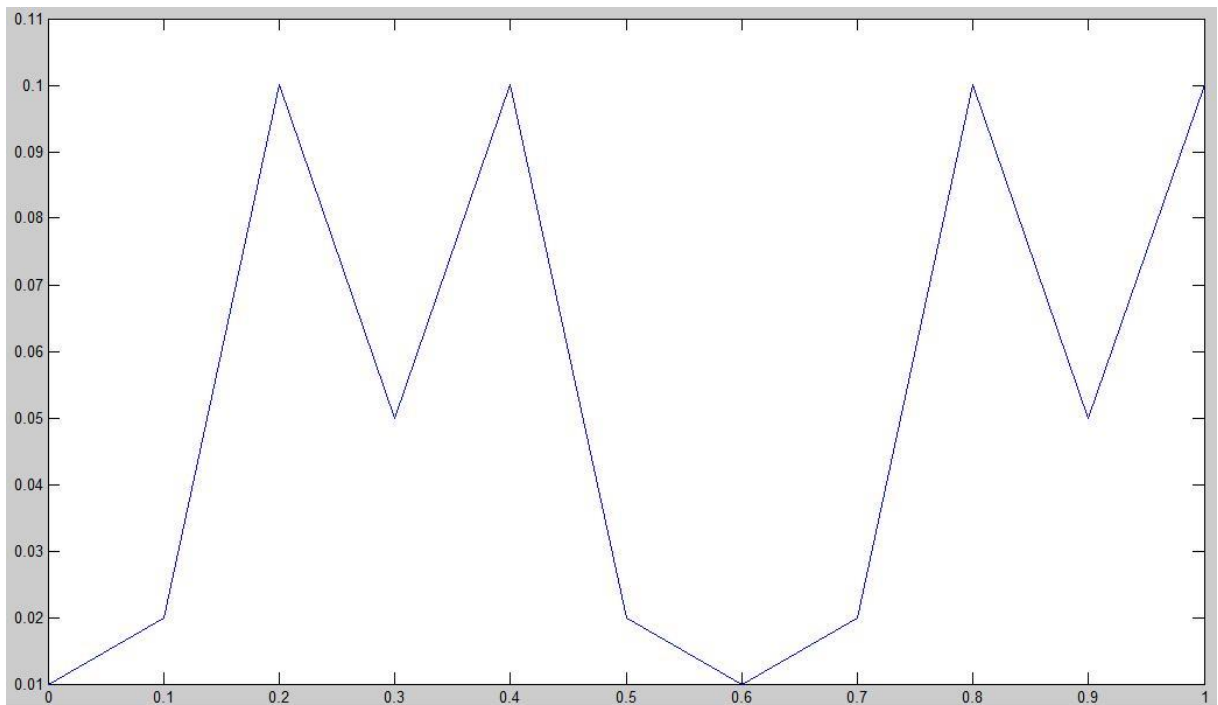


Figure 2 : Méthode 1-N=10-Erreur

Situation A<1

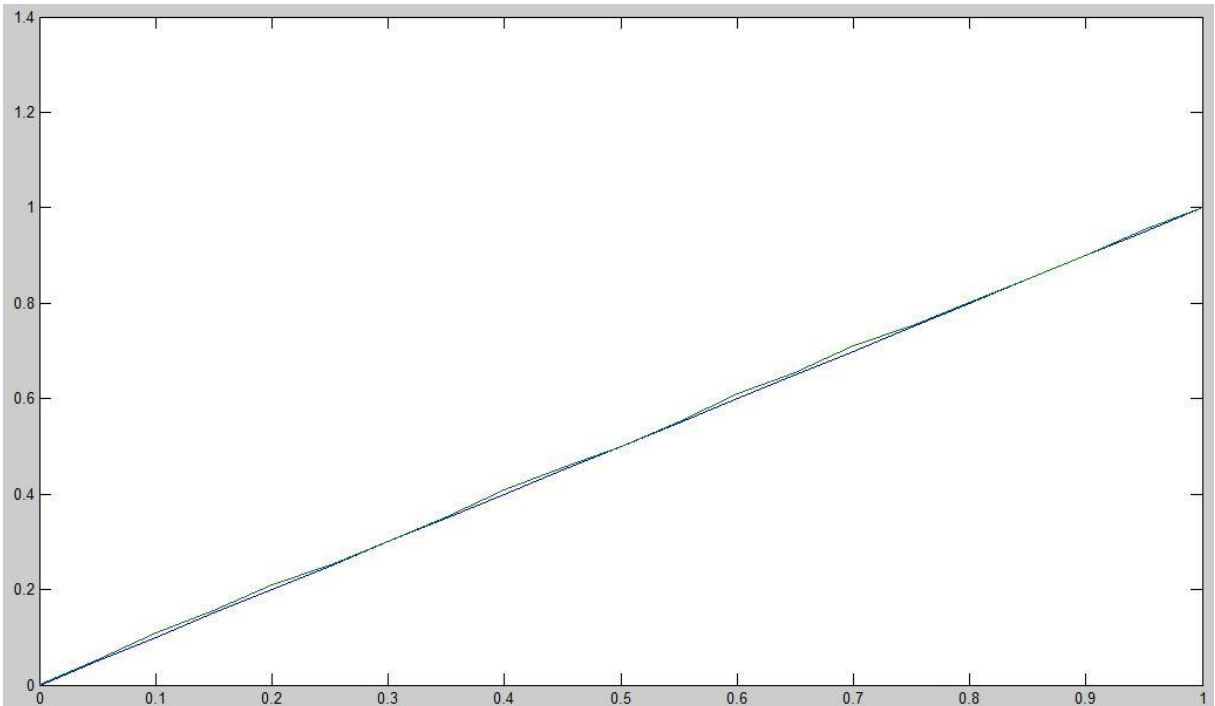


Figure 3 : Méthode 1-N=20-Exacte Vs Approchée

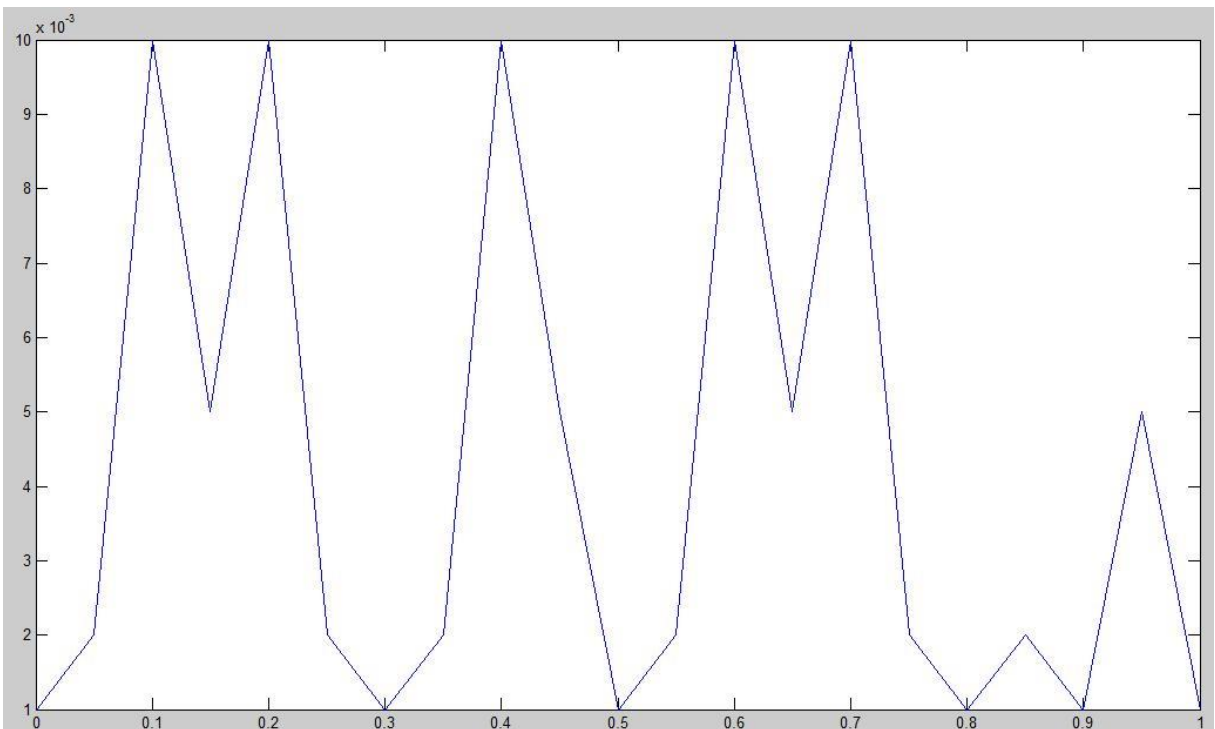


Figure 4 : Méthode 1-N=20-Erreur

Situation A>1

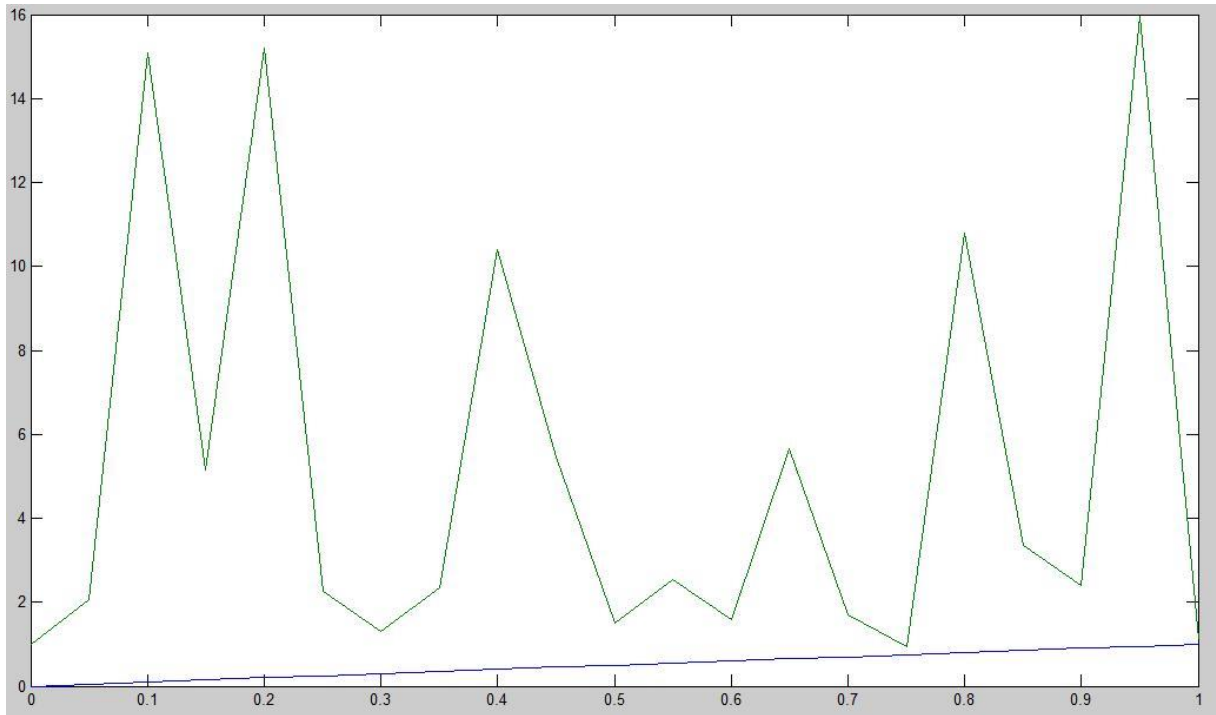


Figure 5 : Méthode 1-N=20-Exacte Vs Approchée

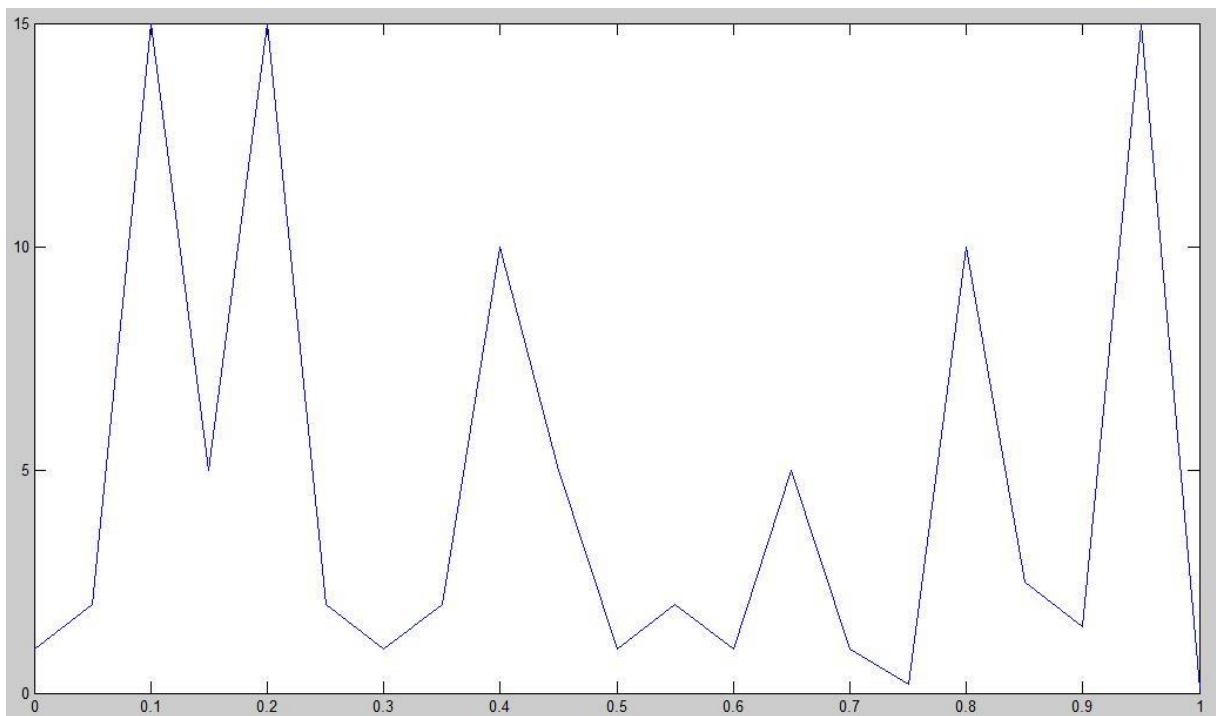


Figure 6 : Méthode 1-N=20-Erreur

Chapter 3

Etude numérique d'une équations Intégré-différentielles (nouvelle méthode)

Dans ce chapitre qui est le même que le précédent sauf qu'ici en va appliquer la méthode de Nystrome en changeant la variable u' du noyau K de l'équation integro-différentielle non linéaire de voltérra de seconde type avec un noyau régulier voir [4]

soit $K \in ([a; b]^2 \times \mathbb{R}^2)$ la fonction noyau, $f \in C^1 [a; b]$ et u la fonction recherchée dans le même espace $C^1 [a; b]$ telle que :

$$u(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, u(s), u'(s)) ds \quad \forall t \in [a; b] \quad (1-1)$$

On appliquant la propriété de dérivation on trouve

$$u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s)) ds \quad \forall t \in [a; b] \quad (1-2)$$

3.1 Existance et unicité de la solution

On fait un rappelles des conditions données par les auteurs [3].

Pour assurer une unique solution, il ont donné une hypothèse (H_3) qui est :

$$(H_3) \left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \frac{\partial K}{\partial t} \in C([a, b]^2 \times \mathbb{R}^2), \\ 2) \quad \exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t, s \in [a, b], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \\ \quad \max(|K(t, s, x, y)|, |\frac{\partial K}{\partial t}(t, s, x, y)|) \leq M \\ 3) \quad \exists A, B, C, D \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y, x^*, y^* \in \mathbb{R}, \quad \forall t, r \in [a, b], \\ \quad |K(t, r, x, y) - K(t, r, x^*, y^*)| \leq A|x - x^*| + B|y - y^*|, \\ \quad |\frac{\partial K}{\partial t}(t, r, x, y) - \frac{\partial K}{\partial t}(t, r, x^*, y^*)| \leq C|x - x^*| + D|y - y^*|, \\ 4) \quad B < 1 \end{array} \right.$$

Cette hypothèse d'après les auteurs [3] sufira pour assurée l'existence et l'unicité de la solution,(voir chapitre 2).

Dans ce chapitre on vas gardée seulement l'hypothèse (H_3).

3.2 Etude numérique

Avant tout on fait un changement de variable sur l'une des variable du noyau K

Soit $w \in C^0([a; b])$ tel que $w = u'$, et on intègre les deux coté

$$\int_a^t u'(s)ds = \int_a^t w(s)ds;$$

$$u(t) = u(a) + \int_a^t w(s)ds;$$

Pour reformuler notre équation, nous reprenons l'équation vérifiée par la dérivée.

$$\forall t \in [a, b], \quad u'(t) = f'(t) + K(t, t, u(t), u'(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, u(s), u'(s))ds;$$

Et

$$u(a) = f(a) + \int_a^a K(a, s, u(s), u'(s))ds;$$

$$= f(a);$$

On substitue cette nouvelle variable dans (1-1) et (1-2) respectivement on trouve

:

$$\begin{cases} f(a) + \int_a^t w(s)ds = f(t) + \int_a^t K(t, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds & (3-3) \\ w(t) = f'(t) + K(t, t, f(a) + \int_a^t w(s)ds, w(t)) + \int_a^t \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds & (3-4) \end{cases}$$

Il est clair que cette reformulation (3-3) et (3-2) est équivalente a (1-1) et (1-2) respectivement et facilite nettement l'introduction de notre nouvelle méthode numérique qui sera présentée dans ce chapitre.

Application de la méthode de Nystrome sur (3-4).

On commence tout d'abord avec la subdivision de l'intevale $[a; b]$, en prenant un pas $h = \frac{b-a}{N}$, de façon

$$a = t_0 < \dots < t_n < \dots < t_N = b, \quad 0 \leq n \leq N,$$

Tel que $t_n = a + nh$,

Et les $\{p_n\}_{n=0}^N$, sont les poids qui en un maximum $\max_{0 \leq n \leq N} |p_n| \leq P$.

3.3 Construction du système

On suit les étapes suivantes :

Premierement on fixe $t = t_n$ et on donne l'approche suivante

$$w(t_n) \simeq W_n$$

pour $n = 0$, alors $a = t_0$

$$\begin{aligned} w(t_0) &= f'(t_0) + K(t_0, t_0, f(a) + \int_a^a w(s)ds, w(t_0)) + \int_a^a \frac{\partial K}{\partial t}(t_0, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds; \\ w(t_0) &= f'(a) + K(a, a, f(a), w(a)); \end{aligned}$$

Donc son approche est

$$W_0 = f'(a) + K(a, a, f(a), W_0); \quad (1)$$

Et pour $n \geq 1$, en fixe $t = t_n$ alors (3-4) devient

$$w(t_n) = f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} w(s)ds, w(t_n)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds; \quad \blacksquare$$

Donc son approche est

$$W_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i W_i, W_n) + h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i); \quad (2) \quad \blacksquare$$

De (1) et (2) on construit une suite récursive S suivante :

$$S \left\{ \begin{array}{l} W_0 = f'(a) + K(a, a, f(a), W_0); \\ W_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i W_i, W_n) \\ \quad + h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i); \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3-5) \\ (3-6) \end{array} \quad \blacksquare$$

3.4 Etude de système

Pour h approche plus de 0, S a une solution unique.

Pour (3-5),

On définissent pour $n = 0$, $\phi_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $X \mapsto \phi_0(X)$,

Telle que

$$\phi_0(X) = f'(a) + K(a, a, f(a), X);$$

On fait l'étude de la contraction du premier termes

$\forall X, Y \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} |\phi_0(X) - \phi_0(Y)| &= |f'(a) + K(a, a, f(a), X) - f'(a) - K(a, a, f(a), Y)|; \\ &\leq A |f(a) - f(a)| + B |X - Y| \\ &\leq B |X - Y| \end{aligned}$$

D'après (H_1) on a $B < 1$, ϕ_0 est contractante et d'après le théorème du point fixe de Banach, il y a une solution unique W_0

pour (3-6),

$1 \leq n \leq N$, on définit $\phi_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $X \mapsto \phi_n(X)$, telle que :

$$\phi_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i W_i, X) + h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i);$$

$$\begin{aligned} \phi_n &= f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + h p_n X + h \sum_{i=0}^{n-1} p_i W_i, X) \\ &\quad + h p_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, f(a) + h p_n X + h \sum_{j=0}^{i-1} p_j W_j, X) \\ &\quad + h \sum_{i=0}^{n-1} p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i); \end{aligned}$$

Soit les raccourcis suivantes :

$$\begin{cases} \alpha_i^{n-1} = f(a) + h \sum_{j=0}^{i-1} p_j W_j; \\ \alpha_j^{i-1} = f(a) + h \sum_{j=0}^{i-1} p_j W_j; \\ \alpha_j^i = f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j; \\ \beta_i^{n-1} = f'(t_n) + h \sum_{i=0}^{n-1} p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, \alpha_j^i, W_i); \end{cases}$$

Donc ϕ_n devient :

$$\phi_n = f'(t_n) + K(t_n, t_n, hp_n X + \alpha_i^{n-1}, X) + hp_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hp_n X + \alpha_j^{i-1}, X) + \beta_i^{n-1};$$

On vas maintenant étudier la contraction de ϕ ,

On a

$$\begin{aligned} |\phi_n(X) - \phi_n(Y)| &= \left| K(t_n, t_n, hp_n X + \alpha_i^{n-1}, X) + hp_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hp_n X + \alpha_j^{i-1}, X) + \beta_i^{n-1} \right. \\ &\quad \left. - K(t_n, t_n, hp_n Y + \alpha_i^{n-1}, Y) - hp_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hp_n Y + \alpha_j^{i-1}, Y) - \beta_i^{n-1} \right|; \\ &\leq \left| K(t_n, t_n, hp_n X + \alpha_i^{n-1}, X) - K(t_n, t_n, hp_n Y + \alpha_i^{n-1}, Y) \right| \\ &\quad + \left| hp_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hp_n X + \alpha_j^{i-1}, X) - hp_n \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_n, hp_n Y + \alpha_j^{i-1}, Y) \right|; \\ &\leq A |hp_n (X + \alpha_j^{i-1} - Y - \alpha_j^{i-1})| + B |X - Y| \\ &\quad + C |hp_n (hp_n X + \alpha_j^{i-1} - hp_n Y - \alpha_j^{i-1})| + D |hp_n (X - Y)|; \\ &\leq AhP |X - Y| + B |X - Y| + Ch^2P^2 |X - Y| + DhP |X - Y|; \\ &\leq (AhP + B + Ch^2P^2 + DhP) |X - Y|; \end{aligned}$$

Pour h suffisamment petit, alors $AhP < 1$, $Ch^2P^2 < 1$, $DhP < 1$ et $B < 1$ par hypothèse.

c'est-à-dire, $(AhP + B + Ch^2P^2 + DhP) < 1$,

Donc on conclut que ϕ_n est contractante est d'après le point fixe de Banach W_n est solution unique.

On voit que l'application de la méthode de Nystrom sur (3-2), avec un changement de variable u' nous a donné cette quantité ($AhP < 1$), c'est une évolution remarquable à la résolution de ce type d'équations, car $\forall A \in \mathbb{R}_+^*$ et h suffisamment petit, de cette cause on a éliminé l'hypothèse (H_4) , qui exige $A < 1$, et ça nous permis de résoudre une large partie de ses équations.

3.5 Etude de la convergence

On définit les erreurs E_n et \bar{E}_n tel que

$$\begin{aligned} E_n &= |w(t_n) - W_n|; \\ \bar{E}_n &= \left| u(t_n) - f(a) - h \sum_{i=0}^n p_i W_i \right|; \end{aligned}$$

La méthode est convergente si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \{E_n; \bar{E}_n\} = 0 \right);$$

Et les erreurs de consistance sont données par :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= \left| \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t, s, f(a) + \int_a^s w(r) dr, w(s)) ds - h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j w(t_j), w(t_i)) \right|; \\ \epsilon_2 &= \left| \int_a^{t_n} w(s) ds - h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i) \right|; \end{aligned}$$

La méthode d'approximation de (3-5) et (3-6) soit convergente avec (3-4) si :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \{\epsilon_1; \epsilon_2\} = 0 \right);$$

Theorem 7.

Si la méthode d'approximation de (3-5) et (3-6) soit convergente avec (3-4) alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\max_{0 \leq n \leq N} \{E_n; \bar{E}_n\} = 0 \right);$$

Proof.

□

pour $n = 0 \implies t_0 = a$, alors

$$\begin{aligned} E_0 &= |w(t_0) - W_0|; \\ &= |f'(a) + K(a, a, f(a), w(a)) - f'(a) + K(a, a, f(a), W_0)|; \\ &= A|f(a) - f(a)| + B|w(a) - W_0|; \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_0 &= \left| u(t_0) - f(a) - h \sum_{i=0}^0 p_i W_i \right|; \\ &= |f(a) - f(a)|; \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
E_n &= |w(t_n) - W_n|; \\
&= \left| f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} w(s)ds, w(t_n)) + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds \right. \\
&\quad \left. - f'(t_n) + K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i W_i, W_n) + h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i) \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &= \left| K(t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} w(s)ds, w(t_n)) \right. \\
&\quad - K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i), w(t_n)) \\
&\quad + K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i), w(t_n)) \\
&\quad - K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i W_i, W_n) \\
&\quad + \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds \\
&\quad - h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j w(t_j), w(t_i)) \\
&\quad + h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j w(t_j), w(t_i)) \\
&\quad \left. - h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i) \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &\leq \left| K(t_n, t_n, f(a) + \int_a^{t_n} w(s)ds, w(t_n)) - K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i), w(t_n)) \right| + \\
&\quad \left| K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i), w(t_n)) - K(t_n, t_n, f(a) + h \sum_{i=0}^n p_i W_i, W_n) \right| + \\
&\quad \left| \int_a^{t_n} \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, s, f(a) + \int_a^s w(r)dr, w(s))ds - h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j w(t_j), w(t_i)) \right| \\
&\quad \left| h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j w(t_j), w(t_i)) - h \sum_{i=0}^n p_i \frac{\partial K}{\partial t}(t_n, t_i, f(a) + h \sum_{j=0}^i p_j W_j, W_i) \right|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &\leq A \left| \int_a^{t_n} w(s) ds - h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i) \right| + B |w(t_n) - w(t_n)| \\
&\quad + A \left| h \sum_{i=0}^n p_i (w(t_i) - W_i) \right| + B |w(t_n) - W_n| + \epsilon_1 \\
&\quad + Ch^2 P^2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i |w(t_j) - W_j| + DhP \sum_{i=0}^n |w(t_i) - W_i|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &\leq A\epsilon_2 + AhP \sum_{i=0}^n |w(t_i) - W_i| + B |w(t_n) - W_n| + \epsilon_1 \\
&\quad + Ch^2 P^2 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i |w(t_j) - W_j| + DhP \sum_{i=0}^n |w(t_i) - W_i|;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &\leq A\epsilon_2 + AhP \sum_{i=0}^n E_i + BE_n + \epsilon_1 + Ch^2 P^2 (b-a) \sum_{i=0}^n E_i \\
&\quad + DhP \sum_{i=0}^n E_i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &\leq A\epsilon_2 + AhPE_n + AhP \sum_{i=0}^{n-1} E_i + BE_n + \epsilon_1 + Ch^2 P^2 (b-a) E_n \\
&\quad + Ch^2 P^2 (b-a) \sum_{i=0}^{n-1} E_i + DhPE_n + DhP \sum_{i=0}^{n-1} E_i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_n &\leq A\epsilon_2 + \epsilon_1 + (AhP + B + Ch^2 P^2 (b-a) + DhP) E_n \\
&\quad + (AhP + Ch^2 P^2 (b-a) + DhP) \sum_{i=0}^{n-1} E_i;
\end{aligned}$$

$$E_n - (AhP + B + Ch^2 P^2 (b-a) + DhP) E_n \leq A\epsilon_2 + \epsilon_1$$

$$+ (AhP + Ch^2 P^2 (b-a) + DhP) \sum_{i=0}^{n-1} E_i;$$

$$(1 - (AhP + B + Ch^2 P^2 (b-a) + DhP)) E_n \leq hP (A + ChP (b-a) + D) \sum_{i=0}^{n-1} E_i + A\epsilon_2 + \epsilon_1;$$

Poson $\lambda_h = (1 - (AhP + B + Ch^2 P^2 (b-a) + DhP))$, et on a $\lambda_h > 0$

Alors

$$E_n \leq \frac{hP(A + ChP(b-a) + D)}{\lambda_h} \sum_{i=0}^{n-1} E_i + \frac{A\epsilon_2 + \epsilon_1}{\lambda_h};$$

D'après le lemme de Gronwell :

$$E_n \leq \left(1 - \frac{hP(A + ChP(b-a) + D)}{\lambda_h}\right)^{n-1} \left(\max \frac{A\epsilon_2 + \epsilon_1}{\lambda_h} + \frac{hP(A + ChP(b-a) + D)}{\lambda_h} E_0;\right) \blacksquare$$

On a

$$\left(1 - \frac{hP(A + ChP(b-a) + D)}{\lambda_h}\right)^{n-1} \leq \max \left(1 - \frac{hP(A + ChP(b-a) + D)}{\lambda_h}\right)^N; \\ < +\infty$$

Donc il existe θ tel que $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\max \left(1 - \frac{hP(A + ChP(b-a) + D)}{\lambda_h}\right)^{n-1} \leq \theta;$$

D'autre part pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \bar{E}_n &= \left| u(t_n) - f(a) - h \sum_{i=0}^n p_i W_i \right|; \\ &= \left| f(a) + \int_a^{t_n} w(s) ds - f(a) - h \sum_{i=0}^n p_i W_i \right|; \\ &= \left| \int_a^{t_n} w(s) ds - h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i) + h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i) - h \sum_{i=0}^n p_i W_i \right|; \\ &= \left| \epsilon_2 + h \sum_{i=0}^n p_i w(t_i) - h \sum_{i=0}^n p_i W_i \right|; \\ &\leq \epsilon_2 + hP \sum_{i=0}^n |w(t_i) - W_i|; \\ &\leq \epsilon_2 + hP \sum_{i=0}^n E_i; \end{aligned}$$

D'ou le résultat est obtenue

3.6 Test numérique

Example 8.

On reprend le meme exemple precedent, $A < 1$
Maintenant $A > 1$

Situation A<1

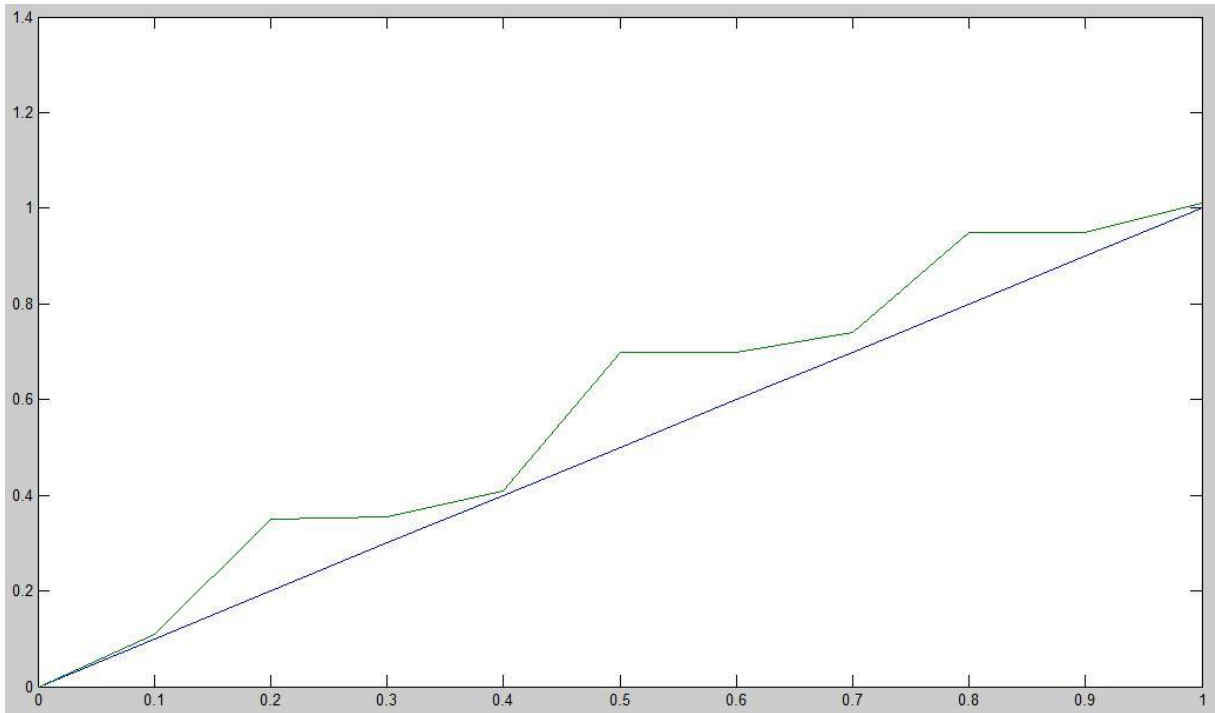


Figure 7 : Méthode 2-N=10-Exacte Vs Approchée

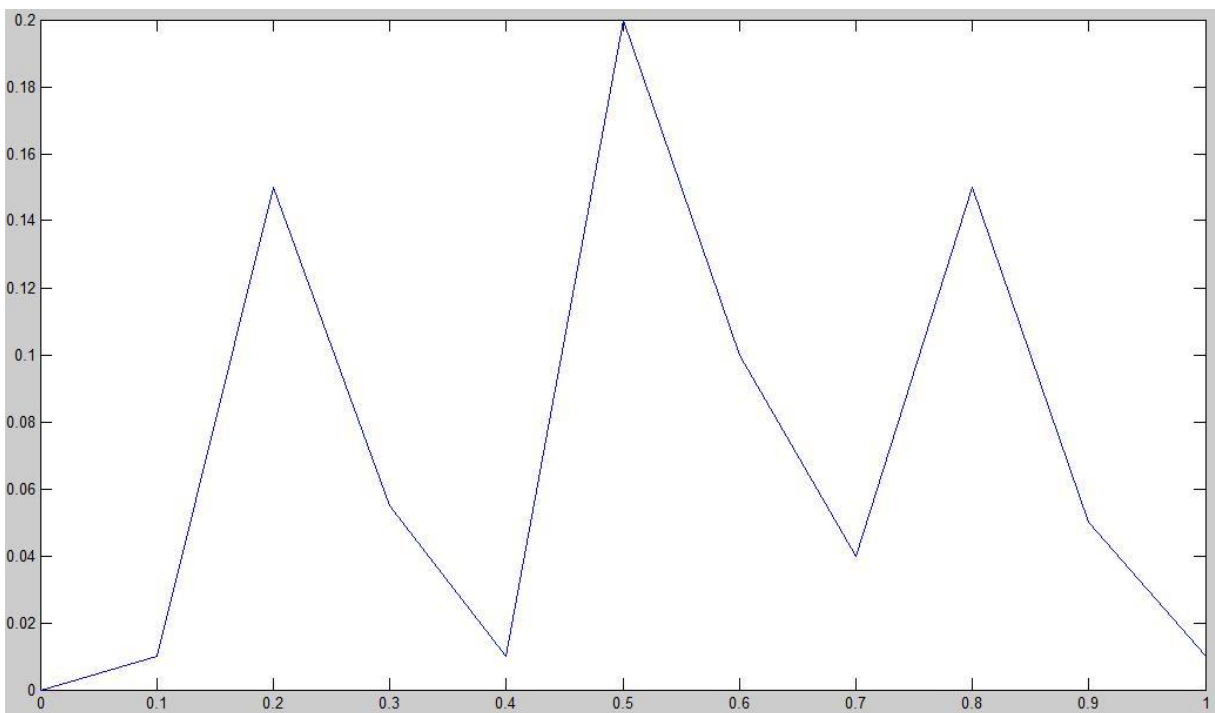


Figure 8 : Méthode 2-N=10-Erreur

Situation A>1

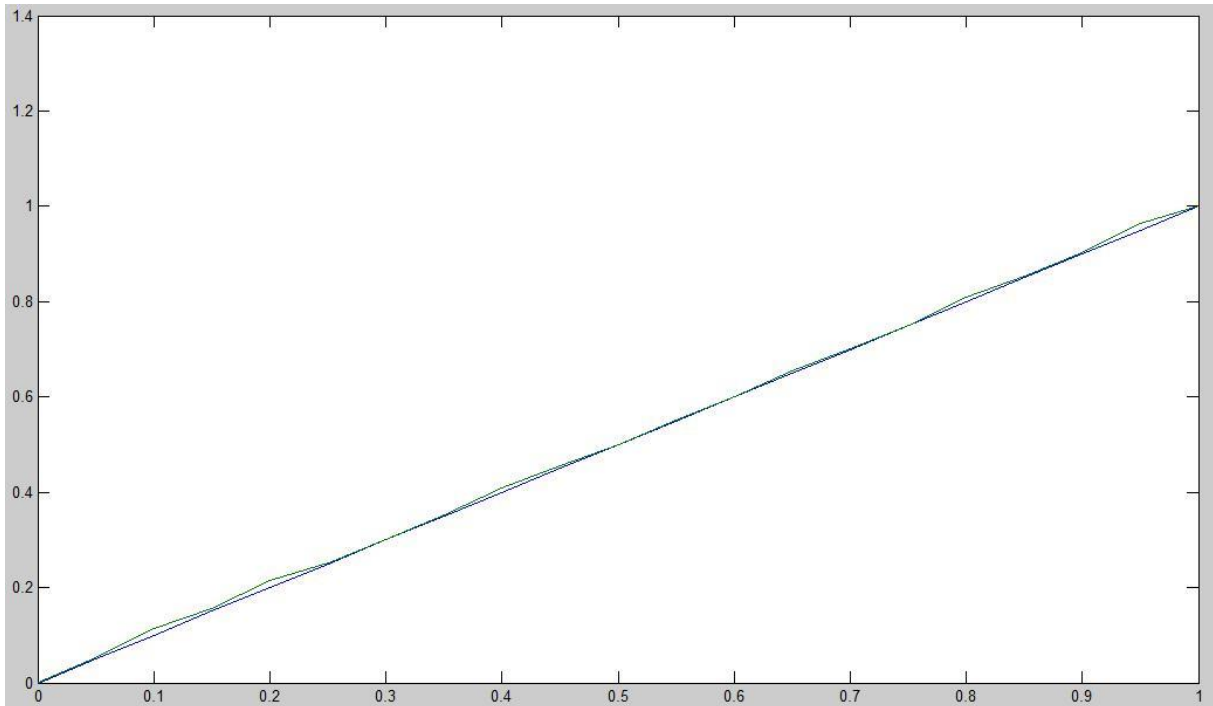


Figure 9 : Méthode 2-N=20-Exacte Vs Approchée

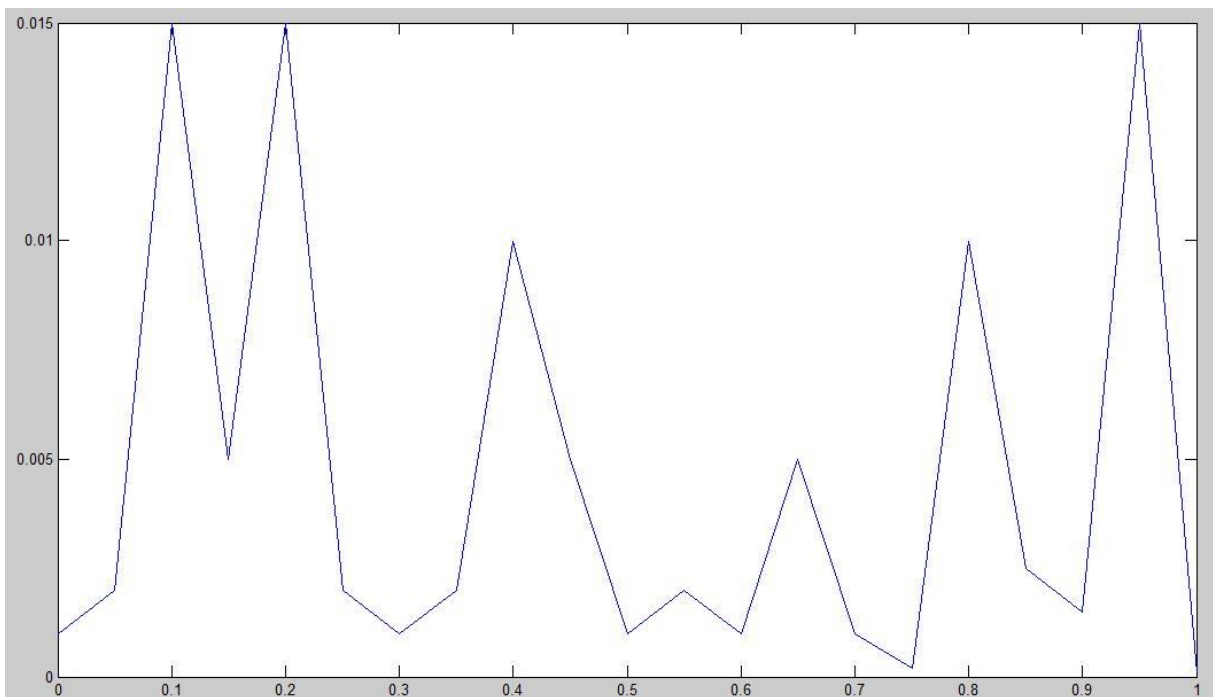


Figure 10 : Méthode 2-N=20-Erreur

Part II
Conclusion

Dans ce mémoire, on a réussi à construire une nouvelle méthode pour l'étude numérique de l'équation intégrale-différentielle du deuxième espèce de Volterra avec un noyau régulier et que les tests numériques et sa comparaison avec l'ancienne méthode ont montré son efficacité et sa compatibilité avec ce type d'équations.

REFERENCES

- [1] S. Salah et all, On the Solution of an Integro-Differential Nonlinear Volterra Equation Arising of Seismic Model, GEM - International Journal on Geomathematics, IJGE-D-18-00035.
- [2] P.Linz, Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia (1985).
- [3] H.Guebbai , M.Z. Aissaoui, I.Debbar, B.khalla, Analytical and numerical study for an integro-differential nonlinear Volterra equation. Applied Mathematics and Computation 229 367-373 (2014).
- [4] Segni, S. Ghiat, M.Guebbai, H. (2019). New approximation method for Volterra nonlinear integro-differential equation. Asian-European Journal of Mathematics, 12(01), 1950016.
- [5] K. Atkinson, W. Han, Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework. Springer- Verlag, New York, 2001.
- [6] Tokui Sato, Sur L'équation Intégral non Linéaire de Volterra. Compositio Mathematica. tome 11, 271-290 (1953).
- [7] Jean-Louis Merrien, Analyse numérique avec matlab, Sciences Sup, 6647747 ISBN 978-2-10-050863-1.
- [8] F.Boyer-Version du 13 décembre 2015 Chapitre 2 page 49.